

НІЖИНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИКОЛИ ГОГОЛЯ

Фізико-математичні записки

Збірник наукових праць

Ніжин – 2010

Збірник друкується за рішенням Вченої ради
Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя
Протокол №2 від 07.10.10 р.

Редакційна колегія:

к. фіз.-мат. н. Аніщенко В.О. (відп. ред.), к. фіз.-мат. н. Ковальчук Ю.О. (відп. секретар), д. техн. н. Казачков І.В., д. фіз.-мат. н. Мельничук О.В., д. фіз.-мат. н. Зінченко Н.М., к. пед. н. Руденко М.П., к. пед. н. Стрельнікова Н.М.

Рецензенти:

д. фіз.-мат. н., провідний науковий співробітник ІФН імені В.Є.Лашкарьова НАН України ***Стронський О.В.***;
чл.-кор. АПН України, докт. пед. н., проф.
(Інститут педагогіки АПН України) ***Бурда М.І.***

До збірника включені наукові статті викладачів, наукових співробітників та аспірантів кафедр вищої математики, прикладної математики та інформатики, фізики Ніжинського державного університету ім. Миколи Гоголя з актуальних питань вищої математики, фізики, методики викладання дисциплін фізико-математичного циклу, загальних проблем педагогіки.

Для фахівців у галузі математики, фізики, педагогіки вищої та середньої школи.

На обкладинці зображено герб фізико-математичного факультету НДУ ім. Миколи Гоголя

1

Математика

УДК 517.9

**АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ**

Віра М.Б.

Розглянемо двоточкову крайову задачу

$$\varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon); \quad (1)$$

$$Mx(0, \varepsilon) + Nx(1, \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (2)$$

в якій $x(t, \varepsilon)$ – шуканий n – вимірний вектор, $t \in [0; T]$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малий дійсний параметр, $h \in \mathbb{N}$; $A(t, \varepsilon), B(t, \varepsilon)$ – дійсні квадратні матриці n – го порядку, $d(\varepsilon), f(t, \varepsilon)$ – відповідно n – вимірні вектори-стовпці; M, N – квадратні матриці n -го порядку зі сталими елементами. Крім того, будемо передбачати, що виконуються умови:

1° матриці $A(t, \varepsilon), B(t, \varepsilon)$ і вектор $f(t, \varepsilon)$ допускають на відрізьку $[0; T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε :

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t); \quad B(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(t); \quad f(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t); \quad (3)$$

2° коефіцієнти $A_k(t), B_k(t), f_k(t)$ розвинень (3) нескінченно диференційовані на відрізьку $[0; T]$;

3° $\det B_0(t) = 0, \forall t \in [0; T]$;

4° в'язка граничних матриць

$$\alpha(t, \lambda) = A_0(t) - \lambda B_0(t) \quad (4)$$

регулярна на даному відрізьку $[0; T]$ і має сталу кронекерову структуру при всіх $t \in [0; T]$, тобто кратності всіх власних значень в'язки (4) і відповідних скінченних та нескінченних елементарних дільників є сталими на даному відрізьку.

За таких умов розглянемо питання про відшукування асимптотичного розв'язку $x(t, \varepsilon)$ поставленої крайової задачі у вигляді асимптотичних розвинень за степенями малого параметра ε .

Крайова задача типу (1), (2) вже досліджувались у роботах [1-2]. У роботі [1] пропонується спосіб асимптотичного інтегрування сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з нетеровими крайовими умовами і матрицею $B(t, \varepsilon)$ при похідній, яка вироджується з прямуванням малого параметра до нуля, залишаючись неособливою при $\varepsilon > 0$. Дана стаття є узагальненням результатів, одержаних у [2].

Розглянемо можливість побудови асимптотичного розв'язку крайової задачі (1), (2) у випадку, коли гранична в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ має простий спектр, а саме: $n-1$ простих скінченних елементарних дільників $\lambda - \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ та один – нескінченний.

Виходячи зі структури загального розв'язку лінійної системи (1), побудованого в [3], формальний розв'язок крайової задачі шукаємо у вигляді [3, с.92-94]

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) = & \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t, \varepsilon) c_i(\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau) + \\ & + v(t, \varepsilon) c_n(\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h-1} \int_0^t \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau) + \tilde{v}(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5)$$

$u_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$; $v(t, \varepsilon)$, $\tilde{v}(t, \varepsilon)$ – n -вимірні вектор-функції, $\lambda_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\xi(t, \varepsilon)$ – скалярні функції, що зображаються формальними розвиненнями:

$$u_i(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(i)}(t), \quad \lambda_i(t, \varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (6)$$

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t), \quad \xi(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi_k(t), \quad (7)$$

$$\tilde{v}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_k(t), \quad (8)$$

$$c_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k c_k^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де $c_k^{(i)}$, $k = 0, 1, \dots$, $i = \overline{1, n}$ – невідомі скалярні множники, які будуть визначатися із крайової умови.

Перший доданок у (5) – це лінійна комбінація розв'язків першої групи відповідної однорідної системи, що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$, другий доданок – розв'язок другої групи однорідної системи, який відповідає нескінченному елементарному дільнику, а третій доданок – частинний розв'язок неоднорідної системи.

Дослідимо випадок, коли:

$$\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \operatorname{Re} \xi_0(t) < 0, \quad \forall t \in [0; T]. \quad (10)$$

Тоді розв'язок крайової задачі шукатимемо у вигляді

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) = & \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t, \varepsilon) c_i(\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau) + \\ & + v(t, \varepsilon) c_n(\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h-1} \int_0^t \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau) + \tilde{v}(t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (11)$$

Оскільки метод визначення коефіцієнтів розвинень (6)-(8) вже відомий [3, с.92-94], то перейдемо до відшукування коефіцієнтів $c_k^{(i)}$, $k = 0, 1, \dots$, $i = \overline{1, n}$ розвинень (9). Для цього підставимо вектор (5) у крайову умову (2). Дістанемо

$$\begin{aligned}
& M \sum_{i=1}^{n-1} u_i(0, \varepsilon) c_i(\varepsilon) + Mv(0, \varepsilon) c_n(\varepsilon) + M\tilde{v}(0, \varepsilon) + \\
& + N \sum_{i=1}^{n-1} u_i(1, \varepsilon) c_i(\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^1 \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau) + Nv(1, \varepsilon) c_n(\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h-1} \int_0^1 \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau) + \\
& + N\tilde{v}(1, \varepsilon) = d(\varepsilon). \tag{12}
\end{aligned}$$

Згідно з припущенням (10), доданки, що містять експоненти є експоненціально малими. Знехтувавши відповідними доданками, замість (12) розглядатимемо рівняння

$$M \sum_{i=1}^{n-1} u_i(0, \varepsilon) c_i(\varepsilon) + Mv(0, \varepsilon) c_n(\varepsilon) + M\tilde{v}(0, \varepsilon) + N\tilde{v}(1, \varepsilon) = d(\varepsilon), \tag{13}$$

із якого й будемо визначати сталі множники $c_k^{(i)}$, $k = 0, 1, \dots$, $i = \overline{1, n}$.

Прирівнюючи в (13) коефіцієнти при однакових степенях малого параметра і беручи до уваги розвинення (6)-(8), а також розвинення $d(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k$, матимемо систему рівнянь

$$M \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(0) c_{k-j}^{(i)} + M \sum_{j=0}^k v_j(0) c_{k-j}^{(n)} + M\tilde{v}_k(0) = d_k - N\tilde{v}_k(1). \tag{14}$$

Підставимо в цю систему вирази для вектор-функцій $u_k^{(s)}(t)$, $v_k(t)$, $\tilde{v}_k(t)$, [3, п. 3.2]:

$$u_k^{(s)}(t) = H_s(t) b_k^{(s)}(t), \quad s = \overline{1, n-1}, \quad k \geq 1, \tag{15}$$

де

$$\begin{aligned}
b_k^{(s)}(t) &= \lambda_k^{(s)}(t) B_0(t) \varphi_s(t) + g_k^{(s)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad s = \overline{1, n-1}, \\
g_k^{(s)}(t) &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i} \lambda_i^{(s)} B_j u_{k-i-j}^{(s)} + \lambda_s \sum_{j=1}^k B_j u_{k-j}^{(s)} - \sum_{i=1}^k A_i u_{k-i}^{(s)} + \sum_{i=0}^{k-h} B_i (u_{k-h-i}^{(s)})',
\end{aligned}$$

а $H_s(t)$ – матриця, напівообернена до матриці $A_0(t) - \lambda_s(t) B_0(t)$;

$$v_k(t) = G(t) a_k(t), \quad k \geq 1, \tag{16}$$

$$a_k = \xi_{k-1} A_0 \tilde{\varphi} + d_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$d_k = \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-1-i} \xi_i A_j v_{k-1-i-j} - \sum_{i=0}^{k-h-1} \sum_{j=0}^{k-h-1-i} \xi_i B_j v'_{k-h-1-i-j} - \sum_{i=1}^k B_i v_{k-i}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де $G(t) = B_0^-$ – матриця, напівообернена до матриці $B_0(t)$;

$$\tilde{v}_k(t) = A_0^{-1}(t) \left[\sum_{i=0}^{k-h} B_i(t) (\tilde{v}_{k-h-i}(t))' - \sum_{i=1}^k A_i(t) \tilde{v}_{k-i}(t) - f_k(t) \right], \quad k = 1, 2, \dots \tag{17}$$

Ввівши позначення

$$c_k = \text{col}(c_k^{(1)}, c_k^{(2)}, \dots, c_k^{(n)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$U_0 = (\varphi_1(0), \varphi_2(0), \dots, \varphi_{n-1}(0), \tilde{\varphi}(0)),$$

$$U_k = (H_1(0) b_k^{(1)}(0), H_2(0) b_k^{(2)}(0), \dots, H_{n-1}(0) b_k^{(n-1)}(0), G(0) a_k(0)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

де

$$\begin{aligned}
b_k^{(s)}(0) &= \lambda_k^{(s)}(0)B_0(0)\varphi_s(0) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i} \lambda_i^{(s)}(0)B_j(0)u_{k-i-j}^{(s)}(0) + \\
&+ \lambda_s(0) \sum_{j=1}^k B_j(0)u_{k-j}^{(s)}(0) - \sum_{i=1}^k A_i(0)u_{k-i}^{(s)}(0) + \sum_{i=0}^{k-h} B_i(0)(u_{k-h-i}^{(s)})', \\
a_k(0) &= \xi_{k-1}(0)A_0(0)\tilde{\varphi}(0) + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-1-i} \xi_i A_j v_{k-1-i-j} - \\
&- \sum_{i=0}^{k-h-1} \sum_{j=0}^{k-h-1-i} \xi_i(0)B_j(0)v'_{k-h-1-i-j}(0) - \sum_{i=1}^k B_i(0)v_{k-i}(0), \quad k=1,2,\dots,
\end{aligned}$$

запишемо рівняння (14) у векторно-матричному вигляді

$$MU_0(0)c_k + M \sum_{i=1}^k U_i(0)c_{k-i} + M\tilde{v}_k(0) = d_k - N\tilde{v}_k(1), \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_k(0) &= A_0^{-1}(0) \left[\sum_{i=0}^{k-h} B_i(0)(\tilde{v}_{k-h-i}(0))' - \sum_{i=1}^k A_i(0)\tilde{v}_{k-i}(0) - f_k(0) \right], \\
\tilde{v}_k(1) &= A_0^{-1}(1) \left[\sum_{i=0}^{k-h} B_i(1)(\tilde{v}_{k-h-i}(1))' - \sum_{i=1}^k A_i(1)\tilde{v}_{k-i}(1) - f_k(1) \right], \quad k=1,2,\dots
\end{aligned}$$

Припустимо, що матриця M неособлива, тобто

$$\det M \neq 0. \quad (19)$$

Оскільки матриця $U_0(0)$ теж неособлива завдяки лінійній незалежності власних векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\tilde{\varphi}(t)$, то $\det MU_0(0) = \det M \cdot \det U_0(0) \neq 0$. А із рівняння (18) однозначно визначається вектор c_k :

$$\begin{aligned}
c_k &= -U_0^{-1}(0) \sum_{i=1}^k U_i(0)c_{k-i} - U_0^{-1}(0)\tilde{v}_k(0) + U_0^{-1}M^{-1}[d_k - N\tilde{v}_k(1)], \\
& \quad k = 0, 1, \dots
\end{aligned} \quad (20)$$

Визначення скалярів $c_k^{(i)}$, $k = 0, 1, \dots$, $i = \overline{1, n}$ завершує побудову формального розв'язку.

Покажемо, що вираз (5), побудований у такий спосіб є асимптотичним зображенням точного розв'язку крайової задачі (1), (2). Для цього розглянемо m -наближення шуканого розв'язку, обіравши ряди на m -му члені:

$$\begin{aligned}
x_m(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau) + \\
&+ \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{j=0}^k v_j(t) c_{k-j}^{(n)} \exp(\varepsilon^{-h-1} \int_0^t \frac{d\tau}{\xi_m(\tau, \varepsilon)}) + \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \tilde{v}_k(t),
\end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (22)$$

$$\xi_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \xi_k(t). \quad (23)$$

За побудовою вектор (21) задовольняє систему (1) з точністю до $O(\varepsilon^m)$, а крайову умову – $O(\varepsilon^{m+1})$. Розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = x_m(t, \varepsilon) + y_m(t, \varepsilon). \quad (24)$$

Тоді вектор $y_m(t, \varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі

$$\varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dy_m}{dt} = A(t, \varepsilon) y_m - \varepsilon^m a(t, \varepsilon), \quad (25)$$

$$M y_m(0, \varepsilon) + N y_m(1, \varepsilon) = -\varepsilon^{m+1} b(\varepsilon), \quad (26)$$

в якій $a(t, \varepsilon)$ – вектор-функція, рівномірно обмежена на $[0; T]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $b(\varepsilon)$ – обмежений n -вимірний вектор, вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon^{m+1} b(\varepsilon) = & N \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(1) c_{k-j}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) + \\ & + N \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{j=0}^k v_j(1) c_{k-j}^{(n)} \exp\left(\varepsilon^{-h-1} \int_0^1 \frac{d\tau}{\xi_m(\tau, \varepsilon)}\right) - \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon^k d_k. \end{aligned} \quad (27)$$

Як показано в [4, с.80-81], умова $(B_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0$ забезпечує неособливість матриці $B(t, \varepsilon)$ при досить малих ε , відмінних від нуля. Оскільки

$$\det B(t, \varepsilon) = \varepsilon (B_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + O(\varepsilon^2),$$

то обернена матриця $B^{-1}(t, \varepsilon)$ має полюс першого порядку при $\varepsilon = 0$ і її можна представити у вигляді

$$B^{-1}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} Q(t, \varepsilon), \quad (28)$$

де $Q(t, \varepsilon)$ – деяка $(n \times n)$ – матриця, рівномірно обмежена на $[0; T]$. Помноживши систему (25) зліва на $\varepsilon^{-h-1} Q(t, \varepsilon)$, дістанемо

$$\frac{dy_m}{dt} = \varepsilon^{-h-1} \tilde{A}(t, \varepsilon) y_m - \varepsilon^{m-h-1} \tilde{a}(t, \varepsilon), \quad (29)$$

де

$$\tilde{A}(t, \varepsilon) = Q(t, \varepsilon) A(t, \varepsilon), \quad \tilde{a}(t, \varepsilon) = Q(t, \varepsilon) a(t, \varepsilon).$$

Поряд із крайовою задачею (29), (26) розглянемо відповідну однорідну задачу

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon^{-h-1} \tilde{A}(t, \varepsilon) x, \quad (30)$$

$$Mx(0, \varepsilon) + Nx(1, \varepsilon) = 0. \quad (31)$$

Фундаментальна матриця однорідної системи (30) в даному випадку має вигляд

$$X(t, \varepsilon) = (U_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda_m(\tau, \varepsilon) d\tau\right),$$

де

$$\Lambda_m(t, \varepsilon) = \text{diag}\{\lambda_m^{(1)}(t, \varepsilon), \dots, \lambda_m^{(n-1)}(t, \varepsilon), \varepsilon^{-1} \xi_m^{-1}(t, \varepsilon)\}, \quad U_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k U_k(t).$$

Виходячи з цього, загальний розв'язок лінійної системи (29) подамо у вигляді

$$y_m(t, \varepsilon) = (U_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda_m(\tau, \varepsilon) d\tau) c(\varepsilon) - \int_0^t (U_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})) \exp(\varepsilon^{-h} \int_\tau^t \Lambda_m(s, \varepsilon) ds) (U_m^{-1}(\tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})) q(\tau, \varepsilon) d\tau, \quad (32)$$

де $q(t, \varepsilon) = \varepsilon^{m-h-1} \tilde{a}(t, \varepsilon)$.

Визначивши вектор $c(\varepsilon)$ із крайової умови (26), дістанемо розв'язок неоднорідної крайової задачі (29), (26):

$$y_m(t, \varepsilon) = (Gq)(t, \varepsilon) - (U_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda_m(\tau, \varepsilon) d\tau) \times \\ \times ([MU_m(0, \varepsilon)]^{-1} + O(\varepsilon^{m-h-1})) \varepsilon^{m+1} b(\varepsilon), \quad (33)$$

где $(Gq)(t, \varepsilon)$ – оператор Гріна крайової задачі, який для даного випадку має вигляд

$$(Gq)(t, \varepsilon) = \int_0^1 G_0(t, \tau, \varepsilon) q(\tau, \varepsilon) d\tau,$$

де $G_0(t, \tau, \varepsilon)$ – матриця Гріна, яка має наступну структуру:

$$G_0(t, \tau, \varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} (U_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda_m(s, \varepsilon) ds) \times \\ \times ([MU_m(0, \varepsilon)]^{-1} + O(\varepsilon^{m-h-1})) (NU_m(1, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})) \times \\ \times \exp(\varepsilon^{-h} \int_\tau^1 \Lambda_m(s, \varepsilon) ds) (U_m^{-1}(\tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})), \\ \text{якщо } 0 \leq t < \tau \leq 1; \\ - (U_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})) \exp(\varepsilon^{-h} \int_\tau^t \Lambda_m(s, \varepsilon) ds) \times \\ \times (U_m^{-1}(\tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})) + (U_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})) \times \\ \times \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda_m(s, \varepsilon) ds) ([MU_m(0; \varepsilon)]^{-1} + O(\varepsilon^{m-h-1})) \times \\ \times (NU_m(1, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})) \exp(\varepsilon^{-h} \int_\tau^1 \Lambda_m(s, \varepsilon) ds) \times \\ \times (U_m^{-1}(\tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})), \\ \text{якщо } 0 \leq \tau \leq t \leq 1. \end{array} \right. \quad (34)$$

Перейшовши в рівності (32) до оцінок за нормою, маємо

$$\begin{aligned} \|y_m(t, \varepsilon)\| &\leq \varepsilon^{m-h-1} \int_0^1 \|G_0(t, \tau, \varepsilon)\| \cdot \|Q(\tau, \varepsilon)\| \cdot \|a(\tau, \varepsilon)\| d\tau + \\ &+ \varepsilon^{m+1} \|U_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1})\| \left\| \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda_m(\tau, \varepsilon) d\tau) \right\| \times \\ &\times \|[MU(0, \varepsilon)]^{-1} + O(\varepsilon^{m-h-1})\| \cdot \|b(\varepsilon)\|. \end{aligned} \quad (35)$$

Виходячи із методу побудови формального розв'язку крайової задачі, матриця $MU_0(0)$ – невироджена ($\det MU_0(0) \neq 0$). Тому і при досить малих ε матриця $MU_m(0, \varepsilon)$ ($MU_m(0, \varepsilon) = MU_0(0) + \varepsilon MU_1(0) + \dots + \varepsilon^m MU_m(0)$) є також невиродженою. А, отже, існує обернена матриця $[MU_m(0, \varepsilon)]^{-1}$, яка є обмеженою при досить малих ε :

$$\|[MU_m(0, \varepsilon)]^{-1}\| \leq c_1. \quad (36)$$

Виходячи із умови стійкості (10), неважко переконатися, що $\operatorname{Re} \lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon) < 0$, $\operatorname{Re} \xi_m(t, \varepsilon) < 0$ при досить малих ε . Звідси випливає обмеженість експонент:

$$\left\| \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda_m(\tau, \varepsilon) d\tau) \right\| \leq c_2, \quad (37)$$

$$\left\| \exp(\varepsilon^{-h} \int_{\tau}^1 \Lambda_m(s, \varepsilon) ds) \right\| \leq c_3, \text{ якщо } \tau \leq 1, \quad (38)$$

$$\left\| \exp(\varepsilon^{-h} \int_{\tau}^t \Lambda_m(s, \varepsilon) ds) \right\| \leq c_4, \text{ якщо } \tau \leq t, \quad (39)$$

де c_i , $i = \overline{1, 4}$ – деякі сталі, що не залежать від ε .

Враховуючи оцінки (36)-(39) і обмеженість всіх матричних і векторних функцій, які містяться в (35), (34), дістанемо

$$\|y_m(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^{m-h-1} c,$$

де c – деяка стала, що не залежить від ε . Повернувшись до заміни (24), отримаємо остаточну оцінку:

$$\|x_m(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^{m-h-l} c.$$

Підсумком проведених викладок є теорема.

Теорема . Якщо гранична в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ має на відріжку $[0; T]$ $n - 1$ простих скінченних елементарних дільників і один нескінченний, M, N – квадратні матриці n -го порядку, $d(\varepsilon)$ – n -вимірний вектор-стовпець і, крім того, виконуються умови (10), $1^\circ - 4^\circ$, а також $(B_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0$, то при досить малих ε крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який виражається асимптотичною формулою

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau) +$$

$$+ \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{j=0}^k v_j(t) c_{k-j}^{(n)} \exp(\varepsilon^{-h-1} \int_0^t \frac{d\tau}{\xi_m(\tau, \varepsilon)}) + \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \tilde{v}_k(t) + O(\varepsilon^{m-h-1}),$$

де $u_k^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $v_k(t)$, $\tilde{v}_k(t)$ – n -вимірні вектор-функції, що визначаються рекурентними формулами (15), (16), (17), $\lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\xi_m(t, \varepsilon)$ – скалярні функції, що зображаються розвиненнями (6), (7), а відповідні коефіцієнти $\lambda_k^{(i)}(t)$, $\xi_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$ знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(s)}(t) &= -(g_k^{(s)}(t), \psi_s(t)), \quad k \geq 1, \\ \xi_0(t) &= (B_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \\ \xi_k(t) &= -(d_{k+1}(t), \tilde{\psi}(t)), \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

де $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\tilde{\psi}(t)$ – базисні вектори нуль-просторів матриць $(A_0(t) - \lambda_i(t)B_0(t))^*$, $B_0^*(t)$ відповідно. Вектори сталих c_k , $k = 0, 1, \dots$ знайдемо за формулами (20).

Література

1. Каранджулов Л.И. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущённой линейной краевой задачи / Л.И. Каранджулов, А.А. Бойчук, В.А. Божко // Докл. НАН Украины. – 1994. – №4 – С. 7-10.
2. Яковец В.П. Построение асимптотических решений двухточечных краевых задач для вырожденной сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений / В.П.Яковец, М.Б. Вира // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна. – 2008. Воронеж: ВорГУ, 2008. – С. 319-332.
3. Самойленко А.М. Лінійні системи дифференціальних рівнянь з виродженнями / А.М.Самойленко, М.І.Шкіль, В.П. Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
4. Шкіль Н.И. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н.И. Шкіль, И.И.Старун, В.П. Яковец. – К.: Вища школа, 1991. – 207 с.

УДК 517.928

АСИМПТОТИКА ТА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ 2-ГО ПОРЯДКУ

Волковицька І.В., Старун І.І.

В роботі розглядається рівняння

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0, \quad t \in [t_0, \infty), \quad (1)$$

в якому коефіцієнти $a_i(t) \in C_{[t_0, \infty)}^m$, де $m \geq 1$. Заміною $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$ це рівняння зводиться до системи

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (2)$$

$$\text{де } x = \text{colon}(x_1, x_2), A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}.$$

Для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків рівняння (1) та стійкості розв'язків використаємо результати роботи [1], в якій показано, що якщо маємо систему вигляду

$$\dot{x} = (W(t) + C(t))x, \quad (3)$$

$W(t) = \text{diag}\{w_1(t), \dots, w_n(t)\}$, $C(t) = (c_{ij}(t))_1^n$ і виконуються умови:

1) функції $\text{Re}(w_i(t) - w_j(t))$ не змінюють знак при $t \geq T \geq t_0$;

$$2) \int_{t_0}^{\infty} \|C(t)\| dt \leq M < \infty,$$

то для фундаментальної матриці $X(t)$ системи має місце асимптотичне подання

$$X(t) = \left(E + F(t) \exp \int_{t_0}^t W(t) dt \right), \quad (4)$$

де $F(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Систему (3) в цьому випадку, згідно [1], називають L -діагональною.

Ввівши в розгляд функції

$$\rho(t) = \max_{i,j=1,n} \{c_{ij}(t)\}, \gamma(t) = \max_j \int_{t_0}^t \text{Re } w_j(t) dt \quad (5)$$

маємо, що якщо функція

$$\rho(t) \exp \gamma(t) \quad (6)$$

обмежена при $\forall t \in [t_0, \infty)$, то всі розв'язки системи (3) стійкі, якщо ж

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) \exp \gamma(t) = 0$, то всі розв'язки системи (3) асимптотично стійкі.

Застосуємо ці загальні результати до рівняння (1) (еквівалентної системі (2)) і виясимо, якими повинні бути коефіцієнти $a_1(t)$, $a_2(t)$, щоб для системи (1) виконувалися умови L -діагональності та стійкості.

Для цього, згідно [2], розглянемо допоміжну систему

$$\varepsilon \dot{x} = (W(t) + \varepsilon(A(t) - W(t)))x, \quad (7)$$

де $W(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) & 0 \\ 0 & w_2(t) \end{pmatrix}$ – матриця з довільними диференційовними елементами і

такими, що $\text{Re } w_1(t) \neq \text{Re } w_2(t)$, ε - параметр.

При $\varepsilon = 1$ системи (2) та (7) співпадають. До системи (8) застосуємо заміну

$$x = Q_m(t, \varepsilon)y, \quad (8)$$

де $Q(t, \varepsilon) = E + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k Q^{(k)}(t)$, отримаємо систему

$$\varepsilon Q_m(t, \varepsilon) \dot{y} = (W(t) + \varepsilon(A(t) - W(t))Q_m(t, \varepsilon) - \varepsilon \dot{Q}_m(t, \varepsilon))y. \quad (9)$$

Матрицю $Q_m(t, \varepsilon)$ визначимо з рівності

$$\begin{aligned} & (W(t) + \varepsilon(A(t) - W(t)))Q_m(t, \varepsilon) - \varepsilon\dot{Q}_m(t, \varepsilon) = \\ & = Q_m(t, \varepsilon) \left(W(t) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \Lambda^{(k)}(t) + \varepsilon^{m+1} C_m(t, \varepsilon) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

в якій $\Lambda^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(k)}(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(k)}(t) \end{pmatrix}$, $C_m(t, \varepsilon) = (c_{ij}^{(m)}(t, \varepsilon))$ – матриці, що

підлягають визначенню.

Розглянемо, для конкретності випадок $m = 1$, тоді

$Q_1(t, \varepsilon) = E + \varepsilon Q^{(1)}(t)$, а рівність (10) має вигляд

$$\begin{aligned} & W(t) + \varepsilon(A(t) - W(t))(E + \varepsilon Q^{(1)}(t)) - \varepsilon^2 \dot{Q}^{(1)}(t) = \\ & = (E + \varepsilon Q^{(1)}(t)) (W(t) + \varepsilon \Lambda^{(1)}(t) + \varepsilon^2 C_1(t, \varepsilon)). \end{aligned} \quad (11)$$

Прирівнявши в (11) коефіцієнти при $\varepsilon = 1$, маємо рівність

$$W(t)Q^{(1)}(t) - Q^{(1)}(t)W(t) = \Lambda^{(1)}(t) - A(t) + W(t). \quad (12)$$

Оскільки зліва в (12) на головній діагоналі стоять нулі, то (врахувавши вигляд матриці $A(t)$) маємо $\lambda_1^{(1)}(t) = -w_1(t)$, $\lambda_2^{(1)}(t) = -a_1(t) - w_2(t)$, тоді $q_{12}^{(1)}(t) = \frac{1}{w_2(t) - w_1(t)}$,

$$q_{21}^{(1)}(t) = \frac{a_2(t)}{w_2(t) - w_1(t)}.$$

Елементи ж $q_{11}^{(1)}(t)$, $q_{22}^{(1)}(t)$ можна взяти рівними нулю, отже

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} -w_1(t) & 0 \\ 0 & -a_1(t) - w_2(t) \end{pmatrix}, \quad W(t) + \Lambda^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_1(t) \end{pmatrix}, \\ Q^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{w_2(t) - w_1(t)} \\ \frac{a_2(t)}{w_2(t) - w_1(t)} & 0 \end{pmatrix}, \\ Q_1(t, 1) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{w_2(t) - w_1(t)} \\ \frac{a_2(t)}{w_2(t) - w_1(t)} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Матриця $C_1(t, 1) = Q_1^{-1}(t, 1) \cdot \bar{C}_1(t, 1)$, де

$\bar{C}_1(t, 1) = (A(t) - W(t))Q^{(1)}(t) - \dot{Q}^{(1)}(t) - Q^{(1)}(t)\Lambda^{(1)}(t)$, має вигляд

$$\bar{C}_1(t, 1) = \frac{1}{w_2(t) - w_1(t)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} a_2(t) & a_1(t) + w_2(t) - w_1(t) \\ (- (a_1(t)a_2(t) + \dot{a}_2(t) + a_2(t)(w_2(t) - w_1(t)))) & -a_2(t) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Оскільки

$$\det Q_1(t,1) = 1 - \frac{a_2(t)}{(w_2(t) - w_1(t))^2} \neq 0,$$

якщо $(w_2(t) - w_1(t))^2 \neq a_2(t)$, що завжди можна зробити відповідним вибором довільних функцій $w_2(t)$, $w_1(t)$, то існує обернена матриця

$$Q_1^{-1}(t,1) = \frac{1}{(w_2(t) - w_1(t))^2 - a_2(t)} \cdot \begin{pmatrix} (w_2(t) - w_1(t))^2 & -(w_2(t) - w_1(t)) \\ a_2(t)(w_2(t) - w_1(t)) & (w_2(t) - w_1(t))^2 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

а тоді

$$C_1(t,1) = \frac{1}{(w_2 - w_1)^2 - a_2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 2a_2(w_2 - w_1) + a_1a_2 + \dot{a}_2 & (a_1 + w_2 - w_1)(w_2 - w_1) + a_2 \\ - (a_2^2 + (a_1a_2 + \dot{a}_2)(w_2 - w_1) + a_2(w_2 - w_1)^2) & -2a_2(w_2 - w_1) + a_1a_2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Маємо систему

$$\dot{y} = (\Lambda_1(t,1) + C_1(t,1))y. \quad (17)$$

Поклавши в (15) $w_2 - w_1 = 1$, бачимо, що умови 1), 2) виконуються, якщо функція

$$a_1(t) \text{ знакостала при } t \geq T \geq t_0, \text{ а функції } c_{11}(t) = \frac{2a_2(t) + a_1(t)a_2(t) + \dot{a}_2(t)}{1 - a_2(t)},$$

$$c_{12}(t) = \frac{(a_1(t) + 1)(a_2(t) + 1)}{1 - a_2(t)}, \quad c_{21}(t) = \frac{a_2^2(t) + a_1(t)a_2(t) + \dot{a}_2(t) + a_2(t)}{1 - a_2(t)},$$

$$c_{22}(t) = \frac{a_1(t)a_2(t) + 2a_2(t)}{1 - a_2(t)}$$

інтегровні на проміжку $[t_0, \infty)$.

Якщо в (15), (16) покласти $w_2 - w_1 = -a_1(t)$, то умови 1), 2) будуть виконуватися,

$$\text{якщо функція } a_1(t) \text{ знакостала при } t \geq T \geq t_0; \text{ а функції } c_{11}(t) = -\frac{a_2^2(t) + a_1(t)a_2(t)}{a_1^2(t) - a_2(t)},$$

$$c_{21}(t) = \frac{a_1(t)\dot{a}_2(t) + a_2^2(t)}{a_1^2(t) - a_2(t)}, \quad c_{22}(t) = \frac{a_2(t)a_1(t)}{a_1^2(t) - a_2(t)} \text{ інтегровні на проміжку } [t_0, \infty).$$

Вибираючи функції $w_2(t)$, $w_1(t)$ іншими, знову будемо отримувати умови інтегрованості матриці $C_1(t,1)$, що дає змогу стверджувати, що при $t \geq T \geq t_0$ для фундаментальної матриці системи (2) має місце асимптотична формула

$$X(t) = \left(E + F(t) \exp \left(\int_{t_0}^t \Lambda_1(\tau, 1) d\tau \right) \right), \quad F(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (18)$$

Розв'язки рівняння (1) будуть стійкими, якщо виконується умова: функції $c_{ij}(t) \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau \right)$, ($i, j = 1, 2, \dots$), обмежені при $t \geq t_0 > 0$. Якщо ж $\lim_{t \rightarrow \infty} c_{ij}(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau \right) = 0$, то розв'язки рівняння (1) асимптотично стійкі. Це матиме місце, наприклад, якщо $a_1(t) < 0$ при $t \in [t_0, \infty)$, а функції $c_{ij}(t)$ є функціями обмеженого росту $(|c_{ij}(t)| \leq m \cdot e^{\lambda t})$.

Література

1. Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. – К.: Изд-во АН УССР, 1954. – 290 с.
2. Старун І.І. Асимптотика розв'язків однорідної лінійної системи // Фізико-математичний збірник. – Ніжин, НДУ, 2007.

УДК 514.14

АНАЛІТИЧНІ ВИРАЗИ В ДОСЛІДЖЕННІ ІНВОЛЮЦІЇ НА ПРОЕКТИВНІЙ ПРЯМІЙ

Циганок Л.В.

Одним із методів дослідження проєктивних перетворень полягає у застосуванні їх аналітичних виразів. Наприклад, за допомогою формул проєктивного перетворення площини в [3] досліджені властивості гомології.

В даній роботі використовуючи цей метод дослідимо інволюцію – нетотожне проєктивне перетворення f прямої, що збігається із своїм оберненим перетворенням f^{-1} .

За відомою теоремою, якщо $R = (A_1, A_2, E)$ і $R' = (A'_1, A'_2, E')$ – довільні репері на прямій g , то існує одне і тільки одне проєктивне перетворення прямої g , яке репер R переводить у репер R' ([1]). З цього твердження випливає, що нетотожне проєктивне перетворення прямої може мати не більше двох інваріантних (нерухомих) точок.

Нехай f – проєктивне перетворення прямої, на якій заданий репер $R = (A_1, A_2, E)$. Тоді як і у випадку проєктивного перетворення площини ([1]) дістанемо аналітичний вираз проєктивного перетворення f :

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \rho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned} \quad (1)$$

де в репері $R: (x_1, x_2)$ – координати точки M , (x'_1, x'_2) – координати точки $M' = f(M)$, (a_{11}, a_{21}) , (a_{12}, a_{22}) , $(a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22})$ – відповідно координати вершин A'_1, A'_2 і одиничної точки E' репера R' . При цьому виконується умова

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

Можна довести, що відображення f проєктивної прямої g , задане аналітичними формулами (1) за умови (2) у деякому репері R , є проєктивним перетворенням прямої g .

Доведемо теорему.

Теорема 1. Якщо в даному проєктивному перетворенні f прямої g деяка точка A прямої g переходить у точку B , відмінну від точки A , а точка B переходить у точку A , то f – інволюція.

Доведення. Нехай C – деяка точка прямої g , відмінна від A і B , і $C' = f(C)$. Тоді перетворення f репер $R = (A, B, C)$ переведе у репер $R' = (B, A, C')$. Точка C' також не буде збігатися з точками A і B , оскільки f – взаємно однозначне відображення прямої g . Отже, в репері R точка C' має координати $(c, 1)$, де $c \neq 0$. Складемо матрицю переходу від репера R до репера R' з узгодженими стовпцями:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & k_2 & c \\ k_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = 1, \\ k_2 = c. \end{matrix}$$

Тоді аналітичний вираз проєктивного перетворення f набуває вигляду (1):

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= cx_2, \\ \rho x'_2 &= x_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Покладемо в (1) $\rho = \frac{c}{\rho}$, тоді $\frac{c}{\rho} x'_1 = cx_2$, $\frac{c}{\rho} x'_2 = x_1$, або

$$\begin{aligned} \overline{\rho} x_1 &= cx'_2, \\ \overline{\rho} x_2 &= x'_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, рівності (4) є аналітичним виразом оберненого перетворення f^{-1} прямої g . Співставляючи аналітичні вирази (3) і (4), дістанемо, що проєктивне перетворення f^{-1} збігається з даним нетотожним проєктивним перетворенням f , тобто f – інволюція. Теорема доведена.

Дослідимо інволюцію на наявність інваріантних точок. Для цього в (3) покладемо $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$:

$$\begin{cases} \rho x_1 = cx_2, \\ \rho x_2 = x_1, \end{cases} \Rightarrow \rho x_1^2 = \rho cx_2^2 \Rightarrow x_1^2 = cx_2^2.$$

З останньої рівності випливає, що при $c < 0$ інволюція не має інваріантних точок, а при $c > 0$ має дві інваріантні точки, для яких $x_1 = \sqrt{cx_2}$, або $x_1 = -\sqrt{cx_2}$: $M_1(\sqrt{c}; 1)$, $M_2(-\sqrt{c}; 1)$. Інволюція називається *еліптичною*, якщо вона не має інваріантних точок, і *гіперболічною*, якщо вона має дві інваріантні точки.

Наприклад, аналітичний вираз (5) визначає еліптичну інволюцію, а аналітичний вираз (6) – гіперболічну інволюцію з двома інваріантними точками $M_1(2; 1)$ і $M_2(-2; 1)$:

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= -2x_2, \\ \rho x'_2 &= x_1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= 4x_2, \\ \rho x'_2 &= x_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Оскільки згідно з означенням складного відношення чотирьох точок прямої $(AB, CC') = c:1 = c$, де A, B і C, C' – дві довільні пари відповідних точок інволюції f у позначеннях та доведенні теореми 1, дістанемо, що у випадку еліптичної інволюції ($c < 0$), пари відповідних точок A, B і C, C' розділяють одна одну, а у випадку гіперболічної інволюції ($c > 0$) пари відповідних точок не розділяють одна одну. Отже, еліптичну інволюцію можна задати двома парами відповідних точок, що розділяють одна одну, а гіперболічну – двома парами відповідних точок, що не розділяють одна одну.

Відомо, що інваріантні точки гіперболічної інволюції гармонійно розділяють кожену пару відповідних точок ([1], [2]). Покажемо це, використовуючи аналітичний вираз (3), за умови $c > 0$. Дійсно, оскільки $M_1(\sqrt{c}; 1)$ і $M_2(-\sqrt{c}; 1)$ – інваріантні точки, а $D(x_1, x_2)$, $D'(cx_2, x_1)$ – пара відповідних точок, дістанемо

$$(M_1 M_2, DD') = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{c} & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\sqrt{c} & cx_2 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{c} & cx_2 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\sqrt{c} & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{-\sqrt{c}(\sqrt{c}x_2 - x_1)(x_1 + \sqrt{c}x_2)}{-\sqrt{c}(x_1 - \sqrt{c}x_2)(\sqrt{c}x_2 + x_1)} = -1.$$

Образи точок при інверсії можна будувати за загальною схемою побудов у проєктивному перетворенні прямої. Розглянемо приклади побудов образів точок при інверсії.

Задача 1. Еліптична інволюція f прямої g задана двома парами відповідних точок A і B , C і C' . Побудувати образ M' точки M прямої g у даній інволюції.

Побудова. Оскільки $f(A) = B$ і $f(B) = A$, для зручності точку B позначимо ще як A' , а точку A – як B' . Проведемо допоміжну пряму g_1 , відмінну від g , і візьмемо точку O , що не належить прямим g , g_1 . Побудуємо образи A_1, B_1, C_1, M_1 точок A, B, C, M при перспективному відображенні f_1 прямої g на пряму g_1 з центра O (рис. 1). На прямій A_1A' візьмемо

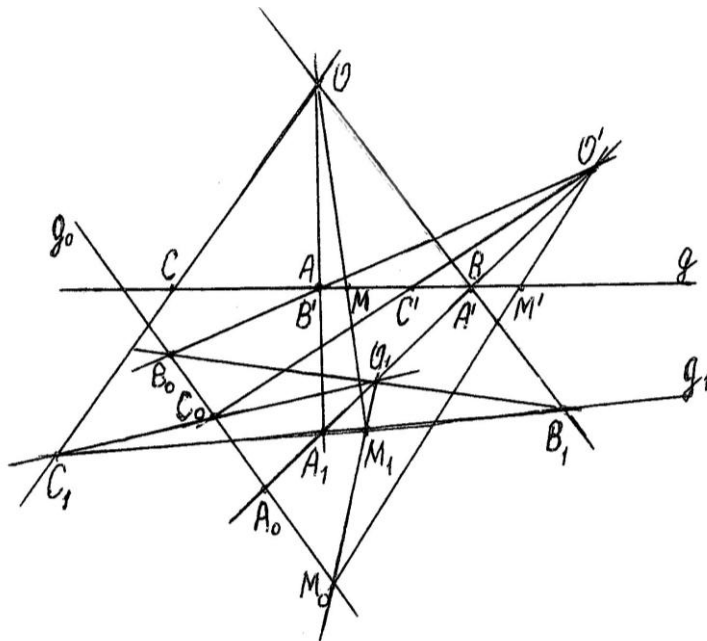


Рис. 1

$(LM): x_1=0$, $(LN): x_1=x_3$, $(KM): x_2=0$. Оскільки $A=KL \times d$, $A'=MN \times d$, $B=KN \times d$, $B'=LM \times d$, $C=LN \times d$, $C'=KM \times d$, поклавши в рівняння прямої d $u_3=1$, що не зменшує загальності, і розв'язуючи відповідні системи рівнянь, дістанемо координати точок $A(u_2; -u_1; 0)$, $A'(1; 1; -u_1 - u_2)$, $B\left(-\frac{u_2+1}{u_1}; 1; 1\right)$, $B'(0; 1; -u_2)$, $C\left(1; -\frac{u_1+1}{u_2}; 1\right)$, $C'(1; 0; -u_1)$.

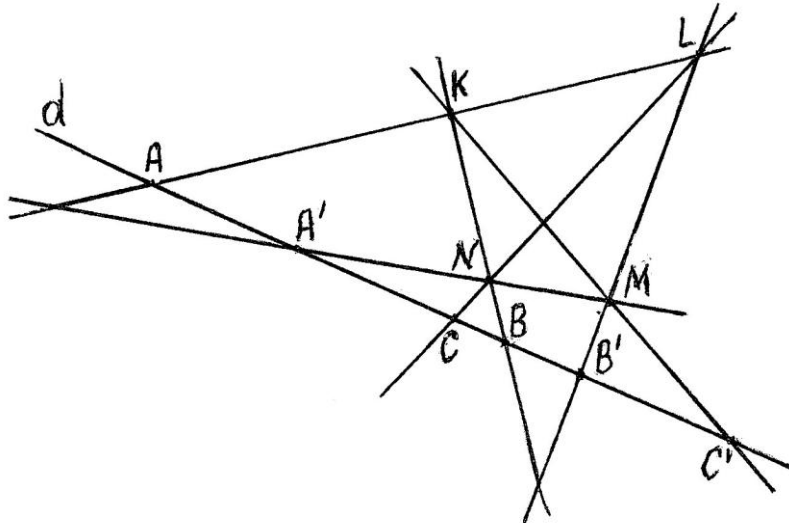


Рис. 3

А так як пряма d не проходить через вершину M репера R , дістанемо

$$(AA', BC) = (A_3A'_3, B_3C_3) = \frac{\begin{vmatrix} u_2 & -\frac{u_2+1}{u_1} \\ -u_1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{u_1+1}{u_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_2 & 1 \\ -u_1 & -\frac{u_1+1}{u_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{u_2+1}{u_1} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{u_1}{u_2},$$

де A_3, A'_3, B_3, C_3 – проєкції точок A, A', B, C з вершини M на координатну пряму KL репера R .

Аналогічно визначаємо складне відношення:

$$(A'A, B'C') = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & 1 \\ -u_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & 0 \\ -u_1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{u_1}{u_2}.$$

Отже, $(AA', BC) = (A'A, B'C')$, тобто проєктивне перетворення f прямої d є інволюцією. Теорема доведена.

Зауваження 1. Інволюція f прямої d , розглянута у попередній теоремі, може бути еліптичною, або гіперболічною, тому що складне відношення $(AA', BB') = -\frac{u_1}{u_2(u_1 + u_2 + 1)}$ не зберігає знак, тобто при $(AA', BB') < 0$ пари відповідних точок розділяють одна одну (еліптична інволюція), а при $(AA', BB') > 0$ – не розділяють (гіперболічна інволюція).

Розглянемо приклади побудов відповідних точок інволюції, використовуючи другу теорему Дезарга.

Нехай d – розширена евклідова пряма і A_∞ – її невласна точка. Центром інволюції f називається точка прямої d , відповідна її невлаській точці.

Візьмемо центр O інволюції f на прямій d за початок афінної системи (O, \overrightarrow{OE}) , в якій дві відповідні точки M, M' мають координати: $M(x)$, $M'(x')$, причому $x \neq 0$, $x' \neq 0$, тому що точки M, M' не збігаються з центром інволюції O .

Нехай в проективному репері $R = (A_\infty, O, E)$ відповідні точки M, M' мають координати: $M(x_1, x_2)$, $M'(x'_1, x'_2)$, де $x_2 \neq 0$ і $x'_2 \neq 0$, бо M і M' власні точки. Тоді між афінними і проективними координатами власних точок існує залежність ([1]):

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad x' = \frac{x'_1}{x'_2}. \quad (7)$$

А так як, внаслідок інволюції f репер R перейде в репер $R' = (O, A_\infty, E')$, то, як доведено вище, аналітичний вираз цієї інволюції має вигляд:

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= c x_2, \\ \rho x'_2 &= x_1, \end{aligned} \quad (8)$$

де $(c, 1)$ – координати точки E' у репері R і $c \neq 0$.

Тоді з аналітичного виразу (8) випливає рівність для проективних координат відповідних власних точок M і M'

$$\frac{x'_1}{x'_2} = \frac{c x_2}{x_1},$$

з якої, враховуючи формули (7), дістанемо аналітичний вираз інволюції в афінних координатах:

$$x' = \frac{c}{x}, \quad \text{або} \quad x'x = c. \quad (9)$$

В задачах 3, 4, використовуючи другу теорему Дезарга, на рисунках 4, 5 побудований центр інволюції O , при цьому аналогом прямої l_3 є пряма l'_3 , паралельна прямій d , $K'L'M'N'$ – допоміжний чотиривершинник, $O = L'N' \times d$.

Якщо в афінній системі (O, \overrightarrow{OE}) координатний вектор \overrightarrow{OE} – одиничний, то $|x| = OM$, $|x'| = OM'$, тоді з виразу (7) дістанемо

$$OM \cdot OM' = |c|,$$

тобто добуток відстаней від центра інволюції до пари відповідних точок є величина стала. Якщо одна з точок наближається до центра інволюції, то друга віддаляється від нього.

Оскільки згідно з проведеним вище дослідженням при $c > 0$ інволюція гіперболічна, а при $c < 0$ – еліптична, то з аналітичного виразу (9) випливає, що в гіперболічній інволюції кожна пара відповідних точок знаходиться по один бік від центра інволюції (рис. 4), а в еліптичній – її центр O знаходиться між відповідними точками кожної пари (рис. 5).

Якщо початок афінної системи координат (O, \overrightarrow{OE}) перенести у точку $O_1(a)$, то згідно формули паралельного перенесення $x = \bar{x} + a$, $x' = \bar{x}' + a$, де \bar{x} , \bar{x}' – нові координати точок M, M' . Згідно (9) дістанемо

$$(\bar{x} + a)(\bar{x}' + a) = c, \quad (c \neq 0),$$

Звідси $\bar{x}' = \frac{-a\bar{x} + b}{\bar{x} + a}$, де $b = c - a^2$, $\bar{x} \neq -a$, $\bar{x}' \neq -a$, або знову позначивши \bar{x} , \bar{x}' через

x, x' дістанемо аналітичний вираз інволюції в афінних координатах

$$x' = \frac{-ax+b}{x+a},$$

де $c = a^2 + b \neq 0$, $x \neq -a$, $x' \neq -a$, $-a$ – координата центра інволюції.

Наприклад, інволюція, що задана виразом $x' = \frac{3x-8}{x-3}$ ($a = -3$, $b = -8$), є гіперболічною інволюцією, оскільки $c = a^2 + b = 1 > 0$, тому вона має дві інваріантні точки:

$$x = \frac{3x-8}{x-3} \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4.$$

А інволюція, яка задана виразом $x' = \frac{-2x-6}{x+2}$ ($a = 2$, $b = -6$) є еліптичною: $c = a^2 + b = -2 < 0$ і, отже, не має інваріантних точок:

$$x = \frac{-2x-6}{x+2} \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow D = 16 - 24 < 0.$$

Зауваження 2. Якщо невласна точка A_∞ і власна точка B розширеної прямої d є інваріантними точками гіперболічної інволюції, то центр інволюції не існує. А оскільки для відповідних точок M, M' гіперболічної інволюції і її нерухомих точок A_∞, B справджується рівність $(MM', BA_\infty) = -1$, то інваріантна точка B є центром симетрії для кожної пари відповідних точок даної інволюції.

Література

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия: Ч. II. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.
2. Боровик В.Н., Яковець В.П. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. – Суми: ВТД “Університетська книга”, 2004. – 463 с.
3. Циганок Л.В., Головченко О.В. Про застосування координатного методу у викладанні проективної геометрії // Фізико-математичні записки. Збірник наукових праць. – Ніжин: НДУ імені Миколи Гоголя, 2006. – С. 122–123.

2

Прикладна математика, інформатика

УДК 621.039.586:004.942

ПРОБЛЕМА МОДЕЛЮВАННЯ ТЯЖКИХ АВАРІЙ НА АЕС ДЛЯ СТВОРЕННЯ ПАСИВНИХ СИСТЕМ ЗАХИСТУ

Казачков І.В., Коновал О.В.

Актуальність проблеми зумовлена потребою дослідження та створення принципів побудови пасивних систем захисту атомних електростанцій від тяжких аварій, під час яких високотемпературний агресивний розплав ядерного палива витікає із корпусу зруйнованого реактора до контейнента з подальшим виходом у навколишнє середовище. Щоб уникнути тяжких наслідків аварій, від сучасних АЕС третього і наступних поколінь вимагають наявність пасивних систем захисту, які за будь-яких умов не допустять вихід розплаву палива з корпусу реактора або принаймні з контейнента, як останнього бар'єра безпеки АЕС [1-11].

Необхідність створення та вдосконалення високоефективних, екологічно чистих джерел енергії стимулює розвиток атомної енергетики в більшості промислово розвинутих країн. Але потенційна небезпека АЕС після аварій на «Трі Майл Айленд» (США, 1979) і Чорнобильській АЕС (Україна, 1986) суттєво підірвала довіру до атомної енергетики. Тому її розвиток значною мірою сповільнився, а в деяких країнах і взагалі призупинився. В тому числі в Україні будівництво декількох нових блоків було заморожено і тільки зараз відновлюється (Хмельницька АЕС).

На жаль, на сучасному етапі реальної альтернативи атомній енергетиці, як одному з найбільш потужних і невичерпних джерел енергії, майже не існує, що пов'язано з обмеженістю природних ресурсів, забрудненням атмосфери при спаленні палива на ТЕС, високою собівартістю енергії, отриманої за рахунок таких альтернативних джерел як біопаливо, сонячні батареї, вітряки і т.д., з недостатнім технологічним розвитком використання водню чи термоядерного синтезу, а також слабкою потужністю багатьох інших альтернативних методів. До того ж, система RECS (Radioisotope Energy Conversion System, «Система перетворення енергії радіоактивних ізотопів») спрощує технологію отримання енергії на АЕС, що, в свою чергу, ще зменшує собівартість атомної енергії. Тому очевидна необхідність перегляду відношення світової спільноти до атомної енергетики та шляхів її подальшого розвитку.

Враховуючи вищесказане, стає зрозумілою необхідність підвищення безпеки АЕС. Тому поставлена проблема є актуальною на сьогоднішній день, як для вже функціонуючих електростанцій, так і для майбутніх. Можливість безпечного виробництва електроенергії на АЕС гарантує людству фактично невичерпне джерело енергії. Розвиток атомної енергетики здійснюється на основі використання досвіду блоків-попередників. Вирішення проблем підвищення безпеки АЕС базується, перш за все, на розробках світових лідерів в даній галузі. За період після Чорнобильської катастрофи було створено ряд концептуальних проектів АЕС з середньою та високою потужністю підвищеного рівня безпеки [7-12].

Постановка задач дослідження. Реактори третього покоління обов'язково оснащуються пасивними системами захисту від тяжких аварій, при яких відбувається розплавлення активної зони реактора з можливим наступним розплавленням корпусу реактора та потраплянням

розплаву коріуму (розплав ядерного палива з різноманітними домішками, які отримуються внаслідок дії розплаву на конструкції та матеріали реактора та інших систем) в підреакторний простір.

Проблема дослідження розповсюдження розплаву коріуму та його утримання всередині корпусу реактора або контейнента є непростою, адже високотемпературні фізичні, хімічні, та інші процеси, які при цьому відбуваються, супроводжуються рядом інших складних процесів, що надзвичайно ускладнює дослідження [1, 4, 8, 13-16]. Багато з цих процесів та явищ ще не досить добре вивчені, навіть в більш простих умовах протікання, наприклад: високотемпературні потоки розплавів з внутрішніми джерелами тепловиділення, взаємодія розплавів з конструкціями, бетоном та водою, перенесення та осадження парів та аерозолів [2, 7, 10].

Без детального дослідження цих процесів неможливо розібратися в їх взаємодії при тяжких аваріях. Так, розплав ядерного палива з температурою 2000-3000°C, який постійно розігрівається за рахунок внутрішніх тепловиділень внаслідок радіоактивного розпаду, здатний спалити і розплавити конструкції, бетонні перегородки, підлогу і т.д., утворюючи нові невідомі сплави та інші речовини з невідомими фізико-хімічними властивостями. Багато з теплогідролітичних процесів під час протікання тяжких аварій відбувається в умовах, коли їх протікання не досліджене, а самі процеси комплексні та відносяться відразу до декількох галузей фізики: механіки багатофазних середовищ, високотемпературної фізико-хімії і т.д.

Для подальшого розвитку систем безпеки АЕС необхідне проведення широкомасштабного математичного, комп'ютерного обчислювального та фізичного моделювання багатьох сценаріїв можливого перебігу тяжких аварій. А для цього, в свою чергу, необхідна побудова адекватних моделей протікання цих процесів, що є досить складним завданням, адже, наприклад, провести нагрівання розплаву до надзвичайно високих температур, в лабораторних умовах, є непростим завданням. Також, особливу складність викликають радіоактивність ядерного палива, різноманітність комбінацій процесів та неможливість передбачення точного сценарію протікання аварій, що змушує проводити комп'ютерні обчислювальні експерименти в широкому спектрі можливих варіантів та значень фізичних властивостей середовищ.

Слід підкреслити, що проблематичною є не лише реалізація досліджень з наукової точки зору, а й забезпечення матеріальної бази, що потребує значного фінансування. Тому важливу роль в дослідженнях відіграє комп'ютерний експеримент, який з порівняно невеликими фінансовими затратами дає змогу всебічного та багаторазового дослідження поставлених задач. На сьогоднішній рівень розвитку комп'ютерних технологій є можливість моделювання майже будь-яких процесів. Але й тут не все так безхмарно. Для побудови адекватної моделі необхідно знати властивості досліджуваних матеріалів та принципи їх взаємодії, а в проблемі протікання тяжких аварій, як зазначалося раніше, є маса нерозкритих питань. Отже, очевидна як необхідність розвитку атомної енергетики, особливо в плані підвищення безпеки, так і сучасні тенденції до її розвитку, а також важливість дослідження процесів протікання тяжких аварій на АЕС та необхідність математичного моделювання та проведення комп'ютерних експериментів.

Розробка математичних моделей сценаріїв тяжких аварій. Однією з пасивних систем захисту від тяжких аварій є система з підреакторним басейном охолоджувача для приймання струменя розплаву коріума, його подрібнення внаслідок взаємодії з випаровуючим охолоджувачем та подальшого утримання у керованому тепловому стані шару частинок коріуму, що утворюються. Математичні моделі проникнення струменів розплаву в підреакторний басейн з водою важливі для оцінки фізичних явищ, що відбуваються в системі пасивного захисту від тяжких аварій в конструкції з басейном води під реактором.

Коли внаслідок тяжкої аварії на АЕС зруйновано передостанній бар'єр безпеки (корпус реактора), залишається лише останній бар'єр (контейнмент), важливість якого в цьому випадку неможливо переоцінити. Не дивлячись на велику кількість робіт по розповсюдженню струменів, починаючи з робіт класиків 19 століття – Релея, Савара, Плато, Вебера та інших, а також чисельні роботи минулого століття, в тому числі по керованому розпаду струменів та плівок,

особливості струменів розплаву коріуму, проникаючих в басейн з водою або іншим охолоджувачем, все ще недостатньо досліджені. Це зумовлено тим, що такі струмені багато в чому відрізняються від раніше вивчених випадків: вони масивні, високотемпературні (перепад температур струменя та охолоджувача величезний і можливі парові вибухи), після розпаду струменя внаслідок його нестійкості до різноманітних збурень та наступного застигання крапель, що утворюються, формуються тверді частинки коріума, тому теплогідролічна система багатокомпонентна та багатофазна.

Ці струмені мають джерело внутрішнього генерування теплоти та постійно змінні умови їх розповсюдження у басейні, оскільки після розриву корпусу реактора високотемпературний та хімічно агресивний розплав коріуму, що виходить з нього, збільшує розміри утвореного в результаті руйнування корпусу отвору. При цьому різко змінюється температурний режим в результаті інтенсивного протікання процесів тепло- та масообміну між струменем та водою в басейні. Далі, навіть без урахування тепломасообмінних процесів, математичне моделювання процесів розповсюдження та подрібнення струменів в басейні залишається складною задачею внаслідок невизначеності фізичних властивостей розплаву коріуму та необхідності врахування впливу різноманітних факторів, наприклад: занесення повітря в турбулентний багатофазний струмінь при вході струменя в басейн (коли струмінь при вході створює умови підсосу повітря на границі змішення розплаву на води), втрата частини енергії струменя при його зіткненні з вільною поверхнею нерухомої води в басейні (сингулярність математичної моделі на границі контакту також ускладнює математичну модель), нестійкість вільних поверхонь струменя та його розпад на краплі, подальша поведінка крапель і т.д.

Характерна відмінність подібних струменевих течій від більшості досліджених випадків полягає також в тому, що вони розповсюджуються, в основному, під дією трьох сил – Архімедових, гідродинамічних (сил тиску води та протидії тертя), а також інерційних. А від інтенсивного випаровування води, що йде за рахунок випромінення від високотемпературного струменя, в початковий момент входу струменя в басейн струмінь йде переважно без безпосереднього контакту з водою, в такому «паровому мішку». В результаті важкий струмінь розплаву коріуму, проникає в басейн як паровий струмінь, котрий значно легший води і тому має великий вплив Архімедової сили, що діє вгору, проти руху струменя. Але ця дія Архімедових сил не прикладена безпосередньо до струменя розплаву, вона прикладена до парового струменя, всередині якого знаходиться струмінь коріуму. Важкий струмінь коріуму отримує, таким чином, опосередкований вплив Архімедових сил, що передаються йому через пару, що рухається назустріч струменю.

Також важливо врахувати різницю між тонкими струменями розплаву при початковій фазі витікання коріуму із зруйнованого реактора та товстими струменями в кінцевій стадії, коли розрив корпусу реактора збільшується в розмірах (розмивається розплавом що витікає). В першому випадку на довгий тонкий струмінь вплив Архімедових сил і зустрічного руху пари може призвести до згибних збурень осі струменя. В другому випадку цей вплив зводиться до простої сили лобової протидії та сили тертя на вільній поверхні струменя (може викликати нестійкість Кельвіна-Гельмгольца на вільній поверхні струменя, що призводить до відриву крапель та віднесення їх у потік води). Між цими двома граничними випадками по ходу збільшення розриву корпусу реактора має місце ряд перехідних процесів.

Дослідження привели до оцінки найбільш ймовірного розміру розриву корпусу порядку 20 см. При цьому більшість вчених вважають, що декілька розривів корпусу малоімовірні, оскільки після розриву корпусу в якомусь одному, найбільш слабкому місці, умови для виникнення нових розривів зникнуть внаслідок того, що розвантаження корпусу вже йде через сформований розрив і тиск падає по мірі виходу розплаву з корпусу реактора. Оскільки проблема утримання ядерного палива під час тяжкої аварії всередині контейнента – невід’ємна вимога проектування та експлуатації будь-якої сучасної АЕС, її дослідження в

різноманітних сценаріях протікання аварії – актуальна задача сучасної ядерної енергетики. Оскільки при будь-якому методі охолодження розплаву мають місце взаємодія коріуму з охолоджувачем, важливість проблеми залишається і для перспективних систем локалізації тяжких аварій на АЕС.

Рівняння руху товстого струменя розплаву у басейні. В нелінійній моделі проникнення товстого струменя розплаву у басейн охолоджувача найсуттєвішими є інерційна сила струменя, опір з боку басейна і архімедова сила. Ця модель одновимірна, але суттєво нелінійна. Структурна схема проникнення струменя до басейну представлена на рис. 1, де показано дві послідовні фази:

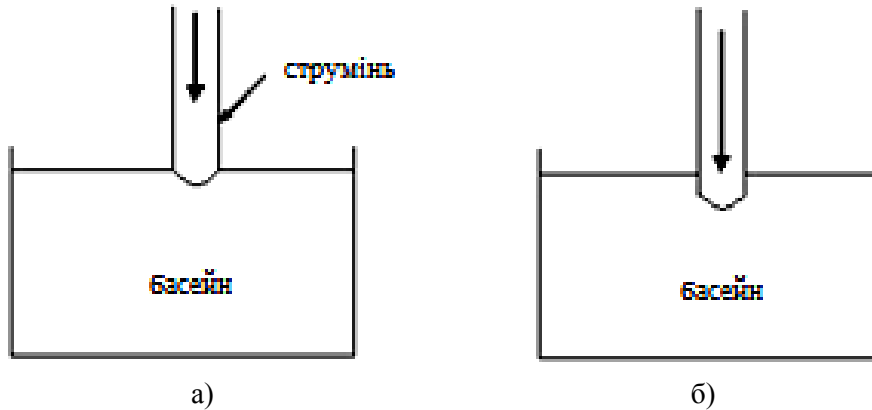


Рис. 1. До розгляду розповсюдження струменя у басейні з водою: на момент підходу до басейну (а) та входу у басейн (б)

Рівняння руху струменя як тіла змінної маси записується у вигляді:

$$\rho_1 \frac{d(hv_1)}{dt} = h(\rho_1 - \rho_2)g - \frac{1}{2} \rho_2 v_1^2, \quad (1)$$

де h – поточна глибина проникнення струменя в момент часу t , ρ_1, ρ_2 – густина струменя і рідини в басейні, відповідно, $v_1 = dh/dt$ – швидкість струменя, g – прискорення вільного падіння.

Приведене до безрозмірного вигляду, рівняння (1) має більш загальну форму та зручніше для використання у моделюванні процесу проникнення струменя до басейну:

$$h \frac{d^2h}{dt^2} + \left(1 + \frac{\rho_{21}}{2}\right) \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{\rho_{21} - 1}{Fr} h = 0, \quad (2)$$

де у якості масштабів довжини, швидкості та часу обрано, відповідно, радіус струменя r_0 , початкову швидкість струменя на підході до басейну u_0 та r_0/u_0 . $Fr = u_0^2/(gr_0)$ – число Фруда, яке визначає співвідношення інерційних та гравітаційних сил. Рівняння (2) показує, що процес розповсюдження струменя у басейні повністю визначається числом Фруда та співвідношенням щільностей рідини у басейні та у струмені.

Обчислювальний експеримент на ЕОМ. На основі одержаної математичної моделі були проведені обчислювальні експерименти для варіюємих параметрів системи. Одержані результати можуть бути використані для вивчення особливостей проникнення струменів розплаву до басейну з водою, важливих для розрахунку систем пасивного захисту від тяжких аварій на АЕС. Головна мета моделювання – визначити межі критичних параметрів системи пасивного захисту: максимальну глибину проникнення незруйнованого струменя, характерні розміри частинок, що утворюються і т.п.

На рис. 2 надано результати проведених розрахунків глибини проникнення струменя розплаву до басейну для двох випадків – з урахуванням точки біфуркації [1] та без урахування.

У точці біфуркації струмінь різко розширюється, що значно збільшує його опір і тому з урахуванням точки біфуркації глибина проникнення значно менша. Це явище підтверджується експериментальними даними.

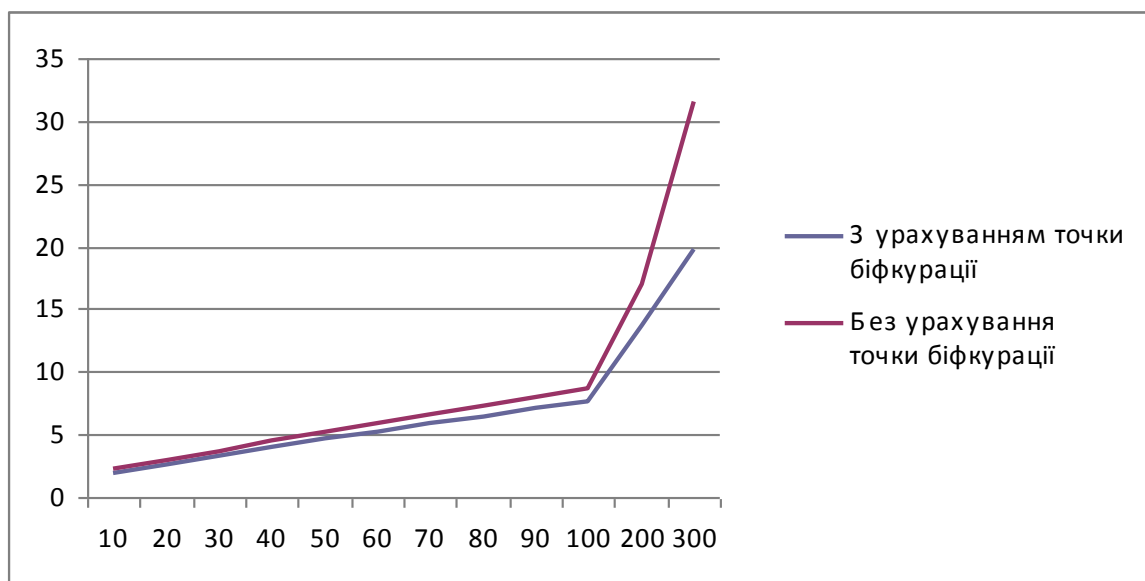


Рис. 2. Результати розрахунку глибини проникнення струменя до басейну: показана залежність глибини від часу, часова координата деформована після 100 с

З одержаних даних видно, що після точки біфуркації струменя, коли він різко розширюється (майже в 3 рази за діаметром) внаслідок втрати швидкості, опір басейну більш товстому струменю значно перевищує аналогічний опір струменю до його розширення. Тож вже на 200 секунді глибина проникнення струменя без урахування його біфуркації (верхня лінія на рис. 2) є завищеною майже в півтора рази і надалі швидко зростає. Це добре узгоджується з експериментальною картиною [4].

Література

1. Казачков И.В. Моделирование теплогидравлических процессов при тяжелых авариях на АЭС: монография / И.В. Казачков, Али Хасан Могаддам.- Киев: НТУУ «КПИ», 2008.- 172 с.
2. Казачков И.В. Современное состояние и некоторые проблемы моделирования тяжелых аварий на зарубежных АЭС // Ядерная и радиационная безопасность.- 2003.- №1.- С. 25-34.
3. Али Хасан Могаддам. Удержание кориума в контейнменте в тяжелых авариях на АЭС / Али Хасан Могаддам, И.В. Казачков // Энергетика: економіка, технології, екологія.- Киев.- 2007.- №2.- С. 13-21.
4. Analysis of Plunging Jet Penetration into Liquid Pool in Isothermal Conditions: ICMF 2001: Fourth International Conference on Multiphase Flow, (New Orleans, Louisiana, U.S.A., May 27 – June 1, 2001) / Park H.S., Kazachkov I.V., Sehgal B.R., Maruyama Y. and Sugimoto J. – New Orleans, 2001. – P. 65–69.
5. Али Хасан Могаддам. Моделирование удержания топлива внутри контейнмента во время тяжелых аварий на АЭС / Али Хасан Могаддам, И.В. Казачков // Ядерная и радиационная безопасность.- Киев.- 2006.- № 4.- С. 45-60.
6. Али Хасан Могаддам. Модели внедрения расплава кориума в подреакторное пространство с водой / Али Хасан Могаддам, И.В. Казачков // Ядерная и радиационная безопасность.- Киев.- 2007.- № 4.- С. 48-61.

7. Sehgal B.R. Accomplishments and challenges of the severe accident research / B.R. Sehgal // Nuclear Engineering and Design.- 2001.- Vol. 210.- P. 79-94.
8. Modelling of the corium melt interaction with water and vapour during severe accidents: NPP/ 3rd WSEAS Intern. Conferences, (Univ. of Cambridge, February, 23-25, 2008) / Hasan Moghaddam Ali, Kazachkov I.V. – Univ. of Cambridge, 2008. – P. 71-76.
9. Bechta S.V. Water boiling on the corium melt surface under VVER severe accident conditions / S.V. Bechta, S.A. Vitol, E.V. Krushinov, V.S. Granovsky et all. // Nuclear Engineering and Design. – 2000. – v.195. – P. 45-56.
10. Fischer M. The severe accident mitigation concept and the design measures for core melt retention of the European Pressurized Reactor (EPR)/ M. Fischer // Nuclear Engineering and Design. – 2004. – 230. – P. 169–180.
11. Technical Guidelines for Future Pressurized Water Reactors: IPSN/GRS. – November. – 2000. – 65 pp.
12. Оценка классификации устройства локализации расплава активной зоны: LYG-X-PD86-29-52260000-TR-0026-E: СПб АЭП, 2000.
13. Alexiades V. Mathematical modelling of melting and freezing processes / V. Alexiades, A.D. Solomon. – USA: Hemisphere Publishing Corporation, 1993. – 275 pp.
14. Bonacina C. Numerical solution of phase-change problems / C. Bonacina, G. Comini, A. Fasano, M. Primicerio // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1983. –Vol. 16. – P. 1825-1832.
15. Kazachkov I.V. A Model of a Steam Flow through the Volumetrically Heated Particle Bed / I.V. Kazachkov and M.J. Konovalikhin // Int. J. of Thermal Sciences. – 2002. – Vol.41. – P. 1077-1087.
16. Kazachkov I.V. Dryout Location in a Low-porosity Volumetrically Heated Particle Bed / I.V. Kazachkov, M.J. Konovalikhin and B.R. Sehgal // J. of Enhanced Heat Transfer. – 2001. – Vol.8. – no.6. – P. 397-410.

УДК 303.214.3

**ПРОГНОСТИЧНА ВАЛІДНІСТЬ ТЕСТІВ ЗНО 2009 РОКУ
ДЛЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ НДУ
ІМЕНІ МИКОЛИ ГОГОЛЯ**

Ковальчук Ю.О.

Прогностична валідність психометричних вимірювань є однією з найбільш важливих характеристик тестів відбору. Це один із підвидів критеріальної валідності, тобто такої валідності, яка визначається як кореляція результатів тесту з незалежним зовнішнім критерієм, який вимірює ту ж саму якість особи, що й тест. У 2009 році тести зовнішнього незалежного оцінювання в Україні були тестами відбору у тому розумінні, що за їх результатами відбувся конкурсний відбір випускників шкіл до вищих навчальних закладів. Очевидно, що тести ЗНО у такій якості повинні демонструвати добру прогностичну здатність, тобто передбачати, наскільки успішним буде навчання зарахованих до університету осіб.

У 2010 році Українським центром оцінювання якості освіти було вперше проведено моніторингове дослідження системи вступу до ВНЗ, частиною якого було з'ясування прогностичної валідності тестів [1]. Критерієм було обрано середній бал першокурсників за зиму та літню сесію. На жаль, дослідження стало не таким масштабним, як задумувалося його авторами, оскільки з 70 ВНЗ України, до яких вони звернулися за даними про успішність першокурсників, лише 25 університетів відгукнулися і надали такі дані. Результати тестів тих осіб, дані про успішність навчання яких на 1 курсі надали університети, були взяті з бази даних системи «Конкурс».

Зауважимо, що тести успішності з окремих предметів рідко дають надто високий коефіцієнт кореляції з критерієм [2]. Тим не менше, порівняння цього коефіцієнту для різних

ВНЗ та для різних напрямів підготовки бакалаврів дає дуже цінну інформацію для аналізу стану освіти в нашій країні, виявлення найбільш значущих проблем. Так, для нас, безумовно, цікавим є той факт, що для студентів педагогічних спеціальностей кореляція ЗНО з результатами навчання на першому курсі виявилася однією з найнижчих у порівнянні з іншими напрямками підготовки у ВНЗ (нижчим є цей показник лише для напрямів «Фізвиховання», «Мистецтво» та «Інженерні науки». Автори дослідження пояснюють цей факт дуже низькою престижністю педагогічної освіти. Дійсно, для тих напрямів, за якими в університетах практично не було конкурсного відбору (зараховували всіх бажаючих), і для яких ВНЗ докладає всіх зусиль, щоб не відраховувати відстаючих, годі чекати значимого зв'язку між результатами тестування і результатами навчання на 1 курсі. Тим не менше, згадане моніторингове дослідження виявило кореляцію між ЗНО та результатами навчання на першому курсі для педагогічних спеціальностей на рівні 0,45. Уточнимо, що цей показник обчислювався як коефіцієнт кореляції Спірмена (а не традиційний коефіцієнт Пірсона), тобто як такий, що використовується для даних, вимірних за порядковими шкалами. Вибір авторами дослідження коефіцієнта Спірмена пояснюється відхиленням розподілу результатів тестування у популяції зарахованих до ВНЗ від нормального – факт цілком зрозумілий, оскільки особи, прийняті до ВНЗ, утворюють нерепрезентативну вибірку з популяції всіх випускників середньої школи, для якої нормальний розподіл балів ЗНО був отриманий штучними методами.

Ніжинський університет не брав участі у цьому дослідженні. Тим більш цікаво порівняти наші дані з загальними по Україні. Нами була досліджена прогностична валідність тестів ЗНО для студентів, які у 2009 році проходили ЗНО і у 2010 році закінчили 1 курс фізико-математичного факультету. Були виділені такі змінні для дослідження зв'язків: результати ЗНО з математики, результати ЗНО з української мови та літератури, сума балів за ці два тести, загальний середній бал за 1 курс, середній бал з математичних дисциплін (математичний аналіз, алгебра, геометрія), середній бал з гуманітарних дисциплін. Об'єм вибірки – 85 осіб. Обчислювалися коефіцієнти кореляції Спірмена та Пірсона. Всі обчислення проводилися в пакеті STATISTICA, придбаному фізико-математичним факультетом на кошти програми ЄС Tempus.

В таблиці 1 наведена кореляційна матриця (коефіцієнти Спірмена) для всієї вибірки.

Таблиця 1

Кореляційна матриця для тестів ЗНО та результатів навчання на 1 курсі

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Середній бал за 1 курс (X_1)	1,000					
Середній бал з математичних дисциплін за 1 курс (X_2)	,976**	1,000				
Середній бал з гуманітарних дисциплін за 1 курс (X_3)	,827**	,767**	1,000			
Тест ЗНО з математики (X_4)	,591**	,589**	,482**	1,000		
Тест ЗНО з укр мови і літератури (X_5)	,578**	,592**	,560**	,477**	1,000	
Загальний бал ЗНО (X_6)	,669**	,679**	,594**	,856**	,842**	1,000

У таблиці двома зірочками відмічені ті випадки, у яких кореляція є значущою на рівні 0,01. Отже, всі коефіцієнти кореляції вказують на значущий зв'язок.

Як видно з таблиці, коефіцієнт валідності, обчислений як кореляція між сумою балів ЗНО та середнім балом за 1 курс, становить 0,669, що є значно вищим показником, ніж отриманий

по Україні для напрямку «Освіта» в дослідженні [1], і цей результат є значимим на рівні 0,01. Отриманий результат є характерним по Україні швидше для таких напрямків підготовки бакалаврів, як «Право» та «Соціальні науки». Цікаво, що зв'язок балів ЗНО з математики та середнім балом 1 курсу з математичних дисциплін виявився слабкішим – всього 0,589. З іншого боку, коефіцієнт кореляції між загальним балом ЗНО та середнім балом з математичних дисциплін на 1 курсі становить 0,679.

Ми не наводимо тут результатів окремо для різних спеціальностей фізико-математичного факультету, оскільки відповідні вибірки є надто малими, щоб робити висновки. Для кількості осіб близько 20 стають надто значущими будь-які не характерні в цілому впливи. Наприклад, було виявлено, що загальний коефіцієнт валідності є найнижчим для спеціальності «Соціальна інформатика». Аналіз показав, що до цього спричинив один студент, який за результатами ЗНО є найкращим в групі, а за результатами навчання на 1 курсі – на 14 місці з 16. Коефіцієнт кореляції при відкиданні даних цього студента з вибірки студентів спеціальності СІ зріс від 0,352 до 0,596.

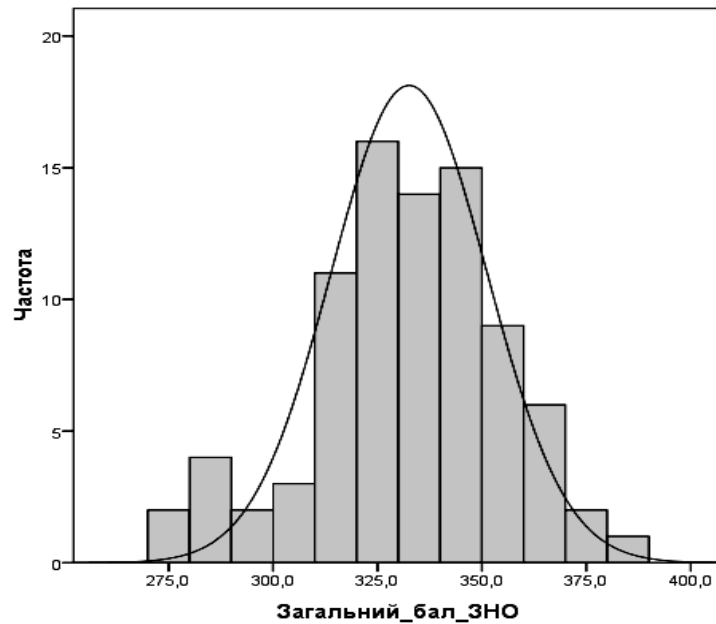
Доповнимо наші висновки ще деякими статистичними даними про осіб які вступили на навчання до фізико-математичного факультету. В таблиці 2 подано описові статистики – мінімальні та максимальні значення, середні бали та середні квадратичні відхилення по кожній змінній.

Таблиця 2

**Описові статистики для осіб,
які вступили на 1 курс фізико-математичного факультету у 2009**

	Мінімум	Максимум	Середнє	Стд. відхилення
Середній бал з математичних дисциплін за 1 курс	14,80	94,80	62,736	1,7818
Середній бал за 1 курс	22,750	93,875	66,447	1,527445383E1
Середній бал з гуманітарних дисциплін за 1 курс	35,00	92,333	70,059	1,242960884E1
Тест ЗНО з укр. мови і літ.	132,0	195,5	163,359	12,8597
Тест ЗНО з математики	129,5	198,5	168,065	12,6592
Загальний бал ЗНО	274,0	386,5	331,424	22,4879

На діаграмі зображені кількості осіб за інтервалами загального балу ЗНО.



Мал. 1. Розподіл кількості студентів 1 курсу за загальним балом ЗНО

На основі отриманих даних та їх порівнянні з загальноукраїнськими даними можна зробити, зокрема, висновок про те, що високий коефіцієнт прогностичної валідності ЗНО може свідчити про високу якість критерію, тобто відповідальне ставлення викладачів, які працюють на першому курсі фізико-математичного факультету, до оцінювання рівня успішності студентів.

Література

1. Моніторингове дослідження якості системи формування контингенту студентів ВНЗ України на основі ЗНО абітурієнтів // Вісник ТІМО. – 2010. – №4-5. – С. 14-96.
2. Анастаси А., Урбина С. Психологическое тестирование. – 7-е изд. – СПб.: Питер, 2007. – 688 с.: ил. – (Серия «Мастера психологии»). – ISBN 978-5-272-00106-1.

УДК 519.7(075/8)

ОСНОВИ РОБОТИ З МАТЕМАТИЧНОЮ СИСТЕМОЮ МАХІМА

Фетісов В.С.

Історія проекту, відомого нині під ім'ям Махіма, почалася наприкінці 60-х років у відомому Масачусетському Технологічному інституті, коли в ньому почалася робота над програмою символічних обчислень, яка одержала назву Масыма (від MAC Symbolic Manipulation). Мовою для розроблення системи був вибраний Lisp, і історія показала, наскільки це був правильний вибір: з існуючих у той час мов програмування він єдиний продовжує розвиватися і зараз. Принципи, покладені в основу проекту, пізніше були запозичені комерційними програмами, які зараз активно розвиваються: Mathematica і Maple. Отже, Масыма фактично стала родоначальником всього напрямку програм символічної математики. Масыма була закритим комерційним проектом, який фінансували державні і приватні організації, зокрема ARPA (Advanced Research Projects Agency, Енергетичний і Оборонний

Департаменти США (Departments of Energy & Defence). У 1982 р. професор Уїльям Шелтер (William Schelter) почав розробляти свою версію системи на основі цього ж коду під назвою Maxima. У 1998 р. Шелтеру вдалося одержати права на публікацію коду за ліцензією GPL. Отже, Maxima належить до класу freeware. Проект Maxima припинив своє існування в 1999 р. Уїльям Шелтер продовжував займатися розробкою Maxima до своєї смерті в 2001 р. Але з його смертю проект не припинив своє існування та розвиток. Зараз він активно розвивається, а участь в ньому є найкращою візитною карткою для математиків і програмістів усього світу.

Загальні відомості

Вікно програми

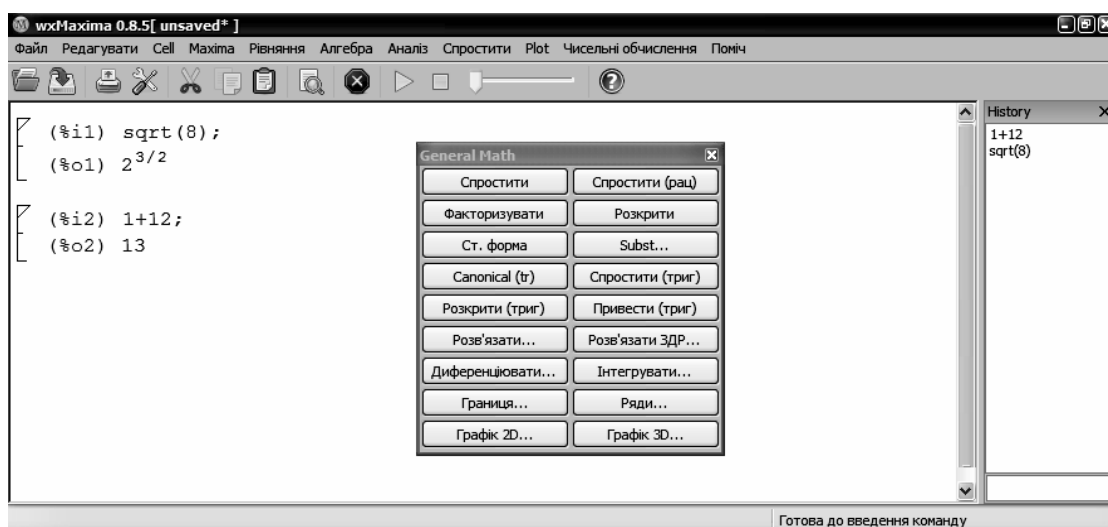
Maxima має багато локалізацій, у тому числі українську. При цьому під час інсталяції автоматично вибирається та локалізація, мовна розкладка якої встановлена за замовчуванням. Разом із тим, слід зауважити, що українська (так саме, до речі, як і російська) локалізація останніх версій недосконала: у неї відсутній переклад дуже багатьох команд та тексту у вікнах. Залишається сподіватися, що питання адекватної локалізації буде з часом вирішено.

У wxMaxima формули вводяться в текстовому вигляді, а виведення відображається графічно, звичними математичними символами. Головне вікно програми є документом, в якому вводяться команди і вирази та виводяться результати.

Вікно програми містить типові елементи Windows: панель заголовка з назвою активного документу, рядок системного меню, панель інструментів та рядок стану.

У головному вікні програми можна вивести кілька панелей, доступ до яких здійснюється за командою **Maxima ▶ Pans** (панелі):

1. *General Math* (загальні математичні дії). Забезпечує доступ до найпоширеніших дій: спрощування математичних виразів, диференціювання, побудова графіків.
2. *Statistics* (статистика). За допомогою цієї панелі користувач може швидко розрахувати такі найбільш широко використовувані статистичні показники як середня величина, дисперсія або побудувати статистичні графіки, зокрема гістограму.
3. *History* (історія). Відображає всі команди, що були введені у поточному сеансі роботи.
4. *Insert Cell* (вставка у комірку). Дозволяє вставити у документ об'єкти різного формату, у тому числі текстові коментарі, зображення.




Усі ці панелі є плаваючими і їх можна простим перетягуванням перемістити у будь-яке місце головного вікна.

Документ системи


Після завантаження системи її головне вікно містить новий робочий документ, у якому і здійснюються безпосередньо усі обчислення. Він складається з окремих комірок, в яких зберігається вся інформація. Комірки з лівого боку виділяються квадратними дужками.

Додавати до документа нові вирази можна у будь-якому місці документа. Наприклад, якщо треба вставити обчислення всередині документа, то цього слід натиснути мишею на проміжку між двома дужками – після чого між ними повинна з'явитися горизонтальна лінія – і відразу після чого починати введення нового виразу.

Будь-який фрагмент документа можна видалити. Зокрема, для вилучення комірки слід її виділити, натиснувши на дужку, а потім, наприклад, натиснути клавішу **<Delete>** або кнопку  на панелі інструментів.

Сесія

Сеанс роботи з Maxima називають *сесією*. Сесія, по суті, є поточним документом, що містить роботу користувача із системою. Вона складається з команд введення, виведення та повідомлень про помилки. Сесію можна зберегти на диску за командою **Файл ▶ Зберегти**.

Відкриття файлу сесії здійснюється за командою **Файл ▶ Open** або натисканням кнопки  “Відкрити документ” на панелі інструментів.

Довідкова система

Доступ до довідкової системи надає пункт головного меню **Поміч ▶ Maxima Help**. Довідку про конкретну функцію можна одержати і з командного рядка, набравши у ньому *ім'я функції*, наприклад:

```
? diff
```

Окрім довідки, для багатьох функціях *Maxima* є приклади їх використання. Приклад можна завантажити функцією *example()*. Виклик цієї функції без аргументу відобразить список всіх імен доступних прикладів; виклик виду *example(name)* завантажить в поточну сесію і виконає вказаний файл прикладу.

```
example(diff)
```

Математичні вирази

Обчислення у системі здійснюються за допомогою математичних виразів, які є головним об'єктом будь-якої математичної системи. Вираз визначає те, що повинно бути обчислено в чисельному або символічному вигляді. Математичні вирази складаються з чисел, констант, змінних, операторів, функцій і спеціальних знаків.

Правила синтаксису мови системи

1. Усі імена команд записуються з використанням букв латинського алфавіту.
2. Аргументи команд і функцій подаються в круглих дужках.
3. Введення команди завершується символом ";" або "\$".
4. Велика і маленька літери розрізняються.
5. У числах ціла частина від дробової відокремлюється точкою.
6. Знаки арифметичних операцій в обов'язковому порядку повинні явно вказуватися у виразах.
7. Порядок дій у виразі загальноприйнятий і відповідає порядку дій в математиці.

Арифметичні оператори

Оператори – це елементи мови, за допомогою яких можна створювати математичні вирази. До них, наприклад, належать знаки арифметичних операцій, обчислення сум, добутоків, похідної, інтеграла. Оператори використовуються разом з операндами. Наприклад, у виразі “5-1” знак “-” є оператором віднімання, а числа “5” і “1” – операндами.

Для введення операції слід встановити курсор і просто вводити потрібну інформацію з клавіатури, закінчивши введення крапкою з комою. Після цього натискається <Enter>. Якщо *Maxima* працює в режимі автоматичних обчислень, то після цього буде одержаний результат. Після обчислення об'єкта у комірці *Maxima* виводить результат і чекатиме наступної команди (на панелі стану при цьому відображається текст "Готова до введення команди").

Як було зазначено раніше, документ системи складається з окремих комірок, в яких зберігається вся інформація. При цьому кожна комірка має свою мітку. Мітка – це ім'я комірки, взяте в круглі дужки. Комірки введення позначаються як %i з номером (i від input – введення), комірки виведення – як %o з відповідним номером (o від output – виведення). Якщо виникає необхідність приховати зміст комірки виведення, то слід натиснути на трикутний маркер у клітинці введення, після чого цей маркер набуває чорного кольору. Натискання на ньому призводить до відображення клітинки виведення. Взагалі візуально просто з'ясувати, які комірки вже обчислені, а які – ні. Якщо маркер має зафарбований чорним кольором, то це і є ознакою того, що комірка містить результат, а якщо – ні, то результат слід ще обчислити.

Останню або єдину команду в рядку можна не завершувати жодним символом – це спрацює так само, як якби вона була завершена символом “;”. В одному рядку може бути розташовано кілька команд. При цьому якщо ввести кілька команд в одному рядку, кожній з них все одно буде відповідати своя комірка зі своїм іменем.

При введенні можна звертатися до будь-якої попередньої комірки за її іменем, підставляючи його до будь-якого виразу. Крім того остання комірка виведення позначається через “%”, а остання комірка введення – через “_”. Це дозволяє звертатися до останнього результату, не використовуючи її номер.

Якщо виведення результату обчислення не потрібно, то його можна відключити, завершивши команду символом “\$” замість “;”.

Maxima використовує такі арифметичні операції:

Таблиця 1

<i>Оператор</i>	<i>Призначення оператора</i>
$x*y$	Множення x на y
x^y або $x**y$	Піднесення x до ступеня y
x/y	Ділення x на y
sqrt	$\sqrt{\quad}$
$x!$	Обчислення факторіалу

Слід зауважити, що система немає чіткого розмежування між операторами та функціями. Більш того, кожний оператор – це насправді функція:

```
(%i1) "+"(1,3,5);
(%o1) 9
```

Коли вбудована функція або оператор *Maxima* не може одержати для переданого виразу однозначний результат (наприклад, за недостатності даних), вона намагається максимально спростити цей вираз. Наприклад, якщо x не заданий, то спроба визначити для нього абсолютне значення призведе до такого:

```
(%i23) abs(-x);
(%o23) |x|
```

Спроба виконати математичну дію, для якої відсутній точний розв'язок, призведе до того, що результат буде подано у символьному вигляді:

```
(%i20) sqrt(8);
(%o20) 23/2
```

Але система дає змогу обчислити такого роду вирази і у вигляді десяткового числа. Для цього слід виділити результат у комірці виведення, викликати на ньому контекстне меню і вибрати з нього пункт “To Float” (перетворити у число з плаваючою точкою).

Функції

Функції – це підпрограми з унікальними іменами, що мають об’єкти, які виконують певні перетворення над своїми аргументами. У відповідь на звертання до них функції повертають результати таких перетворень. Повернення результату – це невід’ємна риса функцій. При цьому результат функції підставляється на місце її виклику, що дозволяє використовувати функції в математичних вираженнях.

Усі функції і оператори Maxima працюють не тільки з дійсними, але і комплексними числами.

У наступній таблиці подані приклади деяких функцій.

Таблиця 2

Елементарні математичні функції

<i>Математичні функції</i>	
<i>Abs(x)</i>	$ x $
<i>Sqrt(x)</i>	\sqrt{x}
<i>Mod</i>	Залишок від ділення
<i>signum(x)</i>	Повертає число “+1”, якщо значення x додатне, і “-1” – якщо від’ємне.
<i>max(x1,...,xn)</i>	Повертає максимальне із заданих чисел.
<i>min(x1,...,xn)</i>	Повертає мінімальне із заданих чисел.
<i>Тригонометричні функції</i>	
<i>Sin(x)</i>	синус
<i>Cos(x)</i>	косинус
<i>Tan(x)</i>	тангенс
<i>Cot(x)</i>	котангенс
<i>Asin(x)</i>	арксинус
<i>Acos(x)</i>	арккосинус
<i>Sec(x)</i>	секонс
<i>Експоненціальні</i>	
<i>Exp(x)</i>	експонента числа x
<i>Log(x)</i>	натуральний логарифм числа x

Змінні

При побудові імені в системі використовуються наступні правила:

1. Великі і маленькі літери розрізняються.
2. При наданні змінним числових значень використовують арабські цифри, десяткову крапку і знак мінус.

Для присвоювання змінним значень використовують символ “:”. Знак “=” використовується в рівняннях.

c:2; b:3;

Якщо якісь символ вже має значення, то його все рівно можна використовувати у виразі. Для цього використовується символ апостроф: його застосування перед будь-яким символом або виразом запобігає його обчисленню.

(%i1) b:x+y\$ c:x-y\$

(%i3) b+c;

(%o3) 2*x

(%i4) b+'c;

(%o4) y+x+c

При цьому слід звернути увагу на таке. Якщо апостроф застосовується перед іменем функції, то блокується обчислення самої функції, але не її аргументів. Якщо ж поставити апостроф перед виразом, поміщеним в дужки, то не обчисленим буде весь цей вираз у цілому, тобто і всі функції, що входять до нього, і всі аргументи цих функцій.

(%i18) a:%pi/4\$ b:%pi/2\$

(%i20) integrate(sin(x), x, a, b);

(%o20) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(%i21) 'integrate(sin(x), x, a, b);

(%o21) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$

(%i22) '(integrate(sin(x), x, a, b));

(%o22) integrate(sin(x), x, a, b)

У термінології системи не обчислена форма виразу називається “noun form”, обчислена – “verb form”.

З іншого боку система дає змогу примусово обчислити будь-який вираз. Для цього використовується оператор, який складається з двох апострофів.

(%i23) ''%;

(%o23) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

У системі існує можливість відображення всіх змінних, що використовуються в поточній сесії. Для цього слід виконати команду **Maxima** ▶ **Show Variables (Показати змінні)**. Після цього у комірці введення з’явиться текст “values” і у комірці виведення у квадратних дужках – перелік змінних.

Значення змінної можна очистити за допомогою функції **kill()**. Для цього потрібно ввести kill(name), де name – ім’я виразу, що знищується; причому це може бути як ім’я, призначене вами, так і будь-яка комірка введення або виведення. За допомогою функції **kill(all)** можна очистити разом всю пам’ять і звільнити всі імена. В цьому випадку очистяться у тому числі і всі комірки введення-виведення, а їхня нумерація знову почнеться з одиниці. Так саме поступають і з функцією, якщо потрібно не виконувати її, а використати її ім’я в математичному контексті.

Системні (зарезервовані) змінні

Імена всіх системних змінних починаються зі знаку “%”. Це дозволяє у першу чергу уникнути можливості їх збігу з іменами змінних, що надаються користувачами, які теж часто прагнуть зробити їх максимально короткими. Завдяки цьому легко визначити зарезервовані системою імена.

Таблиця 3

Системні змінні

Запис	Призначення
%i	Уявна одиниця ($\sqrt{-1}$).
%pi	Число π .
%e	Число e (основа натурального логарифма, 2,7182818).
inf	Додатна системна нескінченність.
minf	Від’ємна системна нескінченність.
true	Логічне “істинне”.
false	Логічне “хибне”.



Системні змінні захищені: не можна змінити їх значення або вилучити. Наприклад, при спробі надати такій змінній якесь значення, програма видасть повідомлення про помилку:

```
(%i1) %pi:3333;
```

```
assignment: cannot assign to %pi; it is a declared numeric quantity.
```

```
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

*Основні типи змінних***Комплексні числа**

Система виконує дії з комплексними числами. Вони записуються а алгебраїчної формі, з уявною одиницею, яка позначається %i (враховується регістр, тобто i подається саме маленькою літерою); тобто у вигляді $a+b\%i$, де a і b – відповідно дійсна й уявна частини числа.

```
(3+5*%i) + 2*%i
```

Масиви

Для створення масивів використовується команда **matrix**.

Синтаксис команди: `matrix([значення елементів у рядку, що відокремлюються один від одного комою] [,значення елементів у рядку, що відокремлюються один від одного комою] ...)`.
Значення рядків також відокремлюються комою.

Отже, для створення вектора-рядка слід застосувати команду на зразок

```
(%i6) V1:matrix([1, 2, 3, 4, 5]);
```

```
(%o6) matrix([1,2,3,4,5])
```

Роботу з матрицями забезпечують також команди пункту головного меню **Алгебра**, і кілька інструментів палітри “Statistics”.

Наприклад, створення масиву за допомогою команд пункту головного меню Алгебра, здійснюється так:

1. Виконати команду **Алгебра** ► **Enter Matrix (Увести матрицю)**. З’явиться вікно “Матриця”.

2. Визначити розмірність матриці, а за необхідності її тип, наприклад “діагональна”, і натиснути «ОК».

3. З’явиться вікно заданої розмірності, в якому вводяться елементи матриці.

4. У полі “Name” (Ім’я) ввести ім’я матриці.
 (%i2) a:matrix([a,b],[c,d]);
 (%i3) b:matrix([0,1],[c,d]);
 (%i5) a+b;

Таблиця 4

Операції з масивами

Операція		Примітка
+	Додавання	Масиви мають бути однакової розмірності.
-	Віднімання	
.	Поелементне множення масивів	Масиви мають бути однакової розмірності. При цьому кількість рядків у першому масиві повинна дорівнювати кількості стовпчиків у другому, а кількість стовпчиків у першому – кількості рядків у другому. Отже, у разі виконання множення для векторів, один із них повинен бути вектором-стовпчиком, а другий – вектором-рядком.
*	Множення масивів або множення масиву на скаляр	

Розмірність матриці дуже просто змінити, встановивши курсор всередині значень, що були виведені під час її створення, і вилучити непотрібні рядки або стовпчики. При цьому слід не забувати, що кількість елементів у кожному стовпчику або рядку має бути однаковою.

Символьні перетворення

Перетворення раціональних виразів

Значна частина функцій системи призначена для перетворення раціональних виразів. *Раціональним* називається вираз, що складається тільки з арифметичних операторів і піднесення до натурального ступеню. Елементи такого виразу можуть також містити не арифметичні та не степеневі функції, тоді такі елементи вважаються атомарними, тобто неподільними і не перетворюваними.

Імена всіх функцій системи для оброблення раціональних виразів містять текст “rat” (від слова rational).

Функція rat

Ця функція перетворює раціональний вираз до так званої канонічної форми (Canonical Rational Expression, CRE). Тобто розкриває всі дужки, потім приводить все до спільного знаменника, підсумовує і скорочує; крім того, приводить всі числа в кінцевому десятковому запису до раціональних.

Синтаксис функції: **rat**(вираз).

```
(%i2) rat(1/x+x/(x+1));
(%o2) 
$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x}$$

```

При використанні у функціях складних математичних виразів зручно виконувати дії за два етапи:

1. Ввести математичний вираз. Після його введення у текстовому вигляді він буде відображений у графічному, що дає змогу перевірити коректність введення виразу.
2. Ввести формулу, звернувшись в ній до комірки, що містить математичний вираз,

тобто до останньої комірки.

$$\frac{-x}{(x^3 + 4x^2 + 5x + 2)}$$

$$\left[\begin{array}{l} (\%i31) \quad (5*x^4+7*x^3+5*x+4) / ((x^2+4) * (x-2)^2 * (x^2-1)) ; \\ (\%o31) \quad \frac{5x^4 + 7x^3 + 5x + 4}{(x-2)^2(x^2-1)(x^2+4)} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (\%i33) \quad \text{partfrac}((\%o31), x) ; \\ (\%o33) \quad -\frac{21x+23}{20(x^2+4)} + \frac{1}{30(x+1)} + \frac{21}{10(x-1)} - \frac{13}{12(x-2)} + \frac{25}{4(x-2)^2} \end{array} \right.$$

Розкладання біномів

Для цього використовують функцію *ratexpand*(вираз). Вона розкриває дужки в раціональному виразі (одне із значень слова *expand* і є “розкрити дужки”). На результат функції впливає системна опція “*ratdenomdivide*”; яка за замовчуванням має значення “*true*”. У цьому випадку кожен дріб, в якому чисельник є сумою, розкладається на суму дробів з однаковим знаменником. Якщо ж надати цій опції значення “*false*”, то тоді всі дроби з однаковим знаменником будуть, навпаки, об’єднані в один дріб з чисельником у вигляді суми чисельників початкових дробів.

```
(%i2) ratexpand((x+1)**2*(%e-1)/(x+2)*(2*x+1));
```

$$(\%o2) \quad \frac{2 \%e x^3}{x+2} - \frac{2 x^3}{x+2} + \frac{5 \%e x^2}{x+2} - \frac{5 x^2}{x+2} + \frac{4 \%e x}{x+2} - \frac{4 x}{x+2} + \frac{\%e}{x+2} - \frac{1}{x+2}$$

```
(%i3) ratdenomdivide:false;
```

```
(%o3) false
```

```
(%i4) ratexpand((x+1)**2*(%e-1)/(x+2)*(2*x+1));
```

$$(\%o4) \quad \frac{2 \%e x^3 - 2 x^3 + 5 \%e x^2 - 5 x^2 + 4 \%e x - 4 x + \%e - 1}{x+2}$$

Тобто зовні результат в цьому випадку виглядатиме майже так само, як і у функції *rat*(); до того ж єдина видима користувачеві різниця виявляється тільки в раціональних виразах від декількох змінних (або різних ірраціональних виразів). Полягає ця різниця в тому, що після *ratexpand*() і у чисельнику, і в знаменнику дроби всі дужки будуть розкриті, у разі ж *rat*() доданки, де присутні, скажімо, дві змінних, будуть згруповані, і одна з них буде винесена за дужки (у документації така форма запису називається “рекурсивною” (*recursive*)):

```
(%i5) rat(%);
```

$$(\%o5) \quad \frac{(2 \%e - 2) x^3 + (5 \%e - 5) x^2 + (4 \%e - 4) x + \%e - 1}{x+2}$$

Спрощення виразів

Для спрощення раціональних виразів застосовується функція *ratsimp*(вираз). Вона спрощує вираз за рахунок раціональних перетворень, але, на відміну від інших функцій для оброблення раціональних виразів, працює у тому числі і “углиб”, тобто ірраціональні частини виразу не розглядаються як атомарні, а спрощуються, в тому числі це стосується всіх раціональних елементів всередині виразу.

```
(%i20) ratsimp(sin(x)^2+sin(x)^2);
(%o20) 2 sin(x)^2
```

Розкладання виразу на множники

Для цього використовується функція *factor*. При цьому якщо аргумент функції буде ціле число, то вона розкладе його на прості множники; якщо ж – раціональне число, то на множники будуть розкладені його чисельник і знаменник:

```
(%i21) factor(a^3-b^3);
(%o21) -(b-a)(b^2+a*b+a^2)
```

```
(%i22) factor(9!+1);
(%o22) 19 71 269
```

Знаходження найбільшого спільного дільника многочленів

З цією метою застосовується функція *gcd*, аргументом якої є математичний вираз-многочлен.

```
(%i7) gcd(x^3-1,x^2-1,(x-1)^2);
(%o7) x-1
```

Перетворення раціонального дробу у прості дроби

З цією метою застосовується функція *partfrac*. Вона має два аргументи: математичний вираз і змінна, за якою відбувається перетворення.

```
(%i30) partfrac(-x/(x^3+4*x^2+5*x+2),x);
(%o30) 2/(x+2) - 2/(x+1) + 1/(x+1)^2
```

Розв’язування завдань лінійної алгебри

Таблиця 5

Функції знаходження числових характеристик матриць

<i>transpose</i> (M)	Транспонування матриці M.
<i>matrix_size</i> (M)	Визначення кількості стовпчиків та рядків матриці.
<i>rank</i> (M)	Визначення рангу матриці.
<i>mattrace</i> (M)	Визначення сліду (суми діагональних елементів) квадратної матриці.*
<i>determinant</i> (M)	Обчислення визначника (детермінанту) квадратної матриці
<i>invert</i> (M)	Обчислення матриці, оберненої до M.

* Застосуванню передуює виконання функції load ("nchrpl").

Розв'язування рівнянь

Для розв'язування рівнянь або систем рівнянь в *Maxima* використовується функція *solve*, яка у найпростішому вигляді має тільки один аргумент: окреме рівняння або система рівнянь. При цьому якщо права частина рівняння дорівнює нулю, то її можна опустити.

```
solve(x^2=1);
```

```
[x=-1, x=1]      (чисельні варіанти рішення – можливі значення x)
```

Якщо рівняння не має розв'язку на множині дійсних чисел ($x^2 + 1 = 0$), то *Maxima* шукає рішення серед комплексних чисел:

```
(%i34) solve(x^2+1, x);
(%o34) [ x = - %i , x = %i ]
```

Якщо корені рівняння не визначаються в радикалах або їх вираз досить громіздкий, то *Maxima* подає відповідь у такому вигляді:

```
(%i25) solve(x^5-3*x+1);
(%o25) [ 0 = x^5 - 3 x + 1 ]
```

Для розв'язування систем рівнянь і нерівностей аргумент функції *solve* подається у вигляді множини рівнянь і нерівностей, тобто вони беруться у квадратні дужки і відокремлюються один від одного комою. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

```
(%i26) solve([x^2+y^2=4, x-y=2]);
(%o26) [ [ y = - 2 , x = 0 ] , [ y = 0 , x = 2 ] ]
```

У наступному прикладі функція *solve* використовується для розв'язування системи з трьох рівнянь з трьома невідомими:

```
(%i32) s:[x+y+z=3, x+2*y-z=2, x+y*z+z*x=3];
(%o32) [ z + y + x = 3 , - z + 2 y + x = 2 , y z + x z + x = 3 ]

(%i33) solve(s, [x, y, z]);
(%o33) [ [ x = 1 , y = 1 , z = 1 ] , [ x = 7 , y = - 3 , z = - 1 ] ]
```

Операції математичного аналізу**Суми**

Для знаходження сум призначена функція *sum*. Синтаксис функції:

Sum(вираз, змінна, нижня межа зміни змінної, верхня межа зміни змінної).

```
sum(i^3, i, 0, 5);
```

Якщо надати останньому аргументу значення системної змінної додатної нескінченності "inf", то це буде ознакою відсутності верхньої границі і буде розраховуватися нескінченна сума. Так саме нескінченна сума буде розраховуватися, якщо надати аргументу "нижня межа зміни змінної" значення системної змінної від'ємної нескінченності "minf". Такі самі аргументи з такими саме значеннями використовується і в інших командах математичного аналізу.

```
sum(i^3, i, 0, inf);
```

Добутки

Для знаходження скінчених і нескінчених добутоків використовується функція *product*.

Вона має такі самі аргументи, як і функція *sum*.

```
product(i^3, i, 1, 5)
```



```
product(i^3, i, 1, inf);
```

Границі (ліміти)

Для знаходження границь служить функція *limit*.

Синтаксис функції: *limit* (вираз, змінна, точка). Якщо аргументу “точка” надати значення “inf”, то це буде ознакою відсутності границі.

```
(%i38) limit(sin(3*x)/x, x, 0);
```

```
(%o38) 3
```

```
(%i39) limit(sin(3*x)/x, x, inf);
```

```
(%o39) 0
```

Для обчислення односторонніх границь використовується додатковий аргумент, який має значення plus для обчислення границі справа і minus – зліва.

Диференціали

Для знаходження диференціалів використовується функція *diff*. Синтаксис функції: *diff*(вираз, змінна, точка). Перший аргумент – функція, що диференціюється, другий – змінна, за якою треба брати похідну, 3-й (необов’язковий) – порядок похідної.

```
(%i53) f : x^2 + 1/2;
```

```
(%o53) x^2 + 1/2
```

```
(%i54) diff(f, x);
```

```
(%o54) 2 x
```

Якщо використовувати функцію з параметром, то форма запису функції змінюється: після ім’я функції записуються символи “:=”.

```
(%i53) f(x):=x^2+1/2;
```

За таким варіантом обчислення тіла функції відкладається.

Інтеграли

Для знаходження інтегралів в системі використовується функція *integrate*. Для знаходження невизначеного інтегралу у функції використовуються два аргументу: ім’я функції і змінна, за якою відбувається інтегрування.

```
(%i55) f: sin(x)*x^2;
```

```
(%o55) x^2 sin(x)
```

```
(%i56) integrate(f, x);
```

```
(%o56) 2 x sin(x) + (2 - x^2) cos(x)
```

Максіма у разі неоднозначної відповіді може ставити додаткові питання, як в наступному прикладі:

```
(%i58) integrate(x^n, x);
```

```
Is n + 1 zero or nonzero? nonzero;
```

```
(%o58) x^(n+1) / (n+1)
```

Відповідь повинна містити текст з запитання. У даному випадку це буде “zero”, якщо вираз дорівнює “0”, або “nonzero” у протилежному випадку.

Для знаходження визначеного інтеграла у функції слід вказати додаткові аргументи – межі інтегралу:

```
(%i41) integrate(f1,x,1,5);
(%o41) 10 sin(5)- 23 cos(5)- 2 sin(1)- cos(1)
```

Mathcad допускає завдання і нескінченних меж інтегрування. Для цього для 3-го і 4-го аргументів функції застосовують значення “-inf” та “inf”.

```
(%i42) integrate(f1,x,-inf,inf);
(%o42) 0
```

УДК 519.7(075/8)


СИМВОЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ У MATHCAD

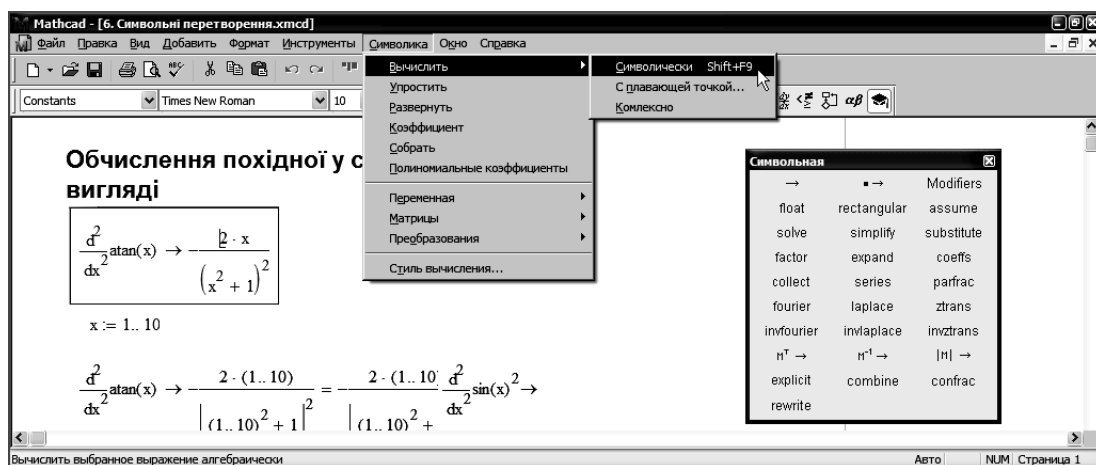
Фетісов В.С., Фетісова Л.Б.

Одна з принципів відмінностей символічної математики від чисельної математики є те, що якщо при використанні чисельної математики користувач, як правило, задовольняємося наближеним рішенням, то для символічної математики таке рішення є нонсенсом.


У символічній математиці результатом обчислення є *інший вираз*. При цьому його форма може бути різною, оскільки початковий вираз може бути розкладений в ряд або на множники, проінтегрований і т. ін. Символьні оператори математичних систем як раз і призначені для визначення форми другого виразу.

Будучи системою чисельних розрахунків, *Mathcad* здатний також знаходити розв’язок багатьох завдань у символічному вигляді, застосовуючи для цього символічний процесор відомого пакета символічної математики *Maple*.

Дії для роботи з операторами символічної математики містить спеціальна символічна палітра  і пункт головного меню **Символіка**. Відповідно і самі символічні перетворення можуть бути виконані двома способами: за допомогою інструментів палітри або команд головного меню.



Мал 1. Інструменти символічних перетворень

У середовищі *Mathcad* оператор “=” завжди ініціює виведення числа, в той час як оператор “→” повертає також вираз.  Цей оператор, по-перше, застосовується тільки для всього виразу в цілому, а не окремої його частині, по-друге, його не можна застосувати до результату попереднього оператора “→”.


Для здійснення аналітичного перетворення слід виконати такі дії:

1. Виділити математичний вираз.
2. На панелі символічних операторів натиснути символ “→” або комбінацію клавіш <Ctrl>+<.;>.
3. Клацнути мишею за межами формульного блоку або виконати команду **Інструменти ▶ Вычислить ▶ Вычислить сейчас**.

Після виконання цієї дії *Mathcad* відобразить символічний варіант виразу. При цьому якщо символічне перетворення не відбудеться, то вираз у правій частині після оператора “→” буде повторювати початковий.

Наведемо приклади деяких перетворень.

Розкладання біномів (розкриття дужок)

Для розкладання біномів застосовують функцію *expand, развернуть* (розвернути). Розкладання може бути здійснено двома способами. За першим варіантом слід виділити математичний вираз і виконати команду **Символика ▶ Развернуть**. Другий варіант здійснюється за допомогою палітри  “Символьная”:

1. Натиснути на палітрі “Символьная” кнопку «**expand**».
2. У документі з’явиться ця команда з двома аргументами-шаблонами, що вимагають обов’язкового заповнення. Першим аргументом повинен бути математичний вираз, а другим – змінна з математичного виразу, за якої відбувається розкладання біному.

$$(z + y)^3 \text{ expand } z \rightarrow y^3 + 3 \cdot y^2 \cdot z + 3 \cdot y \cdot z^2 + z^3$$

Спрощення математичних виразів

Для спрощення довгих математичних виразів, наприклад, тригонометричних, застосовують функцію *simplify, упростить* (спростити). Спрощення може бути здійснено двома способами. За першим варіантом слід виділити математичний вираз і виконати команду **Символика ▶ Упростить**. Другий варіант здійснюється за допомогою палітри “Символьная”:

1. Натиснути на палітрі “Символьная” кнопку «**simplify**».
2. В тілі документа з’явиться ця команда з аргументом-шаблоном, яким має бути математичний вираз.

$$\sin(x)^2 + \sin(x)^2 \text{ simplify} \rightarrow 2 \cdot \sin(x)^2$$


Розкладання на многочлени

Розкладання на многочлени математичних виразів здійснюється за допомогою функції *factor (фактор)*. За тією самою функцією здійснюється розкладання на множники і цілих чисел. Розкладання також може бути здійснено двома способами. За першим способом достатньо виділити вираз або число і виконати команду **Символика ▶ Фактор**. За другим варіантом застосовують команду *factor* з палітри “Символьная”. Вона має два обов’язкових аргументи: вираз (або число) і змінна. Якщо першим аргументом буде число, то другим аргументом може бути будь-який ідентифікатор. Зауважимо, що за другим способом не завжди вдається знайти символічний результат для виразів, які розв’язуються за першим способом.

$$300 \text{ factor } b \rightarrow 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Розкладання виразу від однієї або кількох змінних в околі певної точки

Такого роду розкладання в здійснюється за допомогою функції *series* (*расширить последовательно*). Для виконання дії розкладання слід натиснути на палітрі “Символьная” кнопку «**series**». В тілі документа з’явиться ця команда з аргументом-шаблоном, яким має бути математичний вираз. За замовчуванням система розкладає вираз в ряд відносно точки “0” і використовує усі члени ряду, у яких сума показників ступені менше шести. Але можна визначати й інші значення точки. Для цього після назви функції *series* слід ввести координати

точки, наприклад $\text{series}, y = 2$.  При цьому для позначення відношення величин y і 2 як рівності використовується жирний знак рівності.

$$e^r \text{ series} \rightarrow 1 + r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{6} + \frac{r^4}{24} + \frac{r^5}{120}$$


$$e^r \text{ series}, r = 13 \rightarrow e^{13} + e^{13} \cdot (r - 13) + \frac{e^{13} \cdot (r - 13)^2}{2} + \frac{e^{13} \cdot (r - 13)^3}{6} + \frac{e^{13} \cdot (r - 13)^4}{24} + \frac{e^{13} \cdot (r - 13)^5}{120}$$

Перетворення дробу у прості дробі

Перетворення здійснюється за допомогою функції *parfrac* (*преобразовать в элементарные дроби, перетворити в элементарні дроби*). Для виконання дії перетворення потрібно натиснути на палітрі “Символьная” кнопку «**parfrac**». В тілі документа з’явиться ця команда з аргументом-шаблоном, до якого слід підставити математичний вираз.


$$x1 := \frac{-c \cdot 3}{c^3 + 4 \cdot c^2 + 5 \cdot c + 2} \quad x1 \text{ parfrac} \rightarrow \frac{3}{(c + 1)^2} - \frac{6}{c + 1} + \frac{6}{c + 2}$$

Об’єднання членів з однаковими степенями

Функція *collect* (*собирает полиномиальные термы*) або команда меню *Подобные* об’єднує члени з однаковими степенями для виділеного виразу. Результатом є поліном для виразу.  Для виконання дії у формулі слід виділити вираз. Вираз, що виділяється, повинний бути або змінною, або вбудованою функцією разом з аргументом.

$$\boxed{c^2 + 2 \cdot c^2 - 5 \cdot c^2} \text{ collect} \rightarrow -2 \cdot c^2$$

Визначення коефіцієнтів полінома

З цією метою використовується функція *coeffs* (*Коэффициенты полинома*).  Для здійснення операції потрібно виділити у виразі змінну і виконати наведену команду.

$$3 \cdot b^3 + 2 \cdot b^2 - 12 \cdot b + 45$$

$$\begin{pmatrix} 45 \\ -12 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Література

1. Фетісов В.С. Математична система Mathcad 11. – Ніжин: Видавництво НДУ ім. М.Гоголя, 2005. – 50 с.
2. Фетісов В.С., Фетісова Л.Б. Застосування символної математики у MathCAD. – В зб.: Фізико-математичні записки. – Ніжин: Видавництво НДУ ім. М. Гоголя, 2006, с. 108-111.

3 Фізика

УДК 535.3; 539.2

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ МАГНІТНОГО ПОЛЯ НА ВЛАСТИВОСТІ ПОВЕРХНЕВИХ ПОЛЯРИТОНІВ 6H-SiC

Венгер Є.Ф., Євтушенко А.І., Корбутяк Д.В., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В.

Показано можливість збудження поверхневих фононних та плазмон-фононних поляритонів (ПП) в оптично-анізотропних монокристалах карбіду кремнію (політип 6H), розміщених у сильному однорідному магнітному полі за взаємно-ортогональних орієнтацій оптичної осі, хвильового вектора та магнітного поля: $C \parallel x$, $K \parallel C$, $xy \parallel C$; $C \parallel z$, $K \perp C$, $xy \perp C$; $C \parallel y$, $K \perp C$, $xy \parallel C$, $\vec{H} \perp K$, $\vec{H} \parallel y$. Зареєстровано спектри порушеного повного внутрішнього відбивання (ППВВ) та досліджено основні властивості ПП (дисперсійні криві та коефіцієнт затухання ПП) при дії на монокристал 6H-SiC сильного однорідного магнітного поля. Виявлено вплив однорідного магнітного поля на властивості ПП 6H-SiC.

We demonstrate a feasibility of excitation of surface phonon and plasmon-phonon polaritons (PPs) in optically anisotropic silicon carbide single crystals (polytype 6H) placed in a strong uniform magnetic field, at orthogonally related optical axis, wave vector and magnetic field: $C \parallel x$, $K \parallel C$, $xy \parallel C$; $C \parallel z$, $K \perp C$, $xy \perp C$; $C \parallel y$, $K \perp C$, $xy \parallel C$, $\vec{H} \perp K$, $\vec{H} \parallel y$. The attenuated total reflectance spectra were registered, and the main PP properties (dispersion curves and damping coefficient) in 6H-SiC single crystal subjected to action of strong uniform magnetic field were studied. The effect of a uniform magnetic field on the properties of PPs in 6H-SiC was determined.

Питання дослідження властивостей поверхневих поляритонів в оптично-ізотропних та оптично-анізотропних середовищах є складним завданням, яке і досі не втратило свою актуальність [1 – 5]. Особливої уваги заслуговують дослідження одновісних полярних оптично-анізотропних монокристалів карбіду кремнію (політип 6H), що широко використовуються як в фундаментальних, так і прикладних дослідженнях [6 – 10]. Монокристали 6H-SiC кристалізуються в структурі вюртцита з просторовою групою C_{6v}^4 ($R\bar{6}_3mc$) і характеризуються сильною анізотропією властивостей плазмової системи [7]. Для 6H-SiC добре досліджено питання анізотропії ефективної маси електронів і коефіцієнтів затухання фононів і плазмонів [8]. У роботі [9] проведено дослідження основних властивостей ПП при взаємно ортогональних орієнтаціях та різному ступені легування монокристалів 6H-SiC. Авторами [10, 11] вперше виявлено та досліджено нові типи поверхневих плазмон-фононних поляритонів (ППФП) в легованих анізотропних монокристалах 6H-SiC для орієнтацій хвильового вектора ППФП відносно поверхні і оптичної осі кристала $K \perp C$, $xy \perp C$. Однак, відомості про дослідження одночасного впливу анізотропії плазмової та фононної підсистеми й однорідного магнітного поля на властивості поверхневих поляритонів 6H-SiC у літературі відсутні.

У даній роботі досліджено властивості поверхневих фононних та плазмон-фононних поляритонів монокристалів карбіду кремнію (політип 6H), розміщених у однорідному магнітному полі величиною від 0 до 100 кЕ (випадок $\vec{H} \perp K$, $\vec{H} \parallel y$) за трьох взаємно

ортогональних орієнтацій оптичної осі монокристалу та хвильового вектора: $C \parallel x$, $K \parallel C$, $xy \parallel C$; $C \parallel z$, $K \perp C$, $xy \perp C$; $C \parallel y$, $K \perp C$, $xy \parallel C$.

Експериментальні спектри ППВВ монокристалів 6H-SiC отримані за допомогою спектрометра ИКС-29 в діапазоні $400 - 1400 \text{ см}^{-1}$ і приставки порушеного повного внутрішнього відбивання НПВО-2. Діапазон кутів падіння ІЧ-випромінювання на елемент ППВВ становить від 20 до 60° , точність встановлення кутів – не гірше $6'$. Проміжок між напівциліндром і досліджуваним монокристалом 6H-SiC створювався за допомогою каліброваних фторпластових прокладок. У проведених дослідженнях використано елемент ППВВ діаметром 12 мм із показником заломлення $2,38$.

Розглянемо оптично-анізотропний одновісний полярний напівпровідник (6H-SiC), що межує з оптично-ізотропним середовищем (повітря). За наявності дії на монокристал 6H-SiC однорідного магнітного поля діелектрична проникність може бути визначена згідно [13]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_\infty \left(1 + \frac{v_L^2 - v_T^2}{v_T^2 - v^2 - i\gamma_f v} + \frac{v_p^2 (v + i\gamma_p)}{v(\Omega^2 - (v + i\gamma_p)^2)} \right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_\infty v_p^2 \Omega}{v((v + i\gamma_p)^2 - \Omega^2)}, \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_\infty \left(1 + \frac{v_L^2 - v_T^2}{v_T^2 - v^2 - i\gamma_f v} - \frac{v_p^2}{v(v + i\gamma_p)} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$\varepsilon_{\infty \perp \parallel}$ – високочастотна діелектрична проникність перпендикулярно і паралельно осі C ; $v_{L \perp \parallel}$, $v_{T \perp \parallel}$ – відповідно частоти поздовжнього та поперечного оптичних фононів перпендикулярно і паралельно осі кристалу; $v_{p \perp \parallel}$ – частота плазмового резонансу перпендикулярно і паралельно осі кристалу; $\gamma_{p \perp \parallel}$ – коефіцієнт затухання плазмонів перпендикулярно і паралельно осі кристалу; $\gamma_{f \perp \parallel}$ – коефіцієнт затухання оптичного фонуна перпендикулярно і паралельно осі кристалу; $\Omega = \frac{eH}{mc}$ – циклотронна частота.

Збудження та поширення поверхневих поляритонів відбувається вздовж поверхні монокристалу. Вісь x розташовано в напрямку поширення електромагнітної хвилі; xy – площина, яка містить досліджувану поверхню. Однорідне магнітне поле спрямовано паралельно до досліджуваної поверхні монокристалу і перпендикулярно хвильовому вектору (конфігурація Фогта). Розрахунок коефіцієнта ППВВ для орієнтації $C \parallel x$, $C \parallel y$, $C \parallel z$ проведено згідно з методикою, описаною в [7].

На рис. 1 подано експериментальні спектри ППВВ (точки – \odot) монокристалу 6H-SiC (зразок ПСЕ-3Б) за орієнтації $C \parallel z$, $K \perp C$, $xy \perp C$ та розрахункові криві за орієнтацій: $C \parallel x$,

$K \parallel C$, $xu \parallel C$ (лінія 1); $C \parallel z$, $K \perp C$, $xu \perp C$ (лінія 2); $C \parallel y$, $K \perp C$, $xu \parallel C$ (лінія 3) за відсутності дії магнітного поля на напівпровідник. Кут падіння в призмі ППВВ – 40° . Величина проміжку між зразком та призмою становила відповідно 3,1 (1), 2,7 (2), 2,5 (3) мкм. Криві 1' – 3' розраховано при наявності дії на монокристал 6H-SiC магнітного поля величиною 100 кЕ за орієнтації $\vec{H} \perp K$, $\vec{H} \parallel y$. У зв'язку із співпаданням кривих 1 – 3 з відповідними кривими 1' – 3' останні зміщено на графіку на 5 см^{-1} у низькочастотну область спектра. Частоти мінімумів спектрів ППВВ відповідно становлять: 944 (1, 1'), 951 (2, 2'), 967 (3, 3') см^{-1} , а напівширина спектрів – 16 (1, 1'), 26 (2, 2'), 54 (3, 3') см^{-1} . Як видно з рис. 1, дія сильного магнітного поля на монокристал 6H-SiC за вказаної орієнтації магнітного поля практично не впливає на спектр ППВВ.

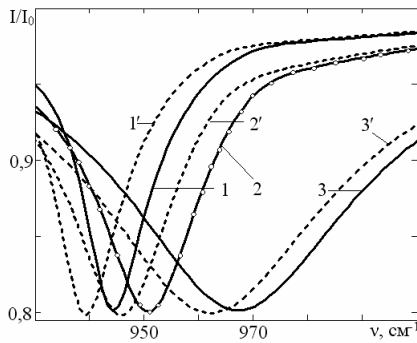


Рис. 1. Спектри ППВВ 6H-SiC (зразок ПСЕ-3Б)

Проведені дослідження в роботах [7 –11] показали, що збудження ПП фононного та плазмон-фононного типу в 6H-SiC, відбуваються в околі частот поперечного і поздовжнього оптичного фонуна. У спектрах ППВВ проявляються мінімуми. Згідно [7, 13] частоти мінімумів у спектрах ППВВ при $H \approx 0$ відповідають поверхневим модам ν^+ та ν^- і псевдоповерхневим модам при більших полях. Очевидно, що для монокристала 6H-SiC поверхневі моди співпадають із псевдоповерхневими. Якщо циклотронна частота стає наближеною до частоти поверхневих збуджень, магнітне поле сильно ускладнює дисперсійні співвідношення, що зумовлено нерівністю діагональних і появою недиагональних компонент тензора діелектричної проникності в магнітному полі. Отримані математичні вирази подано в табл. 1.

Таблиця 1

Дисперсійні співвідношення для одновісного кристала, розміщеного у магнітному полі (випадок $\vec{H} \perp K$, $\vec{H} \parallel y$) при трьох орієнтаціях

Орієнтація	$C \parallel z$	$C \parallel x$	$C \parallel y$
Дисперсійне співвідношення	$K^2 = \varepsilon_{v\parallel} \frac{1 - \varepsilon_{v\perp}}{1 - \varepsilon_{v\perp} \varepsilon_{v\parallel}}$	$K^2 = \varepsilon_{v\perp} \frac{1 - \varepsilon_{v\parallel}}{1 - \varepsilon_{v\perp} \varepsilon_{v\parallel}}$	$K^2 = \frac{\varepsilon_{v\perp}}{1 + \varepsilon_{v\perp}}$

$$\text{де } \varepsilon_{v\perp,\parallel} = \frac{\varepsilon_{1\perp,\parallel}^2 - \varepsilon_{2\perp,\parallel}^2}{\varepsilon_{1\perp,\parallel}}$$

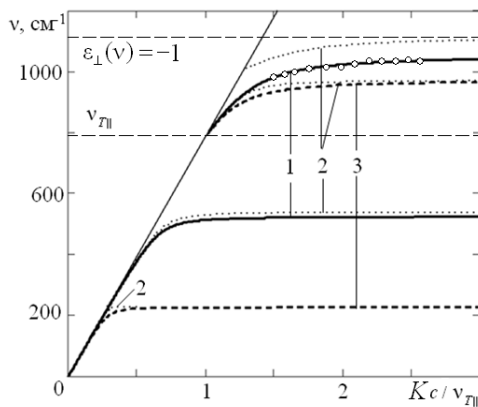


Рис. 2. Високо- та низькочастотні дисперсійні гілки 6H-SiC (зразок SC-2)

На рис. 2 представлено експериментальні (точки – \odot) за орієнтації $C \parallel z$, $K \perp C$, $xy \perp C$ та розрахункові (лінія) дисперсійні криві за орієнтацій $C \parallel y$, $K \perp C$, $xy \parallel C$ (крива 1); $C \parallel z$, $K \perp C$, $xy \perp C$ (крива 2); $C \parallel x$, $K \parallel C$, $xy \parallel C$ (крива 3) без дії магнітного поля на монокристал 6H-SiC (зразок SC-2).

Як видно з рис. 2, у випадку, коли оптична вісь $C \parallel y$ (перпендикулярна до напрямку поширення і нормалі до поверхні кристала), існують дві дисперсійні гілки. Нижня гілка v^- існує в усьому інтервалі зміни хвильового вектора K . Що стосується верхньої гілки v^+ , то область існування обмежена умовою $K > \omega_{T\perp} / c$. Для випадку, коли оптична вісь кристала перпендикулярна до поверхні ($C \parallel z$) або паралельна до напрямку поширення ($C \parallel x$), число дисперсійних гілок збільшується і може досягти п'яти. Одна з них є аналогом низькочастотної гілки v^- і починається за умови $K = 0$. Число гілок, які існують за $K > \omega_{T\parallel} / \tilde{n}$, $\omega_{T\perp} / \tilde{n}$, змінюється в залежності від орієнтації оптичної осі кристала відносно його поверхні. Вказані моди можуть збуджуватися в усьому діапазоні зміни K (аналогічно до оптично-ізоотропного кристала), або в обмеженому зверху інтервалі його значень [10, 11].

Як показано в [13], тільки в геометрії Фогта поверхневі хвилі залишаються хвилями TM -типу. Магнітне поле H перпендикулярне площині поляризації поверхневої хвилі xz , у якій обертається її електричний вектор. У вказаній площині відбувається і циклотронний рух електронів, який при одному знаку H – співпадає з «власним» обертанням електричного вектора в поверхневій хвилі, а при іншому знаку H йому протилежний. Звідси впливає нееквівалентність напрямків $+K$ та $-K$, різними стають і частоти, які відповідають різним напрямкам H .

Дослідження дисперсійних кривих монокристалів 6H-SiC, розміщених у сильному магнітному полі величиною 100 кЕ ($\vec{H} \perp K$, $\vec{H} \parallel y$) при трьох взаємно ортогональних орієнтаціях, указують на суттєві відмінності в їх поведінці при зміні орієнтації. Так, за орієнтації $C \parallel y$, $K \perp C$, $xy \parallel C$ без дії магнітного поля на монокристал (зразок ПСЕ-3Б) існує дві дисперсійні криві, які мають вигляд (криві 1, 2, див. рис. 3). Граничне значення v_s визначається із рівняння $\varepsilon_{\perp}(v) = -1$. Під дією магнітного поля величиною 100 кЕ дисперсійні криві набудуть вигляду 1'–3'. Як видно з рис. 3, під дією магнітного поля високочастотна дисперсійна гілка не змінюється, а низькочастотна зміщується у довгохвильову область спектра. В області частот (500 – 550 cm^{-1}) з'являється додаткова дисперсійна гілка, яка в роботі [13] названа «віртуальною» модою. За своїми властивостями вона аналогічна поверхневим коливанням Π типу в анізотропних кристалах [14]. Однак, як показано в [15], монокристали

оксиду цинку на відміну від монокристалів 6H-SiC характеризуються сильною анізотропією властивостей фононної підсистеми.

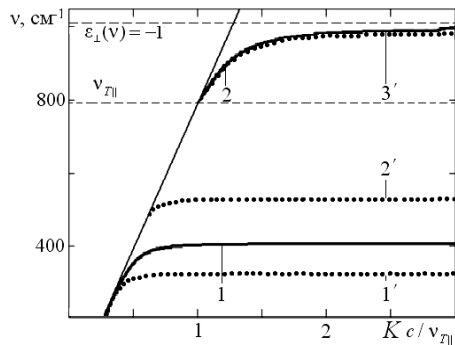


Рис. 3. Дисперсійні криві 6H-SiC (зразок ПСЕ-3Б) при $C \parallel y, K \perp C, xy \parallel C$: 1, 2 – $H = 0$; 1' – 3' – $H = 100$ кЕ

На рис. 4 (зразок ПСЕ-3Б) представлено високо- і низькочастотні дисперсійні криві для монокристала 6H-SiC за орієнтації $C \parallel x, K \parallel C, xy \parallel C$. Згідно [7] граничне значення ν_s визначається з умов $\varepsilon_{\parallel}(\nu)\varepsilon_{\perp}(\nu) = 1$, причому ε_{\parallel} і ε_{\perp} від'ємні. З рис. 4 видно, що кількість дисперсійних гілок при даній орієнтації залишається сталою і дорівнює двом.

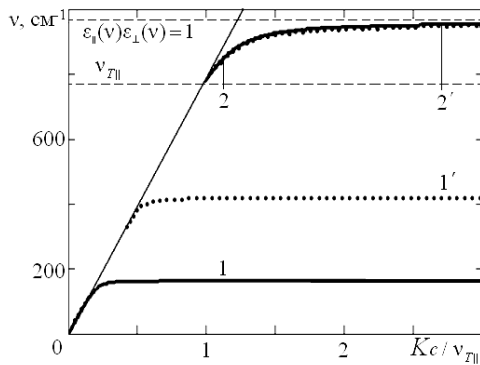


Рис. 4. Дисперсійні криві 6H-SiC (зразок ПСЕ-3Б) при $C \parallel x, K \parallel C, xy \parallel C$: 1, 2 – $H = 0$; 1', 2' – $H = 100$ кЕ

Вплив магнітного поля на граничну частоту нижньої дисперсійної гілки спостерігається в діапазоні $162 - 418 \text{ cm}^{-1}$. Як видно, при зростанні магнітного поля ($\Delta H = 100$ кЕ), на відміну від попередньої орієнтації, дисперсійна гілка зміщується у високочастотну область спектра на 256 cm^{-1} .

На рис. 5 представлено дисперсійні криві сильно легованого 6H-SiC (зразок ПСЕ-3Б) при орієнтації $C \parallel z, K \perp C, xy \perp C$. Розрахунок указує на можливість збудження в 6H-SiC за вказаної орієнтації до чотирьох дисперсійних гілок та відсутності дії на монокристал магнітного поля (криві 1 – 4). Точки (○) – експериментальні дані для 6H-SiC за вказаної орієнтації та відсутності дії магнітного поля на монокристал. За наявності дії на монокристал магнітного поля ($H > 50$ кЕ, випадок $\vec{H} \perp K, \vec{H} \parallel y$) в 6H-SiC можливе збудження до п'яти дисперсійних гілок (криві 1' – 5'). Крім досліджених раніше в роботах [10, 11] дисперсійних кривих зареєстровано збудження нової гілки, початок якої відповідає умові $\varepsilon_1 = 0$.

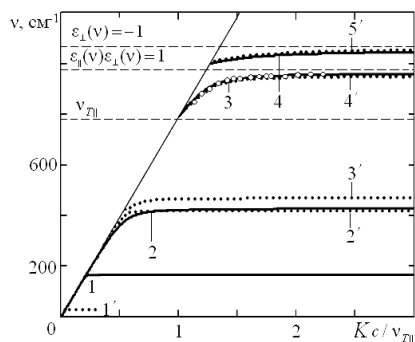


Рис. 5. Дисперсійні криві 6H-SiC (зразок ПСЕ-3Б) при $C \parallel z$, $K \perp C$, $xy \perp C$: 1-4 – $H=0$; 1'-4' – $H=100$ кЕ

На рис. 6 подано дисперсійні криві для зразка SC-1 за відсутності магнітного поля (криві 1 – 2 – суцільна лінія) та під дією останнього величинами 30, 65 та 100 кЕ (криві 1' – 3') за орієнтації $C \parallel y$, $K \perp C$, $xy \parallel C$, $\vec{H} \perp K$, $\vec{H} \parallel y$. Очевидно, що при зростанні величини магнітного поля відбувається зміщення нижньої дисперсійної гілки у низькочастотну область спектра, а «віртуальної» фоновної гілки – у високочастотну.

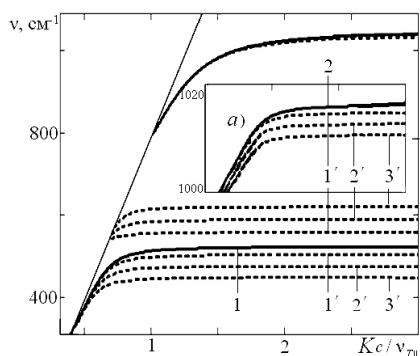


Рис. 6. Дисперсійні криві 6H-SiC (зразок SC-1) при $C \parallel y$, $K \perp C$, $xy \parallel C$: 1-2 – $H=0$; 1'-3' – $H=30, 65, 100$ кЕ. а) збільшений в 5 разів проміжок від 1000 до 1020 см^{-1} .

Граничні частоти нижніх, верхніх плазмон-фононних та «віртуальних» фононних гілок для монокристалів 6H-SiC без дії на них магнітного поля та при дії останнього величинами 30, 65 та 100 кЕ за орієнтацій $\vec{H} \perp K$, $\vec{H} \parallel y$ та $C \parallel x$, $K \parallel C$, $xy \parallel C$; $C \parallel z$, $K \perp C$, $xy \perp C$; $C \parallel y$, $K \perp C$, $xy \parallel C$ подано в табл. 2.

Таблиця 2

Граничні частоти дисперсійних гілок монокристала 6H-SiC

№	В, Е	1		$30 \cdot 10^3$			$65 \cdot 10^3$			$100 \cdot 10^3$		
		Зразок	V_{pf}^- , см^{-1}	V_{pf}^+ , см^{-1}	V_{pf}^- , см^{-1}	V_v , см^{-1}	V_{pf}^+ , см^{-1}	V_{pf}^- , см^{-1}	V_v , см^{-1}	V_{pf}^+ , см^{-1}	V_{pf}^- , см^{-1}	V_v , см^{-1}
$C \parallel y$												
1.	ПСЕ-3Б	409	998	386	450	997	355	489	996	326	530	995
2.	SC1	454	1014	432	493	1013	402	529	1011	373	566	1009
3.	SC2	523	1049	504	558	1048	476	589	1044	449	620	1040
$C \parallel z$												
1.	ПСЕ-3Б	162 472	961 1050	279	427	960 1045	18 354	441	958 1046	25 418	468	954 1049
2.	SC1	170 472	963 1069	298	479	962 1070	16 376	484	957 1072	23 441	507	952 1069
3.	SC2	225 540	971 1113	347	539	967 1095	21 425	547	960 1097	30 489	564	952 1100
$C \parallel x$												
1.	ПСЕ-3Б	162	961	279	427	960	354	441	958	418	468	954
2.	SC1	170	964	298	479	962	376	484	957	441	507	952
3.	SC2	225	971	347	539	967	425	547	960	489	564	952

На рис. 7 представлено експериментальну і теоретичну залежність коефіцієнта затухання ПП $\Gamma_{\text{ПП}}(\nu)$ від частоти ПП для монокристала 6H-SiC. Розрахунок проведено для монокристалів з ідеально гладкою поверхнею [7]. Криві 1 – 3 розраховані для монокристалів карбіду кремнія з різним ступенем легування та відсутності дії на кристал магнітного поля за методикою описаною в [7].

Криві 1' – 3' – $\Gamma_{\text{ПП}}(\nu)$ для зразка ПСЕ-3Б у випадку дії на нього магнітного поля за орієнтації $\vec{H} \perp K$, $\vec{H} \parallel y$ та величиною 30 (1'), 65 (2'), 100 (3') кЕ.

У літературі зустрічається декілька механізмів пояснення затухання ПП, а саме: внаслідок поверхневого розсіювання електронів, спричиненого неглибоким проникненням світла та наявністю на поверхні збідненого носіями шару, що може призводити до перекачки енергії поверхневих плазмонів в об'ємні [7, 13].

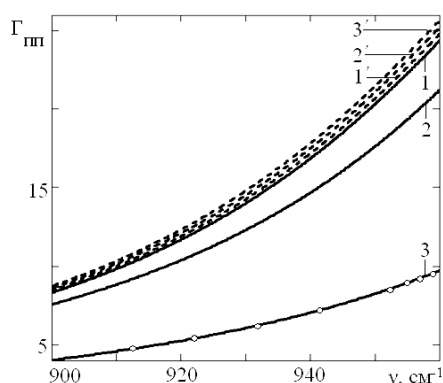


Рис. 7. Залежність коефіцієнта затухання ПП від частоти $\Gamma_{\text{ПП}}(\nu)$ 6H-SiC: 1 – ПСЕ-3Б; 2 – SiC-1; 3 – SiC-2; 1' – 3' (зразок ПСЕ-3Б) – $H = 30, 65, 100$ кЕ

З рис. 7 випливає, що із збільшенням концентрації вільних носіїв зарядів у монокристалах 6H-SiC коефіцієнт затухання ПП спадає. Обернена закономірність спостерігається при зростанні магнітного поля, в якому розміщено досліджуваний напівпровідник.

Коефіцієнт затухання поверхневих поляритонів монокристала 6H-SiC розраховано графічним методом, описаним у роботі [7], для зразків SC-1, SC-2 та ПСЕ-3Б за магнітних полів 0, 30, 65, 100 кЕ та орієнтацій $C \parallel y$, $K \perp C$, $xy \parallel C$; $C \parallel z$, $K \perp C$, $xy \perp C$; $C \parallel x$, $K \parallel C$, $xy \parallel C$, $\vec{H} \perp K$, $\vec{H} \parallel y$ і подано в табл. 3.

Таблиця 3

Напівширина мінімуму в спектрі ППВВ $\Gamma_{\text{п}}$ та коефіцієнт затухання ПП $\Gamma_{\text{пп}}$ 6H-SiC при $H = 0$ і 100 кЕ

$\varphi, ^\circ$	$H = 0$ кЕ				$H = 100$ кЕ			
	$\nu_{\text{min}}, \text{cm}^{-1}$	χ	$\Gamma_{\text{п}}, \text{cm}^{-1}$	$\Gamma_{\text{пп}}, \text{cm}^{-1}$	$\nu_{\text{min}}, \text{cm}^{-1}$	χ	$\Gamma_{\text{п}}, \text{cm}^{-1}$	$\Gamma_{\text{пп}}, \text{cm}^{-1}$
$C \parallel x$								
ПСЕ – 3Б ($\gamma_{p\perp} = 620 \text{cm}^{-1}$, $\gamma_{p\parallel} = 340 \text{cm}^{-1}$, $\gamma_{f\perp,\parallel} = 12 \text{cm}^{-1}$)								
30	917	1,398	29	22	917	1,398	29	22
35	937	1,691	188	171	937	1,692	190	174
SC-1 ($\gamma_{p\perp} = 700 \text{cm}^{-1}$, $\gamma_{p\parallel} = 260 \text{cm}^{-1}$, $\gamma_{f\perp,\parallel} = 14 \text{cm}^{-1}$)								
30	919	1,41	28	23	919	1,4	30	23
35	939	1,714	215	198	939	1,714	219	202
SC-2 ($\gamma_{p\perp} = 830 \text{cm}^{-1}$, $\gamma_{p\parallel} = 450 \text{cm}^{-1}$, $\gamma_{f\perp,\parallel} = 12 \text{cm}^{-1}$)								
30	922	1,415	45	34	922	1,415	45,12	34

Продовження таблиці 3

35	944	1,752	415	359	944	1,752	420,45	364
$C \parallel z$								
ПСЕ – 3Б ($\gamma_{p\perp} = 0, \gamma_{p\parallel} = 0, \gamma_{f\perp, \parallel} = 0$)								
30	933	1,41	134	97	933	1,41	139	115
SC-1 ($\gamma_{p\perp} = 0, \gamma_{p\parallel} = 0, \gamma_{f\perp, \parallel} = 0$)								
30	938	1,42	230	163	938	1,435	—	—
SC-2 ($\gamma_{p\perp} = 0, \gamma_{p\parallel} = 0, \gamma_{f\perp, \parallel} = 0$)								
30	946	1,34	157	94	946	1,35	—	204
35	956	1,39	252	165	956	1,43	—	—
50	958	1,4	327	203	958	1,46	—	—
$C \parallel y$								
ПСЕ – 3Б ($\gamma_{p\perp} = 0, \gamma_{p\parallel} = 0, \gamma_{f\perp, \parallel} = 0$)								
30	945	1,425	274	180	945	1,42	296	180
35	963	1,594	—	437	963	1,59	—	473
SC-1 ($\gamma_{p\perp} = 0, \gamma_{p\parallel} = 0, \gamma_{f\perp, \parallel} = 0$)								
30	954	1,445	380	237	954	1,594	402	245
SC-2 ($\gamma_{p\perp} = 0, \gamma_{p\parallel} = 0, \gamma_{f\perp, \parallel} = 0$)								
50	984	1,51	594	543	984	1,515	470	436

Таким чином, у роботі вперше зареєстровано спектри порушеного повного внутрішнього відбивання в області збудження поверхневих плазмон-фононних поляритонів в одновісному гексагональному 6H-SiC, розміщеному в сильному однорідному магнітному полі. Досліджено дисперсійні залежності та коефіцієнти затухання поверхневих фононних та плазмон-фононних поляритонів 6H-SiC, розміщених у сильному однорідному магнітному полі. Показано, що під дією магнітного поля в 6H-SiC проявляються нові дисперсійні гілки, а їх кількість залежить, як від оптичних та електрофізичних параметрів кристала, так і від його орієнтації та величини магнітного поля. Виявлено залежність коефіцієнта затухання ПП від величини зовнішнього магнітного поля. Однак, питання дослідження самого механізму потребують додаткового вивчення.

Література

1. Альшиц В.И., Любимов В.Н.. Бездисперсионные поверхностные поляритоны на различных срезах оптически одноосных кристаллов // ФТТ. – 2002. – Т. 44, вып. 2. – С. 371 – 374.
2. Виноградов Е.А.. Поляритоны полупроводниковой микрополости // УФН. – 2002. – Т. 172, № 12. – С. 1371 – 1410.
3. Дацко В.Н., Копылов А.А.. О поверхностных электромагнитных волнах // УФН. – 2008. – Т. 178, № 1. – С. 109 – 110.
4. Степанов Н.П. Плазмон-фонон-поляритоны в легированных акцепторной примесью сплавах висмут-сурьма // ФТП. – 2004. – Т. 38, вып. 5. – С. 552 – 555.
5. Фурс А.Н., Барковский Л.М. Поверхностные электромагнитные волны в фарадеевских средах // ЖТФ. – 2003. – Т. 73, вып. 4. – С. 9 – 16.
6. Peter F., Tsunenobu K., Lothar L., Gerhard P. Silicon Carbide: Two Volume Set. Volume 1: Growth, Defects, and Novel Applications. – Hardcover, 2009. – 528 p.; Volume 2: Power Devices and Sensors. – Hardcover, 2009. – 520 p.

7. Венгер Є.Ф., Мельничук О.В., Пасечник Ю.А. Спектроскопія залишкових променів. – К.: Наук. думка, 2001. – 191 с.
8. Мельничук А.В., Пасечник Ю.А. Анизотропия эффективных масс электронов в карбиде кремния // ФТТ. – 1992. – Т. 34, № 2. – С. 423 – 428.
9. Мельничук А.В. Исследование поверхностных плазмон-фононных поляритонов в монокристаллах SiC-6H методом НРВО // Поверхность. Физика, химия, механика. – 1998. – № 7. – С. 76 – 81.
10. Венгер Є.Ф., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В., Пасечник Ю.А., Сухенко О.І. Поверхневі плазмон-фононні поляритони карбїду кремнію // Український фізичний журнал. – 1998. – Т. 43, № 5. – С. 598 – 603.
11. Мельничук А.В., Пасечник Ю.А. Влияние анизотропии на дисперсию поверхностных плазмон-фононных поляритонов карбида кремния // ФТТ. – 1998. – Т. 40, № 4. – С. 636 – 639.
12. Venger E. F. , Evtushenko A. I. , Melnichuk L. Yu. and Melnichuk A. V. Reflectance spectra of a 6H-SiC single crystal placed in a strong homogeneous magnetic field // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2009. – V. 82, N 6. – P. 1211 – 1218 (Email: <http://www.springerlink.com/content/4043151v3243r701>).
13. Поверхностные поляритоны. Электромагнитные волны на поверхностях и границах раздела сред / Под ред. В.М. Агроновича, Д.Л. Миллса. – М.: Наука, 1985. – 528 с.
14. Мельничук А.В., Пасечник Ю.А. Затухание поверхностных плазмон-фононных поляритонов окиси цинка // ФТТ. – 1996. – Т. 38, № 8. – С. 2343–2346.
15. Venger E.F., Melnichuk A.V., Melnichuk L.Ju., Pasechnik Ju.A. Anisotropy of the ZnO Single Crystal Reflectivity in the Region of Residual Rays // Physica Status Solidi (b). – 1995. – Vol. 188, N 2. – P. 823 – 831.

УДК 535.3, 539.2

ДОСЛІДЖЕННЯ ОКСИДУ МАГНІЮ МЕТОДАМИ ІЧ-СПЕКТРОСКОПІЇ

Венгер Є.Ф., Євтушенко А.І., Корбутяк Д.В., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В.

Оксид магнію – білий дрібний легкий порошок без запаху. Основна форма – мінерал периклаз. Прозорі кристали MgO пожежо- і вибухобезпечні. Оксид магнію практично нерозчинний у воді, однак розчинний у соляній, сірчаній та оцтовій кислотах. MgO є одним із найбільш поширених природних мінералів, що кристалізується в скелястій структурі Землі за будь-яких тисків і температур [1]. Широке практичне застосування MgO (при виготовленні жаростійкої кераміки, спеціальних сортів цементу, наповнювачів лакофарбових та полімерних матеріалів, ізоляторів у промисловому кабелі, в медицині, як антацидний засіб при підвищеній кислотності шлункового соку тощо) визначають його актуальність [1, 2].

Метою даної роботи є теоретичне дослідження монокристалів оксиду магнію методами спектроскопії ІЧ-відбивання та порушеного повного внутрішнього відбивання (ППВВ) на основі фундаментальних характеристик указанного монокристала (частота поперечного ν_T і поздовжнього ν_L оптичного фонона, високочастотна ϵ_∞ і статична ϵ_0 діелектричні проникності).

Вирощування кристалів оксиду магнію можливе багатьма методами, серед яких найбільш розповсюдженим є метод Вернейля [2].

На рис. 1 представлено схему устаткування для вирощування оксиду магнію методом Вернейля.

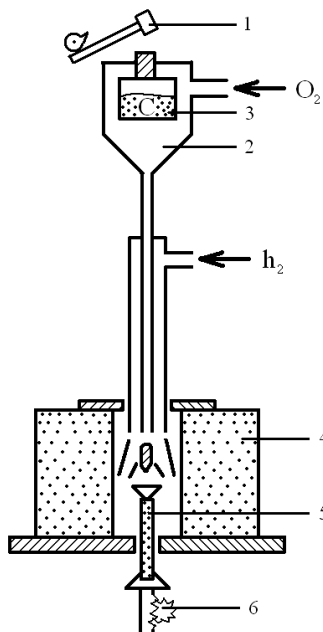


Рис. 1.

Принцип роботи установки полягає в наступному. У верхній частині бункера розміщена шихта (порошок $MgCO_3$). Невеликий молоточок (1) вдаряє по дріці та змушує порошок шихти рівномірно проходити через сітчасте дно посудини (3), що розміщена всередині бункеру (2), і падати по трубці, нижній кінець якої розміщений у муфелі (4). Пудра, що падає на керамічний штифт (5), частково розплавлюється полум'ям газу і спікається в кульку (температура більше $2000\text{ }^\circ\text{C}$). По мірі опускання штифта за допомогою годинникового механізму (6), розплавлені пилинки у вигляді дрібних краплин осідають на затравку, де відбувається кристалізація монокристала.

Для зменшення температурного напруження в монокристалах їх відпалюють у вакуумі протягом кількох годин за температури, на 10 % нижчій за температуру кристалізації.

Перевагою даного методу є відсутність флюсів та необхідність використання дорогіших матеріалів при виготовленні тигелю.

До найбільш вагомих недоліків слід віднести необхідність точної синхронізації подачі шихти і швидкості опускання затравки та наявність внутрішньої напруги, яка зумовлена високою температурою росту монокристалів. Швидкість росту – 2 – 5 мм/год [2].

Монокристали оксиду магнію характеризуються фізико-хімічними властивостями, що представлені в табл. 1.

Таблиця 1

Основні фізичні й хімічні властивості оксиду магнію

Сингонія кристала – кубічна	Енергія (міжатомного) зв'язку – 40,06 еВ
Структурний тип – NaCl	Просторова група – $Fm\bar{3}m$
Параметри комірки – $a = 4,2112\text{ \AA}$	Ширина валентної зони – 6,5 еВ
Температура плавлення: $2640 - 2800\text{ }^\circ\text{C}$	Густина – $3,58\text{ г/см}^3$ ($20\text{ }^\circ\text{C}$)
Прозорість в області від 300 нм до 7 мкм	Коефіцієнт випромінювання – 0,9
Ширина забороненої зони 7,6 – 7,75 еВ	Коефіцієнт заломлення – 1,72 в 1 мкм
У вузлах ґратки іонних кристалів MgO містяться позитивно і негативно заряджені іони. Сили взаємодії між ними переважно електростатичні	Монокристали оксиду магнію поглинають світло в діапазоні ультрафіолетових хвиль, із піком поглинання 7,8 еВ

На рис. 2 подано експериментальні спектри ІЧ-відбивання і поглинання монокристалічного MgO, зареєстровані Гофмейстером та ін. [3]. Експериментальні спектри ІЧ-відбивання MgO отримані за допомогою спектрометра Spectratech Fourier при похибці вимірювань $0,01\text{ см}^{-1}$.

Дослідження коефіцієнта відбивання від поверхні кубічного оксиду магнію проведено в діапазоні від 200 до 1000 см^{-1} . Максимум відбивання, як видно з графіка, припадає (товста суцільна лінія, ліва вісь) на частоту 600 см^{-1} при $R(\nu) = 0,99$. Мінімальне значення $R(\nu)$ в області 100 см^{-1} становить 0,25.

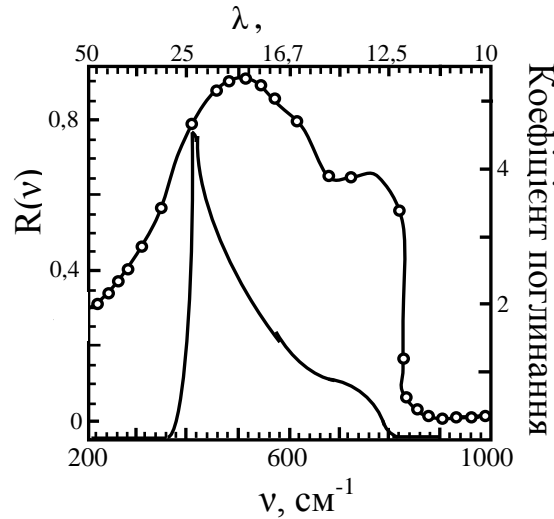


Рис. 2. Спектри ІЧ-відбивання і поглинання MgO [3].

На рис. 3, 4 представлено розрахункові криві діелектричних і оптичних функцій оксиду магнію. Як видно з рис. 3, 4, основні ТО функції складається з трьох слабо виражених складових, тому що сильна LO група спостерігається при 738 см^{-1} . Указана LO-складова відтворюється одним лоренцевим осцилятором. За рахунок розширення області досліджень авторами [4, 5] визначено параметри двох інших дещо слабших LO-коливань. Ще один слабкий пік, необхідний для визначення ϵ_2 і $\text{Im}(1/\epsilon)$, проявляється поблизу частоти 283 см^{-1} .

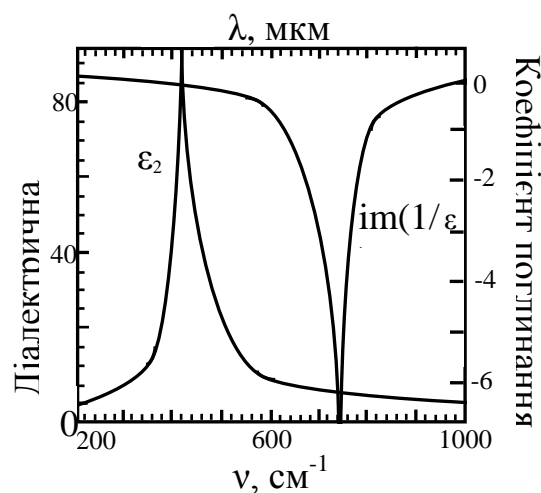
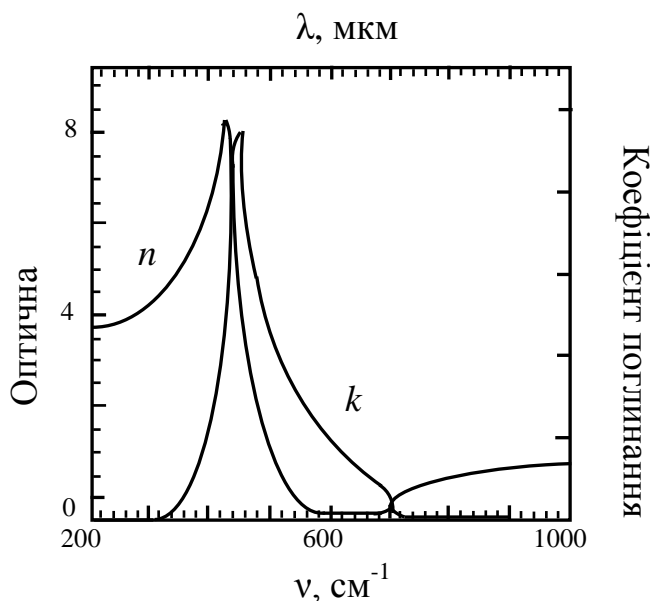


Рис. 3. Залежність діелектричної проникності від частоти [3].

Рис. 4. Оптичні сталі n і k в ІЧ-області спектра [3].

За допомогою методу Крамерса-Кронінга та експериментальних даних в [4 – 6] для кубічних монокристалів оксиду магнію отримано фундаментальні параметри, що представлені в табл. 2.

Таблиця 2

Об'ємні параметри монокристала оксиду магнію [4, 5]

	ТИП КОЛИВАНЬ	ν_{TO}	ν_{LO}	ϵ_0	ϵ_{∞}
MgO	TO_1	409	407	9,83	3,02
	TO_2	416	738	-	-
	LA	429	426	-	-
	$TA+LO$	650	645	-	-

На рис. 5 представлено розрахункові спектри ІЧ-відбивання для монокристалів оксиду магнію. Розрахунок коефіцієнта відбивання монокристала MgO проведено при використанні об'ємних параметрів, поданих у табл. 2. Розрахунок коефіцієнта відбивання $R(\nu)$ для кубічних монокристалів оксиду магнію в області частот 200 – 1000 cm^{-1} виконано в програмі MathCad. Коефіцієнт згасання поперечного оптичного фонуна γ_F був змінним параметром. Крок сканування 2 cm^{-1} . Спектри розраховано за методикою, описаною в роботі [6], при $\gamma_F = 2, 4, 6, 8, 10 \text{ cm}^{-1}$ для випадку оптично-ізотропного монокристала.

Як видно з рис. 5, при згасанні фононів $\gamma_F = 2 \text{ cm}^{-1}$ (крива 1) максимальне значення коефіцієнта відбивання $R \approx 0,99$ відповідає частоті 600 cm^{-1} . При збільшенні γ_F від 2 до 10 cm^{-1} коефіцієнт відбивання зменшується до 0,95.

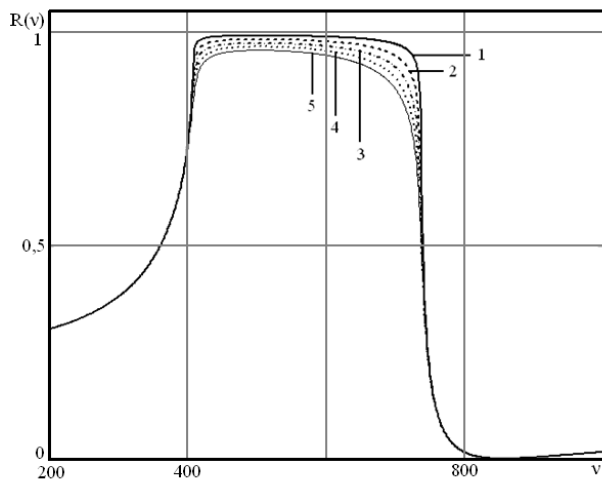


Рис. 5. Спектри ІЧ- відбивання $R(\nu)$ для MgO :
 1 – $\gamma_F = 2 \text{ см}^{-1}$; 2 – $\gamma_F = 4 \text{ см}^{-1}$;
 3 – $\gamma_F = 6 \text{ см}^{-1}$; 4 – $\gamma_F = 8 \text{ см}^{-1}$; 5 – $\gamma_F = 10 \text{ см}^{-1}$.

Таблиця 3

Розрахункові дані щодо кута, частоти та коефіцієнта ППВВ

Номер кривої	$\varphi, ^\circ$	$\nu_{\text{пп}}, \text{см}^{-1}$	$I(\nu)/I_0(\nu)$
1	30	581	0,01
2	32	603	0,30
3	34	617	0,71
4	36	626	0,85
5	38	632	0,93
6	40	637	0,96
7	42	641	0,98

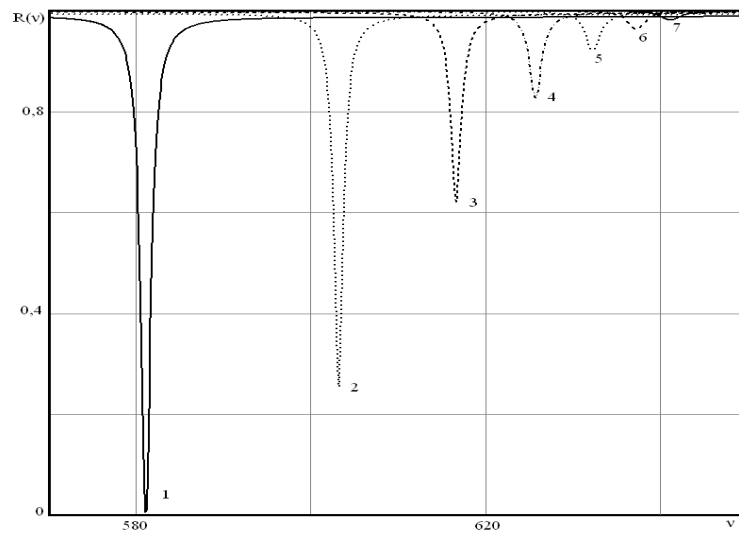


Рис. 6. Спектри ППВВ MgO .

На рис. 6 подано спектри порушеного повного внутрішнього відбивання (ППВВ) монокристалів оксиду магнію при використанні об'ємних параметрів, представлених у табл. 3.

Розрахунки проведено при величині зазору між монокристалом і призмою ППВВ 8 мкм. Сканування відбувалося в «області залишкових променів» за частотою при фіксованому куті падіння ІЧ-випромінювання в призмі ППВВ ($\varphi = 30^\circ, 32^\circ, 34^\circ, 36^\circ, 38^\circ, 40^\circ, 42^\circ$).

З рис. 6 видно, що із збільшенням кута падіння φ від 30° до 42° пік ППВВ зміщується у високочастотну область при зменшенні інтенсивності в спектрі ППВВ. Дані щодо відповідності кута, частоти та коефіцієнта ППВВ представлено в табл. 3.

Таким чином, у даній роботі на основі апробованої й опублікованої в монографії [6] методики дослідження оптично-анізотропних напівпровідників ZnO і 6H-SiC та експериментальних даних роботи [4, 5] визначено області прояву поверхневих фононних поляритонів для MgO. Отримано залежності коефіцієнта відбивання та ППВВ від частоти випромінювання для монокристалів оксиду магнію. Однак більш детальний аналіз анізотропії коефіцієнтів затухання фононної підсистеми монокристалів MgO виходить за межі даної роботи.

Література

1. Михалічко Б.М. Курс загальної хімії. Теоретичні основи. – К.: Знання, 2009. – 548 с.
2. Остроушко А.А., Могильников Ю.В. Физико-химические основы получения материалов электронной техники [http://virlib.eunnet.net/win/metod_ma-terials/wm7/]
3. Hofmeister M., Keppel E. and Speck A.K. Absorption and reflection infrared spectra of MgO and other diatomic compounds // Science. – 1999. – Vol. 283. – P. 1699.
4. Fontanella J., Andeen C., Schuele D. Magnesium oxide (MgO) dielectric constants, optical and photoelectric properties // J. Appl. Phys. – 1974. – Vol. 45. – P. 2852.
5. Subramanian M.A., Shannon R.D., Chai B.H.T., Abraham M.M. and Wintersgill M.C. Dielectric constants of BeO, MgO, and CaO using the two-terminal method // Physics and Chemistry of Minerals. – 1989. – Vol. 16, N 8. – P. 741 – 746.
6. Венгер Є.Ф., Мельничук О.В., Пасічник Ю.А. Спектроскопія залишкових променів. – К.: Наук. думка, 2001. – 191 с.

УДК 538.955

ОСОБЛИВОСТІ МАГНІТНОЇ СПРИЙНЯТЛИВОСТІ ЛЕГОВАНОГО АНТИМОНІДУ ІНДІЮ В ІНТЕРВАЛІ ТЕМПЕРАТУР $4,2\text{ К} \div 300\text{ К}$

В.А.Ігнатенко, Л.М.Кнорозок

Легування вузькозонних напівпровідників, до котрих належить і антимонід індію InSb, елементами з незаповненими α -оболонками атомів дає можливість дослідити магнітний стан домішкових атомів у кристалічній матриці. Атоми таких елементів можуть зберігати власний магнітний момент в діамагнітній матриці. Використовуючи чутливість таких матеріалів до зовнішніх магнітних полів, можна дослідити стан домішкових атомів в них в залежності від умов вирощування і термообробки кристалів, концентрації домішкових атомів, температури і інших факторів.

В роботах [1,2] проведені дослідження магнітної сприйнятливості (МС) вузькощілинних твердих розчинів (ТР) $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Te}$, $\text{Cd}_{1-x}\text{Hg}_x\text{Te}$ в широкому інтервалі температур, складів і концентрацій носіїв заряду (НЗ). Показано, що МС $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Te}$, $\text{Cd}_{1-x}\text{Hg}_x\text{Te}$ суттєво залежить від складу, концентрації носіїв заряду (НЗ) і температури внаслідок малості ширини забороненої зони E_g та непараболічності зонного спектру ТР.

В даній роботі нами продовжено дослідження МС вузькозонних напівпровідників. Мета роботи – експериментальне дослідження температурних та концентраційних залежностей МС монокристалів ТР $(\text{InSb})_{1-x}(\text{CdTe})_x$ різного складу і порівняння одержаних результатів з теорією.

Параметри досліджених зразків наведені в таблиці 1. Прийняті позначення: n – концентрація НЗ, m_c/m_o – ефективна маса НЗ на рівні Фермі E_F , E_g – ширина забороненої зони.

Таблиця 1

Електрофізичні параметри монокристалів TP (InSb)_{1-x}(CdTe)_x

№	Склад, x	n , см^{-3}	E_g , eВ	E_F , eВ	m_c/m_o
1	0	$5,9 \times 10^{16}$	0,180	–	0,0130
2	0,001	$3,5 \times 10^{17}$	0,120	–	0,0155
3	0,003	$2,4 \times 10^{19}$	0,090	0,191	0,0176
4	0,005	$6,8 \times 10^{18}$	0,100	0,266	0,0123
5	0,007	$4,4 \times 10^{18}$	0,0980	0,274	0,0114
6	0,01	$1,9 \times 10^{18}$	0,0920	0,291	0,0108
7	0,02	$4,3 \times 10^{17}$	0,070	0,216	0,0080
8	0,035	$4,5 \times 10^{17}$	0,075	0,183	0,0126
9	0,045	$5,8 \times 10^{17}$	0,160	0,216	0,0180
10	0,05	$1,1 \times 10^{19}$	0,170	0,249	0,0190

Вимірювання МС зроблені відносним методом Фарадея за допомогою електронних мікротерезів за методикою [3]. В якості еталона використовувався германій. Похибка вимірювань складала 2%. МС всіх досліджених кристалів діамагнітна з сприйнятливістю 10^{-6} і практично не залежить від температури в інтервалі $77 \div 300$ К (рис.1).

На рис.2 наведена експериментальна залежність МС TP (InSb)_{1-x}(CdTe)_x від складу при $T = 300$ К. Видно, що ця крива має не звичайний (лінійний) для TP характер, а немонотонно змінюється з їх складом x , особливо сильно при $x \leq 0,02$. Аналіз експериментальних даних дослідження МС проводився у припущенні адитивності окремих вкладів $\chi = \chi_a + \chi_{нз}$, де χ_a – МС кристалічної ґратки (в цю складову входить також МС дефектів); $\chi_{нз}$ – МС носіїв заряду.

МС НЗ і її залежність від їх концентрації і складу TP можна пояснити на основі теорії Завадського [4]. В цій роботі одержані вирази для діамагнітної (Ландау-Паерлса) і парамагнітної (Паулі) складових МС НЗ для випадку довільного закону дисперсії і сферичних ізоенергетичних поверхонь. При цьому діамагнітний член приведений для довільного степеня виродження, а парамагнітний – лише для випадку сильного виродження. Відповідні формули мають вигляд:

$$\chi_{нз}^{dia} = -\frac{2\mu_0^2 m_0^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \left[2kT \frac{m}{m_0} \right]^{\frac{1}{2}} \left[{}^0Z_{-3}^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{3}\beta {}^0Z_{-3}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} {}^0Z_{-1}^{\frac{1}{2}} \right],$$

$$\chi_{нз}^{para} = -\frac{\alpha^2 \mu_0^2 m_0^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \left[2kT \frac{m}{m_0} \right]^{\frac{1}{2}} \left[-1 Z_{-2}^{\frac{3}{2}} + \beta^{-1} Z_{-2}^{\frac{1}{2}} \right].$$

Тут ${}^n Z_k^m = \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f}{\partial z} \right) Z^n (Z + \beta Z^2)^m (1 + 2\beta Z)^k dz$ – двопараметричний інтеграл Фермі, де

$f = [1 + \exp(z - \eta)]^{-1}$, $\eta = \frac{E_F}{(kT)}$; $\beta = \frac{kT}{E_g}$, α – параметр, що пов'язує g -фактор НЗ з їх

ефективною масою за допомогою співвідношення $\alpha = g \frac{m_c}{m_0}$, $m(0)$ – ефективна маса НЗ на дні зони провідності, що пов'язана з їх ефективною масою m_c на рівні Фермі співвідношенням

$$m(0) = \frac{m_c}{1 + 2 \frac{E_F}{E_g}}$$

m_0 – маса спокою електрона.

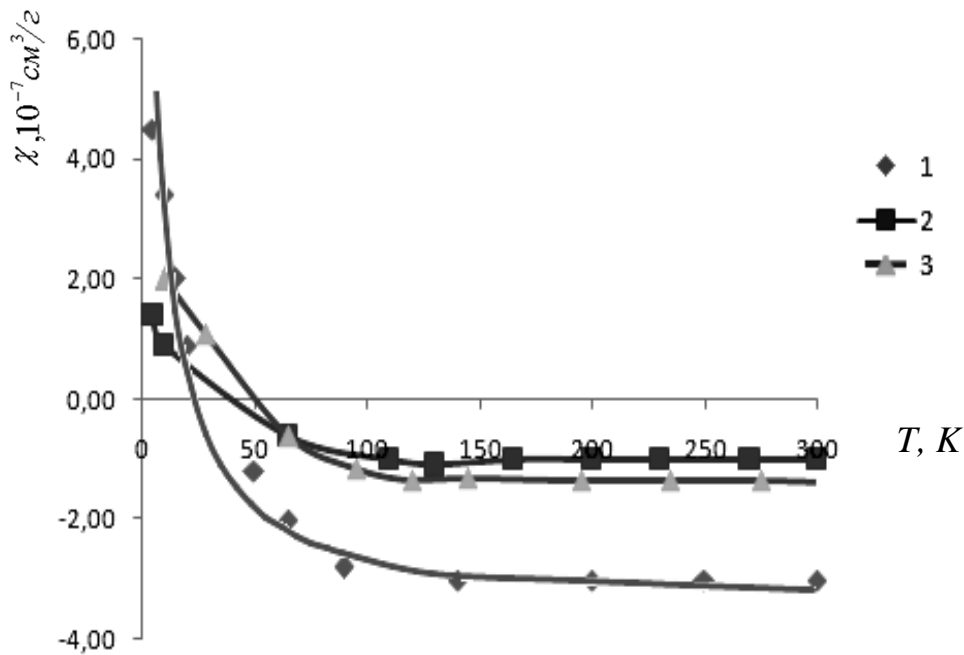


Рис. 2. Типові температурні залежності магнітної сприйнятливості TR
Склад зразків TR: 1 ($x = 0,001$); 2 ($x = 0,01$); 3 ($x = 0,02$)

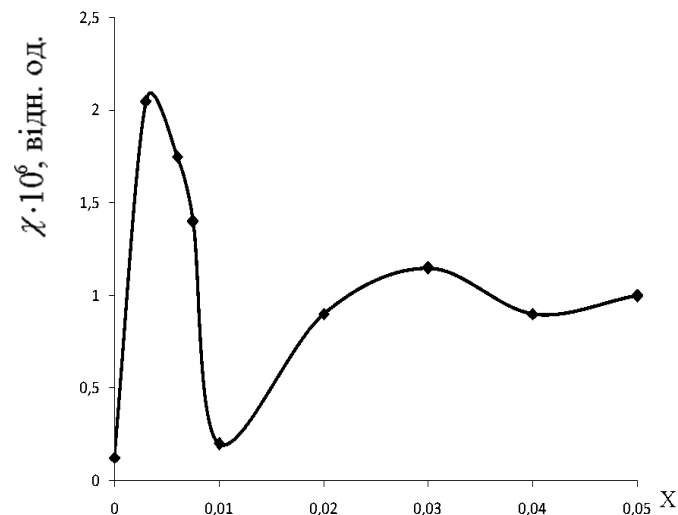


Рис. 3. Залежність магнітної сприйнятливості від складу TR

Для випадку взаємодії двох зон $\alpha = 2$. При взаємодії більш, ніж двох зон – $\alpha < 2$. Таким чином, відхилення величини α від 2 описує вплив вищих зон на g -фактор. Результати

розрахунків діамагнітної і парамагнітної компонент МС електронів у функції концентрації і складу дають значення МС НЗ порядку 10^{-8} , що на два порядки менше експериментально одержаного значення МС. Це дає нам підставу стверджувати, що основну роль в МС твердих розчинів $(\text{InSb})_{1-x}(\text{CdTe})_x$ грає МС кристалічної ґратки. Така складна залежність МС від складу, як показано на рис. 2, очевидно, пов'язана з індукованим парамагнетизмом Ван-Флека [6]. Якщо вважати, що електронні оболонки іонів володіють центральною симетрією і в кристалі не відчувають деформацію, то увесь їх магнетизм зводиться тільки до ланжевенівського прецесійного діамагнетизму. Тому МС таких кристалів підлягала б правилу звичайної адитивності сприйнятливостей всіх аніонів і катіонів, що утворюють кристал. Але в дійсності електронні оболонки іонів у кристалі ТР підлягають взаємній деформації. Ця деформація має анізотропний характер: центральна симетрія порушується (якщо вона була у ізолюваних іонів). Це приводить до того, що в магнітній сприйнятливості з'являється неадитивна складова від ванфлексівських парамагнітних доданків [7].

Слід відмітити, що збільшення парамагнетизму МС, що спостерігається у всіх досліджуваних кристалах при $T < 80 \text{ K}$ (рис.1), можливо пов'язане з парамагнетизмом дефектів кристалічної ґратки, який був виявлений у вузькозонних напівпровідниках при дослідженні ЕПР при $T < 20 \text{ K}$ [8].

Література

1. Фальковский Л. А., Бродовой А. В., Лашкарев Г. В. Электрические, термоэлектрические и магнитные свойства CdHgTe , легированного индием // ЖЭТФ. –1981.– Т.80, В.1. – С. 334-348.
2. Лашкарев Г. В., Бродовой А. В., Радченко М. В., Мирец А. Л., Паренская Е. С., Никитин М. С., Растегин Ю. И., Колесник С. П. Магнитная восприимчивость узкозонных полупроводников //ФТП. 1992. Т. 26, В.10. – С. 1768-1773.
3. G. V. Lashkarev, D. F. Miglev, A. D. Shevshenko, K. D. Tovstyuk. Electrical conductivity of PbTe thin films // Phys. St. Sol. (b). 1974. V 63. №2. – P. 663-668.
4. W. Zavadski. Electrical properties of HgCdTe crystals. Phys. St. Sol. // 1963. V 3. №6. – P.1421-1426.
5. Равич Ю. И., Ефимова Б. А., Смирнов Т. А., Методы исследования полупроводников в применении к халькогенидам свинца. – М.: Наука, 1968. – 316 с.
6. Дорфман Я. Г. Диамagnetизм и химическая связь. –М.:Наука, 1961. – 243 с.
7. Вонсовский С. В. Magnetизм. – М.:Наука, 1971. – С. 84-86.
8. Браташевский Ю. А., Прозоровский В. Д., Харионовский Ю. С. Зонная структура узкозонных полупроводников при низких температурах // ФНТ. 1977. Т.3. – С.120-123.

УДК 621.315.592

РОЗСЦОВАННЯ НОСІВ ЗАРЯДУ У СПЛАВАХ $(\text{GaAs})_x(\text{ZnTe})_{1-x}$ ($x \geq 0,9$) В ІНТЕРВАЛІ ТЕМПЕРАТУР 78...600 К

Аніщенко В.О.

При одночасному легуванні напівпровідників донорними й акцепторними домішками їх розчинність виявляється значно більшою, ніж при однокомпонентному легуванні. Прикладом тому є тверді розчини з гетеровалентним заміщенням $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}-\text{A}^{\text{II}}\text{B}^{\text{VI}}$, в яких розчинність $\text{A}^{\text{II}}\text{B}^{\text{VI}}$ в $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$ і $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$ в $\text{A}^{\text{II}}\text{B}^{\text{VI}}$ на один-два порядки перевищує розчинність окремих компонентів [1-3].

Це пов'язано з впливом компенсації на електронно-діркову рівновагу в розчині при складному легуванні та утворенням нейтральних пар (комплексів) з елементів донорного і акцепторного типу за реакцією [4]

$$A^- + D^+ = (A^- D^+)^0. \quad (1)$$

Реакція (1) відображає процеси міжйонної взаємодії в твердому розчині на основі напівпровідника.

У легуваних сполуках $A^{III}B^V$ існування взаємодії між донорами й акцепторами, яка обумовлює утворення донорно-акцепторних пар, показано в [5-8].

За умови

$$k_0^2 R_0^2 \ll 8 \text{ або } \frac{k_0^2 R_0^2}{8} \ll 1, \quad (2)$$

де k_0 – хвильовий вектор носія заряду, R_0 – середня відстань між сусідніми домішками протилежних знаків, пару сусідніх різнойменних центрів можна розглядати як диполь [9]. Це відбувається тому, що при виконанні умови (2) довжина хвилі розсіяного заряду зрівняна або більша за середню відстань R_0 між сусідніми різнойменними центрами і хвилі, розсіяні цими центрами, інтерферують. Тому пара найближчих різнойменних центрів поводить себе як один центр, а систему різнойменних центрів розсіювання можна розглядати як систему хаотично розподілених диполів. Отже, у гетеровалентних твердих розчинах $A^{III}B^V$ – $A^{II}B^{VI}$ за певних умов може проявлятися розсіювання носіїв заряду на диполях типу $(A^- D^+)^0$ [10-12]. В цьому випадку рухливість визначається за формулою [9]:

$$U_d = \frac{\sqrt{2} \hbar^2 \epsilon^2 (kT)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \pi^{\frac{3}{2}} e^3 R_0^2 m^{*\frac{3}{2}} N_k}, \quad (3)$$

де \hbar – зведена стала Планка, ϵ – відносна діелектрична проникність напівпровідника, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура, e – заряд електрона, m^* – ефективна маса носіїв заряду, $N_k = (N_d + N_a - N_i)$ – концентрація різнойменних центрів розсіювання (N_d – концентрація донорів, N_a – концентрація акцепторів, N_i – концентрація іонізованих домішок), $\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)$ – деяка функція, яка дорівнює 0,9.

Середня відстань між різнойменними домішками визначається із співвідношення [9]

$$\frac{4}{3} \pi R_0^3 = (2N_k)^{-1}. \quad (4)$$

Тверді розчини $A^{III}B^V$ – $A^{II}B^{VI}$ на основі $A^{III}B^V$ є сильнолегуваними напівпровідниками, у зв'язку з чим [13]

$$k_0(\mu) = \frac{\sqrt{2m^* \mu}}{\hbar}, \quad (5)$$

де μ – енергія рівня Фермі.

У цій роботі вивчалися механізми розсіювання носіїв заряду в твердих розчинах GaAs–ZnTe. Зразки для досліджень були отримані методом горизонтальної направленої кристалізації. Зразки розмірами $\sim 12 \times 3 \times 1,5$ мм³ вирізалися із середньої частини зливків. Всі вони мали діркову провідність.

Вимірювання питомої електропровідності, постійної Холла та диференціальної термоЕРС проводилися компенсаційним методом на постійному струмі. Основні параметри досліджених сплавів при кімнатній температурі наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Склад, концентрація, холлівська рухливість, ефективні маси дірок та приведений рівень Фермі в сплавах $(\text{GaAs})_x(\text{ZnTe})_{1-x}$ при $T = 300 \text{ K}$

Система	№ зразка	Склад, x	$p, \text{ см}^{-3}$	$U_x, \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$	m_p^*	μ^*
$(\text{GaAs})_x(\text{ZnTe})_{1-x}$	1	0,999	$1,6 \cdot 10^{19}$	44	0,43	1,7
	2	0,995	$3,5 \cdot 10^{19}$	46	0,43	3,4
	3	0,99	$4,9 \cdot 10^{19}$	43	0,47	3,9
	4	0,95	$8,6 \cdot 10^{19}$	27	0,60	4,4
	5	0,90	$10,0 \cdot 10^{19}$	22	0,60	5,0

- похибка визначення p – 4%;
- похибка визначення U_x – 7%;
- похибка визначення m_p^* – 16%;
- похибка визначення μ^* – 5%.

Ефективні маси дірок m_p^* та приведені рівні Фермі $\mu^* = \mu/kT$ були визначені за результатами вимірювання термоЕРС при $T = 300 \text{ K}$ для параметра розсіювання $r = 2$ (іони домішки). При подальших розрахунках температурна залежність ефективної маси не враховувалася.

Щоб з'ясувати, чи можливе розсіювання дірок у сплавах GaAs–ZnTe на диполях $(\text{ZnTe}^+)^0$, перевірялося виконання умови (2) для зразків 1–5 (таблиця 2).

Як видно з таблиці 2, умова (2) досить добре виконується для зразка 5 і не виконується для зразків 1–4. Тому, вірогідно, дипольне розсіювання має, в першу чергу, впливати на рухливість носіїв заряду в зразку 5.

Розраховані за формулою (3) рухливості дірок в зразку 5 для $T = 78 \text{ K}$, 300 K , 600 K дорівнюють відповідно $3 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, $6 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ та $9 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, що в 9,3; 3,7 та 1,8 рази менше, ніж їх експериментальні значення (таблиця 3). Тому можна вважати, що розсіювання дірок на диполях $(\text{ZnTe}^+)^0$ в сплавах GaAs–ZnTe не чинить суттєвого впливу на рухливість носіїв заряду в дослідженому інтервалі температур.

У сильно легованих напівпровідниках, якими є сплави GaAs–ZnTe, одночасно діють кілька механізмів розсіювання. Подібно до p -GaAs, такими механізмами можуть бути розсіювання на іонах домішки та акустичних коливаннях ґратки [14].

Теоретичні величини рухливості дірок U_i при розсіюванні на іонах домішки розраховувалися за формулою Брукса-Герінга для вироджених напівпровідників [15]:

$$U_i = \frac{\sqrt{2^7} \varepsilon^2 \varepsilon_0^2 (kT)^{\frac{3}{2}}}{N_i \sqrt{\pi^3} e^3 m_p^{*\frac{1}{2}} f(\gamma)}, \quad (6)$$

$$\text{де } f(\gamma) = \ln(\gamma + 1) - \frac{\gamma}{\gamma + 1}, \quad (7)$$

$$а \gamma = \frac{2\varepsilon_0 kT}{e^2} \left(\frac{\pi}{3p} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (8)$$

Таблиця 2

Перевірка умови $\frac{k_0^2 R_0^2}{8} \ll 1$ для сплавів $(GaAs)_x (ZnTe)_{1-x}$

Система	№ зразка	Склад, x	$k_0^2 (\mu)$, м ⁻² ($r=2$)	R_0^2 , м ²	$k_0^2 R_0^2 / 8$ ($r=2$)
$(GaAs)_x (ZnTe)_{1-x}$	1	0,999	$5,0 \cdot 10^{17}$	$2,6 \cdot 10^{-18}$	0,16
	2	0,995	$1,0 \cdot 10^{18}$	$7,2 \cdot 10^{-19}$	0,09
	3	0,99	$1,2 \cdot 10^{18}$	$4,5 \cdot 10^{-19}$	0,07
	4	0,95	$1,7 \cdot 10^{18}$	$1,4 \cdot 10^{-19}$	0,03
	5	0,90	$2,0 \cdot 10^{18}$	$9,0 \cdot 10^{-20}$	0,02

– похибка визначення добутку $k_0^2 R_0^2$ складає 39%.

У формулах (6-8) ε_0 – електрична стала, N_i – концентрація іонів домішки, p – концентрація дірок, e – заряд електрона. Розрахунок виконувався за умови $N_i = p$. Відносна діелектрична проникність приймалася рівною 12,5 [11].

Рухливості дірок U_L при розсіюванні на акустичних коливаннях для будь-якого ступеня виродження розраховувалися за формулою [13]

$$U_L = \frac{\sqrt{2}e\pi\hbar^4 C_l}{3E_1^2 m_p^{*5} (kT)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{F_0(\mu^*)}{F_{\frac{1}{2}}(\mu^*)}, \quad (9)$$

де C_l – середнє значення пружної постійної для повздовжніх хвиль в GaAs [15], E_1 – деформаційний потенціал для краю валетної зони p - GaAs [16], $F_0(\mu^*)$ – інтеграл Фермі індекса «0», $F_{1/2}(\mu^*)$ – інтеграл Фермі індекса «1/2».

Результати розрахунку U_L та U_i наведені в таблиці 3. Сумарна рухливість при розсіюванні дірок на іонах домішки та акустичних коливаннях ґратки визначалася за наближеною формулою

$$\frac{1}{U_{i,L}} = \frac{1}{U_i} + \frac{1}{U_L}. \quad (10)$$

Як видно з таблиці 3, експериментальні та розраховані величини рухливості $U_{i,L}$ добре узгоджуються для температур 300 К та 600 К. При цих температурах дірки в сплавах $(GaAs)_x(ZnTe)_{1-x}$ ($x \geq 0,9$) розсіюється, в основному, на іонах домішки та акустичних коливаннях ґратки.

При $T = 78\text{К}$ експериментальні величини рухливості приблизно в 2,5...3,0 рази менші за розрахункові за умови одночасної дії розсіювання на іонах домішки та акустичних коливаннях ґратки.

Таблиця 3

Експериментальні та розраховані за формулами (6), (9), (10) величини рухливості дірок в сплавах $(GaAs)_x(ZnTe)_{1-x}$ для $T = 78, 300, 600$ К

Система	№ зразка	Склад, x	$U_{\text{експ.}}$ 78 К	$U_{\text{експ.}}$ 300 К	$U_{\text{експ.}}$ 600 К	U_i 78 К	U_i 300 К	U_i 600 К	U_L 78 К	U_L 300 К	U_L 600 К	$U_{i,L}$ 78 К	$U_{i,L}$ 300 К	$U_{i,L}$ 600 К
$(GaAs)_x(ZnTe)_{1-x}$	1	0,999	62±4	44±3	36±3	378	183	157	670	140	51	241±72	79±19	38±7
	2	0,995	72±5	46±3	34±2	247	123	109	530	120	47	168±50	61±15	33±6
	3	0,99	59±4	43±3	30±2	223	114	89	390	90	37	142±43	50±12	26±5
	4	0,95	36±3	27±2	19±1	169	84	65	200	47	19	92±28	30±7	15±3
	5	0,90	28±2	22±2	16±1	160	76	62	190	44	19	87±26	28±7	15±3

- рухливості дірок в $\text{см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$;
- похибка розрахунку U_i складає 10%;
- похибка розрахунку U_L складає 44%;

Якщо взяти до уваги, що спостережувану концентрацію носіїв заряду в сплавах створюють від 36,4% (зразок 1) до 2,3% (зразок 5) іонізованих домішок, то стає зрозумілим, що основна маса атомів домішки знаходиться в нейтральному стані. Вони можуть об'єднуватися в конгломерати нейтральних атомів, які суттєво зменшують рухливість носіїв заряду в напівпровіднику [17].

Література

1. Фазовые равновесия в системе InAs–CdTe/В.Н. Морозов, В.Г. Чернов // Изв. АН СССР. Неорганические материалы. – 1979. – №8. – С. 1324.
2. Фазовые равновесия в квазибинарных системах InP–ZnTe и InP–CdTe/В.М. Глазов, А.Н. Крестовников, В.З. Нагиев [и др.] // Изв. АН СССР. Неорганические материалы. – 1973. – №11. – С. 1883.
3. Зонная структура твердых растворов типа $A^{III}B^V-A^{II}B^{VI}$. Экстремальные условия межзонного взаимодействия/Г.И. Бузевич, Л.А. Скоробогатова, Э.Н. Хабаров//Физика и техника полупроводников. – 1973. – №11. – С.2079.
4. Глазов В.М. Физико-химические основы легирования полупроводников/В.М. Глазов, В.С. Земсков.– М.: Наука, 1967. – С.54.
5. Экспериментальное исследование донорно-акцепторного взаимодействия в твердом растворе на основе InAs/В.М. Глазов, В.А. Негиев// Физика и техника полупроводников. – 1973. – №11. – С.2212.
6. Экспериментальное исследование донорно-акцепторного взаимодействия в InP легированного Zn(Cd)–Te/ В.М. Глазов, В.А. Негиев, Ф.Р. Рзаев// Физика и техника полупроводников. – 1973. – №4. – С.753.
7. Термодинамика донорно-акцепторного взаимодействия в полупроводниках I. Растворимость и донорно-акцепторное взаимодействие при двойном легировании полу-

проводников / В.М. Глазов, Л.М. Павлова // Журнал физической химии. – 1986. – №2. – С.273-285.

8. Термодинамика донорно-акцепторного взаимодействия в полупроводниках II. Равновесие точечных дефектов при двойном легировании полупроводников и химическая связь в образующихся донорно-акцепторных комплексах/ В.М. Глазов, Л.М. Павлова// Журнал физической химии. – 1986. – №3. – С.529-539.

9. Церцвадзе А.А. Рассеяние носителей заряда на примесях в сильнокомпенсированных полупроводниках/ А.А. Церцвадзе// Физика и техника полупроводников. – 1969. – №3. – С.409-416.

10. Электрические свойства твердых растворов GaAs- CdSe/ А.В. Войцеховский, А.Д. Пашун// Известия высших учебных заведений. Физика. – 1971. – №7. – С.110.

11. Анищенко В.А. Некоторые физические свойства гетеровалентных твердых растворов арсенида галлия с теллуридами кадмия и цинка: дисс....канд. физ.-мат. наук: 01.04.10 /Анищенко Валерий Алексеевич. – К., 1974. – 148 с.

12. Электрические свойства твердых растворов $(\text{GaAs})_x(\text{ZnSe})_{1-x}$ / А.В. Войцеховский, Н.Г. Вялый, А.Д. Пашун// Изв. АН СССР. Неорганические материалы. – 1980. – №11. – С.1910.

13. Фистуль В.И. Сильно легированные полупроводники/ Виктор Иванович Фистуль. – М.: Наука, 1967. – 416 с.

14. Арсенид галлия. Получение, свойства и применение/ [Бурдуков Ю.М., Гашимзаде Ф.М., Гольдберг Ю.А. и др.]; под ред. Ф.П. Кесаманлы и Д.Н. Наследова. – М.: Наука, 1973. – 471 с.

15. Маделунг О. Физика полупроводниковых соединений элементов III и V групп/ О. Маделунг. – М.: Мир, 1967. – 477 с.

16. Deformation potentials of $k = 0$ states of tetrahedral semiconductors/ A. Blacha, H. Presting, M. Cardona // Phys. Stat. Solidi b. 1984. – V.126. – P.11-36.

17. Weisberg L.R. Anomalous Mobility Effects in Some Semiconductors and Insulators/ L.R. Weisberg// Journal of Applied Physics. – 1962. – №. 5, P. 1817-1821.

4**Методика та проблеми педагогіки**

УДК 371.1

РАННІЙ РОЗВИТОК ЛЮДСЬКОГО ПОТЕНЦІАЛУ ЗА МЕТОДИКОЮ ГЛЕНА ДОМАНА (НА ПРИКЛАДІ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ)**Аніщенко О.В.**

Глен Доман — наш сучасник, видатний американський лікар, психолог, який у 1955 р. заснував філадельфійський інститут „Better Baby Institute” (згодом названий Інститутом Розвитку Людського Потенціалу) [7]. Він став основоположником ідей раннього розвитку дітей, які у подальшому зумовили „м’яку революцію” у педагогіці й були втілені у життя мільйонами батьків у всьому світі. Використовуючи унікальну методику стимуляції мозкової діяльності під час активного росту дитини, Глен Доман і його однодумці упродовж декількох десятиліть навчають дітей і батьків, демонструючи блискучі результати. Навчаючись за методикою Г. Домана, юні генії вже до чотирьох років успішно виконують різні за складністю фізичні вправи, володіють музичною грамотою, уміють рахувати і писати, читають вголос і розуміють декілька іноземних мов [5].

Очолювані Г. Доманом спеціалісти у галузі розвитку раннього навчання розробили оригінальні технології навчання дітей читання, математики, а також технологію, завдяки якій дитина може оволодіти енциклопедичними знаннями. Важливого значення набуває те, що Г. Доманом створено ґрунтовну теорію й широку практичну програму раннього навчання дітей, зорієнтовану на використання не лише у навчально-виховних закладах, а й у домашніх умовах.

Зазначимо, що методика Г. Домана ґрунтується на стимуляції центральної нервової системи і мозку дитини за допомогою дотику, зорового і слухового сприйняття. Найбільш ефективним цілеспрямований вплив на розумові процеси дитини є у віці до п’яти – семи років. За переконанням Г. Домана, основи інтелекту, освіченості людини, життєві перспективи загалом закладаються у перші роки життя дитини. Цей період є вирішальним для подальшого життя, і дитина вже ніколи не зможе перевершити потенціал, закладений до семи років. Водночас, на думку автора методики, залучити дитину до пізнання і сформулювати бажання дізнаватися про нове й виділяти головне простіше всього на першому році життя, тобто починаючи навчання від самого народження малюка.

Відповідно до зазначеної методики, процес навчання можна умовно розподілити на такі етапи [2]:

- навчання читанню, формування активного словника;
- усна лічба;
- виховання ерудита;
- розвиток рухової активності.

Методика Г. Домана сприяє засвоєнню дитиною десятків тисяч точних, надзвичайно цікавих фактів („бітів знань”). Їх подають на картках розміром 30 x 30 см чітким малюнком, схемою, якісною ілюстрацією, фотографією. На зворотному боці кожної картки розміщують пояснювальний текст, який зачитує дорослий.

З-поміж різних галузей знань, Глен Доман надає перевагу читанню і математиці, не

забуваючи також про фізичну й рухову активність дитини. Розглянемо більш детально проблему опанування математики за методикою Г. Домана.

Щоб зробити інформацію більш доступною для вивчення дитиною, всі галузі знань учений поділив на 10 розділів: а) біологія, б) історія, в) географія, д) математика, е) фізіологія людини, є) загальні закони природознавства, ж) музика, з) мистецтво, и) мови, к) література. Кожен розділ знання поділено на підрозділи (категорії). Наприклад, у розділі „Математика” виокремлено такі категорії [3, с.206]:

1. Геометричні форми у планіметрії.
2. Кути.
3. Геометричні об'ємні форми.
4. Математичні символи.
5. Аксиоми в геометрії.
6. Римські цифри.
7. Метрична система мір довжини.
8. Метрична система мір ваги.
9. Вимір часу.
10. Система дробів.

Для зручності розподілу і вивчення матеріалу кожен категорію розбито на комплекти з 10 карток-бітів із найменуванням кожного біта на звороті. Пояснювальний текст, що характеризує конкретний біт, має відповідати таким вимогам:

- інформація в ньому повинна бути точною, тобто містити факти, а не припущення;
- інформація має бути зрозумілою, термінологічно точною, без двозначності;
- текст повинен бути цікавим і, за можливістю, з гумором.

Методику навчання дітей математиці застосовують у ранньому віці (2,5 – 3 роки), оскільки вона дає змогу навчити мозок дитини розрізняти кількість і, як наслідок, усі обчислення здійснювати як операції з множинами, за рахунок чого й досягається їх швидкість. Навчання дітей математики згідно з цією технологією передбачає 5 етапів [3, с.204]:

- 1) упізнання кількості;
- 2) упізнання рівності;
- 3) розв'язання прикладів;
- 4) упізнання цифр;
- 5) упізнання рівності з цифрами.

Сутність методики Г. Домана найчіткіше окреслює перший етап. Для впізнання кількості виготовляють комплект карток з червоними кружальцями – від 1 до 100. Навчання починають з карток, на яких нанесені кружальця від 1 до 5. Дитині тричі на день послідовно показують картки з кількістю кружалець від 1 до 5 і називають відповідне число. Наступного дня проводять три заняття з першим комплектом, додаючи ще один комплект – з картками від 6 до 10. Його також показують тричі на день. Перед кожним наступним показом картки обов'язково перетасовують, щоб їх послідовність не була передбачуваною.

Як зазначає І. Дичківська, з першими двома комплектами заняття проводять упродовж п'яти днів. З шостого в кожному комплекті щоденно одну картку змінюють на нову. Приблизно за 50 днів дитина запам'ятовує всі картки і відрізняє одну від одної. Відтоді вона зможе сприймати те, що дорослий може лише бачити. З першого погляду вона впізнає 47 кружалець, 47 монеток або 47 мотрьошок, виявляючи феноменальну здатність до розрізнення: дитина завжди відрізняє 99 кружалець від 98 і 100.

Після ознайомлення з числами та їх записом у мозку дитини виникає бачення відповідної кількості кружалець, тобто вона здатна „бачити” відповідну множину, що дає змогу швидко здійснювати будь-які математичні обчислення. Ця здатність є основою особливих математичних здібностей.

Отже, при навчанні усній лічбі використовуються картки з зображеними кружальцями / крапками (від однієї до ста). Учитель показує картку і називає: „це – один, це – два” і т. д. Інтервал між демонстраціями карток орієнтовно дорівнює одній секунді. Таким чином, у ході опанування математики дитині показують на картках певну кількість кружалець (від одного до безкінечності), називаючи, скільки саме кружалець зображено. Картки показуються по черзі, регулярно і швидко. Так у дитини розвивається здатність „на око” визначати кількість побачених кружків без їх підрахунку, що в свою чергу дозволяє усно оперувати багатозначними цифрами. Після подолання п’яти етапів навчання математики розпочинається глибоке вивчення математики за підручниками з математики, алгебри, геометрії, тригонометрії, вищої математики самостійно або за допомогою старших.

Автор методики абсолютно справедливо наполягає на розумінні виховання і навчання як комплексних багатокомпонентних процесів, які пов’язують інтелектуальний і фізичний розвиток особистості. Основним принципом методики є рух від часткового до загального, своєрідне формування бази даних, необхідної для повноцінного розвитку дитини.

Як будь яка інша методика навчання й виховання, методика Глена Домана має як прихильників, так і критиків. У зв’язку з цим вважаємо за доцільне навести „за” і „проти” аналізованої методики.

Так, серед позитивних характеристик методики виокремимо постійний контакт батьків з дитиною, взаємозв’язок розумового й фізичного розвитку, формування наочного мислення, можливість навчання в умовах навчального закладу й удома, швидкий розвиток словникового запасу та ін. Мінусами є її трудомісткість, необхідність постійного оновлення наборів карток для занять, що займає значну частину вільного часу батьків, який можна було б витратити на спілкування з малюком, успішність лише за умови систематичної праці й беззастережного виконання всіх складових методики, а також те, що після певної межі знання „втомлюють” дитину та ін. В електронних джерелах [1] міститься інформація про те, що, наприклад, за сценарієм фільму „Smart babies” Discovery Health, журналісти Discovery знайшли вихованого за Г. Доманом юнака, і показали йому – сімнадцятирічному, „дитячі картки” моделей літаків. Жодного він не впізнав. Після цього резонно виникає запитання: можливо, краще було просто пограти в парку або провести декілька експериментів з водою, послухати цікаву аудіокнижку?

За нашим переконанням, незважаючи на наявні недоречності (і безліч плюсів!), методика Г. Домана цінна насамперед тому, що у дитини в ранньому віці не виникає необхідності у додатковій мотивації до навчання. Їй не потрібно пояснювати, навіщо це необхідно знати, адже пізнавати оточуючий світ і досліджувати все нове – улюблене заняття малюка. Грамотно і своєчасно використовуючи необмежені можливості для розвитку дитини за допомогою навчальних занять і гри батьки уможливають повноцінний інтелектуальний і фізичний розвиток дитини, яка розвивається набагато швидше за однолітків і від народження відкриває для себе світ енциклопедичних знань.

Позитивні результати дає поєднання елементів методики Г. Домана з іншими педагогічними системами. Напрацювання Г. Домана та його однодумців з інтерпретацією англійською, японською, іспанською, французькою, китайською та іншими мовами викладено на сайті Інституту Домана [7] – інституту прискореного розвитку людини, який нині очолює Жанет Доман, донька і послідовниця Глена Домана [6]. Якість методики підтверджується результатами її використання – у світі існує вже декілька десятків нобелівських лауреатів, які в дитинстві вчилися за методикою Г. Домана [4]. Незважаючи на досить „поважний вік” зазначеної методики, інтерес до неї в усьому світі зберігається й в умовах швидкого розвитку і поширення сучасних освітніх інновацій.

Література

1. Глен Доман: за и против [Електронний ресурс]. – Режим доступу: 18.06.2010: <<http://smarkids.ru/>>. – Загол. з екрану. – Мова рос.

2. Глен Доман и его система раннего развития // [Журнал для талантливых родителей](#) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: 26.06.2010: <<http://www.musicmama.com.ua/2010/07/16/-doman-method/>>. – Загол. з екрану. – Мова рос.
3. Дичківська І.М. Інноваційні педагогічні технології: Навч. посібник / І.М. Дичківська. – К.: Академвидав, 2004. – 352 с.
4. Методика Домана-Маниченко. Глен Доман, автор развивающих методик [Електронний ресурс]. – Режим доступу: 1.08.2010: <http://www.umnitsa.ru/metodiki_umnicy/metodika_domana-manichenko/>. – Загол. з екрану. – Мова рос.
5. Развивающие методики / Методика раннего развития Глена Домана [Електронний ресурс]. – Режим доступу: 1.08.2010: <<http://tutti-frutti.com.ua/index.php?id=41&lang=ru/>>. – Загол. з екрану. – Мова рос.
6. Doman J. Better Babies vs. Hurt Kids / Janet Doman [Електронний ресурс]. – Режим доступу: 1.08.2010: <<http://www.iahp.org/Better-Babies-vs-Hurt-Kids.190.0.html>>. – Загол. з екрану. – Мова англ.
7. The Institutes for the Achievement of Human Potential [Електронний ресурс]. – Режим доступу: 1.08.2010: <<http://www.iahp.org/>>. – Загол. з екрану. – Мова англ.

УДК 537.075

АКМЕОЛОГІЯ ВЧИТЕЛЯ ФІЗИКИ

Руденко М.П.

Термін "акмеологія" походить від грецького слова "акме", що означає вища точка, вістря, розквіт, зрілість, краща пора.

На думку прихильників акмеології – це наукова дисципліна, що займається вивченням:

- закономірностей самореалізації творчих потенціалів зрілих людей у процесі творчої діяльності на шляху до вищих досягнень (вершин);
- чинників, об'єктивних і суб'єктивних, які сприяють і перешкоджають досягненню вершин;
- закономірностей навчання вершинам життя і професіоналізму в діяльності;
- самоосвіти, самоорганізації і самоконтролю;
- закономірностей самовдосконалення, самокорекції і самореорганізації діяльності під впливом нових вимог, що йдуть як ззовні, від професії і суспільства, розвитку науки, культури, техніки, так і, особливо, зсередини, від власних інтересів, потреб і установок, усвідомлення своїх здібностей і можливостей, достоїнств і недоліків власної діяльності.

Акмеологія як наука містить нові можливості розгляду професійного становлення спеціаліста під кутом оволодіння ним "акме" – умов досягнення все вищих ступенів розвитку.

Основними акмеологічними механізмами досягнення акми в різних сферах життєдіяльності вважають саморозвиток, самовдосконалення, самоосвіту, самоконтроль. Тому акмеологія – галузь наукового знання, комплекс наукових дисциплін, об'єктом вивчення якої є людина в динаміці самоактуалізації її творчого потенціалу, саморозвитку, самовдосконалення, самовизначення в різних життєвих сферах, у тому числі в освіті, самостійній професійній діяльності, системі підвищення кваліфікації.

Об'єктом прикладних напрямків акмеологічних досліджень є особистість, яка прогресивно розвивається, самореалізується в конкретному виді діяльності, і яка досягає в цій діяльності вершини професіоналізму. Предметом є закономірності, механізми, умови і фактори,

які сприяють високим професійним досягненням в конкретній галузі діяльності, а також розвитку професіоналізму особистості і діяльності.

Першими прикладними напрямками акмеології стали ті, які орієнтовані на професійні сфери, що безпосередньо пов'язані з буттям і життєдіяльністю людини. Так з'явилася педагогічна, військова, управлінська акмеології.

Педагогічна акмеологія – наука про шляхи досягнення професіоналізму і компетентності в праці педагога. Тому одним із центральних понять педагогічної акмеології є поняття професіоналізму вчителя. Під ним розуміється інтегральна характеристика особи педагога, що передбачає володіння ним видами професійної діяльності та наявність у педагога поєднання професійно важливих психологічних якостей, що забезпечують ефективне розв'язання професійних педагогічних завдань із навчання і виховання.

Рівні професіоналізму педагога є ступенями, етапами його руху до високих показників педагогічної праці:

– рівень оволодіння професією, адаптація до неї, первинне засвоєння вчителем норм, менталітетів, необхідних прийомів, технологій;

– рівень педагогічної майстерності як виконання на доброму рівні кращих зразків передового педагогічного досвіду, накопичених у професії; володіння прийомами індивідуального підходу до учнів, методами передачі знань, що є в професії; здійснення особово-орієнтованого навчання та ін.;

– рівень самоактуалізації педагога в професії, усвідомлення можливостей педагогічної професії для розвитку своєї особи, саморозвиток засобами професії, свідоме посилення своїх позитивних якостей і згладжування негативних, зміцнення індивідуального стилю;

– рівень педагогічної творчості як збагачення педагогічним досвідом своєї професії за рахунок особистого творчого внеску, внесення авторських пропозицій, які стосуються окремих завдань, прийомів, засобів, методів, форм організації навчального процесу.

В узагальненому вигляді педагогічні здібності були представлені В.А.Крутецьким [3], який і дав їм відповідні загальні визначення.

1. Дидактичні здібності – здібності передавати учням навчальний матеріал, роблячи його доступним для дітей, підносити їм матеріал або проблему ясно і зрозуміло, викликати інтерес до предмету, порушувати в учнів активну самостійну думку.

2. Академічні здібності – здібності до відповідної області наук (до математики, фізики, біології, літератури і т.д.).

3. Перцептивні здібності – здатність проникати у внутрішній світ учня, вихованця, психологічна спостережливність, пов'язана з тонким розумінням особи учня і його тимчасових психічних станів.

4. Мовні здібності – здатність ясно і чітко виражати свої думки, відчуття за допомогою мови, а також міміки та пантоміміки.

5. Організаторські здібності – це, по-перше, здатність організувати учнівський колектив, згуртувати його, надихнути на вирішення важливих завдань і, по-друге, здатність правильно організувати свою власну роботу.

6. Авторитарні здібності – здатність безпосереднього емоційно-вольового впливу на учнів і уміння на цій основі добиватися у них авторитету.

7. Комунікативні здібності – здібність до спілкування з дітьми, уміння знайти правильний підхід до учнів, встановити з ними доцільні, з педагогічної точки зору, взаємостосунки, наявність педагогічного такту.

8. Педагогічна уява (або прогностичні здібності) – це спеціальна здатність, що виражається в передбаченні наслідків своїх дій, у виховному проектуванні особи учня, пов'язаного з уявленням про те, що з учня вийде в майбутньому, в умінні прогнозувати

розвиток тих або інших якостей вихованця.

9. Здібність до розподілу уваги одночасно між декількома видами діяльності.

Досягти професіоналізму вчителя можливо на основі впровадження в навчальний процес студентів ціннісно-орієнтованої системи, що передбачає можливість розвитку індивідуальності студентів, "виращування" їх власного професійного "акме". Перехід від наочно-центрованої моделі змісту освіти до гнучкішої, яка дозволяє інтегрувати наочний зміст різних навчальних дисциплін з суб'єктивним досвідом студентів, сприяє розвитку професійно значущих якостей у майбутніх вчителів.

Програма навчання за такою системою повинна "зростати" з основної програми підготовки фахівця університетського профілю. Необхідно, щоб педагогічне знання було інтегровано із знанням філософії, культурології, психології, політології, спеціальних дисциплін – це своєрідні "точки зростання" в педагогічній підготовці.

Тому викладач не може ігнорувати ціннісні орієнтації і професійні наміри студента, що зробив свій вибір і постійно уточнює його: багатовимірний простір навчальної дисципліни сьогодні вже не може бути змодельований як жорстко задане, строго визначене, з чітко обкресленими межами. Воно стає гнучким, варіативним, що враховує суб'єктивний досвід студентів, їх бажання, інтереси, професійні схильності.

Виходячи з цього, педагогічний процес у вузі з підготовки вчителів фізики повинен надати студенту можливість за допомогою викладачів кожного циклу дисциплін розробляти і коректувати ціннісно-орієнтовану комплексну цільову програму формування творчої індивідуальності, спрямовану на вищі досягнення в професії і попередження професійної некомпетентності, неуспішності в розв'язанні професійних завдань.

Сучасні вчителі фізики повинні вміти швидко орієнтуватися на ринку праці, ефективно доучуватися і перенавчатися відповідно до нових потреб професії, володіти способами досягнення професійної компетенції і майстерності. Педагогічний процес у вузах при підготовці вчителів фізики якраз і повинен бути спрямований на розвиток у студентів необхідної бази для подальшого оволодіння професією, на створення умов, що забезпечують можливість кожному студенту розкрити, актуалізувати свої завдатки і здібності, реалізувати свої освітні потреби, оволодіти способами досягнення щонайвищих результатів у своїй професійній діяльності.

При проектуванні педагогічного процесу, що відповідає вищезазначеним вимогам, необхідне виконання ряду умов, найважливішими з яких є:

1. створення ситуацій вибору;
2. стимулювання самоосвітньої діяльності студентів через співтворчість і рефлексію.

Принциповою особливістю сучасної педагогічної освіти, елементом її змісту є досвід діяльності студента в умовах демократичного і особистісно-орієнтованого процесу навчання у вузі. Майбутній учитель фізики повинен мати нагоду самостійно визначати, чому вчитися, як і у кого (зрозуміло, в рамках пропонуваного вузом програм). Тільки в цьому випадку він визнає таке право за своїми учнями. Важливу роль у розв'язанні цього завдання відіграє блок дисциплін за вибором студентів. Як правило, до цього блоку входять дисципліни, які сприяють професійному зростанню майбутніх учителів фізики. Роль викладача вузу – допомогти студенту збудувати стратегію своєї освіти, спроектувати свій освітній маршрут так, щоб його здібності розкрилися якомога повніше.

Контроль якості професійної підготовки повинен здійснюватися після закінчення кожного рівня університетської освіти із базового компоненту програми. Разом з тим, із кожного курсу повинна бути представлена програма контролю якості його засвоєння, що має декілька варіантів, щоб студент міг нею скористатися з метою самоконтролю. Особливо сприятливі умови для цього складуються при організації навчання за кредитно-модульною системою. Можна вичленувати три рівні контролю:

1. По кожному навчальному курсу і по навчальній дисципліні в цілому через систему

тестових завдань різного типу: репродуктивних, пошукових, учбово-дослідницьких. Це стосується циклу фундаментальних дисциплін і, зокрема, курсів загальної та теоретичної фізики. Питома вага інформації суміжних дисциплін, необхідних для виконання цих завдань, невелика і можуть бути виконані студентом самостійно, або за допомогою викладача.

2. Міждисциплінарні форми контролю по циклах предметів в рамках професійно-освітньої програми. Це стосується, в першу чергу, курсу методики навчання фізики. Особливе значення мають задачі на самостійне конструювання студентом схем і моделей методик аналізу педагогічних явищ: розробити схему аналізу відповіді учня з теоретичного питання фізики і обґрунтувати її правомірність; вичленувати критерії сформованості в учня фізичної теорії, що вивчається; скласти систему задач з некоректно представленою інформацією (задачі з недостатчею чи надмірною суперечливою початковою інформацією) для діагностики критичності мислення учнів і т. д.

3. Комплексні завдання, які об'єднують контроль якості підготовки студентів з усього циклу предметів професійно-освітньої програми – фізики, методики навчання фізики, педагогіки, психології. Комплексне завдання повинне бути не підсумовуванням серій завдань з кожної дисципліни, а інтеграція на першій погляд різноманітної інформації з різних дисциплін, оскільки саме така інтеграція потрібна від вчителя фізики при компетентному розв'язанні різноманітних педагогічних задач.

Література

1. Бранский В.П. Социальная синергетика и акмеология / В.П. Бранский, В.Д. Пожарский. – СПб: Политехника, 2002, – 311 с.
2. Гоноболин Ф.Н. О педагогических способностях учителя / Гоноболин Ф.Н. -М.: Просвещение, 1964. – 111 с.
3. Крутецкий В.А. Психология обучения и воспитания школьников / Крутецкий В.А. -М.: Просвещение, 1976.-231 с.
4. Кузьмина Н.В. Очерки психологии труда учителя: Психологическая структура деятельности учителя и формирование его личности / Кузьмина Н.В. – Л., 1967.-142 с.
5. Кузьмина Н.В. Предмет акмеологии / Кузьмина Н.В. – СПб: Политехника, 2002.-136 с.
6. Кузьмина Н.В. Профессионализм личности преподавателя и мастера производственного обучения / Кузьмина Н.В. – М.: Просвещение, 1990. – 185 с.

УДК 53(09)'18

ВИКОРИСТАННЯ ПРИНЦИПУ ІСТОРИЗМУ ПРИ ВИВЧЕННІ ЗАКОНУ ОМА В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ФІЗИКИ

Аніщенко В.О.

Використання принципу історизму дозволяє розв'язати цілу низку освітніх і виховних завдань, зокрема, таких як демонстрація механізму фізичного відкриття, формування наукового світогляду учнів та творчого мислення. У випадку закону Ома звернення до історії питання є чи не єдиним засобом прояснити суть справи.

Закон Ома належить до найвідоміших законів фізики. Учнівський фольклор у віршованій формі навіть радить сидіти дома тим учням, які не знають закону Ома. Проте за простою й елегантною формою цього закону прихована непроста історія його відкриття, яка може стати предметом зацікавленого обговорення на уроці фізики або на засіданні фізичного гуртка.

Початок XIX сторіччя пов'язаний з трьома відкриттями, які відіграли важливу роль в еволюції фізичних поглядів. Це відкриття вольтового стовпа, принципу інтерференції в оптиці та електромагнетизму [1]. Пристрій, відомий під назвою “вольтів стовп”, був сконструйований італійським фізиком Александро Вольта (18.02.1745 – 5.03.1827) наприкінці 1799 р. Перший вольтів стовп складався з 20 пар вертикально розташованих мідних і цинкових кружечків, розділених кружечками із сукна, змоченими солоною водою. Вольтів стовп – перше хімічне джерело постійного струму, яке на початку XIX сторіччя набуло широкого поширення у фізичних лабораторіях. Вчені різних країн змагалися між собою, виготовляючи все більші й більші стовпи, вигадуючи різноманітні системи електричної сигналізації, розплавляючи шматочки різних металів. За допомогою вольтового стовпа англійські фізики У. Нікольсон та А. Карлейль у 1800 р. відкрили явище електролізу, розклавши воду на її складові частини – кисень і водень.

Після вольтового стовпа А. Вольта винайшов ще й електричну батарею, яка складалася з багатьох послідовно з'єднаних цинкових та мідних пластин, занурених попарно в посудини з розчином кислоти. Як на той час, батарея була досить потужним джерелом електричної енергії.

Особливо велике враження досліди А. Вольта справили на професора хімії Копенгагенського університету Г.Х. Ерстеда (14.08.1777 – 9.03.1851), який інтуїтивно відчував зв'язок між електричними і магнітними явищами. Тому Г.Х. Ерстед поставив перед собою завдання перевірити, чи не діє електрика на магніт [2].

Відкриття відбулося майже випадково. П'ятнадцятого лютого 1820 р. Г.Х. Ерстед читав студентам лекцію в Копенгагенському університеті, на якій демонстрував дуже цікаву, як на той час, властивість електричного струму нагрівати дротину, по якій він протікає. Випадково поряд з дротиною, на яку дивилися студенти, знаходився компас. Один із студентів звернув увагу професора на ту обставину, що протікання струму по дротині супроводжується поворотом стрілки компаса.

Двадцять першого липня 1820 р. у Копенгагені була надрукована брошура “Досліди, які стосуються дії електричного конфлікту на магнітну стрілку” [3]. Автор брошури професор Копенгагенського університету Г.Х. Ерстед надіслав її до всіх наукових установ і фізичних журналів, підкресливши цією дією важливість зробленого відкриття. І, справді, в науковому світі дослід Г.Х. Ерстеда спричинив справжню сенсацію і викликав потужний резонанс. Що ж спричинило гучний успіх примітивного досліду, який в наш час може виконати будь-який школяр, маючи електричну батарейку і компас? Більше того, з'ясувалося, що Г.Х. Ерстед не був навіть піонером свого відкриття. У науковій літературі були відомі факти намагнічування сталених голок електричною іскрою, розмагнічування компасів блискавкою, намагнічування сталеної голки вольтовим стовпом, повертання магнітної стрілки поблизу працюючого вольтового стовпа. Але всі ці факти мали характер випадкових спостережень. Вони не узагальнювались і навіть точно не описувались.

Принципова важливість відкриття Г.Х. Ерстеда полягає в наступному:

1) Був виявлений зв'язок між двома групами явищ, які ще від В. Гілберта (XVI ст.) вважались принципово різними.

2) Був виявлений новий тип взаємодії. До цього фізика мала справу лише з центральними силами. В досліді Г.Х. Ерстеда провідник із струмом не притягував і не відштовхував полюс магнітної стрілки, а лише орієнтував її перпендикулярно до провідника.

3) Відкриття Г.Х. Ерстеда давало фізикам об'єктивний метод електричних вимірювань. Тепер про величину електричного струму можна було говорити вимірюючи відхилення стрілки компаса. Ця ідея була покладена в основу конструкції чутливого і зручного індикатора електричного струму, створеного у 1820...1821 рр. і названого мультиплікатором [4].

Зазначимо, що створення вольтового стовпа та винайдення об'єктивного методу вимірювання електричного струму створили передумови для вивчення кількісних закономірностей в

електричному колі. Ще на початку XIX сторіччя, коли багато вчених захоплювалися виготовленням вольтових стовпів та електричних батарей, було помічено, що дія батареї залежить від площі пластин і дротини, якою з'єднували її полюси. Г. Деві (7.12.1778 – 28.05.1829) в 1821 р. з'ясував, що провідність дротини залежить від роду речовини, довжини та площі поперечного перерізу і зменшується із збільшенням температури.

Питанням провідності речовин у 1825 р. почав займатися і Георг Симон Ом (16.03.1787 – 7.07.1854). Розташовуючи магнітну стрілку над різними ділянками електричного кола, зорієнтованими в площині магнітного меридіану, Г.С. Ом виявив, що кут, на який поверталася стрілка, залишався незмінним. Тим самим він з'ясував, що сила струму в різних ділянках кола однакова. Г.С. Ом запровадив термін “опір”, “сила струму”, знайшов ряд речовин, які розташував у порядку зростання опору. Але найважливішим завданням, яке мав розв'язати Г.С. Ом, було з'ясування залежності сили струму в електричному колі від кількості пар пластин електричної батареї та від природи з'єднувального провідника. Говорячи мовою сучасної фізики, треба було з'ясувати залежність сили струму від ЕРС джерела та величини опору зовнішньої ділянки електричного кола. Але беручи електричні батареї з різною кількістю пар пластин ми змінюємо усе коло, бо кожна додаткова пара вносить в коло додатковий опір, який не можна враховувати. Тому треба було знайти спосіб змінювати наругу (термін “напруга” запровадив А.-М. Ампер) не змінюючи саму батарею та уникнути нагрівання провідника, бо цей ефект може також впливати на силу струму.

Слід наголосити, що Г.С. Ому вдалося подолати ці труднощі, скориставшись термоелектричним явищем, яке відкрив Т. Зеебек (9.04.1770 – 10.12.1831) у 1821 р. Явище Зеебека полягає у збудженні невеликої напруги (термоЕРС) при нагріванні спаю з двох різних металів. При сталій різниці температур напруга, яку генерує термоелемент, стабільна, а малий струм практично не нагріває провідник.

Керуючись наведеними вище міркуваннями, Г.С. Ом вперше виготовив досить точний

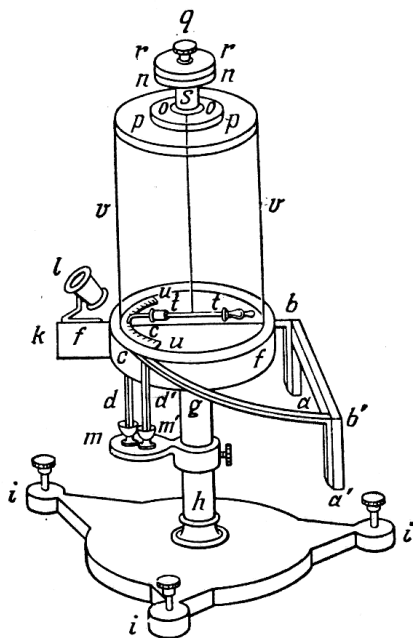


Рис. 1. Прилад Ома для визначення залежності між силою струму та опором [5]

прилад для досліджень в царині електрики (рис. 1). Прилад Ома складався з двох головних складових – детектора струму, який, по суті, був крутильними терезами, якими користувався ще Ш.О. Кулон (14.06.1736 – 23.08.1806) та термоелементів ab і $a'b'$, виготовлених з двох мідних дротин, припаяних до поперечного стержня з вісмуту (рис. 1). Термоелементи вмикалися в коло за допомогою чашок m та m' із ртуттю. В чашки також занурювали зачищені кінці провідника, в якому вимірювали силу струму. Для одержання термоЕРС Г.С. Ом занурював спай a в нагріту до кипіння воду, а спай a' – в суміш із льоду з водою. За цих умов намагнічене коромисло t поверталось. Кут закручування нитки, при якому коромисло t поверталось до нуля шкали u , відлічувався за допомогою обертової головки приладу r та шкали n . Для підвищення точності вимірювання кута використовувалася лупа l .

В якості провідників Г.С. Ом спочатку використав вісім відрізків мідного дроту різної довжини і отримав для них серію відліків, які являли собою кути закручування нитки підвісу, при яких коромисло поверталось до нуля шкали (табл. 1, [5]).

Таблиця 1

Результати експерименту Ома з відрізками мідного дроту

Довжина провідника x , см	5	10	15	25	45	85	165	325
Закручування нитки X , град.	305	282	258,5	223,5	178	124,75	78	44

Базуючись на експериментальних даних Г.С. Ом показав, що підібравши належним чином постійні A і B , довжину провідника x та кут закручування нитки підвісу X можна пов'язати співвідношенням

$$X = \frac{A}{B + x}. \quad (1)$$

У цьому співвідношенні X відображає силу магнітної взаємодії, яка пов'язана з силою струму у провіднику, A і B – постійні, що залежать від “збуджуючої сили” (термоЕРС) та від опору інших частин кола.

Проілюструвати співвідношення (1) можна побудувавши графік залежності x від $1/X$ (рис. 2, [5]).

Коли Г.С. Ом зменшив різницю температур спаїв термоелемента до $9,4^\circ\text{C}$ (майже в 10 разів порівняно з попереднім випадком), виявилось, що кути закручування нитки підвісу також

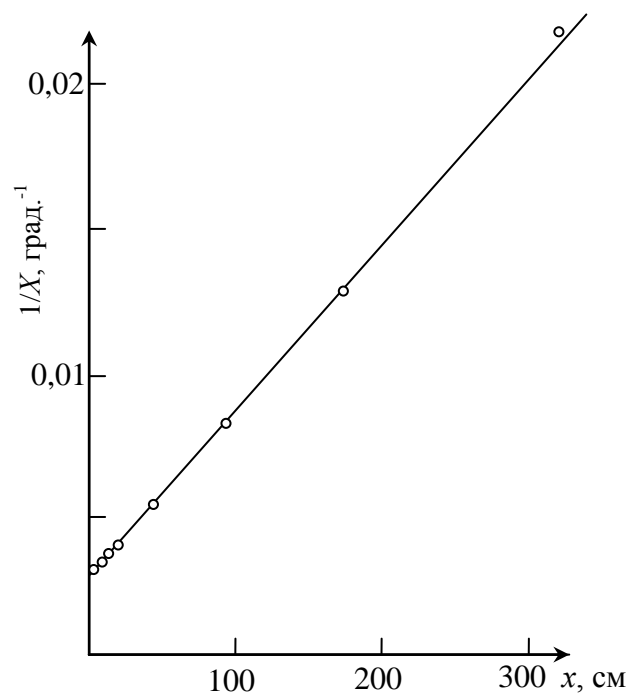


Рис. 2. Графічне представлення результатів Г.С. Ома [5]

зменшилися приблизно в 10 разів. Так як при зменшенні різниці температур у стільки ж разів зменшується і термоЕРС, то з досліду випливало, що сила струму прямо пропорційна “збуджуючій силі” (термоЕРС). Г.С. Ом також показав, що сила струму обернено пропорційна певній величині, яка залежить від довжини провідника. Він назвав її опором. Стала B в (1) Г.С. Ом пов'язав з опором решти електричного кола.

Таким чином, Г.С. Ому вдалося показати, що сила струму в електричному колі прямо пропорційна “збуджуючій силі” (термоЕРС) та обернено пропорційна повному опору кола.

Результати своїх досліджень Г.С. Ом виклав у роботі “Гальванічне коло, описане математично доктором Г.С. Омом”, яка вийшла у 1827 р.

Спочатку німецькі фізики з недовірою поставилися до резуль-

татів, отриманих Г.С. Омом. Певний час він відчував матеріальну скруту, не складалася наукова кар'єра, не визнавалися його наукові праці. Проте цей період тривав недовго. З 1833 р. Г.С. Ом – професор Нюрнберзької вищої політехнічної шкли, з 1839 р. – ректор цієї школи, а з 1849 р. – ректор Мюнхенського університету [6].

Разом з іншими видатними фізиками XIX ст. Г.С. Ом належить до когорти тих титанів думки, яким вдячне людство звело своєрідні величні монументи, назвавши на їх честь одиниці вимірювання фізичних величин. Як відомо назву “Ом” отримала одиниця електричного опору.

Література

1. Очерки развития основных физических идей / Под ред. Григорьяна А.Т. и Полака Л.С. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – 512 с.
2. Карцев В.П. Приключения великих уравнений. – М.: Знание, 1971. – 320 с.
3. Ампер А.-М. Электродинамика. Серия “Классики науки” / Под ред. Дорфмана Я.Г. – Л.: Изд. АН СССР, 1954. – 492 с.
4. Hildebrandt R. Lehrbuch der Physik. – Leipzig: C.F. Amelangs Verlag, 1905. – 422 с.
5. Липсон Г. Великие эксперименты в физике. – М.: Мир, 1972. – 216 с.
6. Храмов Ю.А. Физики. Биографический справочник. – К.: Наукова думка, 1977. – 509 с.

УДК 378.036

ОСОБЛИВОСТІ СКЛАДАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ ІЗ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ ФІЗИКИ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

В.М. Закалюжний, Л.І. Шовкун

Останнім часом все більшу увагу в практиці викладання різних предметів як у вищих навчальних закладах, так і в школах звертають на підготовку та використання тестів як засобу об'єктивного контролю рівня засвоєння знань. Головною особливістю тестового контролю, порівняно з іншими методами, є його однорідність, що досягається завдяки тому, що всім учням чи студентам пропонується один і той же матеріал в однакових часових межах, що сприяє об'єктивності оцінювання отриманих результатів (функція викладача зводиться до підрахунку правильних або неправильних відповідей). Важливими факторами є також економія часу, необхідного на виконання тесту, та нескладність організації тесту і можливість легко підрахувати результати. Тому тести проводяться, в основному, в письмовій формі [1].

У процесі викладання методики навчання фізики тестові завдання також знаходять широке застосування. Такі завдання дозволяють перевірити знання студентами фактичного матеріалу, фізичних понять та методики їх формування в середній школі, послідовність вивчення тем шкільного курсу фізики, особливості проведення експерименту та ін. Крім того, тести можуть слугувати засобом діагностики труднощів матеріалу для студентів, мірою визначення ефективності засвоєння матеріалу та способом прогнозування успішності або неуспішності навчання. Крім того, вони можуть бути використанні для самоконтролю, систематизації та узагальнення й повторення вивченого матеріалу, а також мати навчальний характер.

Аналіз літератури та практики викладання методики навчання фізики дає змогу зробити висновок, що в Україні ще не розроблено систему валідних (адекватних) тестових завдань із методики навчання фізики та науково обґрунтованих тестів і тому створення їх є актуальною проблемою.

У розв'язанні даної проблеми ми обмежилися з'ясуванням питання про методику складання системи завдань тестів та розробкою таких тестів до всіх розділів методики навчання фізики в середній школі. При цьому ми розрізняли поняття “тест” та “тестове завдання”. Тестовим завданням є мінімальна одиниця тесту, яка передбачає певну вербальну чи невербальну реакцію тестованого. Кожне тестове завдання створює для тестованого конкретну тестову ситуацію, яка може подаватися вербальними (текст) і невербальними, наочними

(малюнок, схема, таблиця) засобами. Очікувана відповідь тестованого може бути вербальною або невербальною (з використанням літер або цифр, знаків +, – та ін.) [2].

Особливою складністю при побудові тестів із методики навчання фізики є підбір завдань. Методика навчання фізики є педагогічною наукою, яка досліджує закономірності, шляхи та засоби навчання, виховання і розвиток учнів у процесі навчання фізики. Підхід до викладання цього предмету є досить демократичним, а тому важко встановити однозначність відповіді на тестові завдання. А тест, за означенням, є сукупністю спеціально підібраних завдань, що передбачають короткі однозначні відповіді.

Тестові завдання із загальних питань методики навчання фізики повинні передбачати перевірку знань студентами методів навчання, особливостей їх використання в навчальному процесі, способів перевірки знань учнів та ін. При складанні тестів із частинних питань методики навчання фізики слід включати завдання, які передбачають не лише перевірку знань методики вивчення того чи іншого питання, а й знання фізичних законів, формул, теорій, понять та їх науково-методичного аналізу. До тестових завдань із навчального експерименту доцільно включати такі, які дають можливість зясувати знання студентами демонстрацій, що проводяться при вивченні того чи іншого питання, особливостей методики їх проведення, вміння підібрати необхідні прилади, характеристики цих приладів. Такі завдання можуть бути закритої форми (із запропонованими відповідями), або ж відкритої форми (з вільно конструйованою відповіддю). Враховуючи специфіку навчального предмета методика навчання фізики, тестові завдання з даної дисципліни доцільно вибирати, в основному, закритої форми.

Тестове завдання з методики навчання фізики повинно задовольняти двом основним критеріям: воно повинно бути важливим за змістом та мати відповідну структуру. Необхідно уникати помилок, від яких виграють досвідчені в тестуванні студенти, а також уникати надмірної складності. Це передумови того, що тестові завдання будуть давати валідні результати.

Розрізняють такі типи тестових завдань:

- вибір відповіді із набору запропонованих варіантів (єдиного або кількох);
- встановлення відповідності;
- встановлення правильної послідовності;
- вибір фрагмента запропонованої графічної ілюстрації,
- вписування (введення з клавіатури) відповіді (чисте або заповнене текстом поле);
- інші.

При складанні тестових завдань із методики навчання фізики доцільно дотримуватися також таких рекомендацій:

1. Переконавшись, що на тестове завдання можна відповісти, не дивлячись на варіанти відповіді, або що варіанти відповіді на 100 % правильні чи неправильні.

2. Включити в умову найбільшу частину інформації із тестового завдання; умова завдання повинна бути довшою за варіанти відповіді, які, в свою чергу, повинні бути достатньо короткими.

3. Уникати надмірної інформації в формулюванні завдання.

4. Уникати заплутаних складних формулювань тестових завдань; уникати зайвих слів, намагатися одержувати просте формулювання питання.

5. Складати граматично правильні та логічні варіанти відповіді; розташовувати їх у логічному чи алфавітному порядку; писати правдоподібні дистрактори, що мають приблизно таку саму довжину, що й правильна відповідь.

6. Уникати категоричних тверджень, типу “завжди”, “ніколи” і “все”; а також невизначених формулювань, типу “як правило” чи “часто”.

7. Уникати тестових завдань із запереченнями (із словами “крім” чи “не” в запитанні).

8. Писати, наскільки можливо, зрозумілі інструкції для відповідей на запитання.

9. Прості, ясні і короткі запитання завжди мають більшу перевагу, ніж складні.

10. Уникати негативних запитань, оскільки учень може заплутатися, вибираючи відповідь.

Нижче ми пропонуємо різні типи розроблених нами тестових завдань до різних розділів методики навчання фізики в середній школі.

Загальні питання методики навчання фізики

I. За яким принципом побудована програма фізики сучасної загальноосвітньої школи?

- A. Радіальним.
- Б. Концентричним.
- В. Ступінчатий.
- Г. Фізичним.

II. Встановити відповідність між методами навчання та видом роботи учнів і вчителя на уроці:

- | | |
|---------------------|--|
| 1. Словесний. | A. Проведення вчителем демонстраційного експерименту; |
| 2. Лабораторний. | Б. Пояснення вчителем нового навчального матеріалу; |
| 3. Ілюстративний. | В. Самостійне ознайомлення за книгою із практичним використанням явища, що вивчалось на уроці; |
| 4. Робота з книгою. | Г. Виконання учнями лабораторної роботи за інструкцією. |

III. У якій послідовності відбувається теоретичне пізнання?

- A. Формулювання проблеми та висунення гіпотези.
- Б. Аналіз і узагальнення фактів.
- В. Теоретичне виведення наслідків із гіпотези.
- Г. Спостереження явищ або відновлення їх у пам'яті.

IV. Якщо при виконанні лабораторної роботи не передбачається самостійне здобуття нових знань, а лише підтверджуються вже відомі факти й істини або ілюструються теоретично встановлені твердження, то такий метод виконання лабораторної роботи називається _____.

Частинна методика

I. До основних понять кінематики відносяться:

- A. Механічний рух, система відліку, матеріальна точка, маса, переміщення, траєкторія, шлях, імпульс тіла.
- Б. Механічний рух, система відліку, матеріальна точка, переміщення, траєкторія, шлях.
- В. Система координат, система відліку, шлях, швидкість.
- Г. Механічний рух, система відліку, матеріальна точка, переміщення, траєкторія, шлях, швидкість, прискорення.

II. Встановити відповідність між темами шкільного курсу фізики та поняттями, які доцільно повторити з учнями перед вивченням цих тем:

- | | |
|---------------------------|---|
| 1. Система відліку; | A. Дії над векторами, подібність трикутників, швидкість, переміщення. |
| 2. Миттєва швидкість; | Б. Матеріальна точка, система координат. |
| 3. Прискорення; | В. Переміщення, дії над векторами. |
| 4. Доцентрове прискорення | Г. Швидкість, одиниці швидкості, дії над векторами. |

III. Встановіть послідовність вивчення таких тем механіки шкільного курсу фізики:

- A. Закони збереження.
- Б. Динаміка.
- В. Статика.
- Г. Кінематика.

IV. Зміна положення тіла в просторі з часом називається _____.

Навчальний фізичний експеримент

I. Які досліди доцільно провести при вивченні закону збереження імпульсу?

- A. Резонанс маятників.

- Б. Дослід із маятником Максвелла.
 В. Коливання тягарця на пружині.
 Г. Взаємодія візків.
 П. Встановити відповідність між фізичною величиною та приладом, за допомогою якого її вимірюють:
- | | |
|----------------------|---------------|
| 1. Вологість. | А. Термометр. |
| 2. Тиск рідини. | Б. Барометр. |
| 3. Температура. | В. Гігрометр. |
| 4. Атмосферний тиск. | Г. Манометр. |
- Ш. У якій послідовності демонструються хвильові властивості світла?
 А. Поляризація.
 Б. Інтерференція.
 В. Дисперсія.
 Г. Дифракція.
 IV. Прилад Петровського використовують для демонстрації _____ .

Література

1. Челишкова М.Б. Теорія і практика конструювання педагогічних тестів / Челишкова М.Б. – М.: Дослідницький центр проблем якості підготовки спеціалістів, 2001. – 135 с.
2. Аванесов В.С. Композиция тестовых заданий / Аванесов В.С. – М.: Адепт, 1998. – 217 с.
3. Булах І.Є. Вимоги до рейтингової системи оцінювання підсумкових знань / І.Є. Булах, Л.М. Артемчук // Педагогіка і психологія професійної освіти. – 1998. – №3. – С. 79-83.
4. Майоров А.Н. Теория и практика создания тестов для системы образования / Майоров А.Н. – М.: Интеллект-центр, 2001. – 296 с.
5. Романенко Ю.А. Створення тестів для школи і визначення їх якості / Романенко Ю.А., Олійник М.М. // Рідна школа. – 1999. – № 7-8. – С.47-49.

УДК 378.036

ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ОСВІТЛЕНOSTІ НА ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТТЯХ З ОПТИКИ

Шовкопляс В.С.

Лабораторні заняття з фізики у вищих навчальних закладах мають на меті поглибити теоретичні знання студентів, ознайомити їх з сучасними технічними засобами і методами вимірювання, тобто сприяти більш детальному вивченню фізичних понять, явищ і законів, що їх описують. Тим самим підкреслюється експериментальний характер фізики як науки. Не менш важливим є вироблення і закріплення навиків ведення лабораторного журналу, побудови графіків і оцінки достовірності одержаних результатів.

Зміст робіт лабораторного практикуму повинен органічно пов'язуватися з лекційним курсом. За характером лабораторні роботи можна поділити на три класи:

1. Роботи, спрямовані на засвоєння техніки і методів вимірювання фізичних величин.
2. Роботи на визначення фізичних сталих і перевірку законів та формул.
3. Дослідження фізичних явищ або ж вимірювання деяких фізичних величин з використанням складної апаратури і методів.

При виконанні лабораторних робіт з оптики слід завжди підкреслювати виняткову унікальність оптичних методів дослідження, як найбільш тонких і точних.

Оптичні методи дослідження або технічного контролю в більшості випадків пов'язані з фотометрією. Фотометрія – розділ прикладної оптики, в якому вивчаються методика і техніка вимірювань параметрів джерел світла, світлових пучків та освітлених поверхонь.

Основними поняттями фотометрії є: світловий потік, сила світла, освітленість, яскравість, світність. Одним із найважливіших законів фотометрії є основний закон освітленості

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}, \quad (1)$$

де E – освітленість, I – сила світла точкового джерела, α – кут падіння, r – відстань від джерела до поверхні, що освітлюється.

Формула виражає два закони освітленості, а саме:

1. Освітленість поверхні, створювана точковим джерелом світла, обернено пропорційна квадрату відстані від джерела.

2. Освітленість поверхні прямо пропорційна косинусу кута падіння.

Вказані закони широко використовують на практиці. Розрахунки за формулою (1) дають задовільні результати, якщо лінійні розміри джерела не перевищують $\frac{1}{10}$ відстані до освітленої поверхні.

Для успішного засвоєння основних понять і законів фотометрії необхідно на практичних і лабораторних заняттях якомога більше розв'язувати різного типу задач, в тому числі і експериментальних, а також виконати необхідну кількість лабораторних робіт.

Корисно, на наш погляд, виконати лабораторну роботу по перевірці основного закону освітленості та визначення параметрів деяких джерел світла.

Лише в деяких, не багатьох, лабораторних практикумах з фізики описані подібні роботи. Але в них, як правило, використовують горизонтально розміщені оптичні лави та, частіше, фотометри Люмера-Бродхуна або фотоелементи [1].

Але горизонтальна оптична лава займає досить багато місця, а елементи, що встановлені на ній, важко захистити від світла інших джерел. Крім того для визначення сили світла джерела суб'єктивним фотометром необхідно мати еталонне джерело світла, що не завжди можливо і зручно.

В посібнику [2] згадується про використання в подібній лабораторній роботі люксметра, але конструкція тримача фотоелемента не описана.

Для вивчення законів освітленості та визначення деяких параметрів ламп нами була спроектована і виготовлена спеціальна затемнена камера рис. 1.

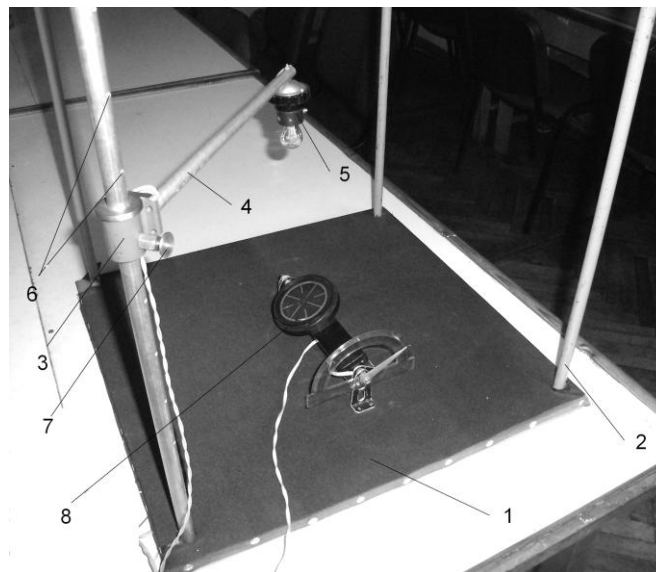


Рис. 1

До квадратної основи 1 розміром 50×50 см, виготовленої із тирсоплити товщиною 20 мм, прикріплено чотири сталевих стержні 2 довжиною 1,2 м та діаметром 14 мм, які вгорі скріплені між собою перемичками. Верхня частина камери, три бічних сторони та верхня поверхня основи обшиті чорною світлонепроникною тканиною (на мал.1 не показано). Передня сторона камери закривається шторкою із такої ж тканини. По одному із чотирьох стержнів рухається втулка 3 із штангою 4 на кінці якої прикріплено розетку 5 в яку вставляються змінні вилки з різними електричними лампами та іншими джерелами світла. Вздовж цього стержня висвердлено ряд отворів 6 через відстань 5 см. В ці отвори може попадати підпружинений фіксатор 7 втулки 4, який дозволяє змінювати висоту лампи над центром виносного фотоелемента 8 люксметра Ю 116 (Ю-117).

Для зміни кута падіння світлових променів на поверхню виносного фотоелемента виготовлено спеціальний тримач рис.2.

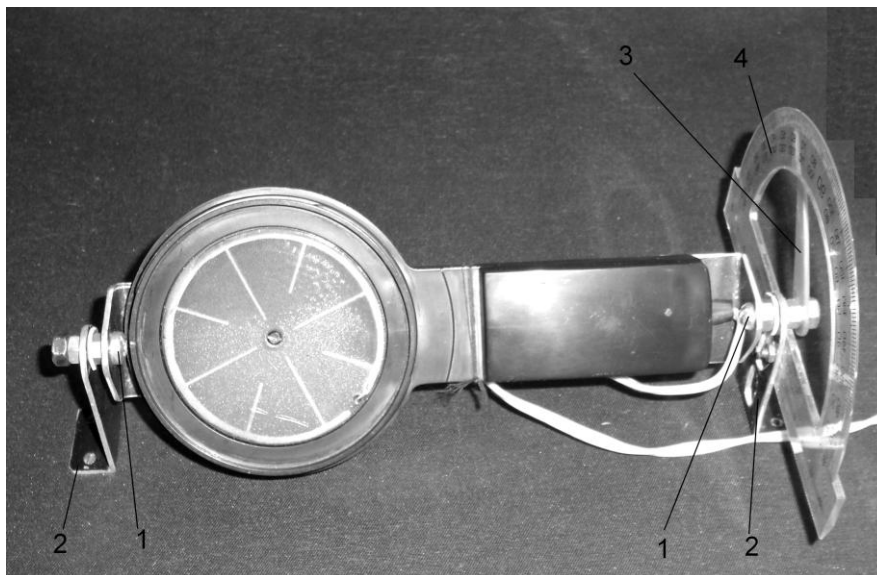


Рис. 2

До корпуса фотоелемента прикріплено два кутника з півосями 1, які можуть повертатися в опорах 2. До однієї із півосей прикріплена стрілка 3, що показує кут повороту фотоелемента відносно шкали 4 з градусними поділками. Шкала прикріплена до опори 2. При відповідному регулюванні положення стрілки, відносно півосі, вона буде показувати кут падіння.

Конструкція камери дозволяє виконувати роботу без додаткового затемнення в лабораторії та усуває вплив посторонніх джерел світла. Є можливість вивчати властивості різних ламп, світлодіодів.

Досліджуване джерело світла живиться від випрямляча ІЭПП-2, що вмикається в електричну мережу через ферорезонансний стабілізатор напруги. Для визначення потужності, яку споживає лампа використовуються амперметр і вольтметр.

В першому завданні студентам пропонується перевірити перший закон освітленості. Для цього при сталій напрузі 6...12 В, що подається на лампу встановлюють найбільшу відстань від фотоелемента, при якій вимірювання освітленості буде з достатньою точністю. Повертаючи фотоелемент в ту чи іншу сторону добитися найбільшого показу люксметра, що відповідає нульовому куту падіння світла. Стрілка 3 (рис.2) при цьому повинна стояти на нулю шкали 4. Зменшуючи відстань між досліджуваною лампою і фотоелементом (через кожні 5 або 10 см) записувати покази люксметра.

Найменша відстань r_{\min} до фотоелемента повинна задовольняти умові $r_{\min} \geq 10l$, де l – розміри джерела світла (наприклад, довжина спіралі лампи). В нашому випадку $r_{\min} \geq 10 \dots 15$ см. При такій відстані r_{\min} і радіусу світлочутливої пластинки фотоелемента 3 см косинус кута падіння на його край буде не менше 0,96.

Отже можна вважати, що кут падіння променів на всі ділянки фотоелемента практично однаковий.

Потім будується графік залежності $E\left(\frac{1}{r^2}\right)$. Якщо цей графік буде прямолінійним, то перший закон освітленості справедливий. На графіку беруть, на досить великій відстані, дві точки для яких визначають $E_1; \frac{1}{r_1^2}; E_2; \frac{1}{r_2^2}$ і за формулою що випливає з (1) визначають силу світла:

$$I = \frac{E_2 - E_1}{\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}} \text{ (кд)}. \quad (2)$$

Вважаючи лампу ізотропним точковим джерелом світла можна визначити її світловий потік

$$\Phi = 4\pi I \text{ (Лм)}. \quad (3)$$

Знайшовши споживану потужність лампи P можна знайти питому потужність лампи

$$P_{\text{пит}} = \frac{P}{I} \left(\frac{\text{Вт}}{\text{кд}} \right) \quad (4)$$

та її світлову віддачу

$$\eta = \frac{\Phi}{P} \left(\frac{\text{Лм}}{\text{Вт}} \right). \quad (5)$$

У наступному завданні студенти повинні перевірити другий закон освітленості. Для цього лампа встановлюється від люксметра на відстані 40...80 см (відстань може задати викладач). Повертаючи фотоелемент, необхідно записувати покази люксметра при кутах повороту 0, 10, 20, ..., 90°. побудувати графік залежності $E(\cos \alpha)$, зробити висновок.

Одержані результати студенти повинні порівняти з літературними даними для досліджуваних джерел світла. Для сильних студентів перше завдання можна дещо видозмінити, перетворивши його на невелике дослідження по вивченню впливу напруги живлення лампи на $P_{\text{пит}}$, η , тобто на економічність її роботи.

На деяких лабораторних заняттях частину часу викладач може виділити для доповідей студентів по результатам таких досліджень і проводити їх у вигляді наукових семінарів чи конференцій. Це сприятиме більш свідомому, творчому відношенню до вивчення фізики, зокрема оптики, та пошкваленню студентської наукової роботи.

Література

1. Лабораторний практикум по физике. Часть вторая / [Базакуца В.А., Воинова Л.Г., Гнидаш Н.И. и др.]; под общей ред. В.А. Базакуцы. – Харьков: издательство Харьковского университета, 1972. – 239 с.
2. Лабораторний практикум по физике / [Кравцов Ю.А., Мансуров А.Н., Птицина Н.Г. и др.]; под ред. Е.М. Гершензона и Н.Н. Малова. – Москва.: Просвещение, 1985. – 351 с.

УДК 37.042

ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ СПРИЯННЯ РОЗВИТКУ ОБДАРОВАНИХ СІЛЬСЬКИХ ДІТЕЙ

Харченко В.М., Ваврикович Л.В.

Навчання в старшій профільній школі з академічним або профільним вивченням предметів математики та інформатики передбачає наявність стійкого усвідомленого інтересу до даних предметів, схильності до вибору у майбутньому пов'язаної з цими предметами професії. Проблема профільної освіти присвячені роботи [3-5].

Відомо, що люди, професії яких пов'язані з математикою та інформатикою, є особистостями, що готові постійно поповнювати свої знання, самостійно їх набувати, використовувати математику й інформаційні технології як інструмент для розв'язання прикладних задач. Вони уміють чітко доповідати як про роботи своїх колег, так і про свої, працювати над проблемами не тільки особисто, а й в колективах. Тому математична підготовка у фізико-математичному класі має органічно зливатись з університетською, а її головний принцип у класах фізико-математичного профілю, – принцип поступового моделювання професійної діяльності випускників. Щоб мати змогу застосовувати даний принцип у Ніжинському обласному педагогічному ліцею, авторами проводиться опитування учнів 10 фізико-математичного класу щодо вибору їх професії. Як правило, таке опитування здійснюється в ході анкетування або ж при створенні учнями презентацій під час вивчення інформатики. За час існування даного напрямку навчання, переважна більшість школярів, у явній чи опосередкованій формі, пов'язувала своє майбутнє життя з економікою, програмуванням або ж математикою.

Незважаючи на певний відбір учнів до класу з профільним вивченням математики, їх знання на початку навчання в ліцеї дуже відрізняються. Щоб виявити рівень підготовленості та обдарованості дітей, які прийшли із сільських шкіл, вже на початку навчання їм пропонуються своєрідна контрольна робота, у якій містяться не тільки завдання на повторення програмного матеріалу, а й олімпіадні задачі. Оскільки не всі учні зможуть розв'язати всі задачі, то на початку такої роботи повідомляється, що оцінка за дану роботу буде виставлена в журнал лише за бажанням кожного десятикласника. На уроці ж інформатики, за допомогою завдань, проводиться перевірка не тільки вмінь працювати з комп'ютером, а й дизайнерські можливості школярів – підбір кольорів і відтінків, естетичне оформлення роботи.

Зазвичай, у класах є ті, хто успішно засвоїв програму основної школи з математики та інформатики, так і діти із значними огріхами в знаннях. Надолужити згаяне можна лише зацікавивши учнів до самостійного навчання. Один із способів, за допомогою якого можна це зробити – застосування методу проектів на уроках. Цей метод передбачає активне використання групами школярів можливостей інформаційних технологій. Наприклад, щоб глибше вивчити тему „Функції” і зацікавити нею учнів, можна спочатку сформулювати таке ключове запитання „Чи функціональне наше життя?” Після невеликого обговорення, потрібно розбити учнів класу на групи й чітко сформулювати завдання, що ставляться перед ними. Зокрема, розповісти про вимоги до оформлення результатів проекту. Групи учнів визначаються за результатами анкетування. При цьому попередньо можна поставити такі тематичні запитання:

Які функції активно використовують при дослідженні вкладів громадян?

Що дає економістам графічне подання тенденцій розвитку галузей економіки?

Чи потрібні програмістам знання властивостей функцій і яких саме?

У ході роботи над проектом групи не тільки вчать працювати в колективах, а й досліджують важливість вивчення даного розділу для конкретних професій. Оскільки пошук,

аналіз та узагальнення необхідної інформації важливий не тільки для навчання, а й для майбутніх професій економіста, програміста, бізнесмена, то активно впроваджується в навчання принцип поступового моделювання професійної діяльності випускників.

Як показує досвід, роботу над проектом учні виконують після навчання, оскільки переважна більшість учнів проживає в одному гуртожитку. У ході оформлення результатів дослідження учасники проекту повинні активно застосовувати знання, які набули на уроках інформатики. Значною трудностю при такій роботі для школярів є необхідність викладу результатів у невелику кількість слайдів презентації: 7-10 слайдів. Це сприяє усвідомленню найважливішої інформації з дослідження, розвитку аналізу й синтезу.

Значну роль у корекції знань відіграють факультативні заняття. На перших факультативних заняттях розглядаються завдання, які поглиблюють знання з математики 5-9 класів. Щоб обдарованій молоді було цікаво, пропонуємо набір задач, які вимагають нестандартних підходів до розв'язання. Учням дається певний набір задач на один або два тижні – для самостійного обдумування. Даний набір обов'язково містить і задачі, які посилені практично всім учням класу. Їм пропонується самостійно спробувати знайти необхідну інформації в книгах чи Інтернеті, вітається обговорення розв'язання задач в колективі однокласників. По завершенні даного терміну безпосередньо на факультативі відбувається аналіз розв'язання всіх задач. Це робиться для того, щоб учні, які посоромилися запитати про ідею розв'язання в однокласників, змогли розібратися в ньому за допомогою колективу, включаючи й учителя.

Наприклад, розглянемо один із можливих наборів:

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\text{а) } x^2 + 2x + \frac{5}{x-1} = 3 - \frac{5}{1-x};$$

$$\text{б) } (x^2 - 14x + 24)(x^2 - 11x + 24) = 4x^2;$$

$$\text{в) } \frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2};$$

$$\text{г) } x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8;$$

$$\text{д) } 2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1).$$

$$2. \text{ Розв'язати систему рівнянь: } \begin{cases} x + y + z = 0, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0. \end{cases}$$

$$3. \text{ Довести нерівність: } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

4. Довести, що $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ є ірраціональним числом.

5. Основи трапеції a і $3a$. Середини кожної основи з'єднані з кінцями іншої. Знайти відстань між точками перетину проведених відрізків.

6. За круглим столом сидять $2n$ дітей: n хлопчиків і n дівчаток, причому дехто з дітей завжди говорить правду, а інші завжди обманюють. Відомо, що кількість хлопчиків-брехунів дорівнює кількості дівчаток-брехунів. На запитання: «Хто ваш сусід зліва?» всі, хто сидять за столом, відповіли: «Хлопчик». Доведіть, що n - парне.

За результатами виконання таких наборів відбираються учні, з якими буде вестись індивідуальна підготовка до олімпіад. Отже, факультативне навчання математики має на меті не тільки корекцію раніше здобутих знань, а поглиблення знань учнів, здобутих при вивченні основного курсу, а також сприяння розвитку їх математичного, логічного та просторового мислення, допитливості і кмітливості.

На початку проведення індивідуальних занять з обдарованими учнями розраховуються для них навчальні траєкторії, обговорюється план самостійної роботи з літературою. На заняттях відбувається консультування, уточнення, навчання з олімпіадних тем. При проведенні індивідуальних занять з інформатики визначається напрям, який найбільш подобається учням – веб-дизайн, навчальні презентації, олімпіадне програмування. А далі хід роботи практично не відрізняється від навчання математики. Під час проведення занять відбувається диференціація навчального процесу, основні положення якого подані в роботах [1;2].

Отже, описані форми роботи з обдарованою сільською молоддю допомагають частково усунути ті прогалини в їх знаннях і, як показує практика, дають їм можливість більш-менш успішно конкурувати з міськими дітьми на олімпіадах з математики та інформатики.

Література

1. Бугайов О. І., Дейкун Д. І. Диференціація навчання учнів у загальноосвітній школі. – К.: Освіта, 1992.
2. Дорофеев Г. В., Кузнецова Л. В., Суворова С. Б., Фирсов В. В. Дифференциация в обучении математике // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 18-21.
3. Кабардин О. Профільна школа / Завуч. – 2002. – № 16. – С. 2-3.
4. Концепція профільного навчання в старшій школі / Освіта України. – 2003. – № 42-43. – С. 8-9.
5. Лікарчук І. Проблема профілізації навчання в старшій школі та шляхи її розв'язання / Директор школи. – 2003. – № 20. – С. 9-10.

УДК 371.32:512

ДІАЛОГ ЯК МЕТОД ОРГАНІЗАЦІЇ ЕВРИСТИЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ НА УРОКАХ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Варущик Н.П., Курило Ю.М.

Кожен учень має тільки одному йому притаманні особливості пізнавальної діяльності, емоційного життя, волі, характеру, поведінки. Кожен потребує індивідуального підходу, що заснований на розумінні психологічних закономірностей формування особистості.

Такий індивідуальний підхід, можна здійснити в рамках сучасної парадигми освіти: переходу до особистісно-орієнтованого навчання учнів. В основі такого навчання лежить визнання унікальної сутності кожного учня та індивідуальності його навчальної траєкторії. Роль вчителя при цьому полягає в організації відповідного навчального середовища та створенні оптимальних умов для навчання та розвитку творчих задатків учня.

Відомо, що вивчення математики розвиває мислення, пам'ять, витривалість, терпіння, сумлінність. Отже, саме в процесі навчання математики навчання різноманітним евристичним прийомам формує евристичну діяльність і більш ефективно сприяє розвитку творчого мислення. Іншими словами, процес формування евристичної діяльності та творчості, взаємопов'язані між собою компоненти. Як відзначає А.В.Хуторський [5], евристика – наука про відкриття нового, а творчість – процес створення нового, тобто без сформованих в учня

евристичних прийомів діяльності неможливо організувати і керувати процесом формування творчої діяльності.

В основі евристичного підходу лежить психологія творчого мислення, процедура пошуку нового, намагання формалізації творчої діяльності.

Але в практиці роботи загальноосвітніх шкіл розвитку евристичної діяльності школярів приділяється недостатньо уваги. Причина в першу чергу в нерозробленості методичного забезпечення для вчителів і слабкій орієнтації на організацію евристичної діяльності учнів в підручниках та навчальних посібниках з математики.

Підхід до проблеми формування евристичної діяльності школярів у процесі вивчення математики вимагає істотних змін у методичних системах у зв'язку з протиріччями:

- між потребою суспільства в активних, ініціативних, творчих соціально адаптованих громадянах і традиційної спрямованістю масової школи;
- між соціальним запитом інформаційного суспільства в підготовці випускників середньої школи і майбутніх вчителів до використання на практиці сучасних технологій, у тому числі й інформаційно-комунікаційних технологій, і відсутністю якісного методичного забезпечення такої підготовки;
- між творчим характером пізнавальної діяльності та репродуктивним стилем навчання у шкільній практиці;
- між прагненням частини вчителів надавати педагогічну підтримку становленню у школярів евристичної діяльності та не розробленістю відповідного методичного забезпечення в умовах застосування сучасних технологій навчання та інформаційно-комунікаційних технологій.

Розв'язати ці проблеми можливо завдяки введенню в традиційне навчання методичної системи – евристичного навчання математики, яка надає можливість вчителям організувати і управляти евристичною діяльністю учнів. [3]

Проблемі реалізації евристичних ідей евристичної діяльності в навчанні математики на сьогодні приділяють увагу такі математики і методисти, як Г.Д. Балк, Г.П. Бевз, М.І. Бурда, О.І. Скафа, А.В. Хуторський, А.Д. Король, В.Г. Болтянський, Б.А. Вікол, Б.В. Гніденко, С.Г. Губа, Ю.М. Колягін, Т.М. Міракова, А.Д. Мишкіс та інші.

Ми поділяємо думку О.І. Скафи, яка визначає евристичне навчання математики як реалізацію теоретико-методичних основ формування прийомів навчально-пізнавальної евристичної діяльності учнів в умовах застосування інформаційно-комунікаційних технологій. [3]

Одним із засобів евристичного навчання виступає евристичний діалог, який за визначенням А.Д. Короля є єдністю методів викладання та методів навчання, є засобом взаємозалежної діяльності вчителя та учнів. [2]

Інтерес до діалогової форми взаємодії пояснюється усвідомленням педагогами негативного впливу на навчальний процес монологу, який переважає в системі «вчитель – учень». Панування монологу на уроках та інших організаційних формах навчання затримує розвиток учня, сковує його ініціативу, робить його замкнутим. Тому перехід від монологу до діалогізації навчального процесу є виправданим і необхідним.

Метод евристичного діалогу не є копією методів пізнання науки. Метод евристичного діалогу, з одного боку, є системою цілеспрямованих дій вчителя, які організують питальну пізнавальну діяльність учня, що забезпечує засвоєння ним змісту освіти. З іншого боку, метод евристичного діалогу – це метод навчання самого учня, метод розвитку його вмінь самостійно здобувати знання.

Поряд з цим характерною особливістю сучасного етапу розвитку суспільства є швидке проникнення інформаційних технологій у всі сфери суспільного життя. Не є винятком і сфера освіти. Впровадження в процес навчання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) в значній мірі сприяє реалізації принципів гуманізації освіти і навчального процесу, поглиблення та розширення теоретичної бази знань і надання результативності навчання практичного значення, активізації евристичної навчально-пізнавальної діяльності, створення умов для повного розкриття творчого потенціалу дітей з урахуванням їх вікових особливостей, індивідуальних нахилів, потреб і здібностей. [4]

Особливо це стосується вивчення математики, у тому числі алгебри і початків аналізу.

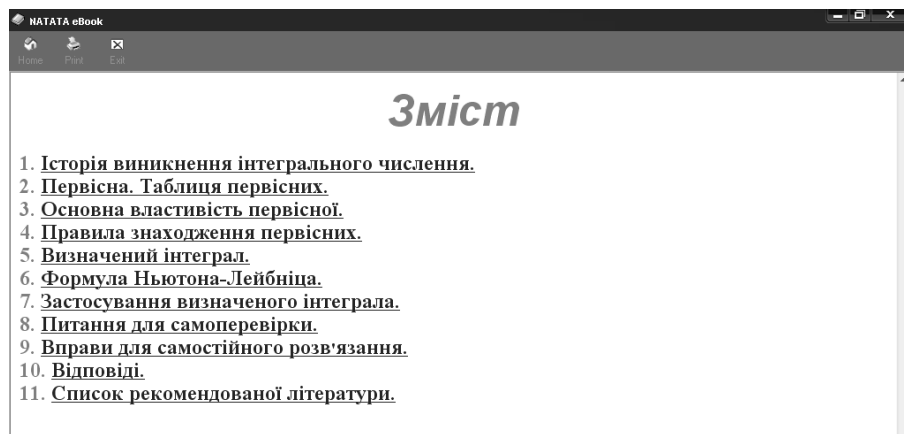
Тому актуальним на даний момент саме й є поєднання методу евристичного діалогу з інформаційними технологіями при вивченні теми «Первісна та інтеграл».

Електронний підручник розглядаємо як ефективний засіб організації евристичного діалогу між учнем та його автором з використанням ІКТ.

Розроблений електронний підручник можна використовувати з метою:

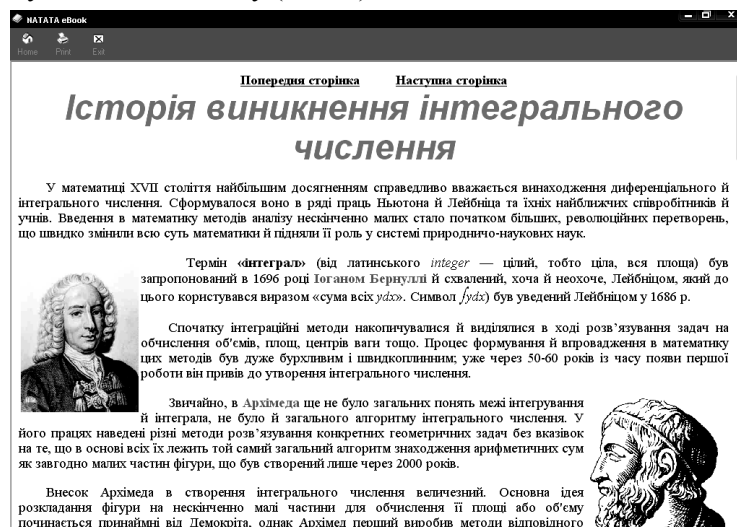
- а) самоосвіти;
- б) розширення знань учнів, формування наукового світогляд;
- в) актуалізації опорних знань та оволодіння методами розв'язування вправ з теми «Первісна та інтеграл».

Даний електронний підручник містить теоретичний матеріал з теми «Первісна та інтеграл», зразки розв'язування типових вправ з теми, питання для самоперевірки, вправи для самостійного розв'язання та список рекомендованої літератури (мал. 1).



Мал. 1

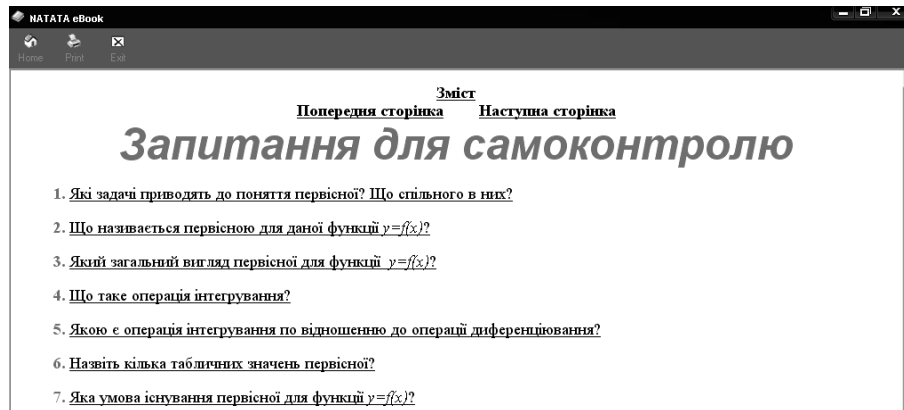
Перед тим, як вивчати теоретичний матеріал, учень має можливість переглянути історію виникнення та розвитку інтегрального числення, що сприяє розширенню знань учня та формуванню його наукового світогляду (мал. 2).



Мал. 2

Після цього учень безпосередньо переходить до вивчення теоретичного матеріалу. Оскільки матеріал у підручнику викладений згідно принципом наступності, то починати слід з питання, що присвячене поняттю первісної та таблиці первісних.

Після того, як учень вивчив відповідне питання, з метою самоконтролю, він переходить на сторінку «Питання для самоконтролю» (мал. 3) й відповідає на питання, що стосуються даного матеріалу. Якщо учень, не знає відповідь, то він натискає на дане питання й автоматично повертається на сторінку, де може знайти на нього відповідь, яка не подається у готовому вигляді. Тобто робота з даним підручником не передбачає механічного відтворення матеріалу.

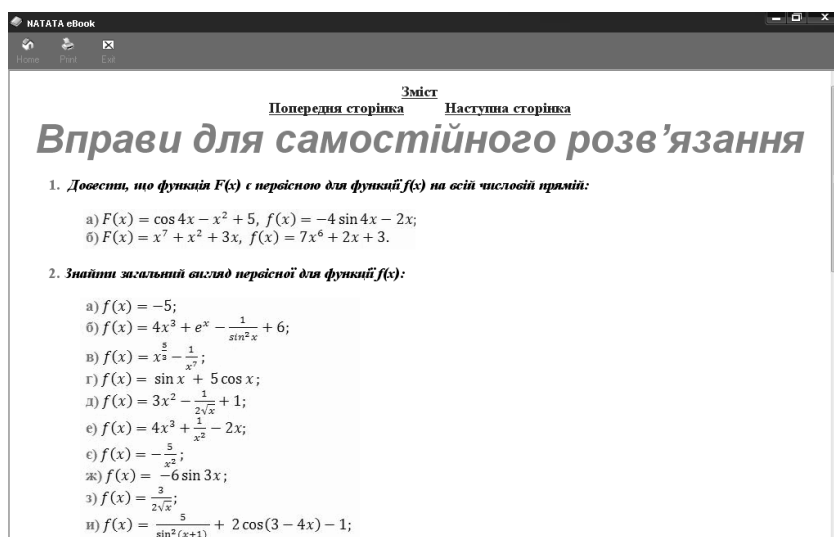


Мал. 3

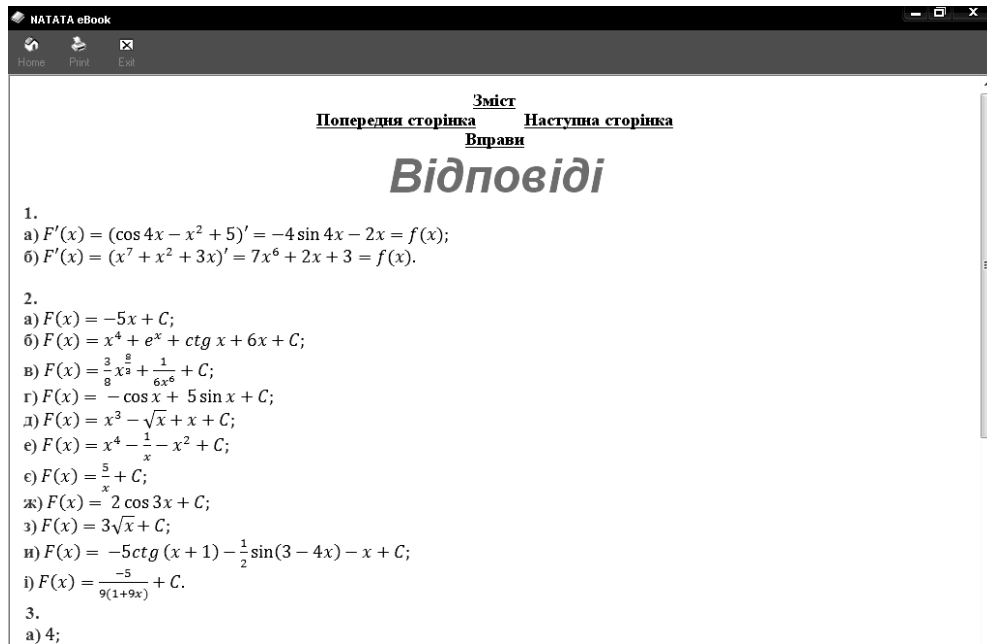
Коли робота з теоретичним матеріалом закінчена, то учень переходить до етапу застосування отриманих знань. З цією метою у підручнику запропоновані типові вправи з розв'язанням. Після їх опрацювання, учень переходить на сторінку «Вправи для самостійного розв'язання» (мал. 4), де запропоновані аналогічні завдання. Щоб перевірити правильність їх розв'язання, школяр має змогу перейти на сторінку «Відповіді» (мал. 5), де вказані відповіді до всіх запропонованих прикладів. Кілька найвищих мають вказівку до розв'язання.

Даний підручник має зручну систему переходу з однієї сторінки на іншу, від одного питання до іншого, від теоретичного матеріалу до його практичного застосування й самоконтролю виконаних дій.

Якщо обгрунтування того чи іншого питання спирається на матеріал, що стосується теми «Похідна та інтеграл», але учень його вивчав раніше, то з метою актуалізації опорних знань він може перейти на сторінку, що присвячена даному питанню, Наприклад, доведення основної властивості похідної спирається на означення похідної. Тому учень може перейти на сторінку «Похідна. Таблиця похідних», щоб повторити необхідне означення. Або, наприклад, для вивчення питання, що присвячене формулі Ньютона-Лейбніца, актуалізації потребують знання означення похідної, основної властивості похідної та задачі про площу криволінійної трапеції.

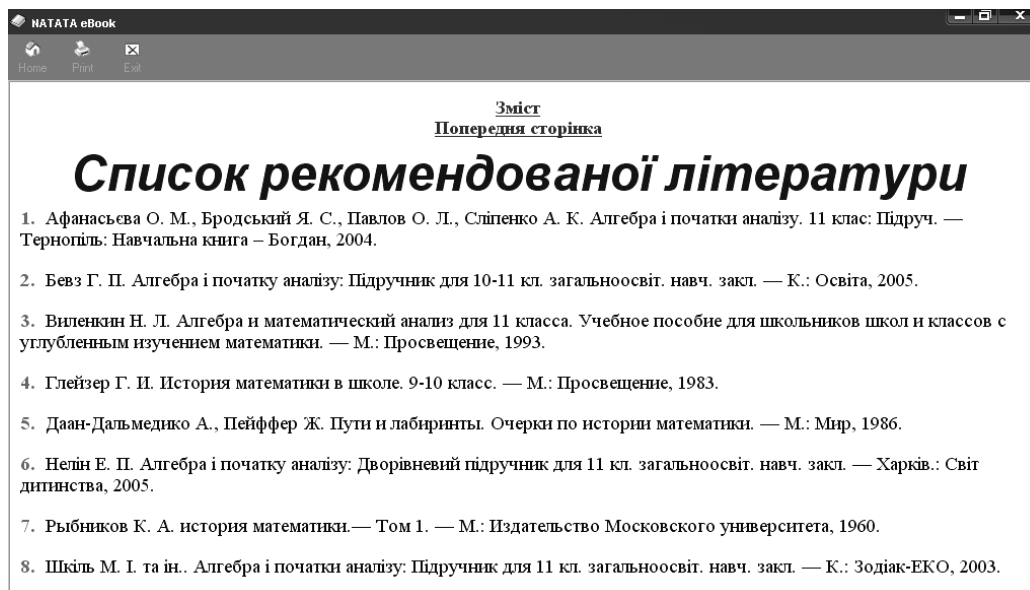


Мал. 4



Мал. 5

Й на кінець вивчення теми, учень може почитати додаткову літературу, що стосується даної теми й зазначена в даному електронному підручнику (мал. 6).



Мал. 6

Література

1. Абасов З. Диалог в учебном процессе // Народное образование. — 1993. — №9-10. — С. 43–45.
2. Король А. Д. Метод эвристического диалога в технологии творческой самореализации учащихся // Интернет-журнал «Эйдос». — 2002. — 18 апреля.
3. Скафа О. І. Комп'ютерно-орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики: навч.-метод. посібник. — Донецьк: вид-во «Вебер», 2009.
4. Хорольская Е. В. Компьютерная поддержка уроков в эвристическом обучении алгебре и началам анализа // Дидактика математики: Проблемы дослідження: Міжнародний збірник наукових праць. Вип. 5. — Донецьк, 2005.
5. Хуторской А. В. Эвристический тип образования: результаты научно-практического исследования // Педагогика. — 1999. — №7.

УДК 371.32:512

ЕВРИСТИКО-ДИДАКТИЧНІ КОНСТРУКЦІЇ ЯК ЗАСІБ ОРГАНІЗАЦІЇ ЕВРИСТИЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ НА УРОКАХ АЛГЕБРИ ТА ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ**Варущик Н.П., Кацалап Л.І.**

Найактуальніші на сьогодні завдання шкільної методики навчання математики – сформулювати в учнів потребу і здатність самостійно вчитися, здобувати інформацію з різних джерел, засвоювати, поповнювати й оцінювати її, прагнути до творчості і саморозвитку, виробляти вміння застосовувати способи пізнавальної та творчої діяльності.

Реалізація цих завдань передбачає оволодіння учнями прийомами відкриття нового знання про математичні об'єкти, прийомами міркувань та методами розв'язування задач, що не піддаються алгоритмізації, тобто оволодіння евристичною діяльністю під час засвоєння математики. Тому одним із найважливіших моментів удосконалення методів навчання повинно стати формування прийомів евристичної діяльності учнів.

Проблемі реалізації евристичних ідей, діалектиці евристичної діяльності в навчанні математики приділяли увагу такі сучасні математики і методисти, як Г.Д.Балк, Г.П.Бевз, М.І.Бурда, В.Г.Болтянський, Б.А.Вікол, Б.В.Гніденко, С.Г.Губа, Г.В.Дорофєєв, П.М.Ерднієв, І.І.Зільберг, Ю.М.Колягін, Л.Ларсон, Т.М.Міракова, А.Д.Мишкіс, Ю.О.Палант, Дж.Пойа, Г.І.Саранцев, Е.Е.Семєнов, О.І.Скафа, З.І.Слепкань, Є.Н.Турецький, Л.М.Фрідман, С.І.Шапіро та ін.

У своїх дослідженнях усі науковці вказують на необхідність використання евристичних прийомів, методів, схем під час навчання математики, але не розглядають питання формування цих прийомів в старших класах в процесі вивчення алгебри і початків аналізу.

Це дозволяє зарахувати проблему формування прийомів евристичної діяльності під час вивчення теми «Похідна та її застосування» до числа важливих у методиці навчання математики.

Ми поділяємо думку О.І.Скафи і розглядаємо евристичні прийоми як особливі прийоми, які сформувалися в ході розв'язання одних задач і більш-менш свідомо переносяться на інші. Вони дають загальний напрям думки, не гарантуючи отримання необхідного результату [2].

Евристико-дидактичні конструкції (ЕДК) – це система логічно пов'язаних навчальних проблем (евристичних завдань), які в сукупності з евристичними питаннями, вказівками та мінімумом навчальної інформації дозволяють учням (переважно без допомоги ззовні) відкривати нове знання про об'єкт дослідження, спосіб або засіб евристичної діяльності.

Серед комп'ютерних програм із системи ЕДК особливе місце займають **програми актуалізації знань**. До них входять: програми «Тест-корекція», «Задача-софізм» та «Задача-метод».

1) Програма «Тест-корекція» побудована у вигляді тесту з корекцією, в якій обговорюються правильні відповіді. Такі завдання пропонуються для більш глибокої настанови на сприйняття й розуміння наступного складного навчального матеріалу [1].

На навчальному матеріалі теми «Похідна та її застосування» програму «Тест-корекція» можна використовувати в якості мотивації на вивчення поняття похідної, як засіб актуалізації опорних знань школярів перед введенням теорем про похідні суми, добутку та частки функцій, при роботі з іншими теоремами, а також при формуванні понять зростаючої та спадної функції, як засіб «підведення під поняття».

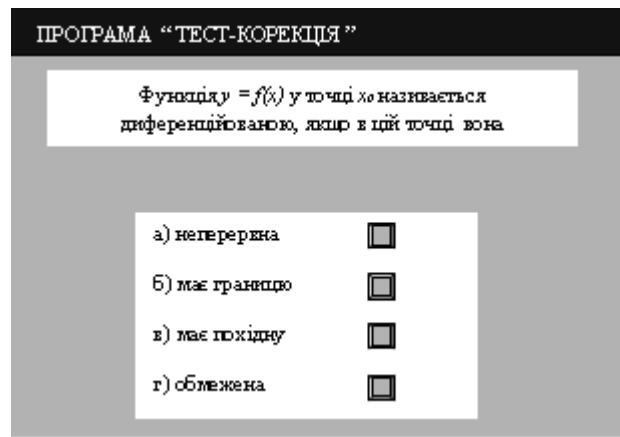
Як приклад розглянемо програму «Тест-корекція» як засіб актуалізації опорних знань учнів перед введенням теореми про похідну частки функцій.

Приклад 1

Теорема. Якщо функції $U(x)$ і $V(x)$ диференційовні у точці x_0 і $V(x_0) \neq 0$, то функція $y = \frac{U(x)}{V(x)}$ теж диференційована у цій точці і $y' = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x)}$.

Для доведення даної теореми необхідно знати поняття: 1) диференційовної функції; 2) похідної; 3) приросту аргументу та приросту функції; 4) неперервної функції. Використовується правило знаходження похідної функції. Тому доцільно ці питання включити до завдань програми.

У програмі закладена система з десяти завдань базового рівня, які учень може вирішувати в будь-якому порядку. Після розв'язання, учень за допомогою миші обирає правильну відповідь із запропонованих чотирьох варіантів (малюнок 1).



Мал. 1

Якщо учень відповідає неправильно, то програма надає повідомлення про те, що допущена помилка. Така корекція також містить правильні відповіді, короткі роз'яснення й посилання на літературу.

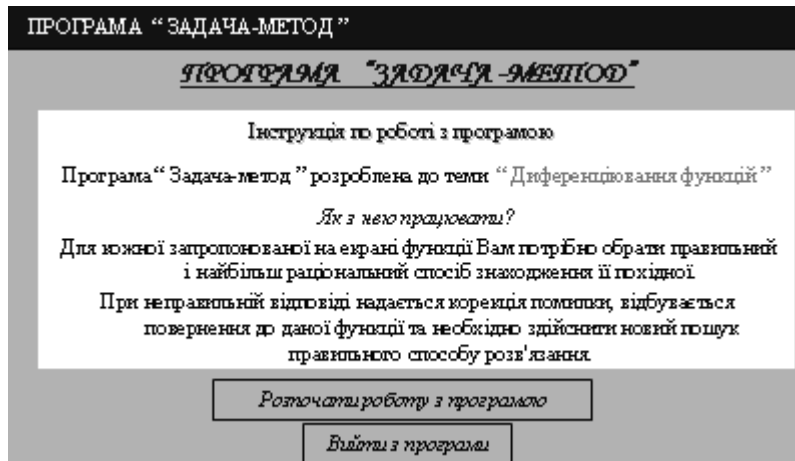
Самостійна діяльність учнів у процесі актуалізації знань сприяє не тільки розвитку самостійності мислення учнів, а формуванню здатності по-новому структурувати раніше вивчений матеріал на основі наявних знань. З використанням інформаційно-комунікаційних технологій етап актуалізації проходить інтенсивніше, зацікавлює учнів до вивчення наступного нового матеріалу.

При вивченні теми «Похідна та її застосування» головною метою є не вироблення техніки обчислень похідної (хоча така мета теж ставиться), а чітке і глибоке осмислення та усвідомлення основного поняття цієї теми – похідної, оскільки «учень, який не оволодів основними поняттями деякої теорії, не оволодіє теорією в цілому». Найефективніше цій меті сприяють саме доведення правил диференціювання, виведення формул похідних основних елементарних функцій. Крім того, доведення основних теорем про похідні є добрим профілактичним засобом попередження таких типових помилок учнів: похідна добутку дорівнює добутку похідних, похідна частки – частці похідних.

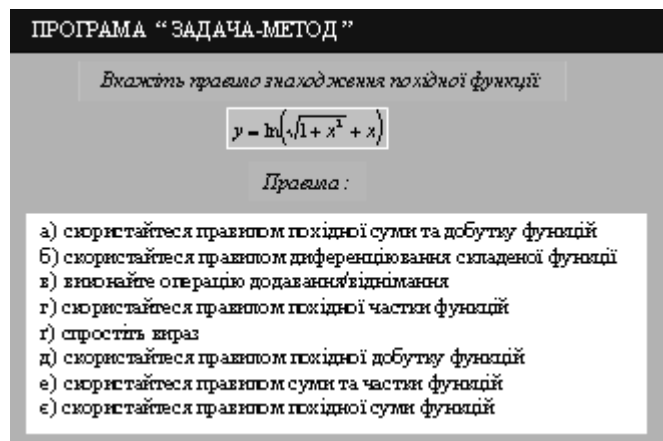
2) Програма «Задача-метод». Головна ідея програми полягає в тому, що до завдання або набору з кількох завдань пропонується деякі способи їх розв'язання. Учні необхідно обрати правильний і найбільш раціональний, на його погляд, спосіб [1].

Програму «Задача-метод» можна застосовувати для закріплення правил диференціювання та таблиці похідних при розв'язанні вправ на знаходження похідних деяких функцій. Це буде сприяти формуванню загальних евристичних прийомів: порівняння, узагальнення та аналогії (малюнок 2, 3).

Приклад 2

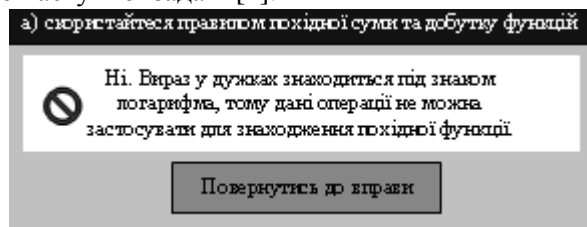


Мал. 2



Мал. 3

Якщо учень помилився у виборі правильної відповіді, йому надається інформація про те, чому відповідь неправильна, і пропонується повернутися до даного завдання, ще раз переглянути запропоновані методи розв'язування та вибрати інший (малюнок 4). При правильній відповіді учневі надається повна інформація про розв'язання даного завдання та пропонується перейти до наступної задачі [2].



Мал. 5

Часто при вивченні теорем і їх доведень спостерігається формалізм у знаннях і вміннях учнів. Основна причина в тому, що в підручниках доведення теорем звичайно викладено синтетичним методом і учні просто вивчають готове доведення. Це приводить швидше до тренування пам'яті, ніж до формування умінь доводити. В результаті учні вивчають доведення окремого твердження, слабо володіють узагальненими методами і способами доведень для широкого кола тверджень.


Роль доведень в курсі алгебри і початків аналізу недооцінюють, вважаючи, що доведеннями достатньо займаються в курсі геометрії. Тому вчителі дуже часто при вивченні алгебри і початків аналізу орієнтують учнів на ознайомлення з фактами, на їх практичне застосування, а не на методи доведення цих фактів, мотивуючи тим, що основні методи доведень розглянуто в курсі геометрії і їх можна автоматично перенести на алгебраїчний матеріал. Але це далеко не завжди можна зробити.

Саме тому програму «Задача-метод» також можна використовувати при роботі з теоремами, наприклад, при засвоєнні теореми про першу достатню умову існування екстремуму функції. При цьому учням необхідно кожному кроку доведення теореми поставити у відповідність номер правильного обґрунтування. Це сприяє свідомому засвоєнню теореми та розумінню її доведення, а також умінню аналізувати кожен крок. Наведемо застосування програми «Задача-метод» до доведення теореми для випадку точки максимуму (малюнок 6).

Приклад 3

Перша достатня ознака існування екстремуму функції

Теорема. Якщо x_0 – критична точка функції $y = f(x)$, яка в цій точці неперервна і в інтервалі $(a; x_0)$ похідна $f'(x) > 0$ а в інтервалі $(x_0; b)$ похідна $f'(x) < 0$ то точка x_0 є точкою максимуму даної функції.



Дано: x_0 – критична точка функції;
 $y = f(x)$ – неперервна в точці x_0 ;
 $f'(x) > 0$ в інтервалі $(a; x_0)$;
 $f'(x) < 0$ в інтервалі $(x_0; b)$.

Довести: x_0 – точка максимуму функції $y = f(x)$.

Кроки доведення:

1. $f'(x) > 0$ в інтервалі $(a; x_0)$.
 - а) за означенням точки максимуму функції
 - б) за означенням спадної функції
 - в) за умовою теореми та достатньою ознакою зростання функції
 - г) враховуючи кроки 3 та 6
 - г) за умовою теореми
 - д) за умовою теореми та достатньою ознакою спадання функції
 - е) за означенням зростаючої функції

Мал. 6

При неправильній відповіді дії учня коректуються й програма підводить його на правильне обґрунтування кожного кроку доведення. Наприклад, якщо для першого кроку доведення учень обирає перше обґрунтування, що не є правильним, йому пропонуються відповідні підказки (малюнок 7).

Перша достатня ознака існування екстремуму функції

Ні. Це неправильне обґрунтування.

Поверніться та розгляньте решту.

[Повернутись назад](#)

Мал. 7

Вправи такого виду є евристичними, оскільки навчають учнів міркувати аргументовано, усвідомлено застосовувати вивчені раніше поняття та теореми.

3) Програма «Задача-софізм». Текст програми являє собою ланцюжок виконаних дій при розв'язуванні задачі, доведенні теореми, формулюванні поняття, де на якомусь етапі допущена помилка. Учні необхідно розпізнати цю помилку, пояснити її виникнення,

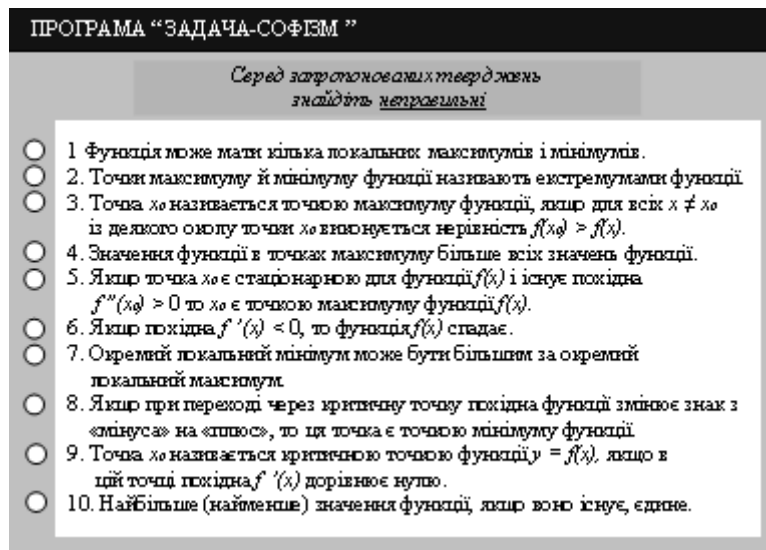
виправити та правильно розв'язати запропонований приклад, довести теорему, сформулювати поняття [1].

З метою розвитку спостережливості та критичного мислення школярів можна запропонувати програму «Софізм»:

– на знаходження помилки в доведенні теорем про достатні ознаки зростання (спадання) функції в точці;

– в деяких твердженнях (наприклад, означеннях зростаючої (спадної) функції в точці, точок екстремуму, максимуму та мінімуму функції, необхідних та достатніх ознаках існування екстремуму тощо) (малюнок 8).

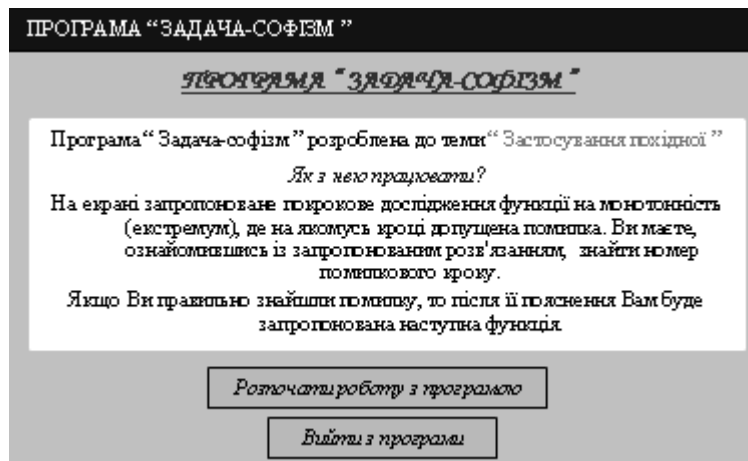
Приклад 4



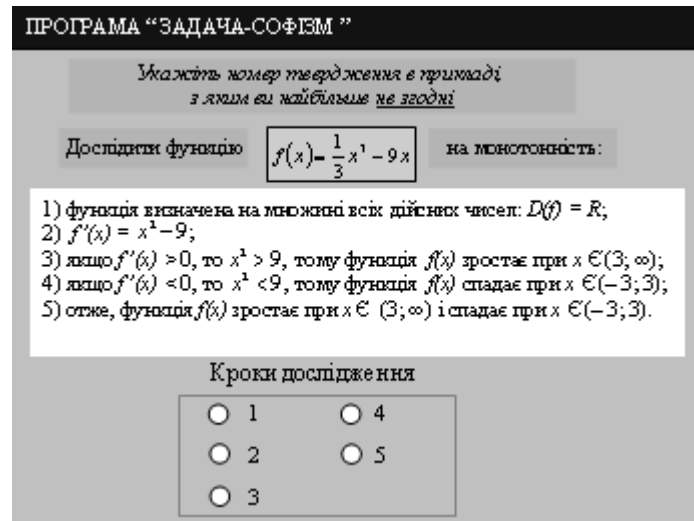
Мал. 8

– в розв'язанні вправ на дослідження функції на монотонність й екстремум (малюнок 9, 10). У випадку неправильної відповіді, учень одержує програму корекції (малюнок 11);

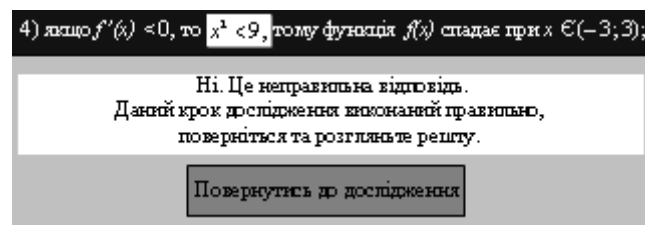
Приклад 5



Мал. 9



Мал. 10



Мал. 11

Отже, різноманітні види евристико-дидактичних конструкцій відіграють важливу роль в процесі вивчення алгебри і початків аналізу, оскільки їх застосування є доцільним на кожному етапі організації навчальної й евристичної діяльності школярів. По-перше, при побудові цих програм використані різноманітні евристики, по-друге, при роботі з ними учню необхідно застосовувати як загальні, так і спеціальні евристичні прийоми, по-третє, ці програми сприяють індивідуалізації навчання, що є дуже важливим, тому що при виборі своєї індивідуальної траєкторії кожен учень знайде в цих програмах реалізацію своїх особистісних психологічних і фізіологічних можливостей.

Література

1. Комп'ютерно-орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики: навчально-методичний посібник / О.І. Скафа, О.В. Тутова. – Донецьк: вид-во «Вебер» (Донецька філія), 2009. – 320 с.
2. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 440 с.

УДК 371.315

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТЕЙ В УМОВАХ ІНТЕГРОВАНОГО НАВЧАННЯ

Варущик Н.П., Полякова Ю.В.

Міжпредметні зв'язки – частинний випадок інтегрованого навчання. Використання міжпредметних зв'язків дає можливість економніше в часі визначити структуру учбового плану, програм, підручників, що сприяє раціоналізації всієї математичної освіти.

Проблемі міжпредметних зв'язків у педагогіці на всіх етапах її розвитку та становлення приділялась значна увага. Про необхідність урахування взаємозв'язків між предметами йшла мова в працях видатних педагогів XVII – XX ст. А. Дістерверга, Я.А.Коменського, Н.К.Крупської. Д. Локка, Й.Г.Песталоцці, К.Душинського.

Надалі в радянській педагогіці проблему міжпредметних зв'язків у навчанні досліджували Г. І. Батуріна, В.Л. Горський, І. Д. Зверева, В. М. Коротова, В. М. Максимова, Е.І.Моносзон, М.Н.Скаткін, В.М.Федорова та інші. В останні десятиріччя проблема привертала увагу Г.Г.Батуріна, І. Я. Лернера, Н.А.Лошкарьової, О.Я.Савченко, М.М.Скаткіна та інших вчених.

Що відрізняє інтегровані уроки від традиційних? Чому ми обґрунтовуємо доцільність їх використання при вивченні функцій? Тому, що:

1) Знання учням не пропонуються в готовому вигляді, їх потрібно здобувати самостійно. Навчання відбувається у формі повторного відкриття, а не простої передачі знань.

2) Зміст математичних знань розкривається у їх взаємозв'язках з дійсністю. Учні усвідомлюють, що тригонометричні, показникові та логарифмічні функції описують явища та процеси, які реально існують у природі.

3) Інтегроване навчання відповідає принципам науковості, зв'язку теорії з практикою, життям, свідомості й активності, доступності, наочності, систематичності і послідовності навчання.

4) Навчальний процес в умовах інтегрованого навчання характеризується високою інтенсивністю навчання, супроводжується підвищеним інтересом, одержані знання вирізняються глибиною, міцністю, дієвістю.

Інтегроване навчання розширює навчальні можливості в часі за рахунок об'єднання двох предметів, тому вивчення функцій можна здійснити у відповідності до методичної схеми:

1. Розгляд емпіричного матеріалу (мотивація вивчення);
2. Математизація навчально-пізнавального матеріалу;
3. Побудова графік функції;
4. Вивчення властивостей.

Зокрема, приділити більше часу етапу розгляду емпіричного матеріалу, залучити учнів до його пошуку.

А) тригонометричні функції

Можна застосовувати особистісний підхід під час розгляду емпіричного матеріалу. Учнім дається домашнє завдання: кому подобається фізика, той знаходить приклади фізичних процесів, які описуються тригонометричними функціями. Наприклад,

1) Вільні механічні коливання. Рух, при якому тіло переміщається від свого положення рівноваги то в один, то в інший бік, називається коливальним. Використовуючи зв'язок рівномірного руху по колу і коливального руху, отримують закон зміни координати тіла, що гармонічно коливається з часом:

$x = x_m \cos \omega t$, де ω – циклічна частота, t – час, x_m – амплітуда коливань, T – період коливань.

2) Електромагнітні хвилі. Механічні хвилі розповсюджуватися у вакуумі не можуть. Джеймс Максвелл (1831-1879) висунув гіпотезу про існування в природі особливих хвиль, електромагнітних, які можуть розповсюджуватися і в вакуумі.

Процес розповсюдження змінних магнітного і електричного полів і є електромагнітна хвиля.

Із рівнянь Максвелла при певних умовах отримують хвильове рівняння, яке має розв'язок (для електричного вектора) у вигляді:

$$E = E_{\max} \cos(\omega t - kx + \alpha),$$

де E – модуль вектора напруженості електричного поля, E_{\max} – його максимальне значення, ω – колова частота, k – хвильове число, α – початкова фаза коливань у точці $x = 0$, x – біжуча координата.

Також учні, які цікавляться музикою, можуть знайти зв'язок музики з тригонометричними функціями. Наприклад,

3) Звукові хвилі.

Явища, пов'язані з виникненням і поширенням звукових хвиль, називаються акустичними явищами. Вивчення акустичних явищ допомагає розширити поняття хвилі – від хвиль, які сприймаються візуально, до невидимих.

Джерелами звуку, які мають власні частоти, є камертон, струна, флейта і т.д. Висоті тону звуку можна співставити величину періоду, силі звуку – амплітуду коливань.

Учням також можна дати довготривале домашнє завдання відмічати моменти заходу Сонця на 1 число кожного місяця.

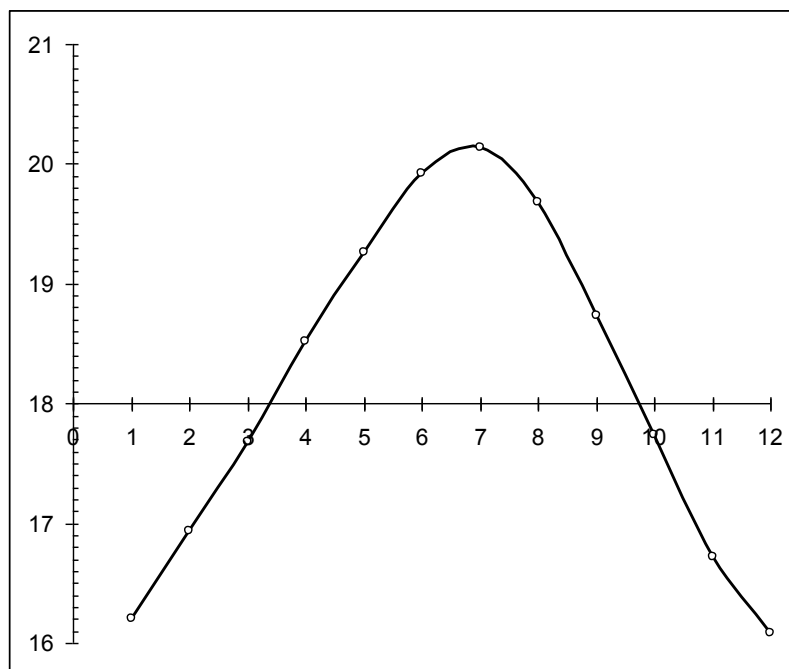
4) Захід Сонця як явище природи. Можна скористатись і астрономічним календарем. Широта міста Ніжина $51^{\circ}03'$.

Таблиця 1

Захід Сонця для широти 51°

Дата	год	хв	Дата	год	хв	Дата	год	хв
<u>1.01</u>	16	12	<u>1.05</u>	19	16	<u>1.09</u>	18	44
12	16	25	12	19	30	8	18	28
24	16	44	24	19	47	21	18	02
<u>1.02</u>	16	56	<u>1.06</u>	19	55	<u>1.10</u>	17	44
19	17	10	13	20	05	11	17	21
21	17	30	25	20	07	23	16	56
<u>1.03</u>	17	41	<u>1.07</u>	20	08	<u>1.11</u>	16	43
13	18	01	11	19	52	12	16	25
25	18	20	23	19	41	24	16	11
<u>1.04</u>	18	31	<u>1.08</u>	19	41	<u>1.12</u>	16	05
14	18	55	12	19	22	10	16	03
26	19	07	20	19	08	22	16	06

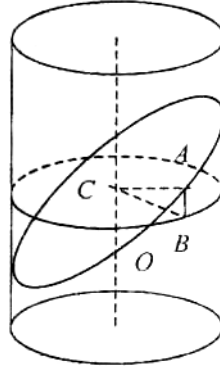
Побудувавши графік залежності часу від дати, отримаємо синусоїду (мал. 1)



Мал. 1

Також можна ознайомити учнів із незвичайним способом отримання синусоїди. Якщо обгорнути свічку декілька разів аркушем паперу і перерізати її навкоси гострим ножом, то крива лінія, отримана в перерізі, буде синусоїдою (мал. 2).

Обґрунтування отриманих результатів окремими учнями, яке вони отримали в якості випереджаючого домашнього завдання, дає можливість перевести їх пізнавальну активність з вибірково-відтворюючого рівня на творчий.



Мал. 2

Б) показникова функція. На етапі мотивації наводяться приклади залежностей, які виражаються через показникову функцію.

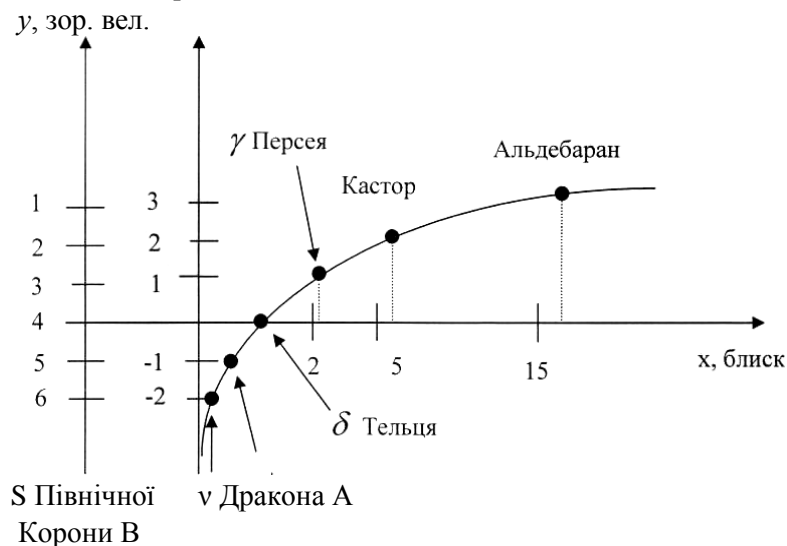
Задача про радіоактивний розпад. Під час радіоактивного розпаду маса m речовини змінюється за законом $m = m_0 a^{kt}$, де m – маса речовини через t років після початку розпаду; m_0 – початкова маса речовини, k і a – сталі величини для даної речовини.

Задача про приріст деревини. Дерево росте так, що кількість деревини збільшується з часом за законом $M = M_0 a^{kt}$, де M – кількість деревини у даний момент; M_0 – початкова кількість деревини; t – час (у роках), який відраховують з моменту, коли об'єм деревини був M_0 ; k – деяка стала.

В) логарифмічна функція.

У свій час давньогрецький астроном Гіппарх склав зоряний каталог. Він нарахував близько тисячі зірок і розбив їх за видимим блиском на шість груп. Найбільш яскраві зорі Гіппарх назвав зорями I величини, менш яскраві – II, а найменш яскраві – зорями VI зоряної величини. Пізніше за допомогою чутливих приладів стало можливим точно визначати блиск зірок.

Накреслимо графік залежності зоряної величини від блиску. Для цього візьмемо по одному типовому представникові з кожної з 6 груп. По вертикалі будемо відкладати зоряну величину (тобто блиск зорі в одиницях Гіппарха), а по горизонталі – покази приладів. За масштабну одиницю горизонтальної осі приймемо блиск зорі "δ Тельця", що знаходиться по середині в ряді представників зоряної сім'ї [1].



Математизація навчально-пізнавальною діяльністю дає змогу формувати науковий світогляд, учні усвідомлюють, що будь-яке математичне поняття, зокрема і поняття функції, виникло з практичних потреб людини, а також суто математичних потреб і описує процеси, які реально відбуваються у навколишньому житті.

Уміння будувати графіки функцій та їх читати, тобто визначати проміжки монотонності, екстремальні значення та інші характеристики функції за її графіком – важливий елемент математичної культури.

Ці уміння необхідні майбутньому техніку, економісту, інженеру, лікарю. У багатьох задачах графік є лише допоміжним елементом розв'язку. Звідси з'являється необхідність познайомити учнів із різними простими прийомами побудови графіків.

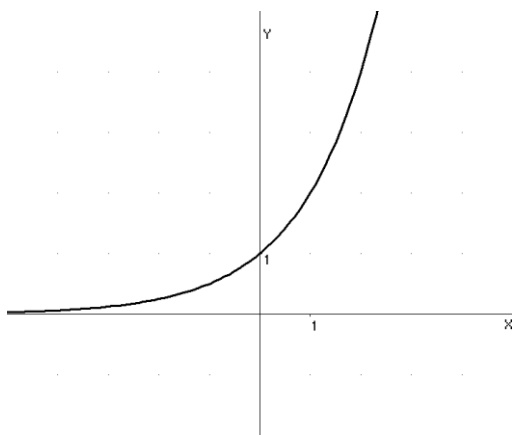
Ми розглянемо просту і компактну схему побудови графіків складних функцій виду $y = f(v(x))$ без використання похідної. Ця схема може бути використана вчителем на заняттях математичного гуртка, на факультативах, в роботі з сильними учнями на уроках.

Із цією метою пропонуємо використання евристико-дидактичних конструкцій, зокрема програму «Задача-метод», програму актуалізації знань, а також програму «Корекції знань» [2].

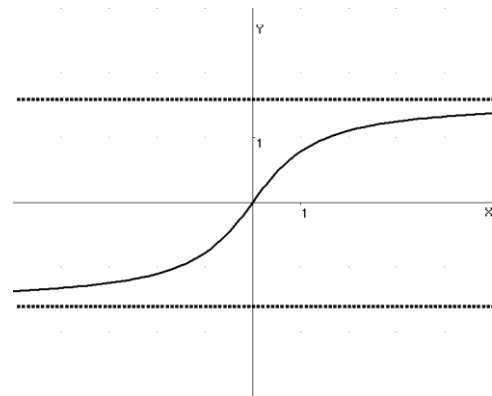
Розглянемо приклади.

1. Побудувати графік функції $y = \arctg 2^x$.

Дана функція є композицією двох функцій: $v = 2^x$ та $y = \arctg v$ (мал.5).

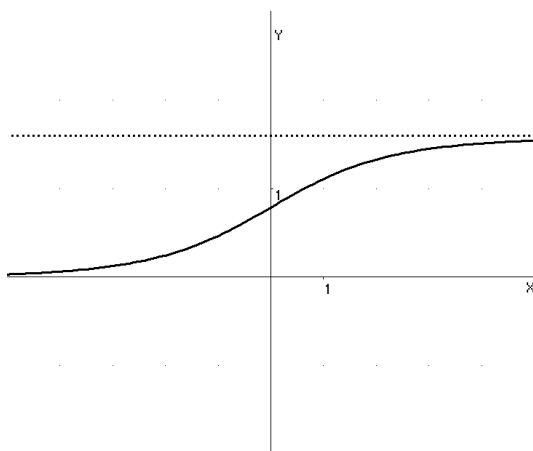


$$v = 2^x$$



$$y = \arctg v$$

Мал. 5



Мал. 6

Функцію $v = v(x)$ назовемо внутрішньою, $y = y(v)$ – зовнішньою. Внутрішня функція є строго зростаючою: при зростанні x від $-\infty$ до $+\infty$ $v(x)$ зростає від 0 до $+\infty$. По графіку зовнішньої функції визначаємо, що такій зміні v відповідає зростання y

від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Графік такої монотонної функції легко зобразити (мал. 6). Візьмемо контрольну точку: при

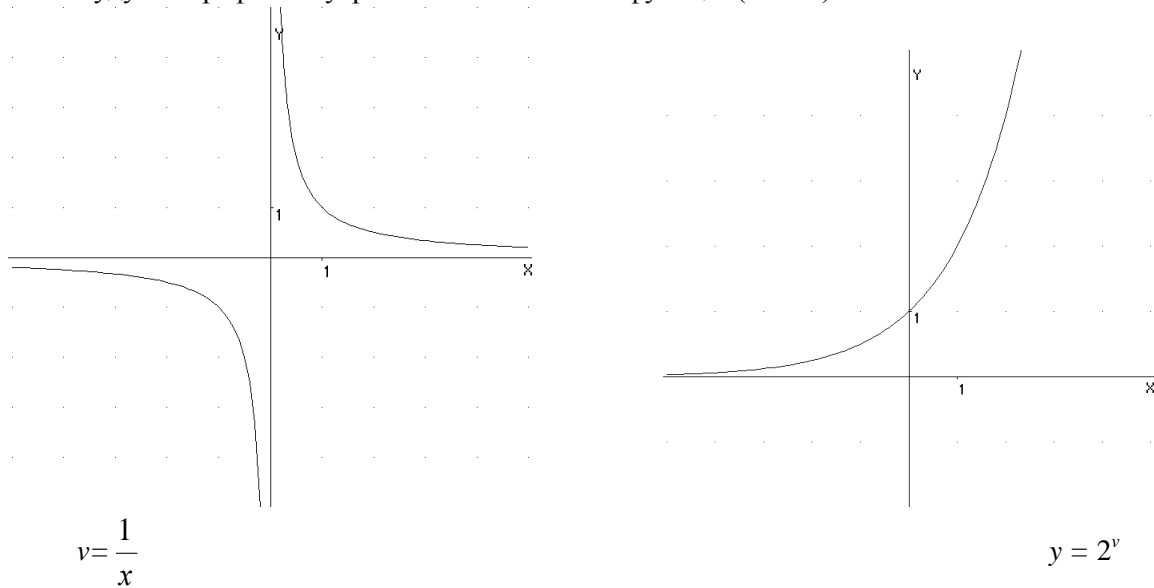
$x=0, y=\frac{\pi}{4}$. Попередньою $= \arctg 2^x$ слід нагадати уч-

ням про існування горизонтальних та вертикальних асимптот графіків деяких функцій, наприклад,

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \arctg x, \quad y = \lg x$$

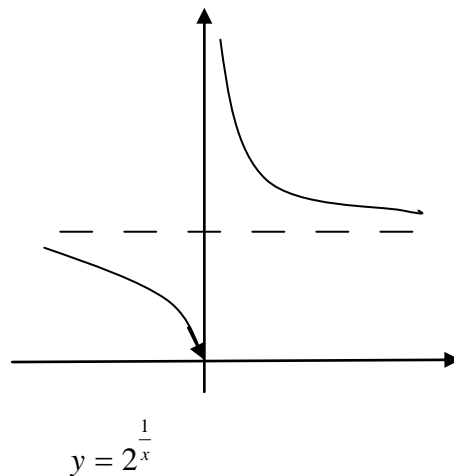
2. Побудувати графік функції $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Будуємо графіки внутрішньої і зовнішньої функцій (мал. 7).



Мал. 7

Виділяємо проміжки монотонності внутрішньої функції: $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. При зростанні x від $-\infty$ до 0 $v(x)$ спадає від 0 до $-\infty$. Такій зміні v



Мал. 8

відповідає спадання y від 1 до 0 . У системі координат xOy для $x \in (-\infty; 0)$ зображаємо відповідну криву (мал. 8). Якщо x зростає від 0 до $+\infty$, то $v(x)$ спадає $+\infty$ до 0 , а y спадає від $+\infty$ до 1 . Тепер зобразимо відповідну криву при $x \in (0; +\infty)$. Для більш точної побудови графіка слід знайти контрольні точки, вибираючи ті значення аргумента x , при яких легко визначити точні значення $y(x)$: $y(1)=2$, $y(0,5)=4$, $y(-1)=0,5$.

На основі цих завдань формулюємо алгоритм розв'язання задач даного типу.

Алгоритм:

1) накреслити графіки внутрішньої $v = v(x)$ і зовнішньої $y=f(v)$ функцій і систему координат xOy .

2) визначити проміжки монотонності внутрішньої функції $v = v(x)$ і відмітити їх на осі Ox площини xOy .

3) на кожному проміжку визначити межі зміни $v = v(x)$ і вибрати ті значення $v(x)$, які попадають в область визначення функції $y=f(v)$.

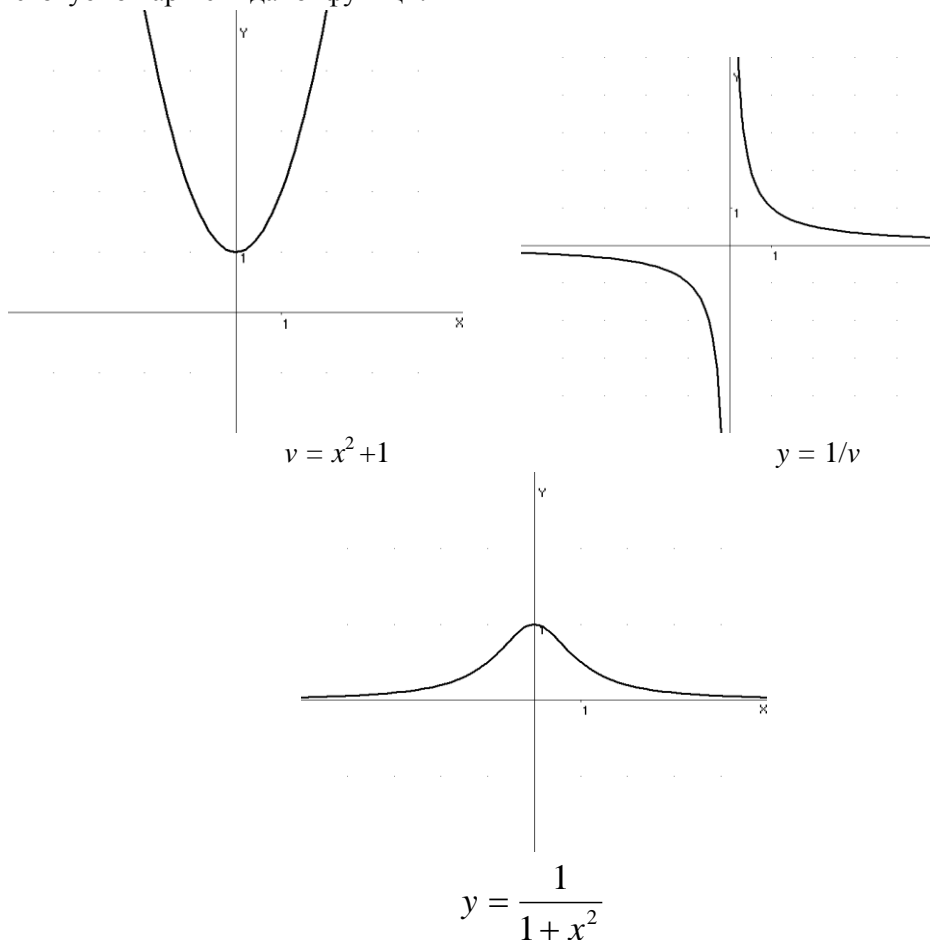
4) за графіком зовнішньої функції $y = f(v)$ знайти характер зміни функції y .

5) в системі координат xOy накреслити графік $y=v(x)$.

Працюючи за такою схемою, учні постійно звертаються до графіків основних елементарних функцій, вчаться за графіком слідкувати за змінами функції при зміні аргумента, і навпаки, за заданою зміною функції будувати її графік. При цьому графік сприймається не як статичний образ, а як відображення руху. Цей рух слід постійно підкреслювати, показуючи учням саме зростання або спадання змінної величини.

Із метою закріплення алгоритму пропонуємо (напівсамостійно) побудувати графік функції $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Розв'язок наведений на мал. 9. Якщо x зростає від 0 до $+\infty$, то $v(x)$ зростає від 1 до $+\infty$. Цій зміні v відповідає спадання y від 1 до 0. Зображуємо графік функції $y=v(x)$ при $x \geq 0$, а потім використовуємо парність даної функції.

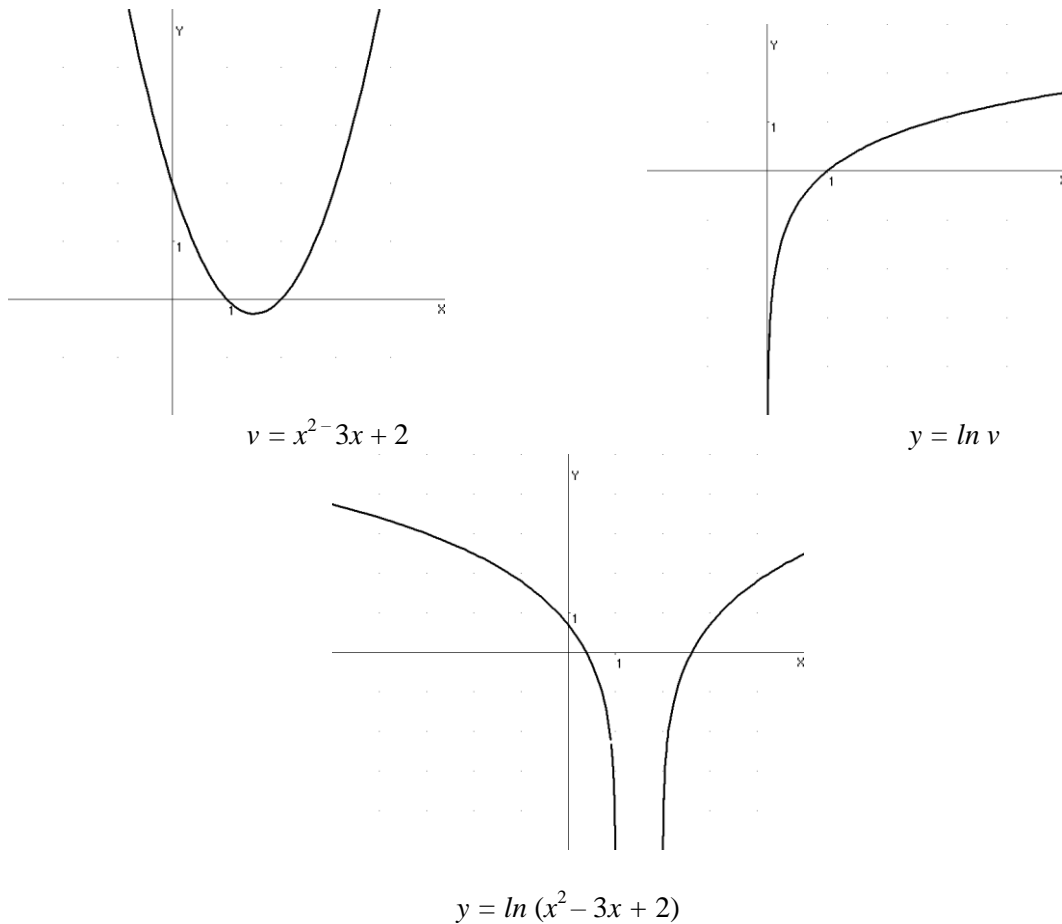


Мал. 9

При побудові графіків слід мати на увазі, що область визначення складеної функції $y=f(v(x))$ може бути вужче області визначення внутрішньої функції.

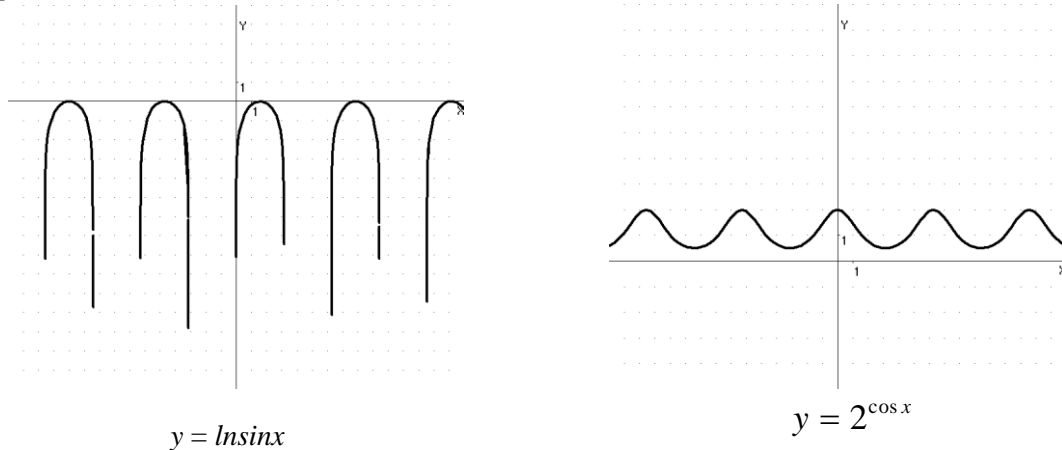
Побудувати графік функції (самостійно) $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$.

На мал. 10 наведені графіки внутрішньої і зовнішньої функції. Якщо x зростає від $-\infty$ до 1, то $v(x)$ спадає від $+\infty$ до 0, а y при цьому спадає від $+\infty$ до $-\infty$. При $x \in [1, 2]$ $v(x) \leq 0$, і при цих значеннях x функція $y=f(v(x))$ не визначена. Якщо x зростає від 2 до $+\infty$, то v зростає від 0 до $+\infty$, а y при цьому зростає від $-\infty$ до $+\infty$. Графік даної складної функції зображено на мал. 10. При певних навичках графік складної функції можна зображати без додаткових словесних пояснень, використовуючи лише графіки внутрішньої і зовнішньої функцій.



Мал. 10

Із метою контролю за рівнем знань, умінь і навичок пропонуємо завдання для самостійного розв'язання: а) $y = \ln \sin x$; б) $y = \ln \lg x$.



Використовуючи програму актуалізації знань, учні можуть використати необхідні підказки, а також співставити одержаний графік з графіком побудованим комп'ютером.

Інтегроване навчання сприяє підвищенню пізнавальної активності учнів, їх емоційного ставлення до пізнання, саморозвитку особистості і відповідає принципу гуманізації і гуманітаризації освіти, покликаної формувати у свідомості учнів цілісну картину світу.

Література

1. Інтегровані уроки у фізико-математичному класі ліцею Н.П.Варущик, В.В.Гришко // Фізико-математичний вісник. – 2002. – С. 59–62.
2. Скафа О.І. Комп'ютерно-орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики: навчально-методичний посібник / О.І. Скафа, О.В.Тутова. – Донецьк: Вебер, 2009. – 320 с.

УДК 372.851:372.853

ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ МІЖПРЕДМЕТНІ ЗАВДАННЯ ЯК ЗАСІБ РЕАЛІЗАЦІЇ ОСОБИСТІСНО ОРІЄНТОВАНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Бойко Л.М.

Мета державної політики щодо розвитку освіти полягає у створенні умов для розвитку особистості і творчої самореалізації кожного громадянина України, вихованні покоління людей, здатних ефективно працювати і навчатися протягом життя, оберігати й примножувати цінності національної культури та громадянського суспільства, розвивати і зміцнювати суверенну, незалежну, демократичну, соціальну та правову державу як невід'ємну складову європейської та світової спільноти [2].

Створення необхідних умов для розвитку учня, визнання його індивідуальності є основним принципом особистісно орієнтованої системи навчання. Таким чином, розв'язання проблеми особистісно зорієнтованої освіти є стратегічним напрямком розвитку системи шкільної освіти. Разом із тим, як відмічає розробник однієї із концепцій теорії особистісно орієнтованого навчання І.С. Якиманська [8, с.12], "реалізація особистісно-орієнтованого навчання вимагає розробки такого змісту освіти, який містить не лише наукові знання, але й метазнання, тобто прийоми і методи пізнання. Важливою є розробка спеціальних форм взаємодії учасників освітнього процесу (учнів, учителів, батьків)." Розробник іншої концепції особистісно орієнтованого навчання В.В. Серіков [4] зазначає, що, будівельним матеріалом особистісних властивостей і об'єктом переживання учня повинен бути як простір науки, яку він вивчає, її логіка, краса, так і її вихід в інші сфери знання, практики, цінностей та змісту.

Розвиток прикладних аспектів шкільної математики, введення в її програму нового матеріалу, підвищення теоретичного рівня викладання суміжних предметів, що виявляється у більш широкому застосуванні математики вимагає включення між предметних зв'язків у навчальний процес на уроках математики, розширення форм їхньої реалізації у контексті особистісної орієнтації навчання. Реалізація на уроках математики міжпредметних зв'язків дає можливість учню увійти в сферу реальності, де неминучим є зіткнення з іншими галузями знання [4].

Моделі особистісно орієнтованої освіти, які базуються на різних підходах до навчання побудовано та обґрунтовано в роботах І.Д. Беха, О.В. Бондаревської, В.В.Рибалки, В.В. Серікова, Г.К.Селевко, І.С. Якиманської та інших.

Проблемами побудови моделі особистісно зорієнтованого навчання математики протягом

останнього десятиріччя почали активно розвиватися. Цим проблемам присвячено публікації З.І. Слєпкань, Н.А. Тарасенкової, В.О. Швеця, С.Є.Яценко, Л.В. Грамбовської та інших.

У цих роботах підкреслюється значний потенціал математичної освіти для розвитку учнів, зокрема велике значення має сфера застосування набутих математичних компетенцій, серед яких можна виділити моделювання, дослідження, наближені обчислення, використання обчислювальних пристроїв, контроль за ходом і результатами власної навчально-пізнавальної діяльності [6]. Однак, як зазначає З.Ш.Слєпкань, "парадигма особистісно орієнтованої освіти зобов'язує вчителя математики і викладача вузу, який готує вчителя, включати в зміст освіти крім предметного змісту, що задається освітніми стандартами, навчальними програмами, ще і емоційно ціннісні, особистісні компоненти" [5]. А для цього "роль математики як науки здатної сприяти формуванню освіченої, творчої особистості має бути переосмислена в плані можливостей її узгодженості із принципом гуманізації та гуманітаризації математичної освіти" – відмічає С.Є.Яценко [9].

На думку багатьох дослідників (В.В. Сериков, В.О. Швець, С.Є.Яценко та ін.) основоположним принципом особистісно орієнтованого навчання є рівнева і профільна диференціація. Обидва види диференціації передбачають існування такої системи навчання, при якій кожен учень може отримати той рівень загальноосвітньої підготовки, який відповідав би його потенційним можливостям [7].

В основній школі провідним типом диференціації є рівнева диференціація. Згідно з концепцією Г.В. Дорофіїва, Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова, В.В. Фирсова [1], найважливішими умовами для ефективного забезпечення рівневої диференціації є такі:

1. Виділення рівнів засвоєння матеріалу та їхня відкритість для учнів.
2. Наявність певних ножиць між рівнем вимог та рівнем подачі навчального матеріалу.
3. Забезпечення поступового просування учня по рівнях.
4. Вибір засвоєння знань для кожного учня є добровільним і обирається самостійно.

5. Зміст контролю та оцінка повинні відображати прийнятий рівневий підхід, контроль повинен передбачати перевірку досягнення усіма учнями обов'язкових результатів навчання, а також доповнюватися перевіркою засвоєння матеріалу на більш високих рівнях.

Одним із аспектів забезпечення реалізації диференційованого навчання є розробка системи різнорівневих завдань.

Міжпредметний характер задачі дозволяє регулювати рівень її складності за рахунок складності її фізичного змісту та типу зв'язку за часом (ретроспективний, супутній чи перспективний), наявності або відсутності математичної моделі фізичного явища, що фігурує в умові задачі, а також за рахунок формулювання завдання, уведення в його зміст різної складності перетворень та обчислень, у тому числі наближених, тощо.

Детальну класифікацію міжпредметних завдань за рівнем складності наведено у таблиці 1.

До першого рівня віднесемо завдання таких типів в яких зв'язок здійснюється за доступним і зрозумілим учням фізичним матеріалом із заданою математичною моделлю, математична задача, до якої вона зводиться є простою у розв'язанні, спрямована на відпрацювання певних математичних навичок, інтерпретація одержаного результату передбачає прийняти його як розв'язок або відкинути, порівнявши із заданими обмеженнями. Міжпредметне забарвлення таких задач забезпечує активізацію навчальної діяльності учнів, урізноманітнює систему однотипних вправ.

До другого рівня віднесемо завдання зв'язок із фізичним матеріалом яких може бути як ретроспективним і супутнім без заданої математичної моделі, так і перспективним з обов'язковою заданою математичною моделлю. Складність розв'язання самої моделі переважно другого рівня, інтерпретація розв'язків може бути не однозначною і вимагати додаткових досліджень (якщо рівень складності розв'язання самої моделі перший).

Таблиця 1

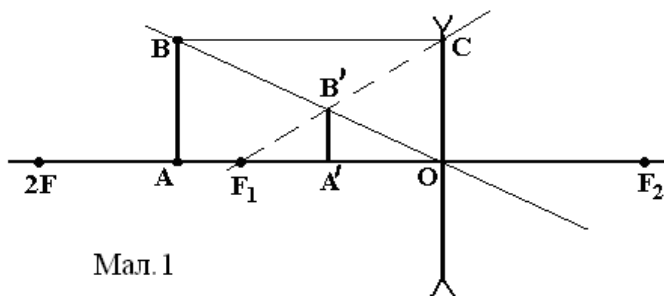
Рівень завдання	Типи завдання	Тип зв'язку			Математична модель		Складність математичної моделі			Інтерпретація	
		P	C	П	Дано	Не дано	1	2	3	однозначна	не однозначна
1	1	*			*		*			*	
	2		*			*	*			*	
	3			*	*		*			*	
2	1	*			*			*		*	
	2	*				*	*				*
	3		*			*		*		*	
	4			*	*			*		*	
	5			*	*		*				*
3	1	*			*				*	*	
	2	*				*		*			*
	3		*			*			*	*	
	4		*			*			*		*
	5			*	*			*			*
	6			*	*				*	*	
4	1	*				*			*		*
	2		*			*			*		*
	3			*	*				*	*	
	4			*		*		*			*

До третього рівня також віднесемо задачі зв'язок із фізичним матеріалом яких може бути як ретроспективним і супутнім без заданої математичної моделі, так і перспективним з обов'язково заданою математичною моделлю. Складність розв'язання самої моделі переважно третього рівня, інтерпретація розв'язків може бути не однозначною і вимагати додаткових досліджень (якщо рівень складності розв'язання самої моделі другий).

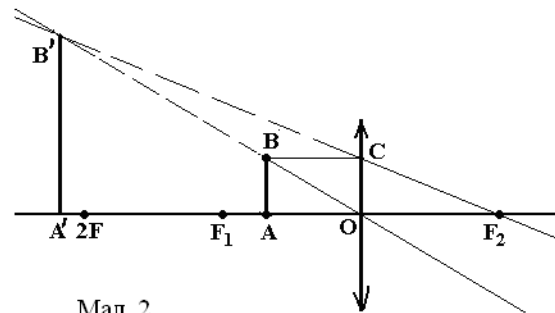
Четвертий творчий рівень складності міжпредметного завдання характеризується переважною відсутністю даної математичної моделі і неоднозначною інтерпретацією результатів, вимагає глибоких знань та високого рівня сформованості вмінь та навичок теми з математики, що вивчається, передбачає дослідницьку діяльність учнів.

Розглянемо систему завдань з фізичним змістом, яка передбачає засвоєння учнями теми "Подібні трикутники"(8 клас). Ця дозволяє реалізувати зв'язок геометрії із темою "Світлові явища", яка вивчається у курсі фізики 7 класу.

1 рівень



Мал. 1



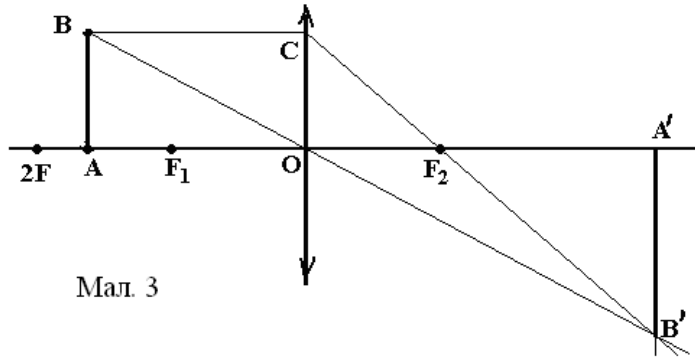
Мал. 2

1. На малюнках подано побудову зображення предмета АВ у лінзах (мал. 1, 2). Записати пари подібних трикутників, які утворюють світлові промені, предмет та його зображення.

2. У сонячний день довжина тіні на землі від ялинки висотою 1,8 м дорівнює 90 см, а від берези – 1 м. Яка висота берези?

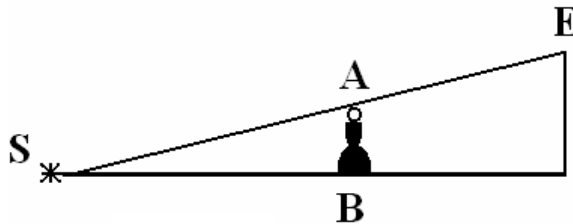
2 рівень

1. На малюнку 3 подано побудову зображення предмета АВ у лінзі. Знайти пари подібних трикутників, які утворюють світлові промені, предмет та його зображення, довести, що вони подібні.



Мал. 3

2. Лампа S, розташована на краю стола, і шахова фігура АВ висотою 10 см знаходиться на прямій, перпендикулярній до площини екрана Е (мал.4). На якій відстані від лампи знаходиться екран, якщо висота тіні від фігури на ньому дорівнює 18 см, а відстань від фігури до лампи становить 60 см.



Мал. 4

3 рівень

1. Побудувати зображення предмета у збиральній лінзі, якщо предмет знаходиться за подвійним фокусом лінзи. Виведіть формулу тонкої збиральної лінзи.

2. Побудувати зображення предмета у розсіювальній лінзі. Виведіть формулу тонкої розсіювальної лінзи.

3. На якій висоті висить вуличний ліхтар, якщо тінь від вертикально поставленої палиці заввишки 0,9 м має довжину 1,2 м, а коли палицю перемістити на 1 м від ліхтаря вздовж напрямку тіні, її довжина стане 1,5 м?

4 рівень

1. Діаметр джерела світла 20 см, відстань нього до екрану 2 м. На якій найменшій відстані від екрана слід розмістити м'ячик діаметром 8 см, щоб він зовсім не відкидав тінь на екран, а давав лише напівтінь? Пряма, яка проходить через центри джерела світла та м'ячика, перпендикулярна до екрана.

2. Виразіть лінійне збільшення G залежно від фокусної відстані лінзи F і відстані d предмета від лінзи.

Література

1. Дорофеев Г.В., Кузнецов Л.В., Суворов С.Б., Фирсов В.В. Дифференциация в обучении математике // Математика в школе. – 1990. – №4, с. 15 – 21.

2. Національна Доктрина розвитку освіти. <http://www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average> доступно на 01. 09. 2010 р.

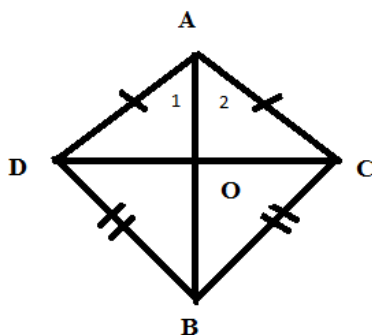
3. Сериков В.В. Личностно ориентированное образование // Педагогика. – 1994. - №5. — С.16-21
4. Сериков В.В. Образование и личность. Теория и практика проектирования педагогических систем. — М.: Издательская корпорация «Логос», 1999. — 272 с.
5. Слєпкань З.І. Проблеми особистісно орієнтованої математичної освіти учнів середньої // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових праць. – Вип. 19. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2003. – С 3 - 9.
6. Тарасенкова Н.А. Особистісно орієнтований підхід у навчанні математики // Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодні і перспективи. Матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції, м. Полтава, 6-7 грудня 2005 року. – Полтава: АСМІ, 2005. – С. 22-23.
7. Швець В.О. Динамічна диференціація на уроках математики // Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодні і перспективи. Матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції, м. Полтава, 8-9 квітня 2008 року. – Полтава: АСМІ, 2008. – С. 53-54.
8. Якиманская И.С. Личностно ориентированное обучение в современной школе. – М, 1996. – 96 с.
9. Яценко С.Є, Реалізація ідей особистісно орієнтованого навчання математики через диференціацію // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових праць. – Вип. 25. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2006. – С 116-121.

УДК 51(077)

ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

В.Г. Опанасенко

Використання графічного методу робить процес розв'язування задач видимим. Перед очима учнів весь хід розв'язування задачі зі всіма логічними переходами від одного твердження до іншого. Така схематична форма розв'язування задач дозволяє аналізувати хід розв'язку. Застосування графічної ілюстрації розв'язування задач робить навчальний матеріал більш доступним і простішим для сприймання і відтворення.

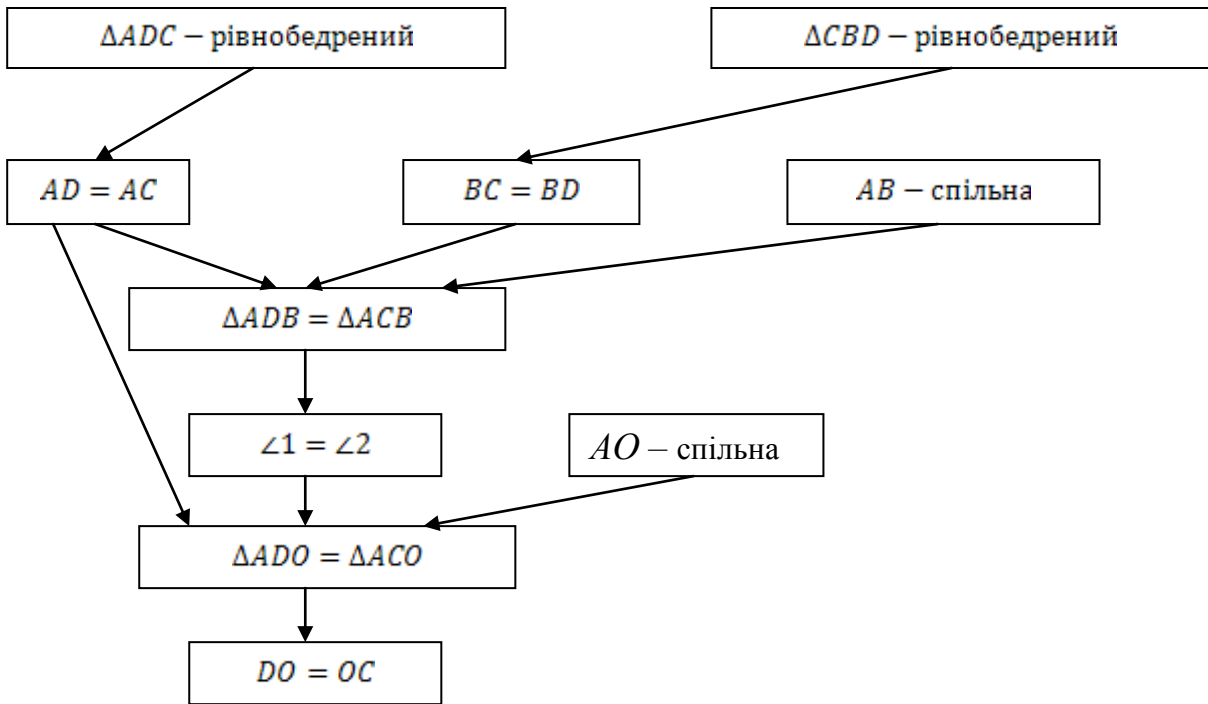


Задача 1. Рівнобедрені трикутники ADC і CBD мають спільну основу DC . Пряма AB перетинає відрізок CD в точці O . Доведіть, що $DO = OC$.

Побудова: Будуємо два рівнобедрених трикутника з спільною основою DC . Проведемо пряму AB , яка перетинає CD в точці O . Позначимо $\angle DAO = \angle 1$, $\angle CAO = \angle 2$.

Довести: $DO = OC$.

Дано:

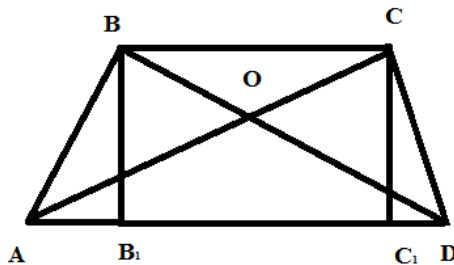


Проаналізуємо хід розв'язку задачі, будемо розглядати схему знизу вверх. Для доведення рівності відрізків DO і OC , доведемо рівність трикутників ADO і ACO . Щоб довести рівність трикутників, доводимо рівність відповідних сторін і кутів. Рівність сторін AD і AC та $\angle 1$ і $\angle 2$, а також те, що сторона AO спільна, що випливає з умови задачі.

Задача 2. В трапеції $ABCD$ з бічними сторонами AB і CD діагоналі перетинаються в точці O . Доведіть, що площі трикутників ABO і COD рівні.

Сформулюємо обернену задачу: якщо діагоналі чотирикутника, перетинаючись утворюють рівновеликі трикутники, які прилягають до бічних сторін, то цей чотирикутник є трапецією.

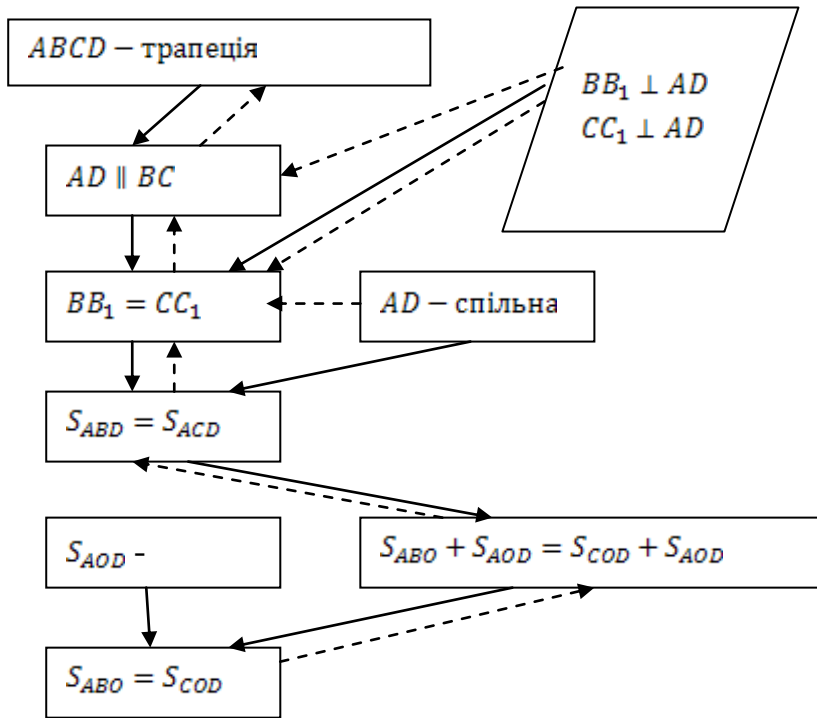
Спочатку розв'яжемо задачі за паралельними схемами, а потім розв'язання оберненої задачі проведемо за схемою розв'язання прямої задачі. (Розв'язання оберненої задачі показано на схемі пунктирними лініями).



Побудова: Проведемо висоти трапеції BB_1 і CC_1 . Трикутники ABD і ACD мають спільну основу AD і рівні висоти BB_1 і CC_1 . Отже, площі цих трикутників рівні, тому $S_{ABD} = S_{ACD}$.

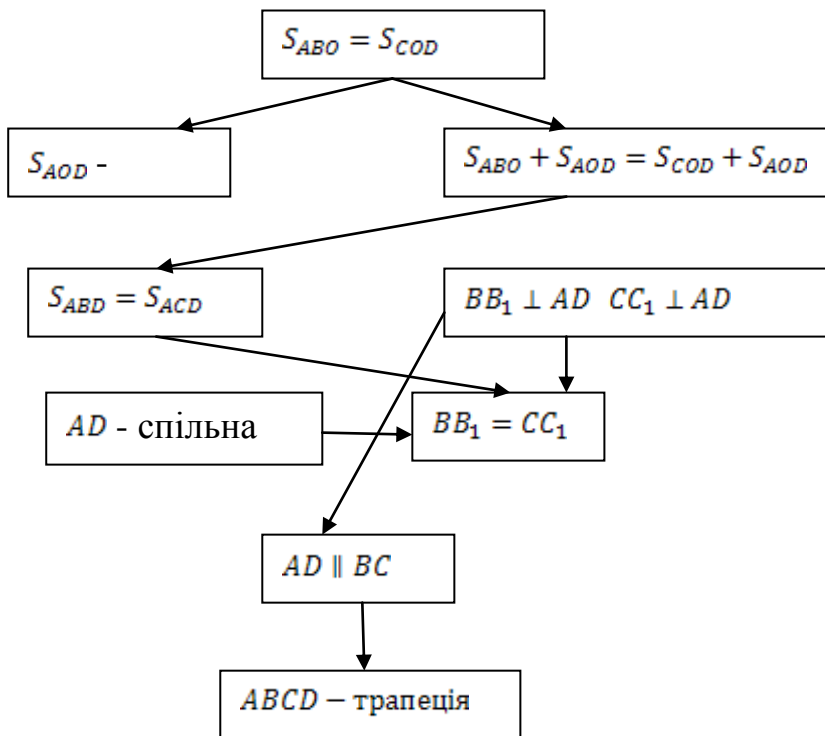
Довести: $S_{ABO} = S_{COD}$.

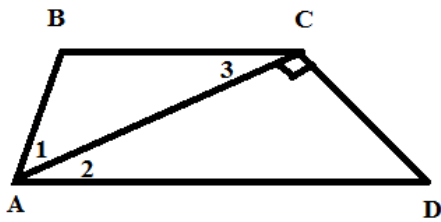
Дано:



Довести: $ABCD$ – трапеція.

Дано:





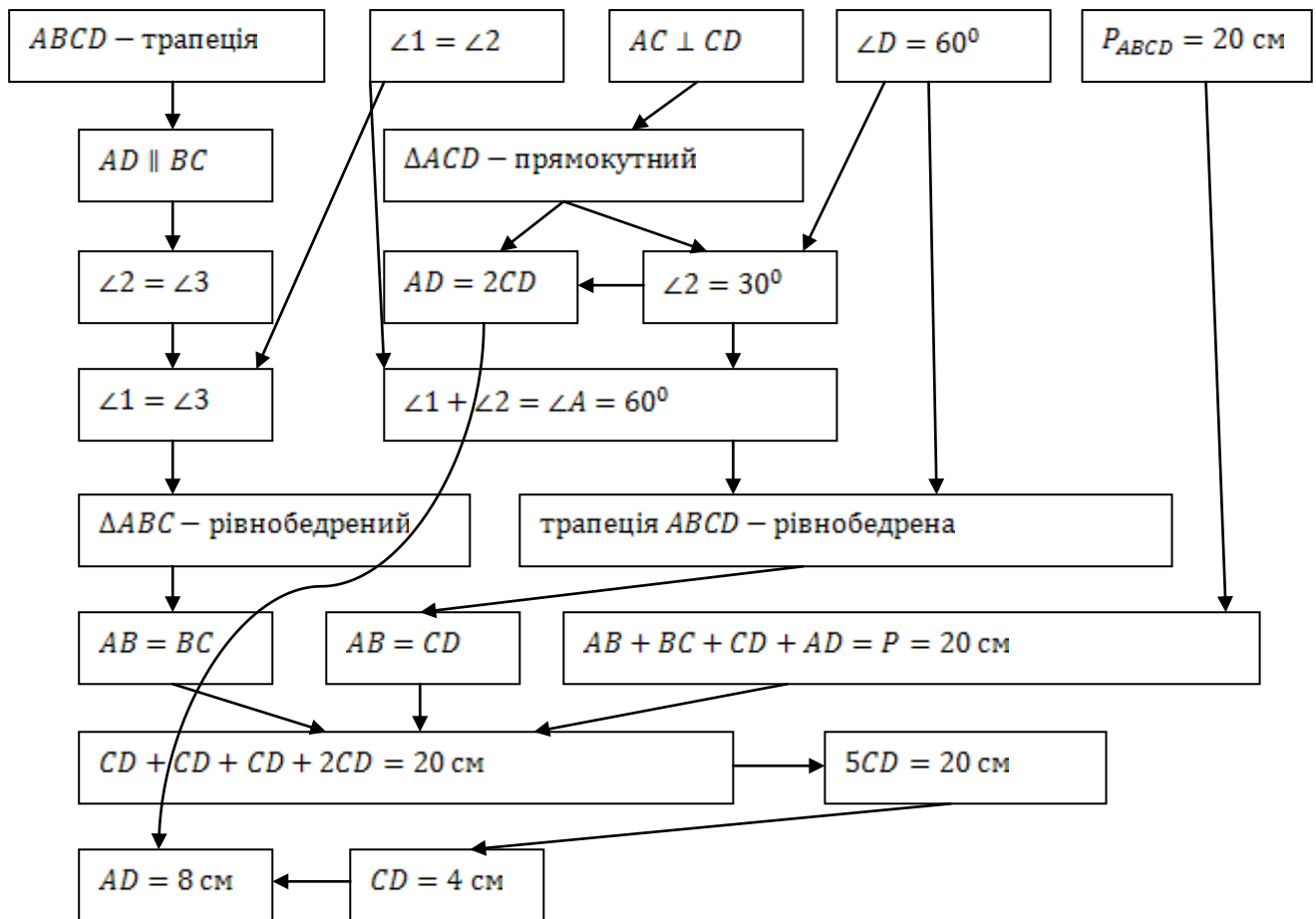
Задача 3. В трапеції $ABCD$ з більшою основою AD діагональ AC перпендикулярна до бічної сторони CD , $\angle BAC = \angle CAD$. Знайти AD , якщо периметр трапеції дорівнює 20 см, а $\angle D = 60^\circ$.

Введемо позначення:

$$\angle BAC = \angle 1, \angle CAD = \angle 2, \angle BCA = \angle 3.$$

Знайти: AD .

Дано:



Розглянутий метод розв'язування задач є засобом активізації мисленнєвої діяльності учнів. За допомогою наочних способів учні логічно осмислюють розв'язування задач. Розв'язування задач, оформлення у вигляді схеми являє собою деяку укрупнену одиницю інформації, що сприяє більшому запам'ятовуванню та швидкому відтворенню учнями шкільного матеріалу.

Література

1. Методика викладання математики в середній школі. Навчальний посібник для пед. ін-тів за спец. «Математика», і «Фізика» / О.Я Болох, Є.С. Канін, Н.Г. Килина та ін.. – Х.: Основа. – 1992. – 304с.
2. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студ. мат. спеціальностей пед.навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

ЗМІСТ

1. МАТЕМАТИКА

<i>Віра М.Б.</i> Асимптотика розв'язку крайової задачі для сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з виродженням.....	3
<i>Волковицька І.В., Старун І.І.</i> Асимптотика та стійкість розв'язків лінійних рівнянь 2-го порядку	10
<i>Циганок Л.В.</i> Аналітичні вирази в дослідженні інволюції на проєктивній прямій	14

2. ІНФОРМАТИКА

<i>Казачков І.В., Коновал О.В.</i> Проблема моделювання тяжких аварій на АЕС для створення пасивних систем захисту	22
<i>Ковальчук Ю.О.</i> Прогностична валідність тестів ЗНО 2009 року для фізико-математичного факультету НДУ імені Миколи Гоголя	27
<i>Фетісов В.С.</i> Основи роботи з математичною системою MAXIMA	30
<i>Фетісов В.С.</i> Символьні перетворення виразів у MATHCAD	42

3. ФІЗИКА

<i>Венгер Є. Ф., Євтушенко А. І., Корбутяк Д.В., Мельничук Л. Ю., Мельничук О. В.</i> Дослідження впливу магнітного поля на властивості поверхневих поляритонів 6H-SiC.....	45
<i>Венгер Є. Ф., Євтушенко А. І., Корбутяк Д.В., Мельничук Л. Ю., Мельничук О. В.</i> Дослідження оксиду магнію методами ІЧ-спектроскопії	53
<i>Ігнатенко В. А., Кнорозок Л. М.</i> Особливості магнітної сприйнятливості легованого антимоніду індію в інтервалі температур 4,2К...300К	58
<i>Аніщенко О.В.</i> Розсіювання носіїв заряду в сплавах $(\text{GaAs})_x(\text{ZnTe})_{1-x}$ ($x \geq 0,9$) в інтервалі температур 78...600К.....	61

4. МЕТОДИКА ТА ПРОБЛЕМИ ПЕДАГОГІКИ

<i>Аніщенко О.В.</i> Ранній розвиток людського потенціалу за методикою Глена Домана (на прикладі вивчення математики)	67
<i>Руденко М.П.</i> Професіограма вчителя фізики.....	70
<i>Аніщенко В.О.</i> Використання принципу історизму при вивченні закону Ома в шкільному курсі фізики	73
<i>Закалюжний В.М., Шовкун Л.І.</i> Особливості складання тестових завдань із методики навчання фізики в середній школі	87
<i>Шовкопляс В.С.</i> Вивчення законів освітленості на лабораторних заняттях з оптики	80
<i>Харченко В. М., Ваврикович Л. В.</i> Про деякі особливості сприяння розвитку обарованих сільських дітей	84
<i>Варущик Н.П., Курило Ю.М.</i> Діалог як метод організації евристичної діяльності на уроках алгебри і початків аналізу	86
<i>Варущик Н.П., Кацалап Л.І.</i> Евристико-дидактичні конструкції як засіб організації евристичної діяльності на уроках алгебри та початків аналізу.....	91
<i>Варущик Н.П., Полякова Ю.В.</i> Методика вивчення функцій та їх властивостей в умовах інтегрованого навчання.....	96
<i>Бойко Л.М.</i> Диференційовані міжпредметні завдання як засіб реалізації особистісно-орієнтованого навчання математики.....	104
<i>Опанасенко В. Г.</i> Графічний метод розв'язування геометричних задач.....	108

ДЛЯ ПОТАТОК

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

Збірник наукових праць

Відповідальний редактор – Аніщенко В.О.
Технічний редактор – Сливко В.П.
Верстка, макетування – Борщ О.В.

Книга друкується за авторським редагуванням.

Підписано до друку __.11.10 р.
Гарнітура Computer Modern.
Замовлення №

Формат 60x84/8.
Ум. друк. арк. 5,8

Папір офсетний.
Тираж 50 прим.



Видавництво
Ніжинського державного університету
імені Миколи Гоголя.
м. Ніжин, вул. Воздвиженська, 3/4.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єкта видавничої справи ДК №2137 від 29.03.05 р.

8(04631) 7-19-72
E-mail: vidavn_ndu@mail.ru