**Міністерство освіти і науки України**

**Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя**

**Навчально-науковий інститут точних наук і економіки**

**Кафедра математики, фізики та економіки**

*Середня освіта (Математика)*

*014.04 Середня освіта (Математика)*

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**

на здобуття освітнього ступеня ***магістр***

**КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ**

студента

**Жугрова Дениса Володимировича**

Науковий керівник:

Тарасенко О.В.,

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензенти:

Барило Н.А.,

канд. пед. наук, доцент

Віра М.Б.

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Допущено до захисту

В.о. зав. кафедри \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Ніжин – 2019 р.

**АНОТАЦІЯ**

**КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ**

***Жугров Денис Володимирович***

У роботі розглянуто підходи до розв’язання тригонометричних рівнянь з використанням комплексних чисел, застосування яких дозволяє уникнути громіздких записів та обрахунків. Проаналізовано доцільність використання цих чисел у геометричних задачах. Розкрито ідеї та висновки французького математика Адріана Дуаді щодо перетворень площини за допомогою дій над комплексними числами, що призводить до досліджень множини Мандельброта та його фрактальних зображень.

Запропонована добірка завдань практичного змісту сприятиме можливості здійснити «не технічний» підхід до вивчення теми і допоможе учням старшої школи «піднятись» над вивченим до проблем сучасної математичної науки та зрозуміти її колосальне значення для технічного поступу цивілізації.

***Ключові слова:*** комплексні числа, тригонометричні рівняння

**ANNOTATION  
COMPLEX NUMBERS AND THEIR APPLICATIONS  
*Zhugrov Denis Volodimirovich***

The paper deals with approaches to solving trigonometric equations with the use of complex numbers, the use of which avoids cumbersome records and calculations. The expediency of using these numbers in geometric problems is analyzed. The ideas and conclusions of the French mathematician Hadrian Duady about the transformations of a plane by means of actions over complex numbers are revealed, which leads to studies of the Mandelbrot set and its fractal images.

The proposed selection of practical content tasks will facilitate the opportunity to take a "non-technical" approach to the topic and help high school students to "rise" to the problems of modern mathematical science and understand its enormous importance for the technical progress of civilization.

Keywords: complex numbers, trigonometric equations

ЗМІСТ

[ВСТУП 4](#_Toc26145697)

[РОЗДІЛ 1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ 8](#_Toc26145698)

[1.1. З історії розвитку комплексних чисел 8](#_Toc26145699)

[1.2. Підходи до розгляду поняття комплексного числа 10](#_Toc26145700)

[1.3. Геометрична інтерпретація комплексного числа 14](#_Toc26145701)

[1.4. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами у тригонометричній формі 17](#_Toc26145702)

[1.5. Розв’язування алгебраїчних рівнянь -го степеня у множині комплексних чисел 20](#_Toc26145703)

[РОЗДІЛ ІІ. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ 21](#_Toc26145704)

[2.1. Представлення тригонометричних функцій як функцій комплексного числа z , модуль якого дорівнює 1 21](#_Toc26145705)

[2.2. Правило-орієнтир розв’язування тригонометричних рівнянь засобами комплексних чисел 22](#_Toc26145706)

[2.3. Приклади деяких видів тригонометричних рівнянь, які доцільно розв’язувати засобами комплексних чисел 24](#_Toc26145707)

[2.4. Комплексні числа у геометричних задачах 29](#_Toc26145708)

[2.4. Комплексні числа та фрактали 36](#_Toc26145709)

[ВИСНОВКИ 44](#_Toc26145732)

[СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 45](#_Toc26145733)

# ВСТУП

**Актуальність теми.** Комплексні числа відіграють важливу роль при розв’язуванні багатьох задач математики і фізики. Це, в свою чергу, вимагає використання нових підходів до розв’язування добре відомих математичних задач.

Вивченням комплексних чисел завершується одна з основних ліній шкільного курсу алгебри – розвиток поняття числа. Тема «Комплексні числа» дає уявлення про принцип будови числових множин та «закриває» питання щодо відсутності коренів квадратного рівняння з від’ємним дискримінантом. Цілісне уявлення про число є важливим кроком в процесі формування наукового світогляду учнів.

Широке коло застосувань комплексних чисел відкриває значні дидактичні можливості для розвитку математичних інтересів учнів. Адже наявність в освітньому арсеналі учнів комплексних чисел розширює їхні можливості при розв’язуванні задач, збагачує їхні уявлення про методи пізнання та прикладну функцію математики.

З психологічного погляду важливим є фактор подолання певного психологічного бар’єру в сприйманні поняття комплексного числа у шкільному віці для тих, хто обере в майбутньому професію математика чи інженера.

На даний час існує кілька вітчизняних підручників, які містять матеріал з розділу «Комплексні числа». Однак завдань на застосування комплексних чисел недостатньо, зокрема внутрішньопредметного, міжпредметного та прикладного характеру.

Загалом, технічна складова теми є не складною для сприйняття. І, за певної старанності, учні 11-х класів її легко засвоюють: дії з комплексними числами в алгебраїчній формі схожі на дії над многочленами та на дії зі спряженими ірраціональними виразами. Формула Муавра і тригонометрична форма комплексного числа дозволяють візуалізувати питання.

Вивчення даної теми у класах фізико-математичного профілю в обсязі, запропонованому чинною програмою, стає достатнім за умови включення до навчального процесу низки прикладних задач та задач з міжпредметними і внутрішньопредметними зв’язками. Розділ «Комплексні числа» можливо та доцільно вивчати у тісному взаємозв’язку з різними розділами шкільного курсу, такими як: основна теорема алгебри, розв’язування рівнянь вищих степенів, паралельність та перпендикулярність прямих, перетворення площини, тригонометричні рівняння та ін.

Так, при вивченні тригонометрії за діючими підручниками пропонується для розв'язання значна кількість тригонометричних рівнянь різних видів. Ці рівняння можна умовно поділити на дві групи. До першої групи віднесемо ті рівняння, в процесі розв’язування яких не потрібно виконувати громіздкі перетворення тригонометричних виразів, і які легко зводяться до тригонометричних рівнянь виду . До другої групи — ті рівняння, в процесі розв’язування яких застосування відомих тригонометричних формул приводить не до спрощення тригонометричного виразу, що є складовою частиною даного рівняння, а, навпаки, до його ускладнення. Таким чином, застосування стандартних підходів до розв’язування таких тригонометричних рівнянь вимагає значних затрат часу.

Також значного поширення набувають геометричні задачі у ході розв’язання яких доцільним є використання комплексних чисел.

**Мета** дослідження полягає у виробленні загальних підходів до розв’язування тригонометричних рівнянь із застосуванням теорії комплексних чисел, а також здійсненні добірки задач геометричного змісту, у ході розв’язання яких можливе використання комплексних чисел.

**Гіпотеза** дослідження полягає в тому, що застосування комплексних чисел до розв’язування деяких видів тригонометричних рівнянь та геометричних задач, дозволяє уникнути громіздких перетворень, обчислень чи доведень.

**Завдання дослідження:**

1. Розглянути теоретичні основи теми «Комплексні числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній і тригонометричній формі».
2. З’ясувати, для розв'язання яких тригонометричних рівнянь доцільно застосовувати теорію комплексних чисел. За виділеними ознаками розподілити їх на відповідні групи.
3. Скласти правило-орієнтир для розв'язування тригонометричних рівнянь засобами комплексних чисел.
4. Виділити клас тригонометричних рівнянь, для розв’язування яких доцільно використовувати представлення тригонометричних функцій як функцій комплексного числа , модуль якого дорівнює 1, і розв'язати за введеним правилом-орієнтиром.
5. Підібрати і скласти тригонометричні рівняння та геометричні задачі на застосування виділеної теорії та розв’язати їх.

**Об’єкт дослідження** – тригонометричні рівняння та геометричні задачі.

**Предмет дослідження** – комплексні числа, дії над комплексними числами в алгебраїчній і тригонометричній формі.

**Методи дослідження** – аналіз, синтез, узагальнення, систематизація, класифікація.

**Наукова новизна** дослідження полягає у виділенні деяких типів тригонометричних рівнянь та геометричних задач, які доцільно розв’язувати засобами теорії комплексних чисел.

**Практичне значення дослідження.** Складене правило-орієнтир і підібрані рівняння та геометричні задачі, використання яких буде доречним при підготовці до математичних олімпіад, під час проведення факультативних занять.

**Особистий внесок -** підібрано з різних збірників і введено загальні види тригонометричних рівнянь та геометричних задач, для розв’язування яких доцільно застосовувати теорію комплексних чисел. Складене відповідне правило-орієнтир розв’язування тригонометричних рівнянь.

**Апробація результатів**

Результати магістерського дослідження доповідались та обговорювались на:

* ІІ Всеукраїнській науковій Інтернет-конференції молодих вчених «Новітні інформаційні технології в освіті і науці» (10-12 квітня 2019 р., м. Переяслав-Хмельницький);
* звітній науковій конференції молодих науковців «Молодь у науці» (13-22 травня 2019 р., м. Ніжин);
* XV Всеукраїнській студентській науковій конференції «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання» (4-5 грудня 2019 р., м. Ніжин).

**Публікації**

1. Жугров Д.В., Тарасенко О.В. Методичні особливості вивчення комплексних чисел у шкільному курсі математики з використанням Google Classroom. *Збірник наукових праць за результатами ІІ Всеукраїнської наукової Інтернет-конференції молодих вчених «Новітні інформаційні технології в освіті і науці»* (10-12 квітня 2019 р.). Переяслав-Хмельницький: ПХДПУ, 2019.
2. Жугров Д.В. Комплексні числа в шкільному курсі математики. *XV Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання»* (4-5 грудня 2019 р.). Ніжин. 2019.
3. Жугров Д.В. Комплексні числа та їх застосування. *Вісник студентського наукового товариства* : збірник наукових праць студентів / за ред. О. В. Мельничука. Вип. 22. Ніжин : НДУ ім. М. Гоголя, 2019.

**Структура та обсяг роботи**

Робота складається з вступу, двох розділів, що містять підрозділи, висновку, списку використаних джерел.

У першому розділі розглянуто основні поняття про комплексні числа та дії над ними.

У другому розділі проаналізовано конкретні тригонометричні рівняння та геометричні задачі, для розв’язання яких доцільним є використання комплексних чисел.

# РОЗДІЛ 1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ

## З історії розвитку комплексних чисел

Поняття числа є основним поняттям математики. Передумовою появи комплексних чисел стала неможливість знаходження коренів рівнянь виду , де – дійсне число, над полем дійсних чисел.

Ще до початку XVI ст. математики, розв’язуючи квадратні рівняння, іноді зустрічалися з квадратними коренями з від’ємних чисел. Але ніхто не міг пояснити, що ж таке «квадратний корінь з від’ємного числа», який сенс слід надати цьому виразу. Зі скрутного становища виходили наступним чином: оголошувалося, що вираз не має сенсу. Це сприймалося цілком зрозумілим: кожного разу можна було довести, що при від’ємному підкореневому виразі коренем рівняння не може бути ні додатне число, ні від’ємне, ні нуль.

Коли ж справа дійшла до розв’язання кубічних рівнянь, то виявилося вже неможливим відмахнутися від квадратних коренів з від’ємних чисел. Понад 400 років тому кілька італійських математиків навчилися розв’язувати алгебраїчні рівняння третього степеня. Один із способів, що зустрічається у підручниках з алгебри (1545 р.), належить Джироламо Кардано, зводиться (в сучасних позначеннях) до знаходження коренів рівняння виду

Зауважимо, що уявними комплексні числа у 1637 році назвав Рене Декарт (1596-1650), французький фізик, математик, основоположник аналітичної геометрії, який з кожним роком все більше і більше їх використовував. Л. Ейлер та І. Ньютон вважали корені з від'ємних чисел «неможливими числами», а Г. Лейбніц (1702 р.) називав їх «витонченим і чудовим притулком божественного духу»,

Цікавою виявилася історія про знаходження коренів кубічного рівняння, адже ще у 1520 році італійський математик, професор Болонського університету Сціпіондель Ферро(1465-1526) винайшов спосіб розв'язання кубічних рівнянь виду У кінці свого життя під великим секретом він повідомив цей спосіб своєму учню Фіоре, який у подальшому плідно ним і користувався. У 1535 році на одному з математичних турнірів суперником Фіоре виявився італійський вчитель математики Ніколо Тарталья (1499-1557), який за кілька днів до турніру відкрив власний спосіб розв'язання подібних рівнянь. З часом Ніколо розповів про свій спосіб математику Джироламо Кардано. Згодом Кардано дізнався і про спосіб Ферро та виявилося, що ці способи розвязання кубічних рівнянь ідентичні.

У той же час також італійський математик Раффаеле Бомбеллі (1530-1572) вперше зафіксував правила виконання арифметичних дій над комплексними числами.

Довгий час природа уявних чисел залишалася незрозумілою для математиків, але їх використання в проміжних обчисленнях допомагало знайти кінцеві результати. Поступово вдосконалювалася техніка виконання дій над уявними числами. Але у XVIII столітті, в зв'язку з прогресом у науці з'являються труднощі у процесі розв'язанні різноманітних задач з механіки та геометрії, які вимагають геометричного тлумачення комплексних чисел. Протягом довгого часу не було сформульовано чіткого означення комплексного числа. Згодом у 1797 році датський землемір, математик і автор твору «Про аналітичне представлення векторів» Каспар Вессель (1745-1818) першим запропонував зобразити комплексне число точкою на координатній площині. Та, на жаль, його відкриття залишилося ніким не поміченим. Лише у 1803 році французький вчений Лазар Карно першим ввів термін «комплексне число», а через двадцять п'ять років цей термін продублював німецький математик, астроном та фізик, який у 1799 році довів основну теорему алгебри Карл Фрідріх Гаусс (1777-1855). В цілому слово комплекс (від латинського *complexus*) означає зв'язок, поєднання, сукупність понять, предметів, явищ і т.д., що утворюють єдине ціле.

Позначення *i* для увів швейцарський математик та фізик Леонард Ейлер (1707-1783).

Комплексні числа знайшли широке застосування не лише в математиці, але й у фізиці та багатьох галузях інших наук. Числа, які неопосередковано пов'язані з від'ємними значеннями перевернули уяву вчених, сприяли розширенню спектра дій у математиці і започаткували нову дисципліну, яка отримала назву – теорія функцій комплексної змінної. Дійсно, з комплексними числами можна виконувати набагато більше математичних операцій та застосовувати їх набагато частіше, аніж ми думаємо.

## Підходи до розгляду поняття комплексного числа

За останні десятиліття викладання математики в закладах загальної середньої освіти тему «Комплексні числа» час від часу то включали, то виключали з програми математики середньої школи. Можливо, однією з причин такого ставлення до цієї теми є відсутність єдиного підходу до означення комплексного числа. Наприклад, у підручнику [13], наведено таке означення:

Означення 1. ***Комплексним числом*** називається число виду *а + bi,* де *а* і *b* – дійсні числа , *і* – деяке (не дійсне) число, квадрат якого дорівнює

***Позначення і терміни.*** Комплексне число позначають буквою z. *z = a + bi* – комплексне число *а* – дійсна частина комплексного числа, *bі* – уявна частина комплексного числа, *b* – коефіцієнт при уявній частині, *і* –уявна одиниця. Дійсне число *а* вважають рівним комплексному числу *а + 0і*, тобто *а = а + 0і.* де, зокрема *0=0+0i*. Числа називають спряженими комплексними числами.

Далі наводять означення рівності комплексних чисел та дії над комплексними числами.

У підручнику [2], комплексне число означають так:

Означення 2. ***Комплексним числом*** називають вектор *,* де *О* – початок координат, а *Z* – довільна точка площини.

***Позначення і терміни****.* Комплексне число позначають буквою *z.* Пишуть *z = .* Вектор  з координатами (1;0) позначають цифрою 1 і називають одиницею. Вектор з координатами (0;1) позначають буквою *і* та називають уявною одиницею. Зауважимо, що пара дійсних чисел *(а;b)* – це координати точки *Z* і вектора . З урахуванням уведених позначень рівність можна записати так: . Отже, довільне комплесне число z можна записати у вигляді де *a* і *b* – деякі дійсні числа (координати точки *Z* і вектора ). Замість виразу для комплексного числа z прийнято скорочений запис Цей запис називають алгебраїчною формою комплексного числа. У запису число a називають дійсною частиною комплексного числа *z* і позначають *Re* *z* число *b* – уявною частиною і позначають *Im z* (від французьких слів **riele** – дійсний і **imaginaire** – уявний), тобто *Re z=а, Im z=b.* Якщо *Re z=0,* тобто , то таке комплексне число z називають суто уявним.

Далі вводять поняття рівності комплексних чисел і означають дії над комплексними числами.

У методичному посібнику [9], означення комплексного числа подають так:

Означення 3. ***Комплексним числом*** називають вираз

(1.1)

де *a* і *b* – дійсні числа, а *і –* спеціальний знак, при цьому повинні виконуватись такі умови:

1. *a+0i=a;*
2. *,* де *a, b, c, d* – дійсні числа, має місце тоді, коли *a=c* і *b=d*;
3. з виразом (1.1) можна виконувати арифметичні операції, які прийняті для буквених виразів в алгебрі.

З умови 5) випливає, що для арифметичних операцій над комплексними числами мають місце такі операції:

З означення комплексного числа видно, що ді будь-яке дійсне число *а* є частинним випадком комплексного числа, оскільки за умовою 2) його можна записати у вигляді *а = а + 0і,* зокрема *0 = 0 + 0і,* але тоді, якщо

*а + bі = 0*, то *а + bі = 0 + 0і,* отже, *а = b = 0.*

Комплексні числа, як правило, позначають однією буквою. Пишуть *z = a+bi* і кажуть: задано комплексне число *z.* Число *а* називають дійсною частиною *z* і позначають так: *Re z = а,* число *b* називають уявною частиною *z* і по­значають так: *Im* *z = b.* Як бачимо, треба роз­різняти терміни уявна частина комплексного числа і уявне число. Уявною частиною комплексного числа *а + bі* є дійсне число *b.*

Вважається, що комплексне число при є дійсним числом , тобто . Рівність в множині комплексних чисел означає, що і . Зазначимо, що із знаків порівняння у множині комплексних чисел використовується тільки знак .

Із означень дій додавання, віднімання і множення комплексних чисел слідує, що їх можна виконувати за правилами дій над многочленами (стосовно ), замінюючи на і об’єднуючи окремо члени, які містять і не містять .

Числа і називаються відповідно дійсною і уявною частиною комплексного числа і позначаються і . Для комплексне число називається спряженим. Мають місце рівності:

Величина є квадратом невід’ємного числа , яке називається модулем комплексного числа і позначається . Таким чином . Якщо – дійсне число (тобто якщо ), то поняття модуля комплексного числа співпадає з поняттям абсолютної величини. Справедливі рівності:

Формулу (1.5), яка визначає ділення двох комплексних чисел   
 та , можна записати у вигляді

Зауважимо, що в науковій літературі, на відміну від означення 1, дійсне число *b* також називають уявною частиною комплексного числа *z.* За означенням, якщо *z = а + bі* є комплексним числом (*а, b* — дійсні), то *а-bi* називають спряженим йому комплексним числом і пишуть . Числа *z* і взаємноспряжені одне з одним.

Сформульоване російським академіком-математиком С.М. Нікольсь-ким означення 3 комплексного числа є найбільш вдалим, оскільки в ньому, на відміну від означення 1, вказані умови, за яких вираз *а + bi* має зміст, і в якому відсутній недолік, який має місце в означенні 2 і який полягає в тому, що комплексним числом називається геометричний об’єкт (вектор *).* За влучним зауваженням відомого знавця комплексних чисел О.І. Маркушевича (див. [8]), вектор  є «портретом» комплексного числа, при цьому про самі комп­лексні числа нічого не знаємо.

В означенні 3 спеціальний формальний знак *і* задовольняє умову *t2 =-1*. Таким чином, побудовано числову систему з вира­зів *а + bі* за виконання умов l)-5) [2].

## Геометрична інтерпретація комплексного числа

У ряді випадків виявляється більш зручнішою форма запису комплексного числа, яка використовує наступну геометричну інтерпретацію. Кожному числу ставиться у відповідність точка з координатами в декартовій системі координат . Таким чином встановлюється взаємно однозначна відповідність між множиною комплексних чисел і точками площини (рис.1.1); комплексному числу відповідає точка . Відстань від точки до початку координат дорівнює , тобто дорівнює . Звідси слідує, що величина дорівнює відстані між точками, які відповідають числам і .

Рис.1.1



Кут , який вимірюється у радіанах і відраховується проти годинникової стрілки від променя до променя (рис.1.1), називається головним аргументом числа і позначається . Величина цього кута може бути знайдена, якщо одночасно виконуються наступні умови:

, , (1.6)

або за формулами, якщо  і

1) >0, 0, то ;

2) < 0, 0, то ;

3)  < 0, < 0, то ;

4)  0, < 0, то ;

5)   0, , то ;

6)  < 0, , то ;

7) ,  0, то ;

8) , < 0, то .

Аргументом комплексного числа (позначається Arg ) називається будь-яке число виду

***Приклад 1***. Знайти всі значення аргументу числа .

*Розв’язання*.Оскільки , , то розв’язками першого рівняння  системи (1.6) є числа , , а розв’язками другого рівняння  – числа , .

Спільними коренями обох рівнянь є числа , .

*Відповідь*:, .

Аргумент комплексного числа  можна знаходити простіше: спочатку, використовуючи геометричну інтерпретацію комплексного числа, визначити, в якій чверті знаходиться точка , а потім скористатись одним (будь-яким) з рівнянь (1.6).

***Приклад 2***. Знайти всі значення аргументу комплексного числа .

*Розв’язання.* Оскільки , , то число  лежить у другій чверті. Друге з рівнянь (1.6) має вигляд . Одним із розв’язків цього рівняння, який лежить у другій чверті, є число .

*Відповідь:* , .

***Приклад 3***. Записати числа 1) ; 2)  у тригонометричній формі.

*Розв’язання.* 1) Оскільки , , то  .

2) Оскільки , а один із аргументів числа  дорівнює , то .

***Приклад 4***. Записати числа 1) ; 2)  у тригонометричній формі.

*Розв’язання.* Для запису чисел  і  у тригонометричній формі немає потреби попередньо знаходити їх модулі і аргументи. 1) Скористаємось тим, що . Тому .

2) Аналогічно, , . Тому .

Аргументи комплексного числа можна знаходити по-іншому. З формул (5) випливає, що кожен з аргументів задовольняє рівнянню

|  |  |
| --- | --- |
| . | (1.7) |

Це рівняння не є рівносильним системі (1.6). Воно має більше розв’язків. Проте, якщо спочатку визначити, в якій чверті знаходиться точка , а потім знайти такий розв’язок рівняння (1.7), який є кутом у цій чверті, то ми отримаємо аргумент числа .

***Приклад 5***. Знайти один із аргументів числа .

*Розв’язання*. Точка  лежить у четвертій чверті. Знайдемо розв’язок рівняння (1.7), тобто рівняння , який є кутом у цій чверті. Таким розв’язком є .

*Відповідь*: .

## Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами у тригонометричній формі

Тригонометричною формою комплексного числа зручно користуватися при виконанні операцій множення і ділення комплексних чисел.

Якщо числа і подані у тригонометричній формі:

і, використовуючи формулу додавання для синуса і косинуса, отримаємо

Вектор, що зображує добуток комплексних чисел *z1* і *z2,* дістаємо поворотом вектора ** проти годинникової стрілки на кут, що дорівнює , i розтягом його в |*z2*| раз (для випадку |*z2*| > *1* див. рис.1.2).

*y*

*0*

*x*

*r1r2*

*r2*

*z1z2*

*z2*

*φ1*

*r1*

*φ1+φ2*

*z1*

*φ2*

Рис. 1.2

*y*

*0*

*x*

*r1*

*r2*

*z1*

*z2*

*φ1-φ2*

*z1/z2*

*φ2*

*φ1*

Рис. 1.3

Розглянемо ділення комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі. Помноживши чисельник і знаменник дробу на , отримаємо

.

Таким чином,

Вектор, що зображує частку двох комплексних чисел *z1* і *z2*, дістаємо поворотом вектора, який зображує комплексне число *z1*,за годинниковою стрілкою на кут, що дорівнює , і стиском його в |*z2*| раз (для випадку |*z1*| > *1* див. рис. 1.3).

Для будь-якого натурального степеня числа , матимемо

Зокрема, якщо =1, то отримуємо формулу Муавра:

Число називається коренем степеня з комплексного числа , якщо . Таким чином, для знаходження всіх коренів степені із числа потрібно знайти всі розв’язки рівняння . Якщо , то – єдиний розв’язок. Якщо , то, записавши числа і у тригонометричній формі і використавши формулу Муавра, отримаємо рівність у вигляді де

Два комплексних числа, записаних у тригонометричній формі, рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх модулі, а аргументи відрізняються на . Отже,

або

Таким чином, при рівняння має рівно різних коренів, які визначаються за формулами

Звідси слідує, що всі числа мають рівні модулі , але різні головні аргументи, які відрізняються один від одного на величину . Тим самим числа відповідають точкам комплексної площини, розміщеним у вершинах деякого правильного -кутника, вписаного в коло радіуса з центром в початку координат.

Під символом прийнято розуміти чисел: . Для знаходження значень (де і – дійсні числа) іноді використовують не тригонометричну форму числа і формулу Муавра, а саме означення кореня. Якщо і , то, прирівнюючи дійсні та уявні частини, отримаємо систему рівнянь За двома розв’язками цієї системи і знаходимо два значення для : і .

***Приклад 6.*** Обчислити корені четвертого степеня з числа *–*1*.*

*Розв'язання.* Число *–*1 у тригонометричній формі можна записати так:

*.*

Корені четвертого степеня з числа –*1 -* це комплексні числа

*,*

де , тобто комплексні числа (рис.1.4)*:*

Рис. 1.2

*y*

*x*

*z2*

*z1*

*-1*

*1*

*z3*

*z4*

*π/4*

Рис. 1.4

*;*

*;*

*;*

*.*

Аналогічно у множині комплексних чисел можна обчислити корінь *п*-го степеня з будь-якого дійсного числа. При цьому хоча б один корінь з додатного дійсного числа буде дійсним.

## Розв’язування алгебраїчних рівнянь -го степеня у множині комплексних чисел

У множині комплексних чисел кожне квадратне рівняння   
 з дійсними коефіцієнтами і має два (різних або однакових) корені, які знаходяться за формулами:

а) якщо , то   
б) якщо , то

У множині комплексних чисел кожне кубічне рівняння з дійсними коефіцієнтами і має три (різних або однакових) корені, які знаходяться за формулами Кардано:

Щоб звести загальне кубічне рівняння до зведеного , потрібно зробити заміну .

Фундаментальне значення комплексних чисел для алгебри визначається в першу чергу тим, що будь-яке алгебраїчне рівняння  
 -го степеня з дійсними чи комплексними коефіцієнтами має рівно коренів (серед яких можуть бути і однакові); при цьому многочлен, який стоїть у лівій частині цього рівняння, завжди можна подати у вигляді   
де – деякі різні комплексні числа, а – натуральні числа, причому . Таким чином тільки числа можуть бути коренями рівняння ; величини відповідно визначають кратність коренів .

# РОЗДІЛ ІІ. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

## Представлення тригонометричних функцій як функцій комплексного числа z , модуль якого дорівнює 1

Нехай – комплексне число, модуль якого дорівнює 1, а аргумент дорівнює , , тобто , тоді .

Розглянемо наступні добуток, суму і різницю:

Враховуючи, що , дістанемо

За формулою Муавра: . Очевидно, що . Тоді і

## Правило-орієнтир розв’язування тригонометричних рівнянь засобами комплексних чисел

Розглянемо рівняння виду:

1. За формулами подати кожну з тригонометричних функцій, що входить в дане рівняння через комплексне число :

;

2. Підставити введені функції комплексної змінної у дане рівняння. Отримати дробово-раціональне рівняння комплексної змінної з дійсними або комплексними коефіцієнтами.

3. Розв’язати отримане дробово-раціональне рівняння відносно .

4. Подати комплексне число у вигляді

5. Розв’язати систему рівнянь: відносно . (Оскільки , то або відповідно ).

6. Записати відповідь.

Зауваження 1. Якщо у рівнянні є від’ємними цілими числами, то, враховуючи парність або непарність тригонометричних функцій, подаємо їх наступним чином:

Зауваження 2. У межах даної роботи розглянуто тільки той випадок, коли . Інакше, знаходження стає досить складною задачею.

Зауваження 3. Розв’язками сукупності двох систем рівнянь: є ті значення, які задовольняють умову (рис. 2.1)



Рис.2.1

Розв’язками сукупності двох систем рівнянь: є ті значення, які задовольняють умову (рис. 2.2)



Рис.2.2

Зауваження 4. У межах даної роботи розглянуто лише деякі види тригонометричних рівнянь, які зводяться до алгебраїчних рівнянь комплексної змінної вищих степенів спеціального виду.

Розглянемо застосування правила-орієнтира до розв’язування наступного рівняння.

***Приклад 1.***

***Розв’язати рівняння***

I спосіб. Розв’яжемо дане рівняння засобами комплексних чисел.

*;*

*; .*

Оскільки , то ,

II спосіб. Розв’яжемо дане рівняння стандартним способом.

*;*

*.*

## Приклади деяких видів тригонометричних рівнянь, які доцільно розв’язувати засобами комплексних чисел

Розглянемо рівняння виду

Знайдемо залежність між *a, b* та *c*, при якій дане рівняння зводиться до виду:  
 ;

. Отже, .

Рівняння розв’язується  заміною

***Приклад 2. Розв’язати рівняння:***

*Розв’язання.* За формулою :

. Заміною приходимо до рівняння:

.

;

Враховуючи зауваження 3 пункту 2.2, маємо:   
Відповідь:

Аналогічно доводиться: рівняння

за умови зводиться до виду .  
Альтернативним способом розв’язування рівнянь виду є введення заміни або відповідно і застосування формул Кардано для знаходження розв’язків рівняння .

Проте засобами комплексних чисел такі рівняння розв’язуються значно простіше, оскільки не має потреби знаходити три значення кожного з коренів кубічних: , де

Розглянемо рівняння виду

**.**

За формулами маємо:

.

.

Позначимо , отримаємо рівняння:

За формулою бінома Ньютона:

, де отримаємо: ,

або ,

Зважаючи на рівність біноміальних коефіцієнтів

маємо, що . Тобто ми отримали симетричне рівняння -го степеня відносно комплексної змінної з дійсними коефіцієнтами.

***Приклад 3. Розв’язати рівняння: .***

Розв’язання. За формулами :

Отримане рівняння заміною зводиться до рівняння

.

Коефіцієнти розкладу бінома знайдемо з трикутника Паскаля:

Позначимо .

Маємо рівняння ,

Після пониження степеня отримаємо рівняння, коефіцієнти біля змінних якого знайдемо за схемою Горнера:;

Отже, або , або .

Розв’яжемо рівняння   
.

При . Отже .

Враховуючи зауваження 3 пункту 2.2, маємо  
.

При .

Отримані значення і є числами виду: . Оскільки , то вони не задовольняють умову задачі.

При . За зауваженням 3 пункту 2.2, маємо

.

Слід зазначити, що дане рівняння можна розв’язати, використовуючи тригонометричні формули потроєного аргументу і формули пониження степеня. Отримаємо рівняння . Ввівши заміну , , приходимо до рівняння .

Оскільки – корінь рівняння, то після пониження степеня отриманого рівняння, коефіцієнти біля змінних якого знайдемо за схемою Горнера:

; .

Повертаючись до заміни, отримаємо або .   
Отже, або .

Відповідь: .

Розглянемо рівняння виду .

За формулами отримаємо:

;

.

Нехай , тоді маємо рівняння: .

За формулою бінома Ньютона отримаємо:

або .

Зважаючи на рівність біноміальних коефіцієнтів і той факт, що , тобто , при , отримали косиметричне рівняння степеня відносно комплексної змінної з дійсними коефіцієнтами (випадок, коли не розглядатимемо). Його розв’язками завжди є значення . Після пониження степеня отримуємо симетричне рівняння степеня , коефіцієнти при змінних якого знаходимо за схемою Горнера.

***Приклад 4. Розв’язати рівняння: .***

Розв’язання. За формулами маємо:

Враховуючи, що , маємо . Нехай , тоді отримаємо рівняння: . Коефіцієнти розкладу бінома знайдемо з трикутника Паскаля, матимемо:

Оскільки – розв’язок рівняння, то, після пониження степеня рівняння, отримаємо симетричне рівняння 4-го степеня, коефіцієнти при змінних якого знайдемо за схемою Горнера:

. Позначимо , тоді :

.

Повертаємось до заміни: або .

Ми вже відмічали, що коренями рівняння є значення .

При : При :

У другому випадку отримані значення і є числами виду: .   
Оскільки , то вони не задовольняють умову задачі.

Враховуючи зауваження 3 пункту 2.2, отримаємо: .

Відповідь:

## Комплексні числа у геометричних задачах

* **Поділ відрізка у заданому відношенні [21]**

**Теорема 1.** Комплексна координата *z* середи­ни відрізка *AВ* знаходиться за формулою де – комплексні координати то­чок *А, В* і *С* відповідно.

***Доведення****.* Нехай *С —* середина відрізка *АВ*, а *z1, z2, z* – комплексні координати точок *A*, *В* і *С* відповідно (рис. 1).

Тоді із рівності

*у*

*х*

*В*

*С*

*А*

*О*

враховуючи, шо вектори мають комплексні координати *z,z1,* i *z2-z1*  відповідно, отримаємо

Рис. 1

*Зауваження.* Якщо точка *С* ділить відрізок *АВ* у відношенні тобто , то можна показати, що, де — ком­плексні координати точок *А, В, С* відповідно.

* **Відстань між двома точками**

**Теорема 2.** Відстань між точками *А* і *В* комп­лексної площини обчислюється за формулою *,* де z1=*x1+y1i, z2=x2+y2i —* комплексні коорди­нати точок *А* і *В.*

***Доведення****.* Відстань між точками *А* і *В* дорівнює довжині вектора , який має комплексну координату *z2-z1=(x2-x1)+(y2-y1)i*  (рис. 2.3).

Тому

**Рівняння кола**

*x*

*y*

*x*

*B*

*A*

*O*

**Теорема 3.** Рівняння кола з центром у точці *z0* радіуса *R* має вигляд

***Доведення****.* Згідно з означенням, коло з цент­ром у точці *z0* радіуса *R* — це множина

Рис. 2.3

точок *z* площини, віддалених від заданої точки *z0* на відстань *R,* тобто це множина точок *z* таких, що

***Наслідок****.* Рівняння кола з центром у точці *z0* = 0 радіуса *R* має вигляд

***Задача 1.*** Знайдіть множину точок комплексної пло­щини за заданими умовами:

а) б) в)

*Розв’язання.*

а) Дане рівняння задає коло з центром у точці *z0* = 2 – *i* і радіуса 3.

б) Дана нерівність означає, що шукані точки *z* віддалені від точки *z0* на відстань меншу за R. Тобто даною нерівністю описуються внутрішні точки круга радіуса *R* з центром у точці *z0*, при цьому точки відповідного кола цій множині не належать (рис. 2.4).

Z0

Рис. 2.5

Z0

*y*

*x*

*O*

Рис. 2.4

в) Шукані точки *z* віддалені від точки *z0* на відстань, більшу або рівну R. Це означає, шо вони лежать зовні кола радіуса *R* з центром у точці *z0*або на цьому колі (рис. 2.5).

* **Рівняння прямої**

**Теорема 4**. Рівняння прямої, перпендикуляр­ної до відрізка, що сполучає точки *z1* та z2, і проходить через його середину, має вигляд

***Доведення****.* Нехай*z*1=*x1+y1i, z2=x2+y2i, a z=x+yi* — довільна точка шуканої прямої. Як відомо з геометрії, всі точки z, дляяких |z – z1|= |z – z2|, є рівновіддаленими від точок та *z1* та *z2*,і тому лежать на прямій, перпендикулярній до відрізка, що сполучає ці точки, і проходить через його середину. Навпаки, всі точки прямої, яка перпендикулярна до відрізка, шо сполучає дві точки *z1* та z2 і проходить через його середину, є рівновіддаленими від точок *z1* та z2 і тому задо­вольняють рівняння |z – z1|= |z – z2|.

**Задача 2.** Знайти множину точок площини, які задо­вольняють нерівність

*y*

Z1

Z0

0

Рис. 2.6

x

|z – z1|> |z – z2|.

***Зразок міркувань****.* Рівність |z – z1|= |z – z2| є рівнянням прямої *k,* перпендикулярної до відрізка,

що сполучає точки *z1* і z2*,* і проходить через його середину. Пряма *k* розбиває площину на дві півплощини, кожна з яких містить або точ­ку *z1*, або точку *z2*. Відстань від довільної точки *z* півплощини, що містить *z2*, до точки *z2* завжди буде меншою за

відстань до точки *z1.* Тобто задана нерівність визначає ту півплощину, яка містить *z2*. причому точки прямої шуканій множині не належать (рис. 2.6).

*Зауваження.* У подібних нерівностях визначальною є точка (*z1* або *z2*), яка міститься у меншому з двох модулів, тобто шуканою є та частина площини, яка містить точку меншого мо­дуля.

**Задача 3.** За допомогою рівнянь або нерівностей запишіть такі множини точок комплексної площи­ни:

а) півплощину, розташовану зліва від уявної осі;

б) півплощину, розташовану над дійсною віссю;

в) четверту чверть координатної площини;

г) смугу, шириною π і паралельну осі *Оу*;

г) точки, розміщені зовні кола радіуса 2 і з цен­тром у точці 1- *і;*

д) бісектрису І і III координатних кутів;

е) пряму *Ох; \_*

є) бісектрису кута *z1Oz2,* де z1=2-*I, z2=1+2i.*

*Відповіді:* a) Re *z <* 0; б) Im z; в) Re z >0, Im *z <* 0; г) х0 < Re *z* < х+ π, х0 - довільне дійсне число: ѓ) ; д) е); є)

**Задача 4.** Нехай комплексні координати вершин трикутника АВС відповідно рівні z1=1+2*i*, z2= *- 1-* *i, z3=-2-2i* . Знайдіть комплексні координати його медіан.

*Зразок міркувань.*

Середини сторін даного трикутника мають комплексні координати:

**, , ,** тобто **, . .**

Тоді медіани трикутника матимуть такі координати: , , .

**Задача 5.** Довести, що якщо у площині паралелограму ABCD існує точка X, що

+=+,

то ABCD – прямокутник.

*Зразок міркувань.*

Візьмемо за початок координат точку О – центр паралелограму (рис.2.7). Нехай точки A, B, C, D, X відповідають комплексним числам , , , відповідно. Тоді, очевидно,

=; = (2.10)

Далі, за умовою:

+=+,

тобто, враховуючи (2.10),

=.

Отже, діагоналі паралелограму ABCD рівні, тобто він є прямокутником, що й вимагалося довести.

A

D

C

B

Рис. 2.7

**Задача 6.** У крузі проведено два перпендикулярних радіуси ОА та ОВ. На дузі АВ взята довільна точка Х. Прямі, що з’єднують Х з точками А та В, перетинають прямі, відповідно, ОВ та ОА в точках та . Знайти

В111

В

Х

А

А111

О

Рис. 2.8

, якщо =.

*Зразок міркувань.*

Нехай, для визначеності, система координат вибрана так, що коло, яке

обмежує даний круг, одиничне

=, а точки розташовані так, як показано на рис. 2.8:

А(1); В(*і*); Х(*х*).

Тоді, за умовою, точкам А1 та В1 відповідають числа *і.* З колінеарності точок А, Х, В1 та В, Х, А1:

*х=р+(1-р)і, х=qi+(1-q),* (2.11)

де *p, q*. Тоді, з умови рівностей комплексних чисел:

*, ,*

тобто

; (2.12)

Отже, з рівностей (2.11) та (2.12) маємо:

але оскільки точка Х лежить на одиничному колі, то маємо:

Звідси після спрощення дістанемо рівняння:

Розв’язуючи його відносно та враховуючи, що дістанемо, що

**Задача 7.** На сторонах чотирикутника ABCD побудовані однаково орієнтовані рівнобедрені прямокутні трикутники ABM, BCN, CDP, DAQ. Довести, що середини відрізків МР та NQ та середини діагоналей чотирикутника є вершинами квадрата.

*Зразок міркувань.*

Вершинам чотирикутника ABCD поставимо у відповідність комплексні числа a, b, c, d. Якщо точці М відповідає число m, то, оскільки трикутник АМВ рівнобедрений та прямокутний, вектор можна дістати з вектора поворотом на (детальніше про це дивись нижче), тобто

.

Аналогічно:

Серединам R та S відрізків МР та NQ відповідають числа

.

Якщо на відрізку RS, як на діагоналі, побудувати квадрат URVS, то

З отриманих формул видно, що точки U та V – середини діагоналей даного чотирикутника, і задача розв’язана.

**Задача 8.** Довести, що середини сторін довільного чотирикутника утворюють паралелограм.

*Зразок міркувань.*

Нехай вершинам A,B.C,D даного (не обов’язково опуклого) чотирикутника АВСD відповідають комплексні числа Тоді точкам М1, М2, М3, М4 – серединам сторін АВ, ВС, СD, DA – відповідають числа , , , .

Перевіримо виконання умови паралельності векторів та . Маємо:

Аналогічно можна показати, що вектори та також паралельні, що доводить твердження задачі.

**Задача 9.** Доведіть, що сума квадратів діагоналей па­ралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

*у*

*С*

*х*

*О*

*А*

*В*

Рис. 2.9

*Зразок міркувань.*

Введемо систему координат так, як показано на рис. 2.9. Нехай *z1 і z2 —* комплексні коор­динати двох вершин *А* і *С* паралелограма *ОАВС.* Тоді *z = z1 + z2 —* комплексна координата третьої вершини — точки *В.* Тоді

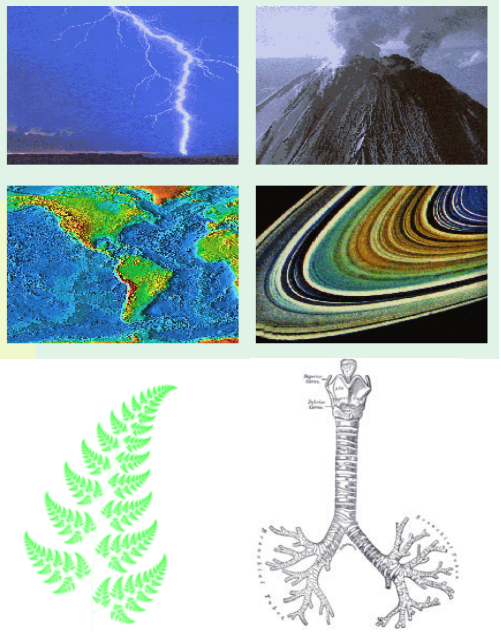
.

## 2.4. Комплексні числа та фрактали

Комплексні числа мають широке застосування, яке останнім часом все частіше стосується фракталів.

***Фрактал*** означає фігуру, маленькі частини якої при збільшенні є подібними до самої фігури. Об'єкти, які сьогодні називаються фракталами, досліджувалися ще задовго до того часу, коли їм було дано таку назву.

Вперше поняття «фрактал» увів Мандельброт. Задовго до нього різними вченими були відкриті класичні фрактали, а саме: множини Кантора, криві Пеано, функції Вейєрштрасса, «сніжинки Коха» і «коврик Серпинського». Та лише Мандельброт у 70-х роках минулого століття створив теорію фракталів. Це була нова, фрактальна геометрія, об’єктом дослідження якої стало все те нерівне, зламане, шершаве, зморщене, що нас оточує, тобто майже усе. Так у складних формах природи Мандельброт знайшов свій дивний порядок (рис. 2.10) [10,15].



*Рис. 2.10 Фрактальна геометрія природи*

«Чому геометрію часто називають холодною і сухою? Одна з причин полягає в її нездатності описати форму хмари, гори, дерева або берега моря. Хмари – це не сфери, гори – не конуси, лінії берега – це не кола, і кора не є гладкою, і блискавка не розповсюджується по прямий. Природа демонструє нам не просто більш високий ступінь, а зовсім інший рівень складності» [18].

Простим прикладом фракталу є «п'ятикутник Дарера» (рис. 2.11), який має вигляд зв'язки п'ятикутників. Фактично його утворено з використанням п'ятикутника у якості ініціатора та рівнобедрених трикутників у якості генератора, для яких відношення більшої сторони до меншої дорівнює так званій золотій пропорції (1.618033989 або 1/(2cos72°)).

До появи фрактальної геометрії наука спиралася на системи, що містилися у тривимірному просторі. Та ще Ейнштейн довів, що тривимірність є лише моделлю дійсності, а не самою дійсністю. Наша реальність, окрім трьох вимірів, знаходиться й у часовому вимірі. Бенуа охарактеризував вигляд чотиривимірного простору як фрактальне обличчя хаосу. Він стверджував, що до складу четвертого виміру входять не лише перші три, але й інтервали між ними.

Рис. 2.11 П’ятикутник Дарера

***Фрактали*** – геометричні об'єкти з дробовою розмірністю. Наприклад, якщо розмірність лінії – 1 , площі – 2 , об'єму – 3, то розмірність фрактала набуває дробового значення між 1 і 2 або між 2 і 3. Наприклад, фрактальна розмірність зім'ятої паперової кульки становить приблизно 2,5. Математики винайшли спеціальну формулу для обчислення розмірності фракталів.

Фрактали знаходять досить широке застосування у сучасній науці. Вони описують реальний світ і іноді навіть краще, ніж фізика чи математика.

Так, у фізиці фрактали природнім чином виникають при моделюванні нелінійних процесів таких, як турбулентна течія рідини, складні процеси дифузії-адсорбції, полум’я, хмари тощо. Фрактали використовуються при моделюванні пористих матеріалів, наприклад, в нафтохімії. В біології застосовуються для моделювання популяцій та для опису внутрішніх органів (система кровоносних судин). Фрактали виникають при аналізі економічних та фінансових процесів. Варто зазначити і про застосування фракталів у комп'ютерній графіці і т.д.

Серед ***усіх*** фракталів широкого значення набули ***алгебраїчні (комплексні) фрактали***. Їх знаходять, використовуючи прості алгебраїчні формули. Обчислюють їх за допомогою нелінійних процесів в n-вимірних просторах. Найбільш вивченими є двовимірні процеси. Найпростішим прикладом алгебраїчних фракталів є геометрична прогресія 1,2,4,8,16, 32,...,2n,2n+1,… Якщо відкинути перші три члени, то одержимо послідовність чисел 8,16,32,...,2n,2n+1,... Це теж геометрична прогресія з тим же знаменником. Крім того, її можна отримати з початкової прогресії множенням всіх членів на 8. Так, вона є «подібною» до вихідної прогресії з коефіцієнтом 8. Зазначимо, що аналогічний ефект подібності буде спостерігатися і при відкиданні будь-якого числа початкових членів.

Розглянемо систему, яка породжується наступною квадратичною функцією

, де (2.13)

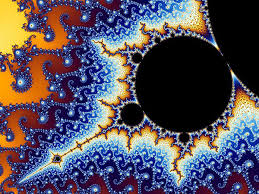
і призводить до появи фракталів.

Взявши будь-яке число , піднесемо до квадрату та додамо константу для того, щоб отримати ; далі, повторивши розрахунки, обчислимо , і так далі.

Почнемо з найпростішого із можливих значень константи , тобто . Тоді при кожній ітерації підраховується точний квадрат числа: . У залежності від значення розглядається три випадки:

1. Якщо , тоді числа отримуються все менші та менші, їх послідовність прямує до нуля.

2. Якщо , тоді числа отримуються все більші та більші, прямуючи до нескінченності.

3. Якщо , тоді точки продовжують залишатися на відстані 1 від нуля.

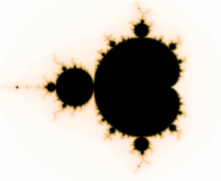
Множина всіх точок , для яких має місце (2.13) і ітерації залишаються обмеженими при , називається ***множиною Мандельброта*** (рис. 2.12)

Рис. 2.12

### <https://www.youtube.com/watch?v=aUoA5vUA6bo>

### Чорний колір у середині показує, що у цих точках функція прямує до нуля (це так званий «жук Мандельброта»). За межами цієї множини функція прямує до нескінченності. На межі множина веде себе непередбачувано, межі є фрактальними.

Приклади множини Мандельброта:



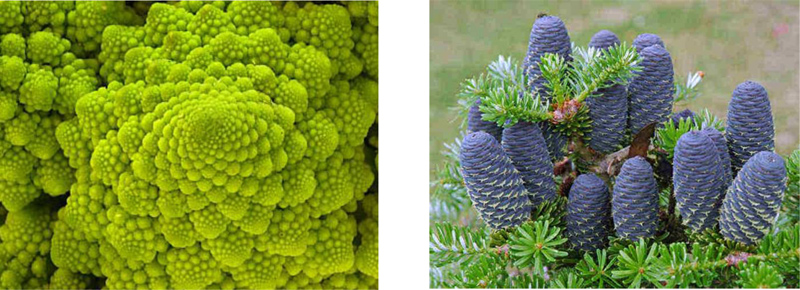
z2+c z3+c z4+c

Структури, схожі на фрактали, можна знайти і в навколишньому середовищі, наприклад, контури хмар і морських берегів, [морські раковини](https://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9C%D0%BE%D1%80%D1%81%D1%8C%D0%BA%D1%96_%D1%80%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D0%BD%D0%B8&action=edit&redlink=1), [квіти](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D1%96%D1%82%D0%B8) і [рослини](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B8), [крони дерев](https://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9A%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%B8_%D0%B4%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B2&action=edit&redlink=1) і листя рослин, [кровоносна система](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D1%81%D0%BD%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0) і [бронхи](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%80%D0%BE%D0%BD%D1%85%D0%B8) людей і тварин, сніжинки, потоки в рідинах, тріщини в породах, зображення структур деяких речовин, отримані під мікроскопом тощо. Звичайна сніжинка (багатократно збільшена) також є фрактальним об’єктом. Фрактали описують природні форми більш витончено і точніше, ніж об’єкти евклідової геометрії.





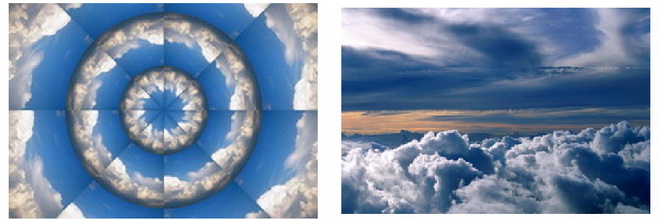




.











Французький математик Адріан Дуаді чітко охарактеризував перетворення площини за допомогою дій над комплексними числами, що призводить до досліджень множини Мандрельброта та його фрактальних зображень

(<https://www.youtube.com/watch?v=Wsr-f9a0nR8&list=PLOHqVTT1iWJFAxX5NucE0QnuX4wPv7MBG>).

Так, перетворення T– це операція, яка кожному комплексному числу *z*, тобто кожній точці площини, ставить у відповідність іншу точку T(*z*).

Адріан охарактеризував кілька прикладів таких відображень T:

* T(*z*) = *z*/2

Кожне число ділиться на 2. Звичайно, запропоноване зображення просто зменшиться в два рази: це стиск. Таке перетворення називається гомотетією.

* T(*z*) = *iz*

Це просто поворот проти годинникової стрілки на 90° згідно визначення уявної одиниці .

* T(*z*) = (1+*i*) *z*

Оскільки модуль числа 1+*i* дорівнює √2, а аргумент дорівнює 45°, то дане перетворення є композицією повороту на 45° і гомотетії з коефіцієнтом √2. Це-перетворення подібності. Велика перевага комплексних чисел полягає в тому, що вони дозволяють описувати перетворення подібності просто як множення на числа.

* T(*z*)=*z*2

Це нелінійне перетворення, при якому модуль комплексного числа підноситься до квадрату, а аргумент подвоюється.

* T(*z*) = -1/*z*

Це перетворення близьке до інверсії. Звичайно до початку координат, яке відповідає числу 0, це перетворення застосувати не можна, але ми вмовимося вважати, що точка 0 переходить в нескінченність. Пояснення дуже просте: коли комплексне число *z* наближається до 0, тобто його модуль наближається до 0, модуль його образу |-1/*z*| обернений до модуля *z*, а значить, він прямує до нескінченності. Значить, при цьому перетворенні в нулі відбувається вибух: маленький окіл нуля переходить дуже далеко за межі екрану. І навпаки, точки, які були дуже далеко від нуля, стягуються, переходячи в точки, дуже близькі до нуля. Головна властивість інверсії полягає в тому, що вона переводить кола в кола або прямі. Художники, які часто використовують перетворення такого виду, називають їх анаморфозом.

* T(*z*) = (*az+b*)/(*cz+d*).

Математики називають ці перетворення по-різному: перетворення Мебіуса, гомографії, проектні перетворення. Вони чудові тим, що вони (і тільки вони) переводять будь-яке коло в коло або пряму. Група перетворень Мебіуса породжує чудову геометрію – конформну; ця геометрія виявляється тісно пов'язана з неевклідової, але це вже зовсім інша історія.

* T(*z*) = *z+k/z*

Жуковський вивчав такі перетворення в зв'язку з аеродинамічними властивостями крил літака.

Розглянуті перетворення називаються голоморфними або конформними. Грецькі і латинські коріння holo і con означають «такий же», а morph і form означають «форма». Іншими словами, ці перетворення зберігають форму. Теорія голоморфних функцій – одна з найважливіших розділів математики.

Отже, знання про комплексні числа дадуть змогу сучасному школяру поринути у світ незвіданої краси.

# ВИСНОВКИ

Отже, XIX століття у математиці ознаменувалося побудовою теорії комплексних чисел і з тих пір комплексні числа посіли важливе місце в науці. Як виявилось, застосування комплексних чисел дозволяє зручно і компактно розв’язати багато математичних задач, фізичних, природничого циклу та ін. Зокрема, комплексні числа є досить актуальними і важливими в математиці. А саме, при розв’язуванні рівнянь n-го степеня, тригонометричних рівнянь, доведенні тотожностей, також при розв’язуванні геометричних задач та задач з фізики.

Застосування комплексних чисел при розв’язанні практичних задач – це важливий аспект у формуванні цілісної картини «світу чисел».

У ході дослідження не лише розглянуто теоретичні основи теорії комплексних чисел, але й здійснено аналіз методів розв’язування тригонометричних рівнянь; виділено загальні ознаки деяких класів тригонометричних рівнянь, для розв’язування яких доцільним є застосування комплексних чисел; складено правило-орієнтир розв’язування таких рівнянь та наведено їх приклади; підібрано деякі види геометричних задач, при розв’язуванні яких доцільно застосовувати комплексні числа. А також розглянуто використання комплексних чисел у фрактальній геометрії.

Запропоновані завдання можуть бути використані на факультативних заняттях та при підготовці до олімпіад. А наведені відомості з фрактальної геометрії допоможуть учням зануритися у світ краси чисел.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андронов И.К. Математика действительных и комплексных чисел. М.: Просвещение, 1975. 158 с.
2. Бурляй М.Ф. Про поняття комплексного числа. *Математика в школах України.* №13-15. 2015. С.55-56.
3. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины ХІХ столетия. М.: Наука, 1966. 507 с.
4. Гельфанд И.М., Львовский С.М., Тоом А.Л. Тригонометрия. М.: МЦНМО, 2002. 199 с.
5. Жугров Д.В., Тарасенко О.В. Методичні особливості вивчення комплексних чисел у шкільному курсі математики з використанням GOOGLE CLASSROOM. *Збірник наукових праць за результатами ІІ Всеукраїнської наукової Інтернет-конференції молодих вчених «Новітні інформаційні технології в освіті і науці»* (10-12 квітня 2019 р.). Переяслав-Хмельницький: ПХДПУ, 2019. С. 108-109.
6. Жугров Д.В. Комплексні числа в шкільному курсі математики. *XV Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання»* (4-5 грудня 2019 р.). Ніжин. 2019.
7. Жугров Д.В. Комплексні числа та їх застосування. *Вісник студентського наукового товариства* : збірник наукових праць студентів / за ред. О. В. Мельничука. Вип. 22. Ніжин : НДУ ім. М. Гоголя, 2019. С. 14-15.
8. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 432 с.
9. Кушнір Ісаак. Комплексні числа: Теорія і практика. К.: Факт, 2002. 168 с.
10. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: «Институт компьютерных исследований», 2002.
11. Маркушевич А.И. Комплексные числа и конформные отображения. М.: Наука, 1979.
12. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра. Підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики. Ч.2. Х., 2011.
13. Нелін Є.П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу. Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Х., 2005.
14. Никольский С.М. Элементы математического анализа. М.: Наука, 1989.
15. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. М.: Мир, 1993.
16. Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов. М.: МЦНМО, 2004. 160 с.
17. Пособие по математике для поступающих в вузы: Учеб. пособ. Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С., Чехлов В.И., Яковлева Т.Х.; под ред. Г. Н. Яковлева. 2-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. 480 с.
18. Федер Е. Фракталы. М: «Мир», 1991.
19. Флоревский П.А. Мнимости в геометрии: расширение области двухмерных образов геометрии (опыт нового истолкования мнимостей). Изд. 2-е. М.: Едиториал УРСС, 2004. 72 с.
20. Фоменко А. Т. Наглядная геометрия и топология. М.: изд-во МГУ, 1993.
21. Шаран О. Конспекти уроків з теми «Комплексні числа». *Математика в школі*. №2,3. 2008.
22. Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. Изд. 2-е, стереотипное М.: Едиториал УРСС, 2004. 192 с.