Міністерство освіти і науки України

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

Факультет природничо-географічних і точних наук

Кафедра математики, фізики та економіки

Середня освіта (Математика)

014.04 Середня освіта (Математика)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня ***магістра***

Інтеграція змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу для формування математичної компетентності старшокласників на прикладі вивчення показникових та логарифмічних рівнянь, нерівностей, систем рівнянь та нерівностей

Студентки **Обруч Анни Іванівни**

Науковий керівник:

Барило Ніна Андріївна,

канд. пед. наук, доцент

Рецензенти:

Тарасенко Оксана Володимирівна,

канд. фіз.-мат. наук, доцент;

Віра Марина Борисівна,

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Допущено до захисту

В.о. зав. кафедри _______________ Тарасенко О.В.

Ніжин – 2020 рік

АНОТАЦІЯ

Обруч А. І. Інтеграція змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу для формування математичної компетентності старшокласників на прикладі вивчення показникових та логарифмічних рівнянь, нерівностей, систем рівнянь та нерівностей. – Рукопис.

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня магістра за спеціальністю 014.04 – Середня освіта (Математика). – Ніжинський державний університет імені М. Гоголя. Ніжин, 2020.

У даній роботі розкрито теоретичні основи інтеграції змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу. Практичний аспект внутрішньопредметної інтеграції, в контексті математичної компетентності старшокласників, продемонстровано на прикладі вивчення показникових та логарифмічних рівнянь, нерівностей і їх систем. Обґрунтовано можливість використання прикладних задач з метою підвищення якості математичної підготовки в цілому.

Ключові слова: інтеграція, внутрішньопредметна інтеграція, математична компетентність, змістові лінії, алгебра і початки аналізу, показникова та логарифмічна функції, параметр.

ANNOTATION

Obruch A.I. Integration of conceptual lines of algebra and pre-calculus course for the formation of mathematical competence of senior pupils on the example of studying the exponential and logarithmic equations, inequalities, combined equations and inequalities. – Manuscript.

Qualifying paper for obtaining the master degree in the specialty 014.04 – Secondary education (Mathematics). – Nizhyn Gogol State University. Nizhyn, 2020.

This paper elaborates on theoretical foundations of the integration of conceptual lines of algebra and pre-calculus course. Practical aspect of intrasubject integration in the context of the mathematical competence of senior pupils was demonstrated on the example of studying the exponential and logarithmic equations, inequalities and their sets. The potential for use of application tasks for the purpose of general mathematical education quality increase was justified.

Key words: integration, intrasubject integration, mathematical competence, conceptual lines, algebra and pre-calculus, exponential and logarithmic functions, parameter.

ЗМІСТ

ВСТУП

На даний час, в системі шкільної освіти проводяться реформи, метою яких є вдосконалення освітніх стандартів. Ці перетворення вимагають інноваційних підходів, спрямованих на підвищення ефективності навчання учнів, які засновані на принципах інтегративності та компетентнісного підходу.

Принципове значення набуває інтегративний підхід в освіті, суть якого полягає в об'єднанні змісту, форм, технологій та інших засобів.

З розвитком науки зростає складність матеріалу, що вивчається в школі, збільшується також обсяг інформації. Математика займає одне з провідних місць в системі загальної середньої освіти, що визначається її можливостями в розвитку і формуванні мислення людини, внеском у створення уявлень про наукові методи пізнання дійсності. Прикладна спрямованість математичного апарату є основним підґрунтям для формування математичної компетентності. Вона являє собою інтегративну особистісну якість, яка заснована на сукупності фундаментальних математичних знань, умінь і навичок, які вказують на здатність випускника здійснювати професійну діяльність.

Проблемами інтеграції навчальних дисциплін на рівні загальноосвітньої школи займаються такі науковці: Н. Бібік, О. Комар, О. Нудельмана, О, Пометун та ін.

Науково-методичні дослідження вчених-педагогів О.Беляніна, Л.Ляшенко, Я.Стельмах, Н.Тарасенкової, В.Кірмана, М.Зуєвої, С.Ракова, Г.Селевко, А.Тихоненко, Ю.Трофименка присвяченні поняттю «математичної компетентності». Різні аспекти загальноосвітніх шкіл досліджували С. Раков, І.Зіненко та інші.

При вивченні шкільного курсу математики, завданнями інтеграції може бути як об'єднання знань декількох наукових дисциплін навколо стрижневої проблеми, або як об'єднання тем однієї дисципліни на внутрішньопредметному рівні.

Зміст математичної освіти в середній загальноосвітній школі структурується за такими змістовими лініями: числа; вирази; рівняння та нерівності; функції; геометричні величини; елементи комбінаторики; початки теорії ймовірностей та елементи статистики (стохастика). Важливе місце в програмі займає традиційна тема шкільного курсу математики – рівняння та нерівності. Програмою передбачено поступове формування в учнів поняття про рівняння, нерівність, системи рівнянь і нерівностей та способи їх розв’язування. Розпочинається вивчення даної теми з молодших класів, де простіші рівняння і нерівності розв’язуються на основі властивостей арифметичних дій і закінчується старшими класами, де розв’язуються трансцендентні рівняння. [19]

Головним завданням внутрішньопредметної інтеграції в математиці є демонстрація цілісності та систематичності у вивченні матеріалу через змістові лінії курсу. Провідне місце у вивченні курсу алгебри та початків аналізу займає засвоєння учнями апарату рівнянь і нерівностей як основного засобу математичного моделювання реальних процесів і явищ, а також розв’язання на цій основі прикладних задач.[19] Все це зумовлює **актуальність** вибраної теми дослідження.

Об’єктом дослідження є процес формування математичних компетентностей старшокласників шляхом інтеграцій змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу.

Предмет дослідження – методична система вивчення показникових та логарифмічних рівнянь, нерівностей та їх систем.

Таким чином, **основною метою** написання кваліфікаційної роботи є розкриття змісту і ролі інтеграції ліній в процесі вивчення теми «Показникова і логарифмічна функції» та логічної структури теоретичного матеріалу; розробка загальних методичних підходів вивчення методів розв’язання та застосування рівнянь, нерівностей і їх систем.

Гіпотеза. Інтеграція змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу на внутрішньопредметному рівні створює передумови у набутті математичної компетентності старшокласників.

Звідси витікають наступні **завдання**:

1) дослідження та аналіз вже наявної науково-методичної літератури з проблеми;
2) проведення логіко-дидактичного аналізу викладу теми дослідження у відповідності з діючою програмою та сучасними шкільними підручниками;
3) вивчення досвіду роботи вчителів-новаторів, практиків;
4) дослідження поняття інтеграції та обґрунтування зв’язку змістових ліній курсу алгебри та початків аналізу у відповідності з математичною компетентністю старшокласників;
5) розкриття методичних особливостей формування узагальнених прийомів навчальної діяльності в процесі вивчення показникових та логарифмічних рівнянь, нерівностей і їх систем;
6) демонстрація ролі інтеграції при формуванні математичної компетентності на прикладах параметричних рівнянь, нерівностей та задач прикладного змісту.

Використаний комплекс **науково-педагогічних методів** дослідження:

- теоретичні (аналіз, синтез, узагальнення, систематизація, класифікація, індукція, дедукція);

- емпіричні (перевірка теорії при розв’язання практичних, педагогічних завдань).

Наукова новизна роботи полягає в розкритті теоретичних основ інтеграції змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу, а також демонстрації використання внутрішньопредметної інтеграції для формування математичної компетентності старшокласників при вивченні теми «Показникова і логарифмічна функції». Здійснено логіко-дидактичний аналіз теми дослідження, розроблено плани-конспекти уроків та обґрунтовано можливість використання прикладних задач з метою підвищення якості математичної підготовки.

Матеріали кваліфікаційної роботи мають практичне значення і можуть бути використані при підготовці до уроків та при проходженні педагогічної практики. Практичний вміст може стати в нагоді при підготовці до ЗНО.

Апробація роботи: результати дослідження апробовано на студентських наукових конференціях «Міждисциплінарні наукові дослідження: особливості та тенденції», «Молодь у науці», а також представлені до друку тези на тему «Графічний метод розв’язування логарифмічних рівнянь з параметром» у збірнику «Міждисциплінарні наукові дослідження: особливості та тенденції» [22].

Структура роботи: робота складається зі вступу, двох розділів, висновків як до кожного з розділів, так і загального, списку використаних джерел та 3 додатків.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОБЛЕМИ ІНТЕГРАЦІЇ ЗМІСТОВИХ ЛІНІЙ КУРСУ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

1.1. Інтеграція, її сутність, роль і місце в навчанні математики

На сучасному етапі розвитку суспільства, в умовах зростаючої глобалізації всіх сфер соціальної дійсності, є нагальна потреба у розвитку, становленні та формуванні людини з ясним баченням цілісної картини світу. Вже на початку ХХ століття, як зауважив Б. М. Кедров, «... в розвитку природознавства виступили дві прямо протилежні і, здавалося б, взаємовиключні тенденції: одна складалася в роздробленні і розгалуженні наук, їх диференціації, інша, навпаки – в прагненні об’єднати роз’єднані науки в загальну систему наукового знання, тобто в їх інтеграції ».[12]

Термін «інтеграція» походить від латинського «integration», що у перекладі означає відновлення, відбудова, наповнення. Перше наукове визначення ми знаходимо в словнику Н. І. Кондакова. Тут інтеграція – це об’єднання в ціле, в єдність будь-яких елементів, відновлення будь-якого єдності. Поняття «інтеграція» є загальнонауковим.[13 с. 203]

Г. Ф. Федорець в своїй роботі зазначає: «Під інтеграцією прийнято розуміти об’єднання в ціле, в єдність будь-яких елементів, відновлення будь-якої єдності» [29 с. 24]. У теорії систем інтеграцією називають, з одного боку, як стан взаємозв’язків окремих елементів системи, і з іншого – процес, який зумовлює такий стан. Спочатку ідея інтеграції в освіті отримала своє обґрунтування і розвиток в працях таких класиків педагогічної науки як Я. А. Коменський, І. Г. Песталоцці, А. Дістервег, К. Д. Ушинський, у вигляді вимоги систематичності і послідовності навчання і використання для цих цілей внутрішньопредметних і міжпредметних зв’язків.

В залежності від специфіки предмету в педагогічній літературі доцільно виділити ряд рівнів інтеграції:

1) *внутрішньопредметна*;

2) *міжпредметна*;

3) *транспредметна*.

Так, за першим рівнем інтеграції, здійснюється систематизація знань всередині певної дисципліни. Вона спрямована на об'єднання матеріалу в великі блоки, що, в кінцевому рахунку, веде до зміни структури змісту дисципліни. У цьому випадку інтегрований зміст є інформаційно більш містким і направленим на формування здатності мислити інформаційно ємкими категоріями. Зміст поступово збагачується новими відомостями, зв'язками і залежностями.

Другий рівень інтеграції передбачає синтез фактів, понять, принципів двох і більше дисциплін. Виявляється в використанні законів, теорій, методів однієї навчальної дисципліни при вивченні іншої. Здійснена на цьому рівні систематизація змісту призводить до такого пізнавальному результату, як формування цілісної картини світу в свідомості учнів, що, в свою чергу, веде до появи якісно нового типу знань, що виражається в загальнонаукових поняттях, категоріях, підходах. Міжпредметна інтеграція суттєво доповнює внутрішньопредметну.

За третім рівнем передбачено об'єднання в єдине ціле змісту освітніх галузей, сформованих міжпредметним рівнем інтеграції, з вмістом позашкільного змісту навчання.

Оскільки, математичний апарат передбачено використовувати практично у всіх науках, особливо важливою є реалізація таких зв'язків на уроках математики. Використання внутрішньопредметної інтеграції дозволяє систематизувати знання учнів, встановити логічні зв'язки між різними поняттями, темами і розділами математики. Найчастіше, в результаті браку часу, кожна тема з математики вивчається окремо, учні не встановлюють зв'язки між окремими поняттями, у них немає уявлення про математику як про цілісну єдиної науці.

Поняття інтеграції можна прослідкувати ще з часів Евкліда. Греки розв’язували рівняння алгебри геометрично, представляючи їх розв’язки у вигляді відрізків. Цей напрямок в розвитку математики отримало назву геометричної алгебри. По суті, греки почали будувати математику на основі геометрії. Зокрема, при побудові алгебри, її операції визначалися безпосередньо для геометричних величин, а теореми доводили геометричними побудовами.

Інтегровані підручники алгебри і геометрії створили французькі математики Бертран, Камбет. Їх ідеї були узагальнені і викладені пізніше в підручнику «Алгебра» під редакцією М. Білібіна для гімназій і реальних училищ. В даному підручнику головним засобом інтеграції були завдання, які встановлюють взаємозв’язок між алгеброю, геометрією і тригонометрією. У 80-х рр. XX століття англійськими вченими був створений підручник для середньої школи «Математика. Мідленський експериментальний підручник». Однак поширення даний підручник не отримав, так як був спрямований в основному на розвиток понятійного апарату, хоча і містив питання геометричних перетворень, систем числення, математичної статистики.[10 с. 63]

До принципів, покладених в основу внутрішньопредметної інтеграції слід віднести:

1) *узагальнюче навчання*: постійне уточнення і узагальнення навчального матеріалу для його розуміння і закріплення в довгострокової пам’яті учнів.

2) *навчання на високому рівні складності*. Якщо навчання не викликає в учня труднощів і проблем, то його розвиток буде йти дуже повільно. Важливо правильно визначити міру складності навчального матеріалу, яким може оволодіти учень. Якщо матеріал виявиться не під силу учневі, то виникне процес механічного запам’ятовування матеріалу.

3) *провідна роль теоретичних знань*. Формування практичних умінь і навичок ґрунтується на глибокому осмисленні теоретичного матеріалу і його ієрархії.

4) *принцип йти вперед швидкими темпами при вивченні нового матеріалу*. Швидкий темп - це уточнення, поглиблення пройденого матеріалу, вивчення нового на основі вже вивченого, що сприяє переходу знань у довготривалу пам'ять, їх систематизації.

Для реалізації внутрішньопредметної інтеграції використовується навчання математики через цикли. Інтегроване навчання вимагає не поурочного, а структурного планування, яке виконує певні функції. Зокрема:

- матеріал з алгебри і геометрії систематизований в розділах з можливістю вивчення їх протягом завершених навчальних циклів (чвертей);
- навчальний матеріал постійно узагальнюється та підпорядковується внутрішньопредметним зв'язкам і принципам розвиваючого навчання.

Об'єднання тем курсу математики сприяє оволодінню системою знань, навичок і вмінь, які потрібні у повсякденному житті. Набута математична компетентність допоможе у вивченні шкільних дисциплін та продовженні навчання в інших закладах освіти.

1.2. Структура, зміст математичної компетентності старшокласників при засвоєнні змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу

Згідно Навчальної програми [19] з математики 10-11 класів метою базової загальної середньої освіти є розвиток особистості, яка поєднує в собі творчий потенціал до навчання, ініціативність до саморозвитку та самонавчання в сучасних умовах... Важливим чинником розвитку такої особистості є формування в учнів умінь застосовувати набуті знання у реальних життєвих ситуаціях, під час розв'язання практичних завдань та здатності визначати і обґрунтовувати власну життєву позицію.

Одним із головних засобів реалізації даної мети є компетентнісний підхід, який запроваджується шляхом формування предметних і ключових компетентностей.

З аналізу наукових досліджень, доцільно виокремлювати *трьохрівневу ієрархію компетентностей*, а саме:

1) предметну (формування здійснюється засобами навчальних предметів);
2) міжпредметну (належать до групи предметів або освітніх галузей);
3) ключові (формуються засобами міжпредметного і предметного змісту, а саме включають: уміння вчитися, здоров'я-збережувальну, загально-культурну, соціально-трудову та інформаційну компетентності).

Тому, математичну компетентність слід розглядати як структурний компонент предметної компетентності, на якому базуються міжпредметні та ключові компетентності учня.

Означення поняття «математична компетентність» розглядається по-різному залежно від контексту розв'язуваних дослідниками наукових завдань. Так С. А Раков [24 с. 16] вважає, що математична компетентність полягає у вмінні бачити і використовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, будувати математичну модель та досліджувати її методами математики, інтегрувати отримані результати.

За визначенням PISA [23 с. 47] математична компетентність характеризується як поєднання математичних знань, умінь, досвіду та здібностей людини, які забезпечують успішне розв'язання різноманітних проблем, що потребують застосування математики. При цьому мається на увазі не конкретні математичні вміння, а більш загальні уміння, що включають математичне мислення, математичну аргументацію, постановку та розв'язання математичної проблеми, математичне моделювання, використання різних математичних мов, інформаційних технологій, комунікативні вміння.

Формування математичної компетентності починається на внутрішньопредметному рівні. Для застосування математичного апарату до розв'язання прикладних задач, першочергово необхідно його досконало сформувати. До основних напрямків набуття вмінь слід віднести:

1) розв'язування типових задач;
2) застосування ІКТ;
3) дослідження практичних та прикладних задач різними методами;
4) здатність давати оцінку застосованим математичним методам під час розв'язання;
5) вміння використовувати дидактичний метод і т. д.

Математична компетентність забезпечує вміння систематизувати та послідовно вибудовувати складні концепції або операції. Проаналізувавши програму шкільного курсу математики, можна виділити в ній тісно пов'язані групи тем, які створюють так звані змістові лінії. Саме їх інтеграція дозволяє сформувати цілісність процесу вивчення предмету.

В курсі алгебри і початків аналізу виділяють наступні *змістовні лінії*:

1) Числова

Так як в основній школі завершується формування поняття про дійсні числа, в алгебрі 10-11 класу відбувається систематизація пройденого матеріалу. За навчальною програмою поглибленого рівня передбачене вивчення комплексного числа.

2) Функціональна

Вважається однією із головних змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу. Спочатку здійснюється повторення, систематизація вивченого матеріалу основної школи стосовно функцій, його поглиблення і розширення. Головною метою повторення є підготовка учнів до вивчення нових класів функцій (тригонометричних, степеневих, показникових, логарифмічних), а також застосування похідної при дослідженні функцій. Провідним завданням вивчення теми є розвиток графічної культури учнів, так як робота з графіками, рисунками та діаграмами займає значне місце в різноманітних видах практичної діяльності. Тому особливу увагу при вивченні функцій слід приділити формуванню в учнів умінь встановлювати властивості функції за її графіком, виконувати геометричні перетворення графіків.

Важливим завершенням функціональної лінії курсу є розгляд понять похідної та інтеграла. При цьому слід виділяти головний прикладний зміст поняття «похідної», адже це робить його більш природним і доступним для сприймання. Вивчаючи інтеграли, важливе місце посідає їх використання при моделюванні реальних процесів

3) Лінія тотожних перетворень

Перетворення виразів – одне з найважливіших питань курсу всієї шкільної математики. Воно супроводжує розв'язування рівнянь і нерівностей, доведення теорем, розв'язування задач. Виконання тотожних перетворень вимагає від учнів відповідних теоретичних відомостей і наявності «впевнених» практичних навичок. В профільній школі вивчаються тотожні перетворення тригонометричних, степеневих та логарифмічних виразів.

4) Лінія рівнянь і нерівностей

У старшій школі відбувається розширення класів рівнянь, нерівностей, їх систем, методів розв'язування. Вивчаються тригонометричні, показникові, логарифмічні рівняння і нерівності, ірраціональні рівняння, системи рівнянь і нерівностей, ірраціональні нерівності, рівняння і нерівності з параметрами. Це пояснюється виключним значення апарату рівнянь і нерівностей у найрізноманітніших галузях застосувань математики.

Важливо демонструвати взаємозв'язок між змістовими лініями рівнянь і нерівностей та функціональною. Зокрема, під час розв'язання рівняння $f(x)=0$, нерівностей $f(x)>0$, $f(x)<0$, що є окремими випадками задачі на дослідження функції $y=f(x)$ (знаходження нулів функції та проміжків її знакосталості).

5) Стохастична

Вивчення основних поняття теорії ймовірностей – подія, ймовірність, випадкова величина; операції і властивості операцій над подіями; основні теореми теорії ймовірностей. При профільному рівні вивчення розглядається умовна ймовірність, випадкова величина та її математичне сподівання. У навчальній програмі для поглибленого рівня передбачене оволодіння геометричною ймовірністю).

Курс алгебри і початків аналізу націлений на формування загальних закономірностей. По-перше, відбувається підвищення рівня абстракції і логічного організації досліджуваного матеріалу. По-друге, спостерігається перехід вивчення на рівень методів (методи диференціального й інтегрального числення, векторний і координатний методи). По-третє, відбувається знайомство учнів з фундаментальними поняттями математики (дійсне число, межа послідовності, похідна функції, інтеграл і ін.). По-четверте, завершуються основні лінії шкільного курсу математики, що дозволяє систематизувати і узагальнити знання учнів. При цьому з’являються і нові лінії (лінія диференціального й інтегрального числення, наприклад). По-п’яте, засобами математики забезпечується процес формування природничо-наукової картини світу, відбувається посилення прикладної спрямованості шкільного курсу математики, математичний апарат широко використовується в суміжних дисциплінах. По-шосте, зміст орієнтований на підготовку до державної атестації, продовження математичної освіти на різних рівнях у вищій школі, що, зокрема, передбачає організацію активної самостійної пізнавальної діяльності при вивченні старшокласниками змісту.

1.3. Логіко-дидактичний аналіз лінії рівнянь, нерівностей та їх систем при вивченні теми «Показникова та логарифмічна функції»

До логіко-дидактичного аналізу теми входить:

1) визначення цілей вивчення теми;
2) аналіз програми вивчення показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей;
3) логічний і математичний аналіз змісту теми (теоретичного й задачного матеріалу);
4) відбір основних засобів, методів і прийомів навчання;
5) визначення форм контролю й оцінки процесу й результату навчальної діяльності учнів.

1. Цілі вивчення теми

Для того, що учень став суб'єктом навчальної діяльності необхідно, щоб цілі навчання, визначені вчителем та навчальною програмою, він сприйняв як свої власні, суспільно значущі; зміг спланувати свою учбову діяльність по досягненню конкретної мети, здійснити контроль результатів виконаної роботи. Тому, постає методична задача, яка полягає в забезпеченні прийняття мети учнем, тому що ціль, сформульована вчителем, далеко не завжди стає метою діяльності учня. Для створення мотивації вивчення теми та постановки цілей необхідно показати:

- можливе практичне використання знань й умінь, отриманих у результаті вивчення теми;
- цікаві факти історії одержання й використання фактів і методів теми;
- широку або гарну застосовність методів і прийомів, розглянутих у темі.

Навчальні цілі:

- Учні повинні осмислити основні поняття та теореми, що вивчаються в даній темі: означення степеня з довільним дійсним показником, графік і властивості показникової та логарифмічної функцій, означення показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей та їх систем.

- Учні повинні засвоїти правила, алгоритми та методи розв'язування різних видів рівнянь
- Забезпечити вміння використовувати набуті знання для розв'язання практичних задач

Виховні та розвивальні цілі

1. Сприяти формуванню в учнів наукового світогляду (розвитку учнів правильних уявлень про природу математики, про місце математики в системі наук й ролі математичного моделювання в науковому пізнанні та на практиці). Це передбачає:

- Введення нових методів розв'язання ряду рівнянь.
- Показ універсальності математичних методів.
- Демонстрування основних етапів розв'язання прикладних задач математичними методами.

2. Сприяти розвитку в учнів усної та письмової культури мовлення, вчити користуватися словесною, символічною і графічною мовами.

3. Заохочувати учнів самостійної навчальної діяльності; виховувати в них позитивну відповідальність за власні навчальні досягнення. [15]

Аналіз програми вивчення показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей

Курс «Алгебра і початків аналізу» продовжує реалізацію завдань математичної освіти, розпочату в середніх класах, розширюючи і доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей учнів.

Істотного розвитку набуває змістова лінія рівнянь та нерівностей та функціональна лінія. Повторюється поняття рівносильних рівнянь. Процес розв'язування рівняння трактується як послідовна зміна даного рівняння рівносильними йому рівняннями. На основі узагальнення відомостей про степінь із дійсним числом, вводиться поняття показникової функції. Потім вводиться поняття логарифмічної функції як оберненої до показникової. Після цього вивчаються відповідні рівняння і нерівності та методи їх розв'язання, які безпосередньо ґрунтуються на застосуванні властивостей показникових та логарифмічних функцій.

На вивчення теми «Показникова та логарифмічна функції», згідно навчальних програм відводиться: академічний рівень – 16 годин, профільний рівень – 40 годин, на поглибленому – 36 годин.

Учень повинні формулювати означення показникової і логарифмічної функцій та їх властивості, означення логарифма та властивості логарифмів. Будувати графіки показникових і логарифмічних функцій. Розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності (та їх системи, зокрема з параметрами – за програми профільного та поглибленого рівня). Застосовувати показникову та логарифмічну функції до розв'язування прикладних задачах.

Логіко математичний аналіз теми

Логіко-математичний аналіз теми, зводиться до встановлення логічної організації навчального матеріалу на основі аксіоматичного підходу у виченні шкільного курсу математики.

Розвиваючи логічну організацію навчального матеріалу з теми, з'ясовуємо, які твердження доводяться, які вводяться як ілюстровані факти, який рівень логічної строгості доказів та метод використовується для доказу, які нові теоретичні твердження вводяться при рішенні математичних задач.

Результатом виконання логіко-математичного аналізу буде визначений «ядерний» матеріал та логічність строгості його вивчення і розкриття математичних методів і прийомів його вивчення.

На основі логіко-математичного аналізу теоретичного матеріалу теми виконується аналіз математичних задач. Результатом аналізу математичних задач буде в кожній темі своя типологія; основні завдання, які необхідно розв'язувати у класі; методичне ставлення до решти завдань.

Показникові і логарифмічні рівняння і нерівності, безсумнівно, займають центральне місце в програмі математики 10-11х класів поряд з такими розділами, як тригонометрія, похідна і її інтеграл. Завдань, пов'язаних, так чи інакше, зі степенями, коренем, з показниковою і логарифмічною функціями, в контрольно-вимірювальних матеріалах досить багато. При тому найважче завдання із відкритою відповіддю завжди формується у вигляді системи. Яка обов’язково має або логарифмічне або показникове рівняння чи нерівність (інколи з параметром). Сила лінії рівнянь і нерівностей в тому, що вона має не лише теоретичне значення для розв’язування низки завдань прикладного змісту, але і відображається в практичних цілях. Дану змістову лінію вивчають протягом усього навчання в школі.

Тема «Показникова та логарифмічна функції» починається із повторення та розширення відомостей про степені. Для введення степеня із дійсним показником розглядається конкретний приклад із ірраціональним показником. Повторюються властивості степенів, при цьому наголошується, що степінь із дійсним показником має такі самі властивості, що й степінь із раціональним показником.

Для $x>0$, $y>0$ та будь-яких дійсних α і β справедливі такі рівності:

1)$x^{\alpha}\cdot x^{\beta}=x^{\alpha+\beta}$;

2)$x^{\alpha}:x^{\beta}=x^{\alpha-\beta}$;

3)$(x^{\alpha})^{\beta}=x^{\alpha\beta}$;

4)$(xy)^{\alpha}=x^{\alpha}y^{\alpha}$;

5)$\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}=\frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}$.

В підручниках академічного рівня дані властивості не доводяться, при профільному та поглибленому вивченні демонструється доведення першої з них. Воно ґрунтується на застосуванні границь послідовностей та їх властивостей.

Означення. Функція виду $y=a^{x}$, де $a>0, a\neq 1$ називається показниковою.

При визначенні показникової функції в підручниках не пояснюється обмеження на число a. Таким чином в учнів можуть виникнути проблеми при розв’язуванні задач. Пояснимо, чому $a>0,\ a\neq 1$:

- обмеження $a > 0$ випливає з попередніх міркувань щодо узагальнення поняття степеня;

- обмеження $a \neq 1$ є, з одного боку, наслідком того, що показникова функція при $a = 1$ перетворюється в дуже просту і тому абсолютно нецікаву з точки зору вивчення її властивостей функцію (вироджується в окремий випадок лінійної функції: y =1);

До основних властивостей показникової функції відносяться:

1) її область визначення: R;

2) область значень: R_+;

3) неперервність: функція неперервна на області визначення;

4) монотонність: функція монотонна, причому зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$.

Саме ці чотири властивості будуть необхідні згодом при вирішенні рівнянь, нерівностей та їх систем функціонально-графічним методом. До додаткових властивостей можна віднести особливі точки графіка показникової функції: точка перетину з віссю ординат: (0; 1) і точка з координатами (1; a), що є характеристичною точкою.

Так як графічна складова дуже важлива при розв’язуванні рівнянь і нерівностей, тому огляд властивостей показникової функції супроводжується ілюстраціями відповідних графіків.

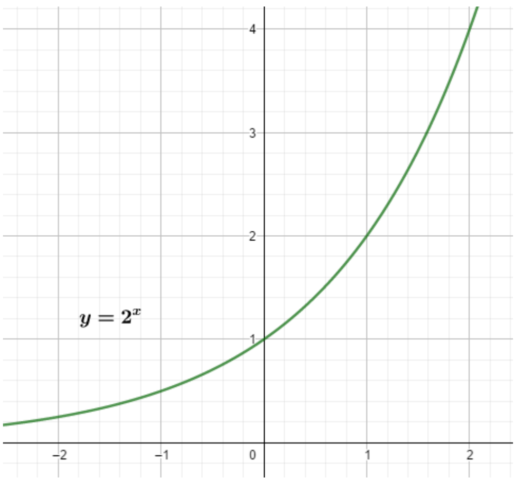


Рис. 1.1

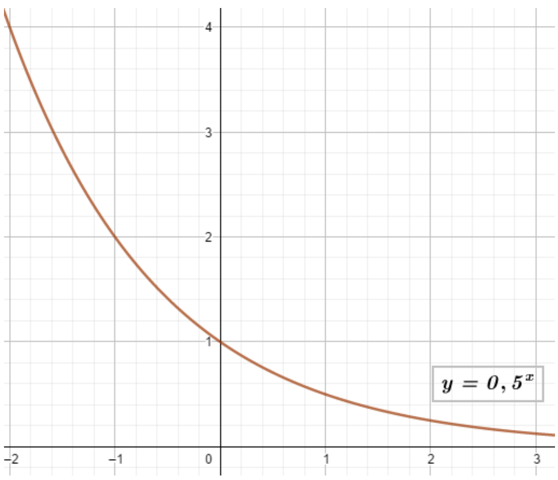


Рис. 1.2

Означення показникового рівняння, за підручниками, вводиться конкретно-індуктивним методом (розгляд прикладів та визначення в них спільного).

Означення. Рівняння називається показниковим, якщо його змінні входять лише до показників степенів сталих основах.

Для розв’язання показникових рівнянь вводиться теорема та наслідок:

Теорема 1. При $a>0,\ a\neq 1$ рівність $a^{x_1}=a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1=x_2$.

Доведення теореми ґрунтується на основі монотонності показникової функції та методом від супротивного.

Відомо, що коли $x_1=x_2$, то $a^{x_1}=a^{x_2}$. Для доведення, що з рівності $a^{x_1}=a^{x_2}$ випливає рівність $x_1=x_2$, припускається, що $x_1\neq x_2$. Тобто залишається два варіанта: або $x_1<x_2$ або $x_1>x_2$. Нехай $x_1<x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y=a^x$. Вона може бути або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1<x_2$ випливає, що $a^{x_1}<a^{x_2}$ (при $a>1$) або $a^{x_1}>a^{x_2}$ (при $0<a<1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1}=a^{x_2}$, тобто отримано суперечність.

Аналогічно доводиться і випадок, коли $x_1>x_2$.

Наслідок. Якщо $a>0,\ a\neq 1$, то рівняння $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x)=g(x)$.

Доводиться наслідок за допомогою вище розглянутої теореми.

Припустимо що x_1 - корінь рівняння $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, тобто $a^{f(x_1)}=a^{g(x_1)}$. Тоді за теоремою 1 отримаємо, що $f(x_1)=g(x_1)$. Звідси випливає, що x_1 - корінь рівняння $f(x)=g(x)$.

Нехай x_2- корінь рівняння $f(x)=g(x)$, тобто $f(x_2)=g(x_2)$. Звідси $a^{f(x_2)}=a^{g(x_2)}$.

Отже, кожний корінь рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ є коренем рівняння $f(x) = g(x)$ і навпаки. Таким чином дані рівняння рівносильні.

Означення показникової нерівності вводиться аналогічно до показникового рівняння.

Означення. Нерівність називається показниковою, якщо її змінні входять лише до показників степенів при сталих основах.

Розв'язуючи показникові нерівності, використовують монотонність показникової функції.

Теорема 2. При $a > 1$, нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 > x_2$; при $0 < a < 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 < x_2$.

Справедливість даної теореми випливає з того, що при $a > 1$ показникова функція зростає (більшому значенню аргументі відповідає більше значення функції), а при $0 < a < 1$ - спадною (більшому значенню аргументі відповідає менше значення функції).

Наслідок. Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Наслідок доводиться так само як і наслідок з теореми 1.

Далі переходять до розкладу поняття логарифма, логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Означення логарифма вводиться за допомогою проблемної задачі: спочатку записуються два показникових рівняння корені яких легко знаходять (наприклад, $2^x = 4$ і $2^x = 8$), а потім пропонують рівняння, корінь якого вказати відразу складно ($2^x = 5$).

Розв'язок даного рівняння шукають графічним методом, розглядаючи функції $y = 2^x$ і $y = 5$. Вони перетинаються в одній точці, а отже рівняння має єдиний розв’язок. Виникає проблема в його записі. Після цього вводиться саме означення логарифма.

Означення. Логарифмом додатного числа b за основою a, де $a>0,\ a\neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b. Позначається $\log_a b$.

Після цього вводиться основна логарифмічна тотожність, яка випливає з означення логарифма: якщо $a^{\alpha}=b$, то $\alpha=\log_a b$, з цього випливає, що $a^{\log_a b}=b.$ Також з означення випливають такі рівності $\log_a 1=0$ і $\log_a a=1$.

Далі формулюються властивості логарифма (в підручниках академічного рівня вводяться лише перші три властивості):

1) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ ($x>0,\ y>0,\ a>0$);

2) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ $(x>0,\ y>0,\ a>0,\ a\neq 1)$;

3) $\log_a x^p = p\log_a x$ $(x>0,\ a>0,\ a\neq 1,\ p\in R)$;

4) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ c>0,\ c\neq 1)$;

Та наслідки:

1) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1)$;

2) $\log_{a^p} b=\dfrac{1}{p}\log_a b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ p\neq 0)$.

Їх доведення ґрунтується на застосуванні основної логарифмічної тотожності. Наприклад, доведемо першу властивість $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ ($x>0,\ y>0,\ a>0$)

Доведення. Розглядаються два вирази $a^{\log_a xy}$ і $a^{\log_a x+\log_a y}$, необхідно довести, що вони рівні. Використовуючи основну логарифмічну тотожність, отримаємо: $a^{\log_a xy}=xy$ і $a^{\log_a x+\log_a y}=a^{\log_a x}\cdot a^{\log_a y}=xy$ (використовуємо властивість степенів). Отже, $a^{\log_a xy}=a^{\log_a x+\log_a y}$. Звідси за теоремою 1 маємо $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$.

Після цього вводиться поняття логарифмічної функції та її властивостей.

Означення. Функцію називають логарифмічною, якщо її можна задати формулою $y = \log_a x$, де $a > 0,\ a \neq 1$.

Графік, даної функції та її властивості вводять, розглядаючи логарифмічну функцію як обернену до показникової. Так як графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ будувати логарифмічну функцію по точкам не обов'язково.

До основних властивостей логарифмічної функції відносяться:

1) область визначення: R_+;

2) область значень: R;

3) функція неперервна на області визначення;

4) функція монотонна, причому зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$.

Що стосується додаткових властивостей про особливі точки графіка логарифмічної функції, то загальною для всіх графіків є точка (1;0), а характеристичною – точка з координатами (a; 1), за допомогою якої за графіком можна знайти основу a функції.

Знайомство з логарифмічними рівняннями починається із найпростішого, а саме $\log_a x = b$, де $a > 0,\ a \neq 1$. При чому, за допомогою графічного методу демонструється. Що дане рівняння має єдиний корінь так як графіки функцій $y = \log_a x$ і $y = b$ перетинаються в одній точці. Цей корінь можна знайти, використовуючи означення логарифма. Маємо: $x = a^b$.

Означення. Рівняння називається логарифмічним, якщо його змінні входять лише під знаки логарифмів.

Для розв'язання логарифмічних рівнянь вводиться теорема та наслідок:

Теорема 3. Нехай $a > 0,\ a \neq 1$. Якщо $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$, і навпаки, якщо $x_1 > 0,\ x_2 > 0$ і $x_1 = x_2$, то $\log_a x_1 = \log_a x_2$.

Ідея доведення теореми ґрунтується за застосуванні монотонності логарифмічної функції, так само як і доведення теореми 1. Тому в підручниках пропонується переконатися в правильності самостійно.

Наслідок. Нехай $a>0,\ a\neq 1$. Рівняння виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ рівносильне будь-якій із систем

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x)>0$ чи $g(x)>0$, розв'язати легше.

При розв'язуванні багатьох логарифмічних нерівностей застосовується така теорема.

Теорема 4. При $a>1$ нерівність $\log_a x_1>\log_a x_2$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1>x_2>0$; при $0<a<1$ нерівність $\log_a x_1>\log_a x_2$ виконується тоді й тільки тоді, коли $0<x_1<x_2$.

Наслідок. Якщо $a>1$, то нерівність $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Якщо $0<a<1$, то нерівність $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x)< g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Доведення теореми і наслідку, схоже на доведення теореми 1 та її наслідку, тобто базується та монотонності логарифмічної функції.

До основних типів задач даної теми відносяться:

- завдання на знаходження області визначення;
- завдання на побудову графіків функції та встановлення властивостей;
- завдання на обчислення і перетворення показникових та логарифмічних виразів

- задачі на знаходження коренів найпростіших показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей

Вибір основних засобів і прийомів навчання

Коли поставлена навчальна задача, то вибір засобів і методів навчання в більшій мірі вважається визначеним. Дії, які потрібно виконати для розв’язання учбової задачі входять в її постановку. Специфіка формування цих дій залежить від багатьох факторів: їх операційний склад, рівень підготовки класу, засобів, які має школа (проектори, ІКТ, дидактичні матеріали і т. д.), від особистих умінь і здібностей вчителя. Тому вирішувати питання відбору засобів навчання можна тільки з урахуванням об’єктивних можливостей матеріалу. Все інше буде уточнюватися в конкретній школі, класі і у конкретного вчителя.

Питання про вибір прийомів і методів навчання вирішується дещо іншим шляхом. Учитель повинен залежно від змісту навчального матеріалу варіювати методи як за джерелами навчання, так і з обліку видів діяльності учнів.

Засоби:

- підручник;
- діалог між вчителем та учнем;
- дидактичні матеріали для індивідуальної та групової роботи учнів, наприклад: картки із завданнями, із теоретичним матеріалом, презентації для додаткової наочності;
- контрольні запитання і тестові завдання які спрямовані як на відтворення означень, наслідків, формул та властивостей, так і на з’ясування елементів та структури означень, окремих винятків та тонкощів.
- Комп’ютерні математичні пакети та ІКТ (розширюють можливість вивчення теми, мотивують навчальну діяльність)

Прийоми та методи:

- метод доцільно дібраних задач;
- пояснювально-ілюстративним метод
- метод математичного моделювання

- абстрактно-дедуктивний метод;
- конкретно-індуктивний метод;
- самостійна робота учнів з підручником;
- покрокове доведення теореми з детальним обґрунтуванням тверджень;
- складання таблиць, наприклад при побудові графіків функцій;
- алгоритмічний метод розв’язування деяких показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей;
- загальні та спеціальні прийоми евристичної діяльності.

Форми контролю та оцінювання процесу й результатів діяльності учнів у процесі вивчення теми

Доцільними формами контролю будуть:

- фронтальне усне опитування;
- письмова форма контролю у вигляді самостійних та контрольних робіт, тестових завдань;
- індивідуальне опитування;
- взаємоконтроль;
- тематичний контроль
- комбінована форма контролю поєднує індивідуальний контроль з фронтальним і груповим: учитель одночасно викликає для відповіді декількох учнів, один з них відповідає усно, 1-2 готуються до відповіді, виконуючи на класній дошці необхідну роботу, а решта учнів виконує індивідуальні письмові чи практичні завдання.

Таблицю контролю за рівнем усвідомлення учнями лінії рівнянь і нерівностей представимо на темі «Показникова і логарифмічна функція» (академічний рівень).

Таблиця 1.1

№	Тип уроку	Тема уроку, зміст навчального матеріалу	Контроль результатів навчання
1	Урок формування та закріплення знань, умінь і навичок.	Степінь із довільним дійсним показником	Вид контролю: попередній. Форма контролю: фронтальне опитування.
2	Урок формування нових знань, умінь і навичок.	Властивості та графіки показникової функції	Вид контролю: поточний. Форма контролю: фронтальне опитування, , індивідуальна.
3	Урок формування та закріплення знань, умінь і навичок.	Розв’язування типових вправ	Вид контролю: покроковий. Форма контролю: комбінована.
4	Урок формування нових знань, умінь і навичок.	Показникові рівняння	Вид контролю: поточний. Форма контролю: фронтальне опитування, індивідуальна.
5	Урок формування та закріплення знань, умінь і навичок.	Розв’язування типових вправ	Вид контролю: покроковий. Форма контролю: індивідуальна, фронтальна.
6	Урок формування	Показникові нерівності	Вид контролю: поточний.

	нових знань, умінь і навичок.		Форма контролю: взаємоконтроль, індивідуальна.
7	Урок застосування знань, умінь і навичок	Розв'язування типових вправ. *Самостійна робота*	Вид контролю: покроковий. Форма контролю: фронтальне опитування, самостійна робота
8	Урок формування нових знань, умінь і навичок.	Логарифм і його властивості	Вид контролю: поточний. Форма контролю: фронтальне опитування
9	Урок формування нових знань, умінь і навичок.	Властивості та графік логарифмічної функції	Вид контролю: покроковий. Форма контролю: комбінована.
10	Урок формування та закріплення знань, умінь і навичок.	Логарифмічні рівняння	Вид контролю: покроковий. Форма контролю: фронтальне опитування.
11	Урок формування та закріплення знань, умінь і навичок.	Розв'язування типових вправ	Вид контролю: покроковий. Форма контролю: математичний диктант, індивідуальна.
12	Урок формування нових знань, умінь і навичок.	Логарифмічні нерівності	Вид контролю: поточний. Форма контролю: індивідуальна, фронтальна.

13	Урок застосування знань, умінь і навичок	Розв’язування типових вправ. Самостійна робота.	Вид контролю: покроковий. Форма контролю: індивідуальна, самостійна робота
15	Урок узагальнення та систематизації	Розв’язування показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей	Вид контролю: покроковий. Форма контролю: індивідуальна
16	Контрольний урок	Контрольна робота за темою «Показникові та логарифмічна функції»	Вид контролю: тематичний. Форма контролю: індивідуальна (контрольна робота)

Висновок до розділу 1

Проаналізувавши поняття «математична компетентність» зміст та структуру, ми з’ясували, що процес її формування представляється в декілька етапів. Так, внутрішньопредметний рівень забезпечує цілісність і системність вивчення тем алгебри та початків аналізу, міжпредметний дозволяє об’єднати теорії декількох дисциплін, а транспредметний – демонструє цілісне розуміння картини світу. Як бачимо, інтегративний підхід реалізується в кожному з етапів.

Поняття інтеграції зайняло своє почесне місце в навчальному процесі. Для того, щоб досягнути мети, поставленої навчальними програмами, необхідно не лише показати практичне застосування математичного апарату, а і формувати в учнів вміння «бачити» єдність навчального матеріалу.

Інтеграція в процесі вивчення тем курсу алгебри і початків аналізу демонструється на змістових лініях, які пронизують всю дисципліну. Провівши логіко дидактичний аналіз теми «Показникова та логарифмічна функції», було виявлено тісний зв’язок функціональної лінії з лінією рівнянь та нерівностей. Дійсно, всі теореми та методи розв’язання, запропоновані в підручниках [4], [16], [20] ґрунтуються на властивостях відповідних функцій. При цьому, приділяється достатньо уваги і числовій лінії, зокрема під час вивчення степеня з дійсним показником.

Наведені прийоми, методи та засоби навчання, які доречно використовувати під час вивчення теми «Показникова та логарифмічна функції» демонструються на розроблених планах-конспектах уроків (ДОДАТОК Б, ДОДАТОК В).

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ПОКАЗНИКОВИХ, ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ, НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ В УМОВАХ ІНТЕГРОВАНОГО НАВЧАННЯ

2.1. Показникові рівняння й нерівності, та особливості їх введення і розв’язання

Під час вивчення методів розв’язання показникових, логарифмічних рівнянь (нерівностей) доречним є застосування алгоритмічного підходу. Таким чином, учні вчитимуться діяти відповідно до заданого алгоритму, виконувати алгоритмічну діяльність, під час якої формуватиметься алгоритмічне мислення.

1. Метод зведення до спільної основи

Основна ідея розв’язання рівняння такого типу полягає в використанні властивостей ступенів для приведення загальних частин рівняння до одного підставі. Визначимо кроки розв’язання показникового рівняння даним методом:

- представити обидві частини показникового рівняння у вигляді ступенів з підставами;

- на підставі наслідку з теореми 1, прирівнюємо показники

- розв’язуємо отримане рівняння, згідно з його виду (лінійне, квадратне і т. д.);

Приклад 1. Знайти корені рівняння $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

Розв’язання. Слід згадати теорію про взаємно обернені числа, так $\frac{7}{3}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$ і перепишемо вихідне рівняння:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3}$$

Застосуємо наслідок з теореми 1 і переходимо до розв'язання лінійного рівняння:

$$3x-7=-7x+3,$$
$$10x=10,$$
$$x=1.$$

Відповідь: x=1

2. Метод введення нової змінної

Алгоритм розв'язання показникового рівняння методом введення нової змінної:

1. Знайдіть ОДЗ.

2. Позначаємо повторювану в показниковому рівнянні функцію $a^{f(x)}=t$, при необхідності попередньо виконавши відповідні перетворення, де t - будь-яке додатне дійсне число $a^x=t$.

3. Підставляємо у вихідне рівняння заміну змінної $a^x=t$ і записуємо отримане алгебраїчне рівняння відносно $t>0$.

4. Знаходимо корені отриманого алгебраїчного рівняння, якщо вони є. Якщо коренів немає, то і задане рівняння не має коренів.

5. Повертаємося до заміни, вирішуючи рівняння $f(x)=t_1; f(x)=t_2;... f(x)=t_n$

6. Запишіть відповідь, погоджуючи його з ОДЗ.

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $5^{2x-1}+5^{x+1}=250.$

Розв'язання: Використовуючи властивості степеня, запишемо рівняння у вигляді:

$$5^{2x}\cdot5^{-1}+5^x\cdot5-250=0.$$

Зробимо заміну $5^x=t,\ t>0.$

$$\frac{1}{5}t^2+5t-250=0,$$
$$t_1=-50\notin \text{ОДЗ}$$
$$t_2=25\in \text{ОДЗ}$$

Повертаємося до заміни $5^x=25,\quad 5^x=5^2,\quad x=2.$

Відповідь: $x=2$

3. Метод винесення спільного множника за дужки (показникове рівняння виду $a^{f(x)+k}+a^{f(x)+m}+a^{f(x)+n}=b$)

1. Звести рівняння до такого виду, щоб всі складові в лівій частині рівняння мали однакову основу, а показники степенів відрізнялися на постійне число.

2. Визначити найменший показник, наприклад $f(x)+n$, і винести за дужки степінь з цим показником (інакше поділити на нього кожний доданок за формулою $a^{f(x)+m}:a^{f(x)+n}=a^{m-n}$

3. Поділити обидві частини рівняння на отримане в дужках число.

4. Розв'язати рівняння $a^{f(x)+n}=d$.

5. Записати відповідь.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^{x}=9$

Розв'язання. В даному рівнянні всі складові в лівій частині рівняння мають однакову основу, тому переходимо до кроку два і виносимо за дужки степінь з найменшим показником.

$$3^{x-1}\cdot(2\cdot 3^{x+1-(x-1)}-6-3^{x-(x-1)})=9;$$
$$3^{x-1}(2\cdot 9-6-3)=9;$$
$$3^{x-1}\cdot 9=9;$$

Виконавши третій крок, розв'язуємо отримане рівняння:

$$3^{x-1}=1;\qquad 3^{x-1}=3^{0};\qquad x-1=0\Rightarrow x=1$$

Відповідь: $x=1$

4. Функціонально-графічний метод

1) Ліву і праву частини рівняння представити у вигляді функцій;
2) Визначаємо монотонність кожної функції; якщо функція одна зростає, а спадає чи постійна (const) або навпаки, то існує не більше одного розв'язку.
3) Побудувати графіки обох функцій в одній системі координат;
4) Знайти точки перетину графіків, якщо вони є;
5) Вказати абсциси точок перетину, це корені рівняння.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $3^{2x}=10-x$

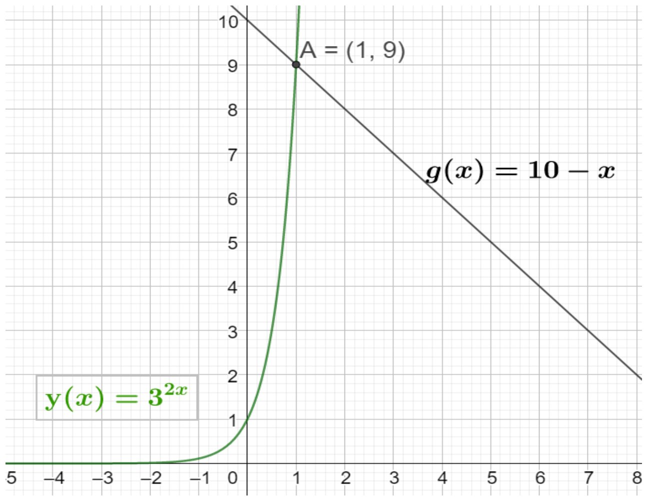


Рис. 2.1

1) Маємо дві функції $y = 3^{2x}$ і $y = 10 - x$ (рис. 2.1)
2) За властивостями показникової функції, якщо $a > 1$ - функція зростає; лінійна функція – спадає. Отже існує не більше одного розв'язку.
3) Будуємо графіки відповідних функцій
4) Точкою перетину функцій є точка А (1;9)
5) Отже, коренем рівняння є абсциса точки А, x=1.

Відповідь: 1.

5. <u>Метод логарифмування</u>

Рівняння виду $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = b^{\varphi(x)}$ завжди можна звести до вигляду $c^{f_1(x)} = c^{\varphi_1(x)}$ за допомогою логарифмічної тотожності $a = b^{\log_b a}$.

Метод логарифмування зазвичай застосовується для розв'язування рівнянь, логарифмування обох частин яких дозволяє позбутися від змінної в показниках степенів.

1) Переконатися, що вирази, що відповідають частинам рівняння, приймають додатні значення при будь-якому значенні змінної з ОДЗ для вихідного рівняння.
2) Прологарифмувати обидві частини рівняння по одній додатній і відмінній від одиниці основи.
3) Розв'язати отримане рівняння.

Приклад 5. Розв'язати рівняння методом логарифмування $5^{x^2+x} = 2$

ОДЗ: $x \in R$

Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння за основою 5:

$$\log_5 5^{x^2+x} = \log_5 2,$$
$$(x^2+x)\log_5 5 = \log_5 2,$$
$$(x^2+x) = \log_5 2,$$
$$x^2 + x - \log_5 2 = 0$$

Отримала квадратне рівняння, знайдемо його корені, які і будуть розв'язками вихідного рівняння:

$$D = 1 + 4\log_5 2 > 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\log_5 2}}{2}$$

Відповідь: $\frac{-1+\sqrt{1+4\log_5 2}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{1+4\log_5 2}}{2}$.

6. Метод почленного ділення

Даний метод полягає в тому, щоб розділити кожен член рівняння, що містить степені з однаковими показниками, але різними основами, на один із степенів. Цей метод застосовується для розв'язання однорідних показникових рівнянь.

Рівняння виду $A \cdot a^{2f(x)} + Ba^{f(x)}b^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} = 0$ називають однорідним показниковим рівнянням.

1) За необхідності спростити рівняння (використовуючи властивості степенів) і привести його до виду $A \cdot a^{2f(x)} + Ba^{f(x)}b^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} = 0$
2) Розділити обидві частини рівняння на $b^{2f(x)} \neq 0$, отримаємо рівняння:

$$A \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + B \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + C = 0$$

4) Введемо заміну змінної $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$, і розв'язуємо квадратне рівняння

5) Повертаємося до заміни.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0$

Розв’язання. Використовуючи властивості степенів приведемо дане рівняння до загального виду однорідного показникового рівняння.

$$4\cdot 4^{x}-13\cdot 2^{x}\cdot 3^{x}+9\cdot 9^{x}=0,$$
$$4\cdot 2^{2x}-13\cdot 2^{x}\cdot 3^{x}+9\cdot 3^{2x}=0$$

Поділимо обидві частини рівняння на $3^{2x}>0$

$$4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+9=0$$

Введемо заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t>0$, отримаємо:

$4t^{2}-13t+9=0,$

$D=25,$

$t_1=\frac{9}{4},\quad t_2=1.$

Повертаємося до заміни $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1,\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{9}{4};\end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=-2.\end{array}\right.$

Відповідь: 0, -2.

Показниковою нерівністю називається нерівність, в якій змінна входить лише до показників степеня. Найпростіша показникова нерівність має вигляд $a^{x}>b$ або $a^{x}<b$, де $a>0,\ a\neq 1$. Під час розв’язування показникових нерівностей необхідно пам’ятати, що показникова функція $y=a^{x}$ зростає при $a>1$ і спадає при $0<a<1$.

1. <u>Нерівності виду</u> $a^{f(x)}>a^{g(x)}\quad (a^{f(x)}<a^{g(x)})$

Розв’язування нерівностей подібного виду засноване на наступних твердженнях:

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}\ \Leftrightarrow\begin{cases}a>1\\ f(x)>g(x)\end{cases};\qquad a^{f(x)}>a^{g(x)}\ \Leftrightarrow\begin{cases}0<a<1\\ f(x)<g(x)\end{cases}$$

Застосовуючи будь-якої метод при вирішенні нерівності, що містить знак «>», можна цей же метод застосовувати і при вирішенні нерівностей, що містять знаки «<», «≥», «≤»

Приклад 7. Розв’язати нерівність $0,5^{\frac{x^2-4}{x}} \geq 0,125$

Розв’язання. Представимо праву частину нерівності у вигляді степеня з основою 0,5

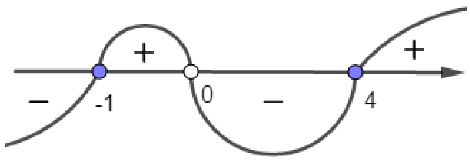
$$0,5^{\frac{x^2-4}{x}} \geq 0,5^3$$

Так як показникова функція з основою $a = 0,5$ спадна, то

$$\frac{x^2-4}{x} \leq 3; \frac{x^2-3x-4}{x} \leq 0; \ \frac{(x-4)(x+1)}{x} \leq 0$$

Переходимо до розв’язання системи:

$$\begin{cases} x(x-4)(x+1) \leq 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$



$$x \in \left(-\infty;-1\right] \cup \left(0;4\right]$$

Відповідь: $x \in \left(-\infty;-1\right] \cup \left(0;4\right]$.

2. <u>Нерівності виду</u> $a^{f(x)} > b^{g(x)}$

При розв’язуванні нерівностей подібного виду застосовують логарифмування обох частин за основою a або b. З огляду на властивості показникової функції, отримуємо:

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \leftrightarrow f(x) > g(x)\log_a b$, якщо $a > 1$;

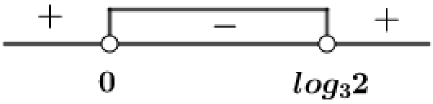
$a^{f(x)} > b^{g(x)} \leftrightarrow f(x) < g(x)\log_a b$, якщо $0 < a < 1$;

Приклад 8. Розв’язати нерівність $2^x \geq 3^{x^2}$

Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою 2, тоді одержимо:

$$\log_2(2^x) \geq \log_2(3^{x^2})$$

Використавши, основну логарифмічну тотожність отримаємо:
$x \ge x^2 \log_2 3 \Leftrightarrow x - x^2 \log_2 3 \ge 0 \Leftrightarrow x(1 - x\log_2 3) \ge 0 \Leftrightarrow x(x\log_2 3 - 1) \le 0$, $x = 0$ або $x = \dfrac{1}{\log_2 3} = \log_3 2$



Відповідь: $\left[0; \log_3 2\right]$.

3. <u>Розв'язування показникових нерівностей методом заміни змінної</u>

Приклад 9. Розв'язати нерівність $16^x + 4^x - 2 > 0$

Розв'язання. Нехай $4^x = t$, $t > 0$. Отримуємо квадратне рівняння

$$t^2 + t - 2 > 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t < -2 \\ t > 1 \end{array}\right.$$

Повертаємося до заміни: $4^x < -2 < 0$ - немає розв'язків, $4^x > 1 \Leftrightarrow 4^x > 4^0 \Leftrightarrow x > 0$

Відповідь: $x \in (0; \infty)$

4. <u>Розв'язування нерівностей, що містять однорідні функції відносно показникових функцій</u>

Приклад 10. Розв'язати нерівність $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення нерівності за допомогою використання властивостей степенів.

$$2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0.$$

У лівій частині маємо однорідні функції відносно 2^x і 5^x. Можна поділити обидві частини початкової нерівності 2^{2x}, 5^{2x} або на $10^x = 2^x \cdot 5^x$. Поділивши обидві частини початкової нерівності на $5^{2x} = 25^x$, дістаємо

$$\left(\frac{4}{25}\right)^x - 2 - \left(\frac{10}{25}\right)^x > 0, \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^2 - 2 - \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0.$$

Позначимо $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t, t > 0$ дістаємо $t^2 - t - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ t > 2 \end{array}\right. \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t > 2.$

Враховуючи заміну, отримаємо $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2$. Застосуємо основну логарифмічну тотожність:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2} \Leftrightarrow x > \log_{\frac{2}{5}} 2.$$

Відповідь: $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2\right)$.

5. Застосування властивостей монотонності функцій

Приклад 11. Розв'язати нерівність $3^x + 4^x < 25$.

Розв'язання. Функція $f(x) = 3^x + 4^x$ - монотонно зростаюча. Доведемо це за означенням. Для цього достатньо показати, що для $x_1 > x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.

Оскільки $y = 3^x$ та $y = 4^x$ - монотонно зростаючі функції, то $3^{x_1} > 3^{x_2}$ і $4^{x_1} > 4^{x_2}$, звідси $3^{x_1} + 4^{x_1} > 3^{x_2} + 4^{x_2}$, тобто $f(x_1) > f(x_2)$, що й треба було довести. Монотонна функція кожного свого значення досягає один раз, тому існує єдине значення *x*, при якому $f(x) = 25$. Підбираючи корені, знаходимо $x = 2$, тоді в силу зростання функції $3^x + 4^x < 25$, якщо $x < 2$.

Відповідь: $(-\infty; 2)$.

6. Степенево-показникові рівняння

Таку назву мають рівняння виду $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left(f(x)\right)^{g(x)}$, де $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ - деякі функції.

Для знаходження коренів рівняння даного виду розглядають кілька випадків.

1) $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ \varphi(x) = g(x). \end{cases}$

2) $f(x) = 1.$

Коренем степенево-показникового рівняння будуть ті корені останнього рівняння, при яких існують функції $\varphi(x)$ і $g(x)$.

3) $\begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) \neq -1, \\ \varphi(x) = g(x). \end{cases}$

Необхідно пам'ятати, що степінь з від'ємною основою існує лише для цілого показника.

4) $f(x) = -1.$

Якщо x_0 - корінь рівняння, то $\varphi(x_0)$ і $g(x_0)$ цілі числа, одночасно парні або непарні.

5) $f(x) = 0.$

У цьому випадку слід відібрати ті нулі функції $f(x)$, при яких $\varphi(x) > 0$ і $g(x) > 0$, адже нуль у від'ємному степені і нульовому не існує.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $\left(x-1\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(x-1\right)^{\frac{x+1}{2}}$.

Розв'язання.

1) $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1, \\ \sqrt{x-1} = \dfrac{x+1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x^2 - 2x + 5 = 0. \end{cases}$ Система не має розв'язку.

2) $x-1=1$, звідси $x = 2$.

$\sqrt{x-1}$ визначений при $x \geq 1$, а $\dfrac{x+1}{2}$ - при будь-якому x, тому $x = 2$ - корінь рівняння.

3) $x-1=0$, звідси $x=1$, перевіркою одержуємо 0^0 - не існує, отже, $x=1$ - не корінь степенево-показникового рівняння.

7. <u>Степенево-показникові нерівності</u>

Розв'язуючи нерівності виду

$$\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} > \left(f(x)\right)^{g(x)} \ \left(f(x)\right)^{\varphi(x)} < \left(f(x)\right)^{g(x)},$$

необхідно розглянути такі випадки:

1) $0 < f(x) < 1$, при цьому між показниками степенів $\varphi(x)$ і $g(x)$ змінюють знак нерівності на протилежний;
2) $f(x) > 1$, порівнюючи показники знак нерівності зберігається;
3) якщо $f(x) < 0$, то серед розв'язкув нерівності відбирають ті, при яких значення показників $\varphi(x)$ і $g(x)$ цілі числа;
4) якщо дана нерівність нестрога і виконується при $f(x)=0$ або $f(x)=1$ або $f(x)=-1$, то необхідно й ці випадки.

Приклад 13. Розв'язати нерівність $\left(x+4\right)^{8-7x} \le \left(x+4\right)^{1-9x}$.

Розв'язання. Так як двочлени $8-7x$ та $1-9x$ визначені при будь-якому дійсному значенні x, то якщо $x+4>0$ дана нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4>1, \\ 8-7x \le 1-9x; \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x+4<1, \\ 8-7x \ge 1-9x; \end{cases} \\ x+4=1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-3, \\ 2x+7 \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -4<x<-3, \\ 2x+7 \ge 0; \end{cases} \\ x=-3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-3, \\ x \le -3{,}5; \end{cases} \\ \begin{cases} -4<x<-3, \\ x \ge -3{,}5; \end{cases} \\ x=-3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3{,}5 \le x < -3 \\ x=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad -3{,}5 \le x \le -3$.

Якщо $x+4=0$, то $x=-4$. Виконаємо перевірку $8-7(-4)=36$, $1-9(-4)=37$, отже $x=-4$ - корінь нерівності.

Якщо $x+4=-1$, то $x=-5$. Перевірка: $\left(-1\right)^{43} < \left(-1\right)^{46}$, тому $x=-5$ - корінь.

Відповідь: $\left[-3,5;-3\right]\cup\left\{-5;-4\right\}$.

2.2. Основні методи розв’язання логарифмічних рівнянь та нерівностей

Розв’язуючи логарифмічні рівняння, необхідно чітко уявляти, які перетворення використовувати. Якщо перетворення може призвести до появи сторонніх коренів (такі перетворення називаються припустимими), то необхідно або проводити перевірку отриманих рішень, або стежити за зміною ОДЗ рівняння. Застосовувати перетворення, які можуть привести до втрати коренів рівняння не можна.

Під час розв’язування логарифмічних рівнянь використовують такі перетворення:

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ($x>0,\ y>0,\ a>0$);

2) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ($x>0,\ y>0,\ a>0,\ a\neq 1$);

3) заміну функції $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ на функцію $\log_a[f(x)g(x)]$;

4) заміну функції $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ на функцію $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Як відомо, ці перетворення, засновані на властивостях логарифмів і є допустимими, тобто можуть привести до появи сторонніх коренів. Зворотні заміни можуть призвести до втрати коренів вихідного рівняння через можливе звуження ОДЗ рівняння. Щоб уникнути втрати коренів, слід замінювати функції $\log_a[f(x)g(x)]$ і $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$ на функції $\log_a\left|f(x)\right| + \log_a\left|g(x)\right|$ і $\log_a\left|f(x)\right| - \log_a\left|g(x)\right|$ відповідно. Такі перетворення є допустимими.

Найпростішим логарифмічним рівнянням є рівняння виду $\log_a x = b$, $a>0,\ a\neq 1$

Розв'язування логарифмічного рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, засноване на тому, що таке рівняння рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$ при додаткових умовах $f(x) > 0, g(x) > 0.$

Перехід від рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ до рівняння може $f(x) = g(x)$ привести до появи сторонніх коренів. Сторонні корені можна визначити за допомогою підстановки в логарифмічне вихідне рівняння, або за допомогою знаходження області визначення.

1. Розв'язування рівнянь, використовуючи означення логарифма

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\log_{2+x}(2x^2 + 3x - 2) = 2$.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ

$$\begin{cases} 2 + x \neq 1, \\ 2 + x > 0, \\ 2x^2 + 3x - 2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ x > -2, \\ (x - 0,5)(x + 2) > 0; \end{cases} \Rightarrow x \in (0,5; \infty)$$

Використаємо означення логарифма:

$$(2 + x)^2 = 2x^2 + 3x - 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 = 3,$$

$x_2 = -2 \notin$ ОДЗ - сторонній корінь.

Відповідь: x = 3.

2. Застосування властивостей логарифмів

Приклад 15. $2\lg x(x-1) = \lg(x-1)^2 + 4$

Розв'язання. Знайдемо область визначення:

$$\begin{cases} x(x-1) > 0, \\ (x-1)^2 > 0; \end{cases} \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$$

Тоді на цій області визначення дане рівняння рівносильне рівнянню

$$2\left(\lg|x| + \lg|x-1|\right) = 2\lg|x-1| + 4,$$

яке, в свою чергу, рівносильне рівнянню $2\lg|x|=4$. Звідси $\lg|x|=2$. Тоді $|x|=10^2$, тобто $x=\pm100$. Числа ±100 входять до області визначення, а інших обмежень немає $x=\pm100$ - корені даного рівняння.

Відповідь: 100, -100.

3. Метод логарифмування

Приклад 16. Розв'язати рівняння $x^{\lg x-3}=0,01$.

Розв'язання. Очевидно, корені даного рівняння задовольняють умову $x>0$ і при значеннях x, які є коренями цього рівняння, обидві його частини набувають додатних значень. Тому дане рівняння еквівалентне рівнянню

$$\lg(x^{\lg x-3})=\lg 0,01,$$

яке, у свою чергу, еквівалентне рівнянню

$$(\lg x-3)\lg x=-2\text{, звідки }\lg^2 x-3\lg x+2=0.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $\lg x$, дістаємо: $\lg x=1$, $\lg x=2$, звідки знаходимо шукані корені даного рівняння $x_1=10$, $x_2=100$.

Відповідь: 10, 100.

4. Логарифмічні рівняння виду $\log_{g(x)} f(x)=\log_{g(x)}\varphi(x)$, де $g(x)>0, g(x)\neq1, f(x)$ і $\varphi(x)$ - елементарні функції і рівняння, які зводяться до цього виду.

Розв'язання рівнянь даного виду можна записати трьома способами:

1) Замінити дане рівняння еквівалентною змішаною системою нерівностей, з допомогою яких визначають область визначення рівняння та рівняння, яке є наслідком даного.

2) Розв'язати рівняння $f(x)=\varphi(x)$, яке є наслідком даного і виконати перевірку одержаних коренів шляхом їх підстановки у рівняння $\log_{g(x)} f(x)=\log_{g(x)}\varphi(x)$.

3) Знайти область визначення рівняння з умови:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$$

Розв'язати рівняння-наслідок і перевірити одержані корені підставляючи їх у дану систему.

Приклад 17. Розв'язати рівняння $\log_{x^2-1}(x^3+6) = \log_{x^2-1}(4x^2-x)$

Розв'язання.

$$\begin{cases} 4x^2 - x > 0, \\ x^2 - 1 > 0, \\ x^2 - 1 \neq 1, \\ x^3 + 6 = 4x^2 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4x-1) > 0, \\ (x-1)(x+1) > 0, \\ x^2 \neq 2, \\ x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 0; \\ x > \dfrac{1}{4}. \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < -1; \\ x > 1. \end{array}\right. \\ x \neq \pm\sqrt{2}; \\ (x+1)(x-2)(x-3) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1; \\ x > 1. \end{array}\right. \\ x \neq \pm\sqrt{2}; \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3. \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = -1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = 3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Відповідь: 2, 3.

5. <u>Методи заміни змінної</u>

Приклад 18. Розв'язати рівняння $2\log_9^2\left(x+5\right) - 3\log_9\left(x+5\right) + 1 = 0$

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ: $x > -5$.

Введемо заміну $\log_9(x+5)=t$ і отримаємо квадратне рівняння $2t^2-3t+1=0$ коренями якого є $t_1=1, t_2=\frac{1}{2}$. Повернемося до заміни та розв'яжемо отримані рівняння, використовуючи означення логарифма.

$$\log_9(x+5)=1 \Rightarrow x+5=9 \Rightarrow x=14 \text{ або } \log_9(x+5)=\frac{1}{2} \Rightarrow x+5=9^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+5=3 \Rightarrow x=8.$$

Відповідь: 8, 14.

6. Графічний метод

Приклад 19. Розв'язати графічно рівняння $\log_2 x=\sqrt{3-x}$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y=\log_2 x$ і $y=\sqrt{3-x}$ (рис. 2.2). Як бачимо, графіки цих функцій перетинаються в точці з абсцисою $x=2$. Щоб переконатися, що $x=2$ - корінь даного рівняння, зробимо перевірку: $\log_2 2=\sqrt{3-2}$, 1=1.

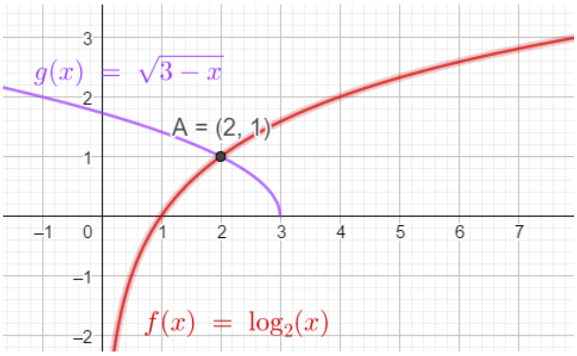


Рис. 2.2

Відповідь: 2.

7. Використання властивостей функції.

Приклад 20. Розв'язати рівняння $\log_3^2 x+(x-1)\log_3 x=12-3x$

Розв'язання. ОДЗ: $x>0$.

Введемо заміну $\log_3 x=t$, і одержимо квадратне рівняння $t^2+(x-1)t=12-3x$

Розв'яжемо його відносно t

$D=(x-1)^2+4(12-3x)=x^2-14x+49=(x-7)^2$, $D\geq 0$, отже рівняння має два корені $t_1=\frac{-x+1-x+7}{2}=4-x$ або $t_1=\frac{-x+1+x-7}{2}=-3.$

Повернемося до заміни: $\log_3 x = -3,$ звідси $x = \frac{1}{27},\ \frac{1}{27} \in$ ОДЗ або $\log_3 x = 4 - x$ шляхом підбору, легко бачити, що корінь даного рівняння $x = 3$. Доведемо, що він єдиний, для цього проаналізуємо функції $y = \log_3 x$ та $y = 4 - x$. Так як вони різномонотонні ($y = \log_3 x$ - зростає, $y = 4 - x$ - спадає), то їх графіки перетинаються не більше як у одній точці, абсциса якої $x = 3$.

Відповідь: $\frac{1}{27}$;3.

8. Використання формули переходу до нової основи та властивостей логарифмів.

Приклад 21. Розв'язати рівняння $\log_{1-x}(3-x) = \log_{3-x}(1-x)$.

Розв'язання. Визначимо ОДЗ:

$$\begin{cases} 3-x>0, \\ 1-x>0, \\ 1-x \neq 1, \\ 3-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2. \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty;0) \cup (0;1)$$

Використаємо наслідок $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ і отримаємо $\log_{1-x}(3-x) = \frac{1}{\log_{1-x}(3-x)}$, при чому $3-x \neq 1$, а отже $\log_{1-x}(3-x) \neq 0$. Тоді $\log^2{}_{1-x}(3-x) = 1$, дане рівняння рівносильно сукупності рівнянь $\log_{1-x}(3-x) = 1$ і $\log_{1-x}(3-x) = -1$. Перше з них немає коренів $3-x \neq 1-x$. Друге рівняння рівносильне рівнянню $1-x = \frac{1}{3-x}$,

$$\begin{cases} (1-x)(3-x)=1, \\ x \neq 3; \end{cases}, \text{ звідси } \begin{cases} x^2-4x+2=1, \\ x \neq 3; \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 2+\sqrt{2}, \notin \text{ОДЗ} \\ x_2 = 2-\sqrt{2}. \end{matrix}$$

Відповідь: $2-\sqrt{2}$.

Розв'язування **логарифмічних нерівностей** ґрунтується на властивості монотонності логарифмічної функції. Функція $y = \log_a x$ монотонно зростає, якщо зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$, при цьому враховується, що підлогарифмічний вираз може приймати тільки додатні значення значення. Таким чином, для нерівності виду:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

при потенціювання, для значень $a > 1$ знак нерівності зберігається; а для значень $0 < a < 1$, змінюється на протилежний.

У разі якщо змінна знаходиться і в основі логарифму, і в підлогарифмічному виразі, наприклад, $\log_{g(x)} f(x) > \log_{g(x)} \varphi(x)$ розв'язання розбивається на два випадки, коли $g(x) > 1$ і, коли $0 < g(x) < 1$, тобто

$$\log_{g(x)} f(x) > \log_{g(x)} \varphi(x) = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 1, \\ 0 < \varphi(x) < f(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ 0 < f(x) < \varphi(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Так само деякі логарифмічні нерівності можна розв'язати методом заміни змінної.

1. Нерівності, які розв'язуються з використанням означення логарифма

Приклад 22. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}} \left(x^2 - 5x + 7 \right) > 0$

Застосуємо означення логарифму та представимо 0 як $\log_{\frac{1}{3}} 1$, тоді

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(x^2 - 5x + 7 \right) > \log_{\frac{1}{3}} 1$$

Дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 7 < 1, \\ x^2 - 5x + 7 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0, \\ x^2 - 5x + 7 > 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну нерівність окремо

$$x^2 - 5x + 6 < 0;\ 2 < x < 3.$$

Друга нерівність системи правильна при будь-якому x, оскільки дискримінант тричлена x^2-5x+7 від'ємний, а коефіцієнт при x^2 додатній.
Відповідь: $(2;3)$.

2. Логарифмічні нерівності, які розв'язуються методом заміни змінної

Приклад 23. Розв'язати нерівність $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. Перейдемо від логарифма за основою 4 до логарифма за основою 2:

$\log_4 x=\dfrac{1}{2}\log_2 x$ і позначимо $\log_2 x=t$, одержимо

$$\frac{1-\frac{1}{2}t}{1+t}\le\frac{1}{2};\ \frac{1-2t}{2(1+t)}\le 0;\ \begin{cases}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)(t+1)\ge 0,\\ t\ne -1;\end{cases}\ \left[\begin{array}{l}t<-1,\\ t\ge\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.\ \text{Тоді}\ \left[\begin{array}{l}\log_2 x<-1,\\ \log_2 x\ge\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}0<x<\dfrac{1}{2},\\ x\ge\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[\sqrt{2};\infty\right)$.

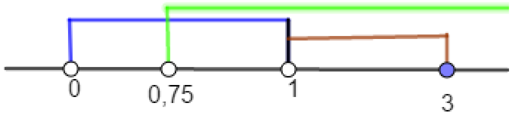
3. Нерівності, які розв'язуються з використанням властивостей логарифмічної функції.

Приклад 24. Розв'язати нерівність $\log_x\left(4x-3\right)\le 2$

Розглянемо два випадки:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ 4x-3>0\\ \log_x\left(4x-3\right)\le 2\log_x x\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1\\ 4x-3>0\\ \log_x\left(4x-3\right)\le 2\log_x x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ 4x-3>0\\ \left(4x-3\right)\le x^2\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1\\ 4x-3>0\\ \left(4x-3\right)\ge x^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ x>0,75\\ x^2-4x+3\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1\\ x>0,75\\ x^2-4x+3\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\x>0,75\\(x-1)(x-3)\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1\\x>0,75\\(x-1)(x-3)\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$



У першій системі нерівностей $x\in[3;+\infty)$, у другій - $x\in\varnothing$.

Відповідь: $x\in[3;+\infty)$

4. Використання властивості монотонності

Приклад 25. Розв'язати нерівність $\log_2(x+2)>1-x$

Розв'язання. Нехай $f(x)=\log_2(x+2)$, $g(x)=1-x$, $f(x)$ - зростаюча, а $g(x)$ - спадна. Так як функції різномонотонні, то їх графіки перетинаються в одній точці, абсциса якої належить області визначення нерівності, тобто $x\in(-2;\infty)$. Знайдемо корінь відповідного рівняння $\log_2(x+2)=1-x$, це легко зробити методом підстановки, так як корінь єдиний $x=0$. Розв'язати дану нерівність з геометричної точки зору, означає знайти ті значення *x*, при яких графік логарифмічної функції вище від прямої (рис. 2.3), отже $x>0$ - розв'язки нерівності.

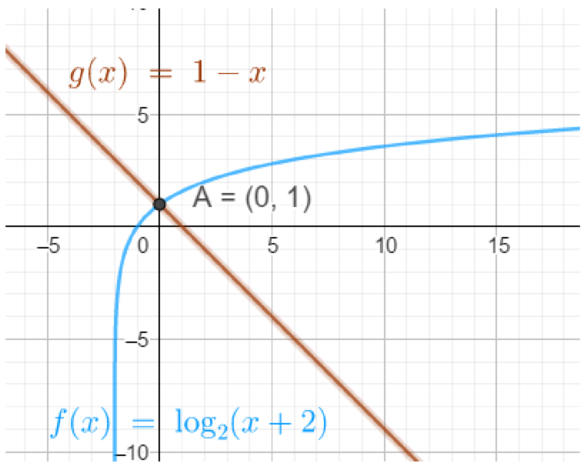


Рис. 2.3

Відповідь $x(0;\infty)$

5. Порівняння множини значень лівої і правої частини.

Приклад 26. Розв'язати нерівність $\log_2\left(6x-x^2-5\right)\geq x^2-6x+11$

Розв'язання. ОДЗ знайдемо з умови $6x-x^2-5>0$, звідси $x^2-6x+5<0$

$(x-1)(x-5)<0,\ 1<x<5$. Функція $\log_2 x$ - зростаюча, тому найбільшого свого значення функція набуває в точці x_0, що є вершиною параболи $y=-x^2+6x-5$. $x_0=3, y_0=4, \log_2 4=2$, тому $E\left(\log_2\left(6x-x^2-5\right)\right)\le 2$. Функція $y=x^2-6x+11$ набуває найменшого значення у вершині параболи $x_0=3, y_0=2$, тоді $E\left(\log_2\left(6x-x^2-5\right)\right)\ge 2$. Отже ліва частина нерівності не більша за праву, тобто $x=2$ - єдиний розв'язок.

Відповідь: 3.

2.3. Формування узагальнених прийомів розв'язання систем рівнянь і нерівностей з теми дослідження

Розв'язуючи завдання з математики, учень застосовує певні дії та операції, які приводять до отримання правильного розв'язку. Найбільш раціональна їх сукупність формує прийоми навчальної діяльності. Вони можуть бути представлені у вигляді правил, алгоритмів, аксіом. Класифікувати прийоми розумових дій можна на загальнонавчальному рівні (прийоми, які використовуються при вивченні всіх дисциплін), так і на рівні окремих розділів і тем шкільного курсу математики.

Виділимо систему загальних та спеціальних прийомів розумових дій, які формуються під час розв'язування показникових, логарифмічних рівнянь (нерівностей). До спеціальних прийомів відносяться, ті, що сформовані шляхом узагальнення методів розв'язання конкретних завдань в рамках однієї теми курсу алгебри та початків аналізу («Показникова і логарифмічна функції»). Загальними вважатимемо прийоми, які використовуються під час розв'язання систем будь-яких рівнянь та нерівностей.

Приклад 27. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 4^x+2^y=12, \\ \lg(3x-2y)=\lg(5+x-3y). \end{cases}$

Проаналізуємо її:

1) Система складається з показникового та логарифмічного рівняння. Маємо логарифмічного рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$,яке рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.
2) Перейшовши від логарифмічного до лінійного рівняння з двома змінними, зможемо застосувати метод підстановки, виразивши одну змінну через іншу.
3) При цьому, слід пам'ятати, що рівносильними рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ та $f(x) = g(x)$ будуть вважатися лише при додаткових умовах $f(x) > 0, g(x) > 0.$

Переходимо до етапу розв'язання:

$$\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ 3x - 2y = 5 + x - 3y \\ 3x - 2y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ y = 5 - 2x, \\ 3x - 2y > 0; \end{cases}$$

Використаємо метод підстановки:

$$\begin{cases} 4^x + 2^{5-2x} = 12, \\ y = 5 - 2x, \\ 3x - 2y > 0; \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння

$$4^x + \frac{2^5}{2^{2x}} = 12; \quad 4^x + \frac{32}{4^x} = 12; \quad \frac{4^{2x} + 32}{4^x} = 12; \quad 4^{2x} + 32 = 12 \cdot 4^x;$$

$$4^{2x} - 12 \cdot 4^x + 32 = 0$$

Використовуючи метод заміни змінних для розв'язання показникового рівняння, необхідно акцентувати увагу, що нова змінна повинна бути додатна. Це слідує із властивостей показникової функції.

Нехай $4^x = t,\ t > 0.$ Маємо $t^2 - 12t + 32 = 0;\ t_1 = 4, t_2 = 8.$

$$\left[\begin{array}{l} 4^x = 4, \\ 4^x = 8; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ 2^{2x} = 2^3; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ 2x = 3; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 1{,}5. \end{array}\right.$$

Знайдемо розв'язки системи

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y=3,\\ 3-6>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=1{,}5,\\ y=2,\\ 4{,}5-4>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Перша система сукупності розв'язків не має, бо її третя числова нерівність неправильна. Розв'язком другої системи є папа чисел (1,5;2)

Відповідь: (1,5;2).

Приклад 28. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}2^{x+1}-3^y=-1\\ 3^y-2^x=2\end{cases}$

Система складається із двох показникових рівнянь, кожен з яких має 2^x і 3^y. Застосовувати метод підстановки на даному етапі не зручно, так як важко виразити одну із змінних через іншу. Тому застосуємо <u>метод введення нової змінної</u>, тим самим спростимо систему.

Розв'язання.

$$\begin{cases}2^{x+1}-3^y=-1,\\ 3^y-2^x=2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\cdot 2^x-3^y=-1,\\ 3^y-2^x=2;\end{cases}$$

Нехай $2^x=u\ (u>0)$, а $3^y=v\ (v>0)$. Ввівши заміну, отримаємо спрощену систему та розв'яжемо її <u>методом додавання:</u>

$$\begin{cases}2u-v=-1,\\ v-u=2.\end{cases} \Rightarrow 2u-v+v-u=-1+2 \Rightarrow u=1$$

З другого рівняння знайдемо $v=2+u=3$.

Повертаємося до заміни, отримавши нову систему показникових рівнянь:

$$\begin{cases}2^x=1,\\ 3^y=3;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0,\\ y=1.\end{cases}$$

Відповідь: (0;1).

Приклад 29. Розв'язати нерівність $\begin{cases}2y=12-6x,\\ y-\log_2 x+1=0.\end{cases}$

Система складається з показникового та лінійного рівняння. Якщо виразити змінну y в обох рівнянь, можна застосувати <u>графічний метод</u>.

$$\begin{cases} 2y = 12 - 6x, \\ y - \log_2 x + 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 3x, \\ y = \log_2 x + 1; \end{cases}$$

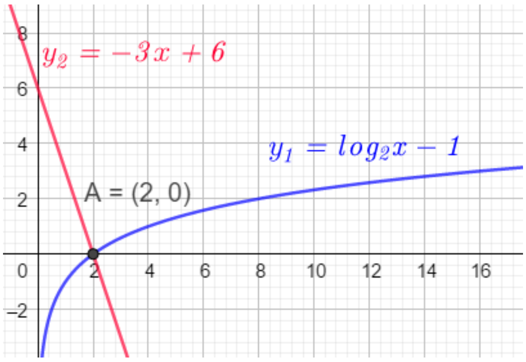


Рис. 2.4

Побудуємо графіки першого та другого рівняння (рис. 2.4) та знайдемо точку перетину:

Так як одна із функцій спадає, а інша – зростає, маємо один розв'язок системи A(2;0).

Відповідь: (2;0)

Приклад 30. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \log_5(x+2) \geq 0, \\ 9^{x+1} - 28 \cdot 3^x + 3 \geq 0. \end{cases}$

Проаналізуємо її:

1) система складається із ірраціонально-показникової та логарифмічної нерівностей;
2) друга нерівність легко розв'язується методом заміни змінної, а першу – за властивостями монотонності функції;
3) знайдемо перетин розв'язків відповідних нерівностей, що утворюють систему.

Розв'язувати систему почнемо із другої нерівності

Нехай $3^x = t$, тоді отримаємо квадратичну нерівність $9t^2 - 28t + 3 \geq 0$, яке має корені $t \leq \frac{1}{9}$ або $t \geq 3$. Повертаючись до заміни отримаємо

$3^x \leq \frac{1}{9}$ або $3^x \geq 3 \Rightarrow x \leq -2,\ x \geq 1$. Отже розв'язком другої нерівності є проміжок $(-\infty;-2] \cup [1;\infty)$.

Для знаходження розв'язку першої нерівності системи. розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{x+1}+\log_5(x+2)$, яка зростає на проміжку $\left[-1;\infty\right)$ як сума двох зростаючих функцій. Так як $f(-1)=0$, то $f(x)\geq 0$ для всіх значень $x\in\left[-1;\infty\right)$.

Знаходимо перетин розв'язків нерівностей $\left(-\infty;-2\right]\cup\left[1;\infty\right)$ та $x\in\left[-1;\infty\right)$. Отже загальним розв'язком являється множина $x\in\left[1;\infty\right)$.

Відповідь: $x\in\left[1;\infty\right)$.

Приклад 31. Розв'язати нерівність $\begin{cases} x^2+6^x+4\leq 44\cdot\log_5(x+3), \\ 4x+6^x\geq 44\cdot\log_5(x+3). \end{cases}$

Система складається із двох показниково-логарифмічних нерівностей. Звернемо увагу, що їх праві частини однакові, тому, помноживши одне із них на -1, застосуємо метод додавання.

Розв'язання.

$$\begin{cases} x^2+6^x+4\leq 44\cdot\log_5(x+3), \\ 4x+6^x\geq 44\cdot\log_5(x+3); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+6^x+4\leq 44\cdot\log_5(x+3), \\ -4x-6^x\leq -44\cdot\log_5(x+3); \end{cases}$$

Користуючись даним методом, необхідно зауважити, що ми позбуваємося логарифмічного виразу $\log_5(x+3)$, що може привести до появи сторонніх коренів. Тому необхідно врахувати властивості логарифмічної функції: $x+3>0\Rightarrow x>-3$.

Додаючи нерівності системи одного знаку, отримуємо нерівність $x^2-4x+4\leq 0.$ Звідси $\left(x-2\right)^2\leq 0\Leftrightarrow x=2.$ Виконаємо перевірку:

$$\begin{cases} 4+36+4\leq 44, \\ 8+36\geq 44. \end{cases}$$

Відповідь: 2.

Таким чином, розв'язування відповідних систем показникових і логарифмічних рівнянь (нерівностей) актуалізує методи розв'язання систем із одним та двома невідомими. При цьому враховуються властивості показникової та логарифмічної функцій. Під час роботи над системою, необхідно застосовувати логічні прийоми розумових дій, такі як аналіз, синтез та конкретизація. Це допоможе учню в подальшому не допускати помилок, розв’язуючи аналогічні завдання.

2.4. Параметричні рівняння, нерівності та особливості їх розв’язування

Задачі з параметром вважаються найскладнішими в шкільному курсі математики. Вміння їх розв’язувати демонструє гарні знання теоретичного матеріалу та вміння його застосовувати в нестандартних ситуаціях, що безумовно говорить про високий рівень математичної компетентності учня.

Слово «параметр» походить від грецького слова parametron, що означає «такий або той, що вимірює».

На допустиму систему параметрів при розв’язуванні різних задач накладаються певні вимоги. Наприклад, розв’язати рівняння (систему рівнянь) з параметрами означає для кожної допустимої системи параметрів знайти множину всіх її розв’язків.

В більшості випадків при дослідженні рівнянь розв’язуються такі питання:

1) Знайти значення параметрів, при яких рівняння (система) має розв’язок, при яких не має розв’язку.
2) Визначити кількість розв’язків в залежності від параметрів.
3) Знайти множину допустимих значень параметрів, при яких розв’язки задовольняють певні умови.

Аналогічні питання розглядаються при розв’язуванні нерівностей (систем нерівностей).

У процесі розв’язування показникових, логарифмічних рівнянь (нерівностей) із параметром, необхідно пам’ятати:

1) Розв’язок рівняння (нерівності) у багатьох випадках знаходиться традиційними методами. Отже, необхідно спочатку з’ясувати тип рівняння (нерівності) та метод його розв’язання.

2) Наявність параметра передбачає обов'язкове дослідження існування розв'язку залежно від значень параметрів.

3. Форма запису відповіді має спеціальний вигляд: значення невідомих вказуються для кожного допустимого значення параметра.

Основними методами розв'язання показникових та логарифмічних рівнянь (нерівностей) з параметрами є аналітичний та графічний. В аналітичному методі можна виокремити такі способи: введення нової змінної, зведення складніших показникових нерівностей до найпростіших, рівносильних перетворень та ін.

Графічні методи роблять розв'язання наочним і дозволяють в ряді випадків з більшою, в порівнянні з аналітичними методами, легкістю впорядкувати «правильні» шляхи. Часто це позбавляє від необхідності виконання певного обсягу обчислень при дослідженні, спрощує етап розв'язання. Виконувати побудови можна не лише в зошиті, а і за допомогою різноманітних комп'ютерних математичних пакетів. Так запропоновані нижче приклади, розв'язуються за допомогою додатку GeoGebra. Перевагами його застосування є простий інтерфейс, багатоплатформність, можливість використовувати повзунок для значень параметра (дає можливість динамічно продемонструвати як змінюється графіків при зміні заданого параметра).

Розглянемо на конкретних прикладах деякі типи задач з параметрами:

Приклад 32. При яких значеннях параметра a рівняння $36^x-(a-1)\cdot 6^x+a-2a^2=0$ має два дійсних розв'язки? Знайти ці розв'язки.

Розв'язання. Дане рівняння легко звести до квадратного, використовуючи метод введення нової змінної. Нехай $6^x=t$, $t>0$. Рівняння приймає вигляд:

$$t^2+(a-1)t+a-2a^2=0,$$

$$D=(3a-1)^2>0 \text{ при } a\neq\frac{1}{3};$$

$$t_1=a,\ t_2=1-2a.$$

Для того, щоб дане рівняння мало два розв'язки, необхідно, щоб корені рівняння були додатними:

$$\begin{cases} t_1 > 0, \\ t_2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 0, \\ 1 - 2a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 0, \\ a < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Враховуючи умову $a \neq \dfrac{1}{3}$, маємо: при $a \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\left[\begin{aligned} 6^x &= a, \\ 6^x &= 1 - 2a; \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} x &= \log_6 a, \\ x &= \log_6 (1 - 2a). \end{aligned}\right.$$

Відповідь: якщо $a \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$, то $x_1 = \log_6 a$, $x_2 = \log_6 (1 - 2a)$.

Приклад 33. Для всіх значень параметра *a* розв'язати рівняння $4^x - 4a \cdot 2^x + 2a + 2 = 0$.

Розв'язання. Нехай $2^x = t$, $t > 0$.

Рівняння приймає вигляд:

$t^2 - 4at + 2a + 2 = 0$.

$\dfrac{D}{4} = 4a^2 - 2a - 2$, $t_{1,2} = 2a \pm \sqrt{4a^2 - 2a - 2}$.

Використовуючи властивості функції $f(t) = t^2 - 4at + 2a + 2$, розглянемо можливі випадки в залежності від t:

1) показникове рівняння має два дійсних корені: $t_{1,2} = 2a \pm \sqrt{4a^2 - 2a - 2}$,

Зобразимо графік відповідної функції (рис. 2.5) згідно даної умови:

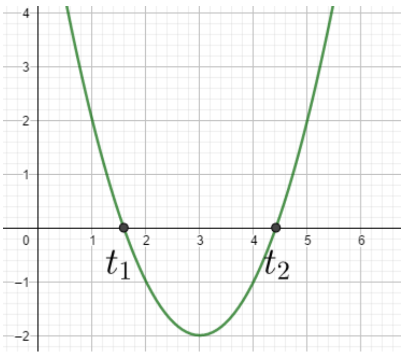


Рис. 2.5

Задача рівносильна системі:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(0) > 0, \\ x_в > 0; \end{cases} \begin{cases} 4a^2 - 2a - 2 > 0, \\ 2a + 2 > 0, \\ 2a > 0; \end{cases} \begin{cases} \left(a + \dfrac{1}{2}\right)(a - 1) > 0, \\ a > -1, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1;\infty), \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in (1;\infty)\ 2^x = 2a \pm \sqrt{4a^2 - 2a - 2}$$

$x = \log_2\left(2a \pm \sqrt{4a^2 - 2a - 2}\right).$

2) дане рівняння має один корінь, якщо:

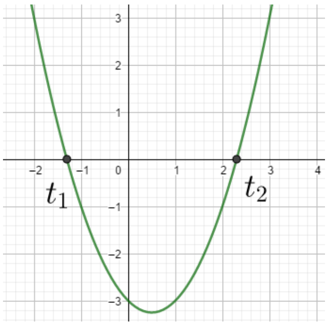


Рис. 2.6

а)

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(0) < 0; \end{cases} \begin{cases} 4a^2 - 2a - 2 > 0, \\ 2a + 2 < 0; \end{cases} \begin{cases} a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1;\infty), \\ a < -1. \end{cases}$$

Отже, якщо $a < -1$, то $t = 2a + \sqrt{4a^2 - 2a - 2}$, $2^x = 2a + \sqrt{4a^2 - 2a - 2}$, $x = \log_2\left(2a + \sqrt{4a^2 - 2a - 2}\right)$.

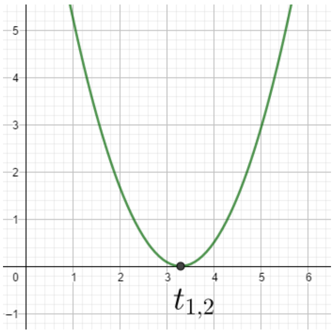


Рис. 2.7

б)

$$\begin{cases} D = 0, \\ x_в > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{2}, \\ a = 1, \end{array}\right. \\ 2a > 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a = 1, \\ 2^x = 2, x = 1. \end{array}$$

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -1)$, то $x = \log_2\left(2a + \sqrt{4a^2 - 2a - 2}\right)$;

якщо $a = 1$, то $x = 1$;

якщо $a \in (1;\infty)$, то $x = \log_2\left(2a \pm \sqrt{4a^2 - 2a - 2}\right)$;

якщо $a \in [-1;1)$, то розв'язків немає.

Приклад 34. При яких значеннях *a* рівняння $\log_2(4^x + a^3) + x = 0$ має два корені?

Розв'язання. Перенісши *x* у ліву частину рівняння та скориставшись означенням логарифму, отримали $4^x + a^3 = 2^{-x}$.

В лівій частині рівняння знаходиться функція, яка зростає при всіх дійсних значеннях x (від значення параметра a зростання функції не залежить), а функція, розташована в правій частині рівняння, при всіх x спадає. Отже рівняння не може мати більше одного кореня.

Відповідь: $a \in \varnothing$

Приклад 35. Знайти всі значення a, при яких рівняння

$\frac{1}{2}\log_3 4x^2 + \log_3(4-x) - \log_3 2^a = 0$ має один розв'язок

Розв'язання. В області допустимих значень, тобто при умовах

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 4 - x > 0. \end{cases}$$

Вихідне рівняння рівносильне наступному:

$$\log_3|2x| + \log_3(4-x) = \log_3 2^a \Rightarrow |2x|(4-x) = 2^a$$

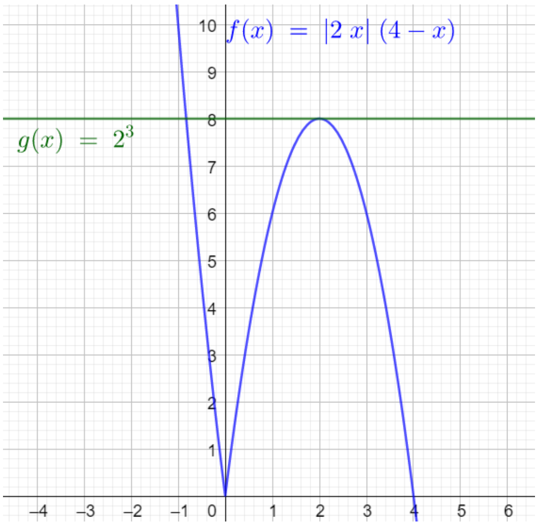


Рис. 2.8

Розв'яжемо отримане рівняння графічним методом. Побудуємо графіки функцій $y_1 = |2x|(4-x)$ і $y_2 = 2^a$ (рис. 2.8).

Функцію $y_1 = |2x|(4-x)$ можна записати у вигляді:

$$y_1(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x, & \text{якщо } x < 0, \\ -2x^2 + 8x, & \text{якщо } x \in (0;4). \end{cases}$$

Так як $2^a > 0$ для всіх $a \in R$, то графік функції $y_2(x) = 2^a$ являє собою пряму, паралельну Ox і розташовану вище неї.

Рівняння має єдиний розв'язок при тих значеннях параметра a, коли графіки функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ перетинаються тільки в одній точці. Очевидно, що ця умова має місце при $y_2(x) > 8$, тобто при $2^a > 8$. Звідси $a \in (3;\infty)$.

Відповідь: $a \in (3;\infty)$

Приклад 36. Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність $4^x - a\cdot 2^x - a + 3 \le 0$ має хоча б один корінь.

Розв'язання. Нехай $2^x = t,\ t > 0$, тоді $t^2 - at - a + 3 \le 0$. Звідси $a \ge \dfrac{t^2+3}{t+1}$.

Дослідимо функцію $a(t) = \dfrac{t^2+3}{t+1}$ і побудуємо її графік. $D(a)$: $(0;+\infty)$;

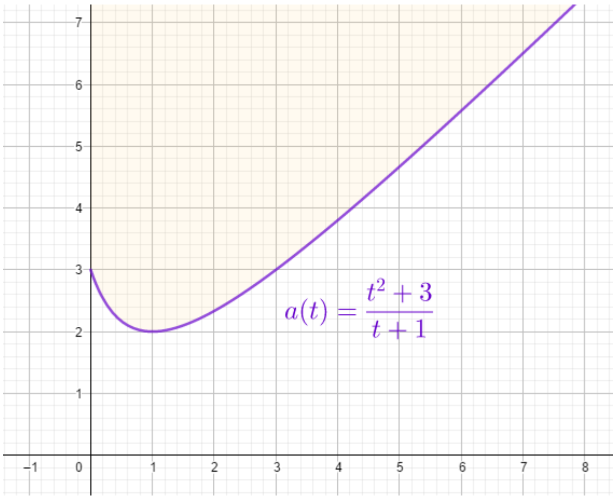


Рис. 2.9

Знайдемо екстремуми функції $a'(t) = \dfrac{t^2+2t-3}{t+1}$, $a'(t) = 0$ при $t = -3 < 0$ і $t = 1$. На проміжку від $(0;1]$ функція спадає, а на проміжку $[1;\infty)$ - зростає.

На малюнку заповнена кольором та область, де $a(t) \ge \dfrac{t^2+3}{t+1}$.

З графіку видно, що дана нерівність буде мати хоча б один корінь при $a \ge 2$.

Приклад 37. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x + a\right) > -3$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у вигляді $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x + a\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$. Отримуємо подвійну нерівність $0 < x^2 - 2x + a < 8$; виділимо повний квадрат $0 < (x-1)^2 + a - 1 < 8$; $1 - a < (x-1)^2 < 9 - a$. Зобразимо на координатній площині графіки функцій $y_1 = (x-1)^2$; $y_2 = 9 - a$; $y_3 = 1 - a$ (рис 2.10).

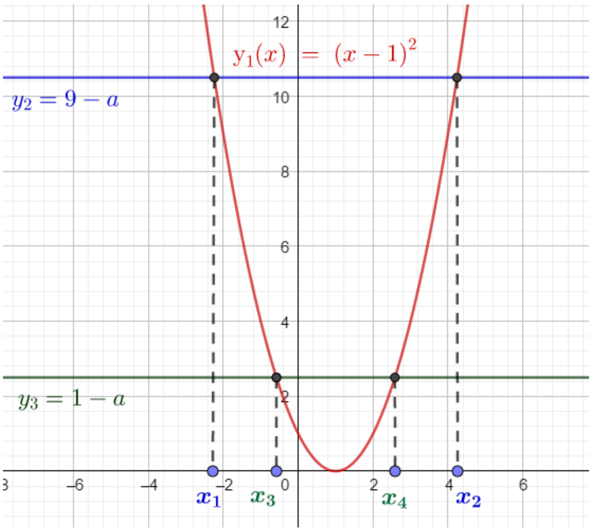


Рис. 2.10

З нерівності $1-a<(x-1)^2<9-a$ та малюнку слідує, що якщо $9-a\le 0$, тобто $a\ge 9$, то нерівність не має розв'язку. Якщо $1<a<9$, то нерівність матиме розв'язки і ними будуть усі такі x $x_1<x<x_2$, де x_1 і x_2 - абсциси точок перетину параболи $y_1=(x-1)^2$ з прямою $y_2=9-a$, які обчислюються за формулою $x_{1,2}=1\pm\sqrt{9-a}$.

Розглянемо випадок, коли $\begin{cases}9-a>0,\\1-a\ge 0;\end{cases}$ $a\le 1$, то розв'язками вихідної системи є всі такі x, що $x_1<x<x_3$, $x_4<x<x_2$, де x_3 і x_4 - абсциси точок перетину параболи $y_1=(x-1)^2$ з прямою $y_2=1-a$, які обчислюються за формулою $x_{3,4}=1\pm\sqrt{1-a}$

Відповідь: якщо $a\ge 9$, то $x\in\varnothing$;

якщо $a\le 1$, то $x\in(x_1;x_3)\cup(x_4;x_2)$;

якщо $1<a<9$, то $x\in(x_1;x_2)$, де $x_{1,2}=1\pm\sqrt{9-a}$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{1-a}$.

2.5. Прикладне застосування показникових та логарифмічних рівнянь, нерівностей

Одним із головних принципів навчання в сучасній школі є принцип зв'язку навчання з життям, з умінням використовувати набуті знання в практичній діяльності. Його ідея полягає в тому, що процес пізнання дійсності нерозривно пов'язаний з практикою.

Прикладна спрямованість шкільного курсу математики здійснюється з метою більш усвідомленого освоєння математичної теорії, що, в свою чергу, має підвищувати якість математичної освіти школярів.

Демонстрація прикладного застосування математики у різних сферах життя людини формує міжпредметну компетентність, що є однією з умов реалізації практичної спрямованості навчання. Інтеграція теоретичного апарату різних наук підводить учнів до розуміння цілісності освіти. Реалізація міжпредметних зв'язків підвищує науковість навчання та його доступність. Використання прикладних задачі в процесі навчання дають можливість систематизувати отримані теоретичні знання, практичні вміння, реалізувати цілі мотивації та підвищувати творчу активності учнів.

Розв'язання задач прикладного змісту ґрунтується та використанні математичного моделювання, яке дозволяє вивчати реальні процеси шляхом їх заміни зручнішою для дослідження системою (моделлю), що зберігає істотні риси оригіналу. Математична модель описує досліджуваний процес або явище, тобто задача формується на мові математики.

Процес математичного моделювання складається з трьох етапів:

1) формалізація (переклад запропонованого завдання на мову математичних термінів, тобто виконується побудова математичної моделі);

2) вивчення побудованої моделі (відбувається шляхом розв'язування звичайної математичної задачі);

3) інтерпретація отриманого розв'язку (переклад отриманого результату (математичного розв'язку) на мову, якою була сформульована задача).

Знайомити учнів з практичним застосуванням теоретичного матеріалу можна безпосередньо на уроках, або факультативних заняттях. При цьому, вчителю необхідно виконувати підбірку прикладних задач, виходячи із рівня володіння відповідним математичним апаратом. Деякі завдання потребують використання теоретичного матеріалу інших наук (формули, властивості явищ, протікання різноманітних процесів і т.д.), тому педагогу слід бути готовим до його пояснення, в разі виникнення питань.

Розглянемо прикладне застосування теоретичного матеріалу теми «Показникова та логарифмічна функції». Вивчаючи різноманітні природничі процеси, інколи, доводиться зустрічатися із залежностями між змінними величинами. Наприклад, показниковою функцією описується:

1) зростання різних видів мікроорганізмів і бактерій, дріжджів, ферментів всі ці процеси підпорядковуються одному закону: $N = N_0 e^{kt}$

2) процес зміни температури чайника при кипінні виражається формулою: $T = T_0 + (100 - T_0)e^{-kt}$;

3) приріст капіталу банку (формула складних відсотків $S = A\left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$)

4) Радіоактивний розпад $m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ і т. д.

За допомогою логарифмічної функції описуються залежність величини землетрусу R від його інтенсивності I ($R = \lg\frac{I}{I_0}$), інтенсивності звуку від сили звуку ($\beta = 10 \cdot \lg\frac{I}{I_0}$), рівняння логарифмічної спіралі, кількість одиниць вимірювання інформації ($y = \log_2 n + 1$) і т. д.

Інколи, в прикладних задачах роль математичної моделі виконують не функції, а рівняння і нерівності. В більшості випадків, метою їх застосування є не перевірка вмінь розв'язувати складні показникові та логарифмічні рівняння (нерівності), а інтерпретація даних на мову математики і навпаки.

Приклад 38. Є 6 г радіоактивної речовини, період піврозпаду якої становить 6 років і 8 г радіоактивної речовини з періодом піврозпаду 3 роки. Через скільки років маса першої речовини буде більша на 1 г від маси другої речовини?

Розв'язання. Для того, щоб відповісти на питання необхідно використати рівняння радіоактивного розпаду $m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^x$, де m - маса речовини, що залишилась внаслідок розпаду x періодів піврозпаду, $x_0 = \frac{t}{T}$ - відношення часу протікання реакції до періоду піврозпаду речовини, m_0 - початкова маса радіоактивної речовини.

Отже, через t маса першої і другої речовини буде $6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}$ і $8\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ відповідно. Для того, щоб дізнатися Через скільки років маса першої речовини буде більша на 1 г від маси другої речовини, необхідно розв'язати рівняння:

$$6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}-8\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}=1$$

Отримали показникове рівняння, яке легко звести до квадратного методом заміни змінної. Нехай $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{6}}=z$,тоді $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}=z^2$. Маємо рівняння $8z^2-6z+1=0$ коренями якого є $z_1=\frac{1}{2}$, $z_2=\frac{1}{4}$. Повертаємося до заміни $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{6}}=\frac{1}{2}$ або $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{6}}=\frac{1}{4}$, звідки $t_1=6,\ \ t_2=12$

Відповідь: маса першої речовини буде на 1 г більше маси другої після 6 і 12 років від початку розпаду.

Приклад 39. Рівняння процесу, в якому брав участь газ, записується у вигляді $pV^a=const$, де p (Па) – тиск в газі, V – об'єм газу в кубічних метрах, a – додатна константа. При якому найменшому значенні константи a зменшення вдвічі обсягу газу, який бере участь в цьому процесі, призводить до збільшення тиску не менше, ніж в 4 рази?

Розв'язання. Нехай початковий об'єм газу дорівнює V_1, початковий тиск в газі p_1. Із відношення $p_1V_1^a=const$ виразимо тиск $p_1=\frac{const}{V_1^a}$. Для нового газу визначимо об'єм V_2 і тиск p_2. З відношення $p_2V_2^a=const$ виразимо тиск $p_2=\frac{const}{V_2^a}$

Згідно умови тиск в газі збільшується не менше, ніж в 4 рази, тому виконується нерівність $\frac{p_2}{p_1} \geq 4$ або $\frac{const}{V_2^a} : \frac{const}{V_1^a} \geq 4 \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a \geq 4.$ Так як об'єм газу зменшиться вдвоє, отримаємо найпростішу показникову нерівність $2^a \geq 4$ або $a \geq 2$. Отже найменше значення константи $a = 2$.

Відповідь: 2.

Приклад 40. Вкладник поклав в банк 10000 гривень під ставку 12% річних. Через скільки років його вклад подвоїться?

Розв'язання. Використаємо формулу складних відсотків: $S = A\left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$, де A - початкова сума вкладу, P – відсоткова ставка (річна), n – термін зберігання вкладу. Згідно умови задачі гроші накопичуються за формулою $S = 10000\left(1 + \frac{12}{100}\right)^n$. Необхідно знайти значення n, при якому виконується рівність $20000 = 10000\left(1 + \frac{12}{100}\right)^n$, тобто потрібно розв'язати показникове рівняння $2 = \left(1 + \frac{12}{100}\right)^n$. Застосуємо означення логарифма:

$$n = \log_{\left(1+\frac{12}{100}\right)} 2 = \log_{1,12} 2.$$

Обчислимо отриманий логарифм, попередньо перейшовши до основи 10.

$$n = \log_{1,12} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}12} \approx \frac{0{,}3010}{0{,}0492} \approx 6{,}12.$$

Отже, вклад подвоїться приблизно через 6 років і півтора місяця.

Відповідь: приблизно через 6 років і півтора місяця.

Приклад 41. Водолазний дзвін, що знаходиться у воді містить $\nu = 2$ моля повітря, тиску $p_1 = 1{,}5$ атмосфери, повільно опускають на дно водойми. При цьому відбувається ізотермічний стиск повітря. Робота, що здійснюється водою при стисненні повітря, визначається виразом

$$A = \alpha\nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \text{ (Дж)},$$

Де $\alpha = 5{,}75, T = 300K$ - температура повітря, p_1 (атм) - початковий тиск, а p_2 (атм) - кінцевий тиск повітря в дзвоні. До якого найбільшого тиску p_2 можна стиснути повітря в дзвоні, якщо при стисненні повітря відбувається робота не більше ніж 6900 Дж? Відповідь записати в атмосферах.

Розв'язання. Згідно умови задачі при стисненні повітря відбувається робота не більше ніж 6900 Дж, тому виконується нерівність $A \le 6900$ або $\alpha\nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \le 6900$. Враховуючи, що $\nu = 2$ моля, $p_1 = 1{,}5$ атмосфери, $\alpha = 5{,}75$, $T = 300K$ нерівність має вигляд

$$5{,}75 \cdot 2 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{p_1} \le 6900$$

Розв'язуючи нерівність, отримаємо $\log_2 \frac{p_2}{p_1} \le 2;\ \frac{p_2}{1{,}5} \le 4;\ p_2 \le 6$.

Найбільший розв'язок даної нерівності $p_2 = 6$. Отже, повітря в дзвоні можна стиснути до найбільшого тиску $p_2 = 6$ атмосфер.

Відповідь: 6.

Висновок до розділу 2

Розглянуті методи розв'язання показникових, логарифмічних рівнянь (нерівностей) демонструють інтегративний підхід вивчення теми «Показникова і логарифмічна функції». До кожного із запропонованих способів представлені алгоритми їх розв'язування з наведеними прикладами . З метою закріплення теоретичного матеріалу запропоновані диференційовані системи завдань (ДОДАТОК А).

На прикладах розв'язування систем із теми дослідження, можемо помітити необхідність застосування таких прийомів розумових дій, як аналіз та синтез. Так, як показникові та логарифмічні рівняння (нерівності) можуть розв'язуватися різними методами, які ґрунтуються на властивостях відповідних функцій процес дослідження системи потребує детального аналізу її компонентів. Синтез характеризується об'єднанням результатів дослідження змістовної частини рівнянь або нерівності із способами розв'язання систем в єдине ціле.

Розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь (нерівностей) з параметрами потребує гнучкості мислення, логіки в міркуваннях, та довершеного володіння теоретичним матеріалом теми. Так як їх розв'язання, по суті, являє собою дослідження функцій, що входять в умову задачі, і подальше розв'язання рівнянь або нерівностей з числовими коефіцієнтами. Завдання такого типу формують в учнів вміння систематизувати, об'єднувати та застосовувати теорію різноманітних змістових ліній. В роботі наводяться приклади завдань з параметрами із детальним поясненням, які розв'язуються аналітичним та графічним методами. Особливу увагу приділеному другому способу, сформовано рекомендації до його застосування із використанням математичного додатку Geogebra.

Після демонстрації внутрішньопредметних зв'язків змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу теми «Показникова і логарифмічна функція», доречним є застосування вивченого матеріалу до задач прикладного змісту.

Частіше, в школах пропонують завдання, в яких математичною моделлю є самі функції. В роботі представлені задачі, які приводять до розв'язання показникового або логарифмічного рівняння (нерівності). Їх можна використовувати безпосередньо на уроках застосування знань, вмінь і навичок, узагальнення або на факультативних заняттях.

ВИСНОВКИ

У даній кваліфікаційній роботі розкрито поняття інтеграції, як об’єднання змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу, що є одним із методів формування математичної компетентності старшокласників на внутрішньопредметному рівні. Систематичність вивчення матеріалу продемонстровано на темі «Показникова і логарифмічна функції», виконано її логіко-дидактичний аналіз згідно діючої програми та сучасними шкільними підручниками.

Значна частина роботи присвячена практичному застосуванню теоретичного апарату з метою виявлення закономірностей інтеграції ліній рівнянь і нерівностей, функціональної, тотожних перетворень. Розроблено загальні методичні підходи вивчення методів розв’язання показникових та логарифмічних рівнянь, нерівностей і їх систем. Формування математичної компетентності продемонстровано на прикладах з параметрами та задачах прикладного змісту.

На основі отриманих результатів дослідження можна зробити наступні висновки:

1) формування математичної компетентності є одним із основних напрямків сучасної освіти, головною метою якої є прикладна спрямованість отриманих знань;
2) процес інтеграції складається із трьох послідовних рівнів, на кожному з яких процес об’єднання матеріалу будується в залежності від вибору структурних компонентів дисциплін;
3) внутрішньопредметна інтеграція змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу дозволяє продемонструвати цілісність теоретичного матеріалу та його закономірності, що, у свою чергу, є першим кроком до застосування знань для вирішення завдань практичного змісту.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ачкан В. В. Засоби реалізації компетентнісного підходу в математичній освіті старшокласників (на прикладі змістової лінії рівнянь та нерівностей) Вісник Черкаського університету. Серія: педагогічні науки. Черкаси, 2009. Випуск 143. С. 9-14.
2. Ачкан В. В. Набуття учнями математичних компетентностей при вивченні рівнянь та нерівностей у старшій школі. Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). № 2. Бердянськ : БДПУ, 2017. С. 46-52.
3. Ачкан В. В. Прикладні задачі як засіб формування математичних компетентностей учнів у процесі вивчення рівнянь і нерівностей в курсі алгебри та початків аналізу Математика в школі. 2009. № 1, 2. С. 31-34.
4. Бевз Г.П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра (алгебра і початки аналізу):підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень К.: Освіта, 2011. 400 с
5. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. К.: Вища школа, 2009. 367 с.
6. Гейдман Б. П. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства. Учебное пособие для учащихся ОЛ ВЗМТТТ при МГУ им. Ломоносова. М.: МЦНМО, 2003. 48 с.: ил.
7. Головань М. С. Математичні компетентності чи математична компетентність? *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-20012»*: матеріали міжнародної науково-методичної конференції (6-7 грудня 2012 р., м. Суми): У 3-х частинах. Частина 1 / упор. Чашечникова О. С. : Виробничо-видавниче підприємство «Мрія», 2012. С.36-38.
8. Горнштейн П. І., Полонський В. Б., Якір М. С. Задачі з параметрами. К. : РІА «Текст», 1992. 288с.

9. Зіненко І. М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології, 2009. № 2. с. 165-174
10. Каллаур Н.А. Методика использования технологии интегративного обучения при изучении математики в средней школе. Избранные вопросы современной науки. Монография. Часть XXII, научный ред. д.п.н., проф. С.П. Акутина. М.: Издательство "Перо", 2016. с. 35-72.
11. Каплан Я. Л. Рівняння. Навчальний посібник. К.: Радянська школа, 1968. 406 с.
12. Кедров Б.М. Предмет и взаимосвязь естественных наук. М., 1967. 302 с.
13. Кондаков Н. И. Логический словарь-справочник. М., 1975. 721 с.
14. Крамор В. С. Задачи с параметрами и методы их решения М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2007. 416 с.: ил. (Школьный курс математики).
15. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е. И. Лященко, и др.. М.: Просвещение, 1988. 223 с.: ил
16. Мерзляк А. Г., Номіровський, Д. А. Полонський В. Б. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти Х. : Гімназія, 2019. 352 с.: іл.
17. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень. URL:https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednyaosvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv. (дата звернення: 22.10.2020).
18. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL:https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednyaosvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv. (дата звернення: 22.10.2020)

19. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednyaosvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (дата звернення: 23.10.2020)
20. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. Серед. Освіти Харків: Видавництво «Ранок», 2019. 240 с.
21. Назаров В. Ю. Елементи історії математики. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів. Ніжин-НДПУ, 2002. 172 с.
22. Обруч А. І. Графічний метод розв'язування логарифмічних рівнянь з пераметром. *Міждисциплінарні наукові дослідження: особливості та тенденції Том 1*. матеріали міжнар. наук. конф., м. Чернігів, 2020
23. Основные результаты международного исследования образовательных достижений учащихся PISA – 2006 / [Баранова В. Ю., Ковалева Г.С., Кошеленко Н. Г., Красновский Э. А. и др.]. М.: Центр оценки качества образования ИСМО РАО, 2007. 99 с.
24. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія. Х. : Факт, 2005. 360 с.
25. Рисберг В. Г. Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем уравнений повышенного и высокого уровня сложности (часть і): Учебное пособие под общей ред. И. Ю. Черниковой. ФГБОУ ВПО ПНИПУ. Издательство «Пушка» Пермь: 2015. 56 с.
26. Севрюков П. Ф. Смоляков А. Н. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства. М. Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2008. 352 с.
27. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. К. : Зодіак-Еко, 2000. 608 с.

28. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. 128 с.
29. Федорец Г.Ф. Проблемы интеграции в теории и практике обучения (пути развития): Учебное пособие. Л., 1990. 82 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Система вправ

Показникові рівняння	
$5^{x-1}=125;$ $6^{3-x}=216;$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt[x]{\frac{4}{3}}=\frac{9}{16};$ $2^{3x-1}=(0,25)^{2-x};$ $7^{x+2}-7^{x+1}=6\cdot 2^{x+1};$ $3^{x}-3^{x-2}=8;$ $4^{x+1}=\frac{128}{x};$ $0,5^{x}=x+3;$	$8\cdot 2^{2x}-6\cdot 2^{2x}+1=0;$ $6^{4x}=5\cdot 6^{2x}+6;$ $2^{2x-3}-3\cdot 2^{x-2}=0;$ $3\cdot 3^{2x}-7\cdot 12^{x}+4\cdot 4^{2x}=0;$ $12\cdot 9^{2x}-35\cdot 6^{x}+18\cdot 4^{2x}=0;$ $\left(x+2\right)^{x^2+5x+6}=1;$ $\left(x-1\right)^{x}=\left(x-1\right)^{x^2-2x};$ $3^{x}+4^{x}=5^{x};$ $2^{x}+2^{x+2}+2^{x-3}=52;$ $3^{x+3}+5\cdot 3^{x-1}=86.$

Показникові нерівності	
$4\geq 16^{x+1};$ $\left(\sqrt{7}\right)^{x}<\frac{1}{49};$ $3^{x^2-x}\leq 9;$ $\left(0,25\right)^{4-x}\leq\frac{16}{2^{x+3}};$ $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2}\leq\left(\frac{7}{3}\right)^{4x-21};$ $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}\leq 315;$ $2^{x}+2^{1-x}\leq 3;$ $2^{4x+1}-9\cdot 4^{x}+4\leq 0;$	$7\cdot 4^{x}-4\cdot 14^{x}+2\cdot 49^{x}\geq 0;$ $12^{2x}-12^{x+2}\geq 0;$ $\left(3-x\right)^{\frac{3x-5}{3-x}}<1;$ $0,1^{3x}<0,1^{2x-3};$ $\pi^{x}<\pi^{2+3x};$ $3^{x}+4^{x}>5^{x};$ $3^{x}+x>4;$ $2^{x}\leq\frac{2}{x}.$

Логарифмічні рівняння	
$\log_3 x=-2;$ $\log_3\left(x^2-5x+7\right)=1;$ $\log_5\left(3x-4\right)=\log_5\left(12-5x\right);$ $\log_7\log_3\log_2 x=0;$ $2\log_x 27-3\log_{27}x=1;$ $\log_3\left(25^x-2\cdot 5^x\right)=2\log_9 15;$ $\lg\left(x-1\right)+\lg\left(x+1\right)=\lg\left(9x-9\right);$ $\log_4^2 x-3\log_4 x+2=0;$	$\log_3^2 x+2\log_3\sqrt{x}=2;$ $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16}x=7;$ $x-1=3\log_4 x;$ $\log_2 x+\log_x 2=\dfrac{10}{3};$ $0{,}1x^{\lg x-2}=100;$ $x^{\log_5 x}=5;$ $\lg(x^2+75)=2+\lg(x-4).$

Логарифмічні нерівності	
$\log_2\left(x^2-13x+30\right)>3;$ $\log^2{}_{0,5}x+\log_{0,5}x-2\le 0;$ $\log_{2x+3}x^2<1;$ $\log_{\frac{1}{4}}\left(2x-1\right)>\log_{\frac{1}{4}}\left(x+1\right);$ $\log_7\left(2x-1\right)<2;$ $\log_3\dfrac{1+2x}{x+1}\ge 1;$ $\log_{\frac{1}{3}}\log_4\left(x^2-5\right)>0;$	$\log_3\left(2x+3\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x-1\right)\ge 0;$ $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_x 3-\dfrac{5}{2};$ $\log_{\cos\frac{\pi}{3}}\left(x^2-3x+1{,}5\right)\le 2\ ;$ $\log_{0,1}x>-1;$ $\log_{x^2-1}(3x-1)<\log_{x^2-1}x^2.$

ДОДАТОК Б

План-конспект інтегрованого уроку

Тема: «Застосування властивостей показникової функції до розв'язування рівнянь»

Мета: сформувати вміння розв'язувати показникові рівняння, застосовуючи властивості даних функцій; розвивати вміння виконувати завдання на основі отриманих знань; виховувати наполегливість; вміння робити правильні висновки та бачити кінцеву мету;

Тип уроку: інтегрований

Обладнання: опорний конспект, презентація.

План уроку

1. **Організаційний етап**

Вітання з класом, перевірка відсутніх.

2. **Мотивація навчальної діяльності**

На минулих уроках ми вивчили з вами показникову функції, рівняння та нерівності і познайомилися з деякими методами їх розв'язання. Сьогодні на уроці нам слід вияснити, без якого компоненту неможливо розв'язати показникові рівняння. Що лежить в основі всіх методів їх розв'язання?

Оголошується тема заняття

3. **Актуалізація опорних знань учнів.**

Для того, щоб приблизитися до відповіді розглянемо приклад розв'язання одного показникового рівняння, в якому неуважний учень допустив серйозну помилку. Давайте разом її знайдемо.

Приклад:

$$2^{2x} - 6 \cdot 2^x - 16 = 0$$

Нехай $2^x = t$, тоді маємо $t^2 - 6t - 16 = 0$.

За теоремою Вієта $t_1 = 8,\ \ t_2 = -2$.

Повертаємось до заміни: $\left[\begin{array}{l} 2^x = 8, \\ 2^x = -2; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Відповідь: -1; 3.

Якщо учні відразу не знайшли помилки, можна провести евристичну бесіду:

Дії вчителя	Дії учнів
Яким методом учень розв'язував показникове рівняння?	Методом заміни змінної.
Чи правильно учень знайшов корені квадратного рівняння?	Виконують перевірку коренів або знаходять їх за допомогою дискримінанту. Так правильно.
Перевіримо отриману сукупність, якщо корені знайдено вірно, то підставляючи їх у дане рівняння ми повинні отримати тотожність $0=0$.	Коренем рівняння є лише $x=3$.
Чи є $x=-1$ коренем рівняння $2^x=-2$? Яке число задовольнятиме це рівняння	$x=-1$ не є коренем рівняння, адже $2^x=-2$ не має розв'язку

Правильно рівняння $2^x=-2$ розв'язку немає, та з чого це слідує?

Згадаємо властивості показникової функції:

<table>
<tr><td rowspan="2">№ п\п</td><td colspan="3">$y=a^x$</td></tr>
<tr><td>$0<a<1$</td><td colspan="2">$a>1$</td></tr>
<tr><td>1.
2.
3.
4.</td><td>$D(y)=R$
$E(y)=R_+$, тобто $a^x>0$
Якщо <i>x=0</i>, то $a^x=1$
Функція <u>спадає:</u>
якщо <i>x<0</i>, набуває значень, <u>більших</u> за 1.
якщо <i>x>0</i>, набуває значень, <u>менших</u> за 1.</td><td>1.
2.
3.
4.</td><td>$D(y)=R$
$E(y)=R_+$, тобто $a^x>0$
Якщо <i>x=0</i>, то $a^x=1$
Функція монотонно <u>зростає</u>
якщо <i>x<0</i>, набуває значень, за <u>менших</u> 1.
якщо <i>x>0</i>, набуває значень, <u>більших</u> за 1.</td></tr>
</table>

Як бачимо область значень може бути лише додатною, отже при введені заміни $2^x=t$, на нову змінну накладаємо умову $t>0$, тому $t_2=-2$ - сторонній корінь.

4. Розв'язування вправ.

Колективне розв'язування завдань.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

$5^x + 12^x = 13^x.$

Розв'язання.

1. Підбором знаходимо, що $x = 2$ - корінь даного рівняння, бо $5^2 + 12^2 = 13^2$.

2. Доведемо, що інших коренів рівняння не має.

Поділивши обидві частини рівняння на 13^x, одержимо рівносильне рівняння $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$. Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$. Ця функція спадна, як сума двох спадних функцій. Отже, рівняння має не більше, ніж один корінь.

Відповідь: 2.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

$9^x - (14 - x) \cdot 3^x + 33 - 3x = 0.$

Розв'язання.

$9^x - (14 - x) \cdot 3^x + 33 - 3x = 0;$

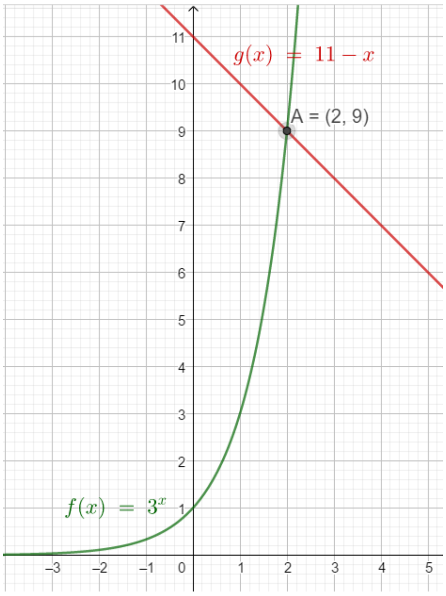
$3^{2x} - (14 - x) \cdot 3^x + 33 - 3x = 0.$

Нехай $3^x = y,\ y > 0$, тоді $3^{2x} = y^2$. Маємо рівняння: $y^2 - (14 - x) \cdot y + 33 - 3x = 0.$

Розв'яжемо його як квадратне відносно змінної y.

$D = \sqrt{x^2 - 16x + 64} = |x - 8|.$

$\left[\begin{array}{l} y_1 = 3, \\ y_2 = 11 - x; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 3^x = 3, \\ 3^x = 11 - x; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2. \end{array}\right.$



Перше рівняння сукупності ми розв'язуємо без проблем. Рівняння $3^x = 11 - x$ розв'яжемо функціонально-графічним методом.

Побудуємо дві функції $f(x) = 3^x$ і $g(x) = 11 - x$ та знайдемо їх точку перетину А(2; 9).

За властивостями показникової функції, якщо $a > 1$ - функція зростає; лінійна функція – спадає. Отже існує не більше одного розв'язку $x = 2$.

Тому $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2. \end{array}\right.$

Відповідь; 1, 2.

Наступні завдання 3 учні виконують на дошці, інші самостійно в зошитах.

1) $16^x - 4^x - 2 = 0$
2) $4^x + 7^x = 11^x$

5. Домашнє завдання.

1) $6^{2x} - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$,
2) $64^x - 8^x - 12 = 0$
3) $7^x = 10 - 3x$.

6. Підведення підсумків.

Чи можемо ми тепер дати відповідь на питання: «Що лежить в основі всіх методів їх розв'язання показникових рівнянь?» (властивості показникової функції).

Рефлексія

Продовжіть речення:

1) Мені вдалося…
2) Я дізналася (дізнався)….
3) Найважчим було….
4) Найлегшим було….

ДОДАТОК В

План-конспект інтегрованого уроку

Тема: Методи розв’язання логарифмічних рівнянь і нерівностей

Мета: формування знань про різні способи розв’язування логарифмічних рівнянь та нерівностей, умінь застосовувати їх до конкретних прикладів; розвиток умінь спостерігати, порівнювати, застосовувати знання в новій ситуації, виявляти закономірності, узагальнювати; формування навичок взаємоконтролю і самоконтролю; виховання відповідального ставлення до навчальної праці, уважного сприйняття матеріалу на уроці, акуратності ведення записів.

Тип уроку: інтегрований

Обладнання: конспект, додаток LearningApps.

Хід уроку

1. Організаційний етап

Перевірка відсутніх в класі

2. Актуалізація знань.

Фронтальне опитування

«Мозковий штурм»

1. Що таке логарифм числа?
2. Яких значень набуває підлогарифмічний вираз?
3. Яка функція називається логарифмічною?
4. Як називається графік логарифмічної функції?

Повторення властивостей логарифму за допомогою вправи на LearningApps

3. Введення нового матеріалу

Означення. Рівняння називається логарифмічним, якщо його змінні входять лише під знаки логарифмів.

Для розв'язання логарифмічних рівнянь вводиться теорема та наслідок:

Теорема 1. Нехай $a>0,\ a\neq 1$. Якщо $\log_a x_1=\log_a x_2$, то $x_1=x_2$, і навпаки, якщо $x_1>0,\ x_2>0$ і $x_1=x_2$, то $\log_a x_1=\log_a x_2$.

Наслідок. Нехай $a>0,\ a\neq 1$. Рівняння виду $\log_a f\left(x\right)=\log_a g\left(x\right)$ рівносильне будь-якій із систем

$$\begin{cases} f\left(x\right)=g\left(x\right), \\ f\left(x\right)>0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f\left(x\right)=g\left(x\right), \\ g\left(x\right)>0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f\left(x\right)>0$ чи $g\left(x\right)>0$, розв'язати легше.

Нерівність називається логарифмічною, якщо змінні входять лише під знаки логарифмів.

При розв'язуванні багатьох логарифмічних нерівностей застосовується така теорема.

Теорема 2. При $a>1$ нерівність $\log_a x_1>\log_a x_2$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1>x_2>0$; при $0<a<1$ нерівність $\log_a x_1>\log_a x_2$ виконується тоді й тільки тоді, коли $0<x_1<x_2$.

Наслідок. Якщо $a>1$, то нерівність $\log_a f\left(x\right)>\log_a g\left(x\right)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f\left(x\right)>g\left(x\right), \\ g\left(x\right)>0. \end{cases}$$

Якщо $0<a<1$, то нерівність $\log_a f\left(x\right)>\log_a g\left(x\right)$ рівносильна системі

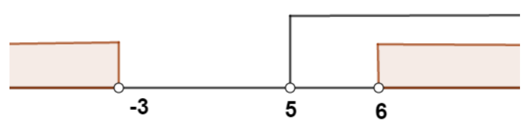
$$\begin{cases} f\left(x\right)<\ g\left(x\right), \\ f\left(x\right)>0. \end{cases}$$

Логарифмічні рівняння і нерівності розв'язуються однаковими методами, тому розглянемо декілька з них.

1) За означенням логарифму

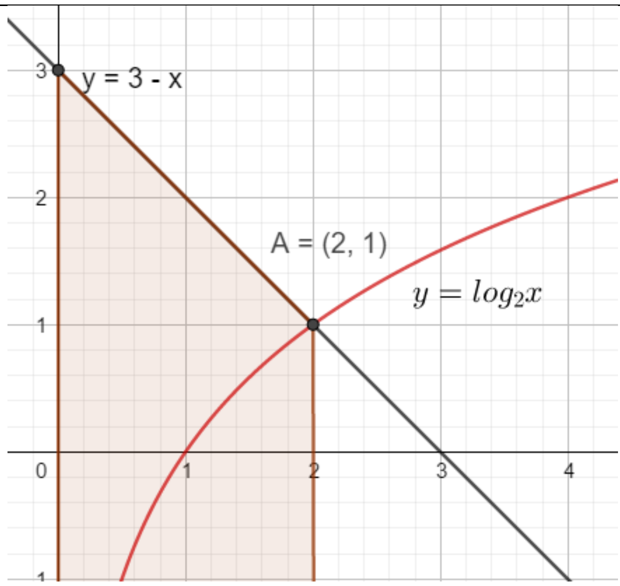
<table>
<tr><td>$\log_3(x-7)=3$</td><td>$\log_3(x-7)<3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Знаходимо ОДЗ:
$x-7>0 \Rightarrow x>7$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Застосуємо означення логарифму та розв’яжемо лінійне рівняння та нерівність</td></tr>
<tr><td>$x-7=27,$
$x=32.$
Знайдене значення задовольняє ОДЗ рівняння, отже $x=32$ - корінь рівняння.</td><td>$x-7<27,$
$x<32.$
Отримавши інтервал розв’язку даної нерівності, враховуємо ОДЗ вихідної нерівності: $x\in(7;32)$</td></tr>
</table>

2) За властивостями логарифмів та логарифмічної функції

<table>
<tr><td>$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$</td><td>$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)>3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Знаходимо ОДЗ: $\begin{cases} x-5>0, \\ x+2>0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5, \\ x>-2. \end{cases} \Rightarrow x>5$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Скористаємося властивістю логарифмів та запишемо рівняння (нерівність) у вигляді</td></tr>
<tr><td>$\log_2\left((x-5)(x+2)\right)=\log_2 8$</td><td>$\log_2\left((x-5)(x+2)\right)>\log_2 8$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Застосуємо теорему 1 (теорему 2)</td></tr>
<tr><td>$(x-5)(x+2)=8;$
$x^2-3x-18=0$
Використаємо теорему Вієта:
$\left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-3 \notin \text{ОДЗ} \end{array}\right.$
Відповідь: $x=6$.</td><td>Основа логарифмів більша за 1, отже знак не змінюється.
$(x-5)(x+2)>8;$
$x^2-3x-18>0$
$\left[\begin{array}{l} x>6, \\ x<-3 \end{array}\right.$


Врахуємо ОДЗ $x=(6;\infty)$</td></tr>
</table>

3) Графічний метод

<table>
<tr><td>$\log_2 x = 3 - x$</td><td>$\log_2 x < 3 - x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Побудуємо графіки функцій $y = \log_2 x$ і $y = 3 - x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Як бачимо, графіки цих функцій перетинаються в точці з абсцисою $x = 2$. Щоб переконатися, що $x = 2$ - корінь даного рівняння, зробимо перевірку $\log_2 2 = 3 - 2,\ 1=1.$
Відповідь: 2</td><td>Для того, щоб знайти розв'язок нерівності за допомогою графіків, необхідно знайти інтервал, в якому логарифмічна функція буде меншою за лінійну. Логарифмічна функція знаходиться нижче лінійної на проміжку $x \in (0;2)$.
Відповідь: $(0;2)$</td></tr>
</table>

4. Підведення підсумків

Сьогодні ми розглянули деякі методи розв'язання логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Який із методів був найлегшим для вас? Який викликав труднощі?

Що спільного при розв'язуванні логарифмічних рівнянь і нерівностей?