

НІЖИНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ МИКОЛИ ГОГОЛЯ

# Фізико-математичні записки

Збірник наукових праць

Ніжин – 2012

Збірник друкується за рішенням Вченої ради  
Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя  
Протокол №3 від 25.10.12 р.

***Редакційна колегія:***

канд. фіз.-мат. н. Ковальчук Ю. О. (відп. ред. і відп. секретар),  
докт. техн. н. Казачков І.В., докт. фіз.-мат. н. Мельничук О. В.,  
докт. фіз.-мат. н. Зінченко Н.М., канд. пед. н. Опанасенко В.Г.

***Рецензенти:***

докт. фіз.-мат. н., професор ***Авраменко О.В.***,  
докт. пед. н., професор, член-кореспондент АПН України ***Бурда М.І.***

*До збірника включені наукові статті викладачів, наукових співробітників та аспірантів кафедр вищої математики, прикладної математики, інформатики та освітніх вимірювань, фізики Ніжинського державного університету ім. Миколи Гоголя з актуальних питань вищої та прикладної математики, фізики, інформатики, освітніх вимірювань, методики викладання дисциплін фізико-математичного циклу, загальних проблем педагогіки.*

*Для фахівців у галузі математики, фізики, інформатики, освітніх вимірювань, педагогіки вищої та середньої школи.*



# Математика

УДК 517.926(07)

## ПРО ПОБУДОВУ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

М. Б. Віра, О. А. Шапка

Розглянемо крайову задачу

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = (A_0(t) + \varepsilon A_1(t))x, \quad (1)$$

$$Mx(0; \varepsilon) + Nx(T; \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (2)$$

де  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$  - малий дійсний параметр,  $t \in [0; T]$ ,  $A_0(t)$ ,  $A_1(t)$ ,  $M$ ,  $N$  - квадратні матриці  $n$ -го порядку,  $d(\varepsilon)$  -  $n$ -вимірний вектор,  $x(t; \varepsilon)$  - шуканий  $n$ -вимірний вектор.

Нехай виконуються такі умови:

1° коефіцієнти матриць  $A_0(t)$  і  $A_1(t)$  - нескінченно диференційовані на відрізку  $[0; T]$ ;

2° характеристична матриця  $A_0(t) - \lambda E$  зберігає на цьому відрізку сталу кронекерову структуру;

3° матриця  $A_0(t)$  має  $n$  простих різних власних значень  $\lambda_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;

4°  $Re \lambda_i(t) < 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;

5°  $\det M \neq 0$ ;

6° вектор  $d(\varepsilon)$  допускає асимптотичне розвинення при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$d(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k.$$

Згідно з теорією Шнезінгера-Біркгофа-Тамаркіна [1] однорідна система (1) у випадку простих коренів відповідного характеристичного рівняння  $\det(A_0(t) - \lambda E) = 0$  має фундаментальну систему розв'язків вигляду:

$$x_i(t; \varepsilon) = u_i(t; \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t (\lambda_i(t) + \lambda_i(t; \varepsilon)) dt\right), i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

де  $n$ -вимірний вектор  $u_i(t; \varepsilon)$  і скалярна функція  $\lambda_i(t; \varepsilon)$  зображуються у вигляді формальних розвинень за степенями малого параметра  $\varepsilon$ :

$$u_i(t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(i)}(t); \lambda_i(t; \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Покажемо, що коефіцієнти розвинень (4) ( $u_k^{(i)}(t)$ ,  $\lambda_k^{(i)}(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ) можна визначити так, щоб вектори (3) формально задовольняли систему (1). Підставивши (3) та розвинення (4) у (1) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$ , дістанемо

$$(A_0(t) - \lambda_i(t)E) u_0^{(i)}(t) = 0, \quad (5)$$

$$(A_0(t) - \lambda_i(t)E) u_k^{(i)}(t) = b_k^{(i)}(t), \quad (6)$$

де

$$b_k^{(i)}(t) = \lambda_k^{(i)}(t) \varphi_i(t) + g_k^{(i)}(t),$$

$$g_k^{(i)}(t) = u_k^{(i)'}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j^{(i)}(t) u_{k-j} - A_1 u_{k-1}(t).$$

Із рівняння (5) дістанемо

$$u_0^{(i)}(t) = \varphi_i(t), i = \overline{1, n},$$

де  $\varphi_i(t), i = \overline{1, n}$  - власні вектори матриці  $A_0(t)$ .

Рівняння (6) розв'язне тоді, коли виконується умова

$$(b_k^{(i)}(t), \psi_i(t)) = 0, i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

де  $\psi_i(t), i = \overline{1, n}$  - це базисні вектори нуль-просторів матриць  $(A_0(t) - \lambda_i(t)E)^*$ , які визначені так, що виконуються умови

$$(\varphi_i, \psi_j) = \delta_{i,j}, \quad (8)$$

де

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j; \\ 1, & \text{якщо } i = j. \end{cases}$$

Тоді, враховуючи (2), із умови розв'язності (7) дістанемо формули для визначення скалярів  $\lambda_k^{(i)}(t), i = \overline{1, n}$ :

$$\lambda_k^{(i)}(t) = - (g_k^{(i)}(t), \psi_i(t)), k \geq 1, \quad (9)$$

а вектори  $u_k^{(i)}$  визначимо із рівняння (6):

$$u_k^{(i)}(t) = H_i(t) \cdot b_k^{(i)}(t), \quad (10)$$

де  $H_i(t)$  - напівообернена матриця до матриці  $A_0(t) - \lambda_i(t)E$ .

Отже, загальний розв'язок однорідної системи (1) є лінійною комбінацією  $n$  лінійно незалежних розв'язків вигляду (3). Тому формальний розв'язок крайової задачі (1), (2) будемо у вигляді:

$$x(t; \varepsilon) = \sum_{i=1}^n u_i(t, \varepsilon) c_i(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau\right), \quad (11)$$

де  $c_i(\varepsilon)$  - скалярні множники, що зображаються розвиненнями:

$$c_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k c_k^{(i)}, i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

коефіцієнти яких  $c_k^{(i)}$  визначимо із крайової умови (2). Для цього підставимо вираз (11) у (2). Дістанемо:

$$M \sum_{i=1}^n u_i(0, \varepsilon) c_i(\varepsilon) + N \sum_{i=1}^n u_i(T, \varepsilon) c_i(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^T \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau\right) = d(\varepsilon).$$

Згідно з припущенням 4°, доданки, що містять експоненти є експоненціально малими. Знехтувавши ними, перейдемо до розгляду рівняння:

$$M \sum_{i=1}^n u_i(0, \varepsilon) c_i(\varepsilon) = d(\varepsilon).$$

Враховуючи розвинення для вектора  $d(\varepsilon)$  та (4), (12), одержимо:

$$M \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(0) c_{k-j}^{(i)} = d_k. \quad (13)$$

Ввівши позначення,

$$\begin{aligned} c_k &= \text{col} \left( c_k^{(1)}, c_k^{(2)}, \dots, c_k^{(n)} \right), \\ U_0(t) &= [\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)], \\ U_k(t) &= [H_1(t)b_k^{(1)}(t), \dots, H_n(t)b_k^{(n)}(t)], \end{aligned}$$

рівняння (13) запишемо у вигляді:

$$MU_0(0)c_k + M \sum_{i=1}^k U_i(0)c_{k-i} = d_k. \quad (14)$$

Беручи до уваги умову 5°, а також, той факт, що матриця  $u_0(t)$  є неособливою за побудо-вою (складається із  $n$  власних векторів матриці  $A_0(t)$ ), із (14) дістанемо:

$$\begin{aligned} c_0 &= U_0^{-1}(0)M^{-1}d_0, \\ c_k &= U_0^{-1}(0)M^{-1} \left( d_k - M \sum_{i=1}^k U_i(0)c_{k-i} \right). \end{aligned}$$

Визначення скалярів  $c_k^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$  завершує побудову формального розв'язку крайової задачі (1), (2).

Неважко показати [2], що вираз (11), побудований у такий спосіб, є асимптотичним зображенням точного розв'язку крайової задачі (1), (2).

Оцінивши різницю між точним розв'язком крайової задачі  $x(t; \varepsilon)$  і вектором  $m$ -наближення  $x_m(t; \varepsilon)$ , утвореного шляхом обривання відповідних формальних рядів вектора  $x(t; \varepsilon)$ , дістанемо асимптотичну оцінку:

$$\|x(t; \varepsilon) - x_m(t; \varepsilon)\| \leq \varepsilon^{m-1}c,$$

де  $c$  - деяка стала.

Таким чином, якщо виконуються умови 1° - 6°, то розв'язок крайової задачі (1), (2) виражається асимптотичною формулою:

$$x(t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp \left( \varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + O(\varepsilon^{m-1}).$$

## Література

1. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды / Я. Д. Тамаркин. – Пг., 1917. – 308 с.
2. Віра М. Б. Двоточкова крайова задача для вироджених сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь / М. Б. Віра // Науковий часопис НПУ ім. М. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова. – 2008, №9. – С. 47-64.



породжується будь-яким своїм вектором  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , тобто є сукупністю всіх векторів виду  $\lambda\vec{a}$ ,  $\lambda \in P$ . Якщо підпростір  $V_1$  інваріантний відносно оператора  $\hat{A}$ , то  $A\vec{a} \in V_1$ , тобто  $A\vec{a} = \lambda\vec{a}$ .

Вектор  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , що задовольняє співвідношення  $A\vec{a} = \lambda\vec{a}$ , де  $\lambda \in P$ , називається власним вектором оператора  $\hat{A}$ , а скаляр  $\lambda$  – власним значенням оператора  $\hat{A}$ , що відповідає власному вектору  $\vec{a}$ .

Отже, якщо підпростір  $V_1$  простору  $L_n$  інваріантний відносно оператора  $\hat{A}$ , то всі ненульові вектори цього підпростору є власними векторами оператора  $\hat{A}$ . Навпаки, якщо  $\vec{a}$  є власним вектором оператора  $\hat{A}$ , тобто  $A\vec{a} = \lambda\vec{a}$ , то одновимірний підпростір  $V_1$ , породжений вектором  $\vec{a}$ , інваріантний відносно оператора  $\hat{A}$ .

Таким чином, задача знаходження інваріантних відносно оператора  $\hat{A}$  одновимірних підпросторів простору  $L_n$  рівнозначна задачі знаходження власних векторів оператора  $\hat{A}$ .

Приклад. Знайти всі підпростори дійсного простору  $L_3$  інваріантні відносно лінійного оператора  $\hat{A}$ , заданого в базисі  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  матрицею  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Характеристичний многочлен має вигляд

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & -1 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

Коренями цього многочлена є дійсні числа  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ , вони ж є і власними значеннями оператора.

Власні вектори знайдемо підставляючи в систему  $\begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 & -1 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$  послідовно

відповідні власні значення.

Власні вектори:  $\vec{f}_1 = (-1, 1, 1)$ ,  $\vec{f}_2 = (1, 0, 2)$ ,  $\vec{f}_3 = (0, 1, 2)$ .

Інваріантними підпросторами простору  $L_3$  відносно оператора  $\hat{A}$  є такі лінійні оболонки векторів  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 : L(\vec{f}_1), L(\vec{f}_2), L(\vec{f}_1, \vec{f}_2), L(\vec{f}_1, \vec{f}_3), L(\vec{f}_2, \vec{f}_3), L(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ , весь простір  $L_3$  і нульовий підпростір  $\{\vec{0}\}$ . У цьому разі  $L_3 = L(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ , оскільки вектори  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  утворюють базис простору  $L_3$ .

### Література

1. Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.И. Алгебра и теория чисел. – К.: Вища школа, 1977. - Ч. 2. – 408 с.
2. Завало С.Т. Курс алгебри. – К.: Вища школа, 1985. – 503 с.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Просвещение, 1969. – 432 с.
4. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М.: Просвещение, 1968. – 335 с.

УДК 517.928

## ПРИНЦИП МАКСИМУМУ Л. С. ПОНТРЯГІНА ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

О. В. Тарасенко

Розглянемо задачу оптимального керування

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + C(t)u, \quad (1)$$

$$x(0) = x_1, \quad x(T) = x_2, \quad (2)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T ((D(t)u(t), u(t))) dt \rightarrow \min_u, \quad (3)$$

де  $x(t)$  –  $n$ -вимірний вектор стану,  $u(t)$  –  $m$ -вимірний вектор керування,  $A(t)$ ,  $B(t)$  – квадратні матриці  $n$ -го порядку,  $C(t)$ ,  $D(t)$  – матриці розмірності  $(n \times m)$  та  $(m \times m)$  відповідно. Будемо передбачати, що матриця  $D(t)$  симетрична і додатно визначена,  $\det B(t) \equiv 0$  на  $[0; T]$ , а областю допустимих керувань  $u(t)$  є весь  $m$ -вимірний векторний простір.

Задача полягає у відшуванні такого керування  $u(t)$ , яке переводить систему із стану  $x_1$  в стан  $x_2$  за скінченний проміжок часу  $T$ , мінімізуючи функціонал  $J(u)$ .

Як відомо [1], у випадку, коли  $\det B(t) \neq 0$ , для розв'язання задачі (1)–(3) можна застосувати принцип максимуму, виконання якого є не лише необхідною, але й достатньою умовою існування шуканого вектора оптимального керування [2]. Наявність виродженої матриці при похідних значно ускладнює цю задачу.

Досліджується питання застосування принципу максимуму до поставленої задачі, якщо система (1) задовольняє умови теореми про звідність системи (1) до центральної канонічної форми [3].

Припустимо, що виконуються всі умови цієї теореми, а саме:

1.  $\text{rank} B(t) = n - r, \forall t \in [0; T]$ ;

2. матриця  $B(t)$  має на відрізку  $[0; T]$  повний жорданів набір векторів відносно

оператора  $L(t) = A(t) - B(t) \frac{d}{dt}$ , який складається з  $r$  ланцюжків  $\varphi_i^{(j)}(t)$ ,  $j = \overline{1, s_i}$ ,  $i = \overline{1, r}$ ,

довжини  $s_1, s_2, \dots, s_r$ ;

3.  $A(t), B(t) \in C_{[0; T]}^{3p-2}$ ;  $C(t), u(t) \in C_{[0; T]}^{p-1}$ , де  $p = \max_i s_i$ .

Як показано в [3, 4], за виконання цих умов однорідна система

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (4)$$

має загальний розв'язок типу Коші, який являє собою лінійну комбінацію її  $n-s$  лінійно незалежних частинних розв'язків, де  $s = s_1 + s_2 + \dots + s_r$ . Позначимо через  $X_{n-s}(t)$  прямокутну матрицю розмірності  $n \times (n-s)$ , складену з цих розв'язків, яку, виходячи з [4, п. 2.2], будемо називати фундаментальною матрицею системи (4). Складену аналогічним чином фундаментальну матрицю відповідної спряженої системи

$$\frac{d}{dt} (B^*(t)y) = -A^*(t)y \quad (5)$$

позначимо  $Y_{n-s}(t)$ , визначивши її так, щоб виконувалася рівність



$$Y_{n-s}^*(t)B(t)X_{n-s}(t) = E_{n-s},$$

де  $E_{n-s}$  – одинична матриця  $(n-s)$ -го порядку [4, с. 64].

Нехай

$$\Phi(t) = \left[ \varphi_1^{(s_1)}(t), \dots, \varphi_1^{(s_1)}(t); \varphi_2^{(s_2)}(t), \dots, \varphi_2^{(s_2)}(t); \dots; \varphi_r^{(s_r)}(t), \dots, \varphi_r^{(s_r)}(t) \right]$$

$$\Psi(t) = \left[ \psi_1^{(s_1)}(t), \dots, \psi_1^{(s_1)}(t); \psi_2^{(s_2)}(t), \dots, \psi_2^{(s_2)}(t); \dots; \psi_r^{(s_r)}(t), \dots, \psi_r^{(s_r)}(t) \right]$$

–  $(n \times s)$ -матриці, складені з векторів  $\varphi_i^{(j)}(t)$ ,  $\psi_i^{(j)}(t)$ ,  $j = \overline{1, s_i}$ ,  $i = \overline{1, r}$ , які утворюють жорданові ланцюжки матриці  $B(t)$  відносно оператора  $L(t)$  і матриці  $B^*(t)$  відносно оператора  $L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt}B^*(t)$  відповідно. Утворивши  $(n \times n)$ -матриці

$$P(t) = [X_{n-s}(t), \Phi(t)], \quad Q(t) = [Y_{n-s}(t), \Psi(t)]^*,$$

зробимо у системі (1) заміну  $x(t) = Q(t)y(t)$  та домножимо зліва на  $P(t)$ . В результаті система (1) набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} Y_{n-s}^*(t)C(t)u(t) \\ R(t)\Psi^*(t)C(t)u(t) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

де  $R(t) = [\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}$ ,  $I = \text{diag}\{I_1, I_2, \dots, I_r\}$ ,  $I_j$  – нільпотентна клітина жордана розмірності  $s_j$ .

Тоді задача розпадається на дві: задачу оптимального керування

$$\frac{dy_1}{dt} = Y_{n-s}^*(t)C(t)u(t); \quad (7)$$

$$y_1(0) = [P^{-1}(0)]_1 x_1, \quad y_1(T) = [P^{-1}(T)]_1 x_2; \quad (8)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T ((D(t)u(t), u(t)) dt \rightarrow \min_u \quad (9)$$

і крайову задачу

$$I \frac{dy_2}{dt} = y_2 + R(t)\Psi^*(t)C(t)u(t); \quad (10)$$

$$y_2(0) = [P^{-1}(0)]_2 x_1, \quad y_2(T) = [P^{-1}(T)]_2 x_2, \quad (11)$$

де  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  –  $(n-s)$ -вимірний і  $s$ -вимірний вектори, які утворюють  $y(t)$ ,  $[P^{-1}(t)]_1$ ,  $[P^{-1}(t)]_2$  – прямокутні матриці, що складаються відповідно з  $n-s$  перших та  $s$  останніх рядків матриці  $P^{-1}(t)$ .

Оскільки система (7) має явний вигляд, то до задачі (7)–(9) можна застосувати принцип максимуму. Якщо ця задача має розв'язок, то згідно з цим принципом існує ненульовий  $(n-s)$ -вимірний вектор  $p$  такий, що

$$C^*(t)Y_{n-s}(t)p - D(t)u(t) = 0; \quad \frac{dp}{dt} = 0,$$

звідки, врахувавши (7), знайдемо

$$u(t) = D^{-1}(t)C^*(t)Y_{n-s}(t)c_1; \quad (12)$$

$$y_1(t) = \int_0^t Y_{n-s}^*(\tau)C(\tau)D^{-1}(\tau)C^*(\tau)Y_{n-s}(\tau)d\tau c_1 + c_2, \quad (13)$$

де  $c_1, c_2$  – сталі  $(n-s)$ -вимірні вектори, для визначення яких використаємо крайові умови (8).

Припустимо, що

$$\det W(T) \neq 0,$$

де  $W(t) = \int_0^t Y_{n-s}^*(\tau)C(\tau)D^{-1}(\tau)C^*(\tau)Y_{n-s}(\tau)d\tau$ . Тоді, взявши до уваги співвідношення

$$[P^{-1}(t)] = Y_{n-s}^*(t)B(t), \quad (15)$$

доведене в [4, с.71], будемо мати

$$c_1 = W^{-1}(T)[Y_{n-s}^*(T)B(T)x_2 - Y_{n-s}^*(0)B(0)x_1] \quad (16)$$

$$c_2 = Y_{n-s}^*(0)B(0)x_1. \quad (17)$$

У свою чергу, розв'язуючи рівняння (10) з врахуванням (12), знайдемо

$$y_2(t) = -\sum_{k=0}^{p-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} [R(t)\Psi^*(t)C(t)D^{-1}(t)C^*(t)Y_{n-s}(t)]c_1. \quad (18)$$

При цьому крайові умови (11) запишемо у вигляді

$$R(0)\Psi^*(0)A(0)x_1 + \frac{d}{dt} [R(t)\Psi^*(t)B(t)]_{t=0} x_2 + \Omega(0)c_1 = 0, \quad (19)$$

$$R(T)\Psi^*(T)A(T)x_1 + \frac{d}{dt} [R(t)\Psi^*(t)B(t)]_{t=T} x_2 + \Omega(T)c_1 = 0, \quad (20)$$

де

$$\Omega(t) = \sum_{k=0}^{p-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} [R(t)\Psi^*(t)C(t)D^{-1}(t)C^*(t)Y_{n-s}(t)]$$

Перейшовши до початкової змінної і врахувавши (13), (18), (16), (17), одержимо наступний вираз для векторів оптимальної траєкторії і оптимального керування:

$$\begin{aligned} x(t) = Q(t)y(t) &= X_{n-s}(t)y_1(t) + \Phi(t)y_2(t) = (X_{n-s}(t)W(t) - \\ &- \Phi(t)\Omega(t))c_1 + X_{n-s}(t)c_2 = (X_{n-s}(t)W(t) - \Phi(t)\Omega(t))W^{-1}(T) \times \\ &\times [Y_{n-s}^*(T)B(T)x_2 - Y_{n-s}^*(0)B(0)x_1] + X_{n-s}(t)Y_{n-s}^*(0)B(0)x_1; \end{aligned} \quad (21)$$

$$u(t) = D^{-1}(t)C^*(t)Y_{n-s}(t)W^{-1}(T)[Y_{n-s}^*(T)B(T)x_2 - Y_{n-s}^*(0)B(0)x_1], \quad (22)$$

якщо вектори  $x_1, x_2$  початкового і кінцевого станів задовольняють умовам допустимості (19), (20). Розглянемо тепер систему рівнянь

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + C(t)u(t);$$

$$\frac{d}{dt}(B^*(t)p) = -A^*(t)p;$$

$$C^*(t)p - D(t)u = 0, \quad (25)$$

яка утворюється в результаті формального застосування принципу максимуму безпосередньо до вихідної задачі оптимального керування (1)–(3), якщо в якості гамільтоніана взяти функцію

$$H(t, x, p, u) = (A(t)x, p) + (C(t)u, p) - \frac{1}{2}(D(t)u, u), \text{ а умову мінімізації критерія записати у вигляді}$$

$$\text{grad}_u H = 0; \frac{d}{dt}(B^*(t)p) = -\text{grad}_x H.$$

Розв'язуючи її методом, описаним у [4], знайдемо

$$p(t) = Y_{n-s}(t)c_1;$$

$$u(t) = D^{-1}(t)C^*(t)Y_{n-s}(t)c_1;$$

$$x(t) = X_{n-s}(t)c_2 + X_{n-s}(t) \int_0^t Y_{n-s}^*(\tau)C(\tau)D^{-1}(\tau)C^*(\tau)Y_{n-s}(\tau)d\tau c_1 - \Phi(t) \times \\ \times \sum_{k=0}^{p-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} [R(t)\Psi^*(t)C(t)u(t)] = X_{n-s}(t)c_2 + (X_{n-s}(t)W(t) - \Phi(t)\Omega(t))c_1,$$

де  $c_1, c_2$  – сталі  $(n-s)$ -вимірні вектори.

Використовуючи крайові умови (2) та беручи до уваги, що

$$[P^{-1}(t)]_1 X_{n-s}(t) = E_{n-s}, \quad [P^{-1}(t)]_1 \Phi(t) = 0,$$

а також співвідношення (15), для визначення  $c_1, c_2$  одержимо формули (16), (17). Крім цього, для виконання умови (2) необхідно, щоб мали місце рівності (19), (20).

Таким чином, застосування принципу максимуму до задачі (7)–(11), одержаної з (1)–(3) за допомогою еквівалентних перетворень, та його безпосереднє застосування до задачі (1)–(3) у вигляді (26) приводить до одного й того ж результату.

Отже, приходимо до наступних тверджень.

**Теорема 1.** *Якщо виконуються умови 1-3, то для існування розв'язку задачі оптимального керування (1)–(3) необхідно, щоб існував ненульовий  $n$ -вимірний вектор  $p(t)$ , який задовольняє рівняння*

$$\frac{d}{dt}(B^*(t)p) = -A^*(t)p,$$

при якому має розв'язок крайова задача

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + C(t)u(t);$$

$$D(t)u - C^*(t)p = 0;$$

$$x(0) = x_1, x(T) = x_2.$$

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови 1-3 і матриця  $D(t)$  додатно визначена на заданому відрізку  $[0; T]$ . Тоді, якщо має місце нерівність (14) і вектори  $x_1, x_2$  задовольняють умови допустимості*

$$R(0)\Psi^*(0)A(0)x_1 + \frac{d}{dt}[R(t)\Psi^*(t)B(t)]_{t=0}x_2 + \Omega(0)W^{-1}(T) \times \\ \times [Y_{n-s}^*(T)B(T)x_2 - Y_{n-s}^*(0)B(0)x_1] = 0;$$

$$R(T)\Psi^*(T)A(T)x_1 + \frac{d}{dt}[R(t)\Psi^*(t)B(t)]_{t=T}x_2 + \Omega(T)W^{-1}(T) \times \\ \times [Y_{n-s}^*(T)B(T)x_2 - Y_{n-s}^*(0)B(0)x_1] = 0,$$

то існує оптимальне керування  $u(t)$ , яке переводить дану систему із стану  $x_1$  в стан  $x_2$  за час  $T$  мінімізуючи функціонал (3), яке виражається формулою (22). При цьому перехід системи з одного стану в інший здійснюється по траєкторії, яка визначається за формулою (21).

**Приклад.** Знайдемо вектор оптимального керування процесом, який описується системою

$$\begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t + 1 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (27)$$

з критерієм якості

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dt \rightarrow \min_u, \quad (28)$$

що переводить дану систему із стану  $x(0) = x_1 = \text{col}(x_1^{(1)}, x_1^{(2)})$  в стан  $x(\pi) = x_2 = \text{col}(x_2^{(1)}, x_2^{(2)})$  за час  $t = \pi$ .

Легко переконатися, що має місце нерівність (14) і, якщо вектори  $x_1, x_2$  задовольняють умови допустимості

$$\frac{4}{(4\pi^2 + 7)\exp 2\pi - 7} [-\exp \pi x_2^{(1)} + \exp \pi x_2^{(2)} - x_1^{(1)} + x_1^{(2)}] + x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \frac{1}{2} x_2^{(1)} - \frac{1}{2} x_2^{(2)} = 0;$$

$$\frac{2\exp \pi (\pi^2 - 2\pi + 2)}{(4\pi^2 + 7)\exp 2\pi - 7} [-\exp \pi x_2^{(1)} + \exp \pi x_2^{(2)} - x_1^{(1)} + x_1^{(2)}] - x_1^{(1)} - x_1^{(2)} - \frac{1}{2} x_2^{(1)} + \frac{1}{2} x_2^{(2)} = 0,$$

то існує оптимальне керування

$$u(t) = \frac{8\exp t}{(4\pi^2 + 7)\exp 2\pi - 7} \begin{pmatrix} t \sin t - \cos t \\ \sin t - t \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} [-\exp \pi x_2^{(1)} + \exp \pi x_2^{(2)} - x_1^{(1)} + x_1^{(2)}]$$

яке переводить дану систему із стану  $x_1$  в стан  $x_2$  за час  $\pi$  мінімізуючи функціонал (28). При цьому перехід системи з одного стану в інший здійснюється по траєкторії

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[ \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} \int_0^t \exp 2\tau (\tau^2 - 2\tau \sin 2\tau + \cos^2 \tau + 1) d\tau - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \exp t \begin{pmatrix} (t+1)^2 \sin^3 t + (t^2 - 2t + 2) \cos^3 t + (t^2 - 2t) \sin^2 t \cos t + \\ + (t^2 - 6t + 1) \cos^2 t \sin t \\ - 2t \cos^3 t - (t^2 + 1) \sin^3 t + (t^2 + 2) \cos t - 2t \sin t - \\ - (t^2 + 3) \cos^2 t \sin t + 6t \sin^2 t \cos t \end{pmatrix} \right] \times \\ & \times \frac{8}{(4\pi^2 + 7)\exp 2\pi - 7} [-\exp \pi x_2^{(1)} + \exp \pi x_2^{(2)} - x_1^{(1)} + x_1^{(2)}] + \\ & + \frac{1}{2} \exp t \begin{pmatrix} (\cos t - \sin t) x_1^{(1)} + (\sin t - \cos t) x_1^{(2)} \\ -(\cos t + \sin t) x_1^{(1)} + (\sin t + \cos t) x_1^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Література

1. 1. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
2. 2. Ванько В. И. Вариационное исчисление и оптимальное управление / В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. – М., 2006. – 488 с.
3. 3. Самойленко А. М. О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме / А. М. Самойленко, В. П. Яковец // Докл. АН Украины. – 1993. – № 4. – С. 10–15.
4. 4. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

УДК 514.7(075.8)

## ОДИН ВЕКТОРНИЙ МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ НА ПОВЕРХНІ

Л.В. Циганок

В диференціальній геометрії існують різні шляхи введення понять геодезичної кривини ліній на поверхні та геодезичних ліній. Один шлях: спочатку дається означення геодезичної лінії, а потім – геодезичної кривини лінії; інший шлях: навпаки, спочатку вводиться поняття геодезичної кривини, а потім – геодезичної лінії. Різними способами виведені диференціальні рівняння геодезичних ліній, використовуючи які спочатку потрібно визначити коефіцієнти цих рівнянь, а потім їх інтегрувати. Робота стає досить формальною, відбувається віддалення від геометричного змісту понять.

Якщо ж геодезичну кривину ліній на поверхні визначити за допомогою векторної алгебри, то з цього означення випливатиме рівняння геодезичних ліній поверхні теж у векторній формі, яке можна безпосередньо використовувати до конкретних поверхонь. Покажемо це.

Нехай векторним рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in G \quad (1)$$

задана гладка поверхня класу  $\tilde{N}^k$  (регулярна,  $k$  разів диференційована) і внутрішніми рівняннями  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  задана лінія  $\gamma$  на цій поверхні, де параметр  $t$  належить числовому проміжку  $I$  так, що  $(u(t), v(t)) \in G$  для всіх  $t \in I$ . Нехай точка  $M(u = u(t), v = v(t))$  належить лінії  $\gamma$  для деякого  $t \in I$ ,  $\vec{\tau}$  – одиничний вектор дотичної,  $k\vec{v}$  – вектор кривини,  $\vec{n}$  – одиничний вектор нормалі до поверхні у точці  $M$ .

Введемо у точці  $M$  одиничний вектор  $\vec{g}$  дотичної площини за формулою  $\vec{g} = [\vec{\tau} \vec{n}]$ , звідки  $\vec{g} \perp \vec{\tau}$ ,  $\vec{g} \perp \vec{n}$  за означенням векторного добутку. Дістаємо три компланарні вектори  $k\vec{v}$ ,  $\vec{g}$ ,  $\vec{n}$ , оскільки вони перпендикулярні до вектора  $\vec{\tau}$ . Тоді виконується рівність

$$k\vec{v} = k_1\vec{g} + k_2\vec{n}, \quad (2)$$

тому що вектори  $\vec{g}$  і  $\vec{n}$  неколінеарні. З рівності (2) дістаємо  $\vec{n} \cdot k\vec{v} = k_2(\vec{n} \cdot \vec{n}) = k_2$ , тобто  $k_2 = k_n$  – нормальна кривина лінії  $\gamma$  у точці  $M$ . Аналогічно дістанемо  $(k\vec{v}) \cdot \vec{g} = k_1(\vec{g} \cdot \vec{g}) + k_n(\vec{n} \cdot \vec{g})$ , звідси  $k_1 = (k\vec{v}) \cdot \vec{g}$ . Вектор  $k_1\vec{g}$  є ортогональною проекцією вектора кривини  $k\vec{v}$  на дотичну площину у точці  $M$ . Число  $k_1$  називається геодезичною кривиною лінії  $\gamma$  у точці  $M_0$  і позначається  $k_{\vec{a}}$ , отже

$$k\vec{v} = k_{\vec{a}}\vec{g} + k_n\vec{n}. \quad (3)$$

Оскільки  $k_{\bar{a}} = (k\bar{v})[\bar{r}\bar{n}] = k[\bar{v}\bar{\tau}]\bar{n}$ , враховуючи формули  $[\bar{v}\bar{\tau}] = -\bar{\beta}$ ,  $\bar{\beta} = \frac{[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]}{|\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}|}$ ,  $k = \frac{|\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}|}{|\dot{\bar{r}}|^3}$ ,

дістаємо формулу обчислення геодезичної кривини лінії  $\gamma$  у точці  $M$ :

$$k_{\bar{a}} = \frac{[\ddot{\bar{r}}\dot{\bar{r}}]\bar{n}}{|\dot{\bar{r}}|^3} = \frac{\ddot{\bar{r}}\dot{\bar{r}}\bar{n}}{|\dot{\bar{r}}|^3}, \quad (4)$$

де  $\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ ,  $\ddot{\bar{r}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ .

Лінія на поверхні називається геодезичною, якщо геодезична кривина  $k_{\bar{a}}$  цієї лінії у кожній точці дорівнює нулю. Підставивши у рівність (3)  $k_{\bar{a}} = 0$ , дістанемо  $k\bar{v} = k_n\bar{n}$ , тобто вектор  $k\bar{v}$  колінеарний одиничному вектору нормалі  $\bar{n}$ , а оскільки  $\bar{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|}$ , де  $\bar{N} = [\bar{r}'_u\bar{r}'_v]$  у точці  $M$ ,

то вектор  $k\bar{v}$  колінеарний вектору  $\bar{N}$ . Оскільки векторний добуток колінеарних векторів дорівнює нульовому вектору, то лінія  $\gamma$  буде геодезичною лінією поверхні (1) тоді і тільки тоді, коли для неї справджується рівність:

$$[(k\bar{v})\bar{N}] = \bar{0}. \quad (5)$$

Для прикладу знайдемо геодезичні лінії кругового циліндра радіуса  $a > 0$ , заданого рівнянням

$$\bar{r} = (a \cos u; a \sin u; v). \quad (6)$$

Нехай  $u = u(s)$ ,  $v = v(s)$  – внутрішні рівняння геодезичних ліній циліндра, де  $s$  – природний параметр, тоді векторне рівняння геодезичної лінії набуває вигляду

$$\bar{r} = (a \cos(u(s)); a \sin(u(s)); v(s)). \quad (7)$$

Вектор дотичної  $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}$  до лінії (7) має координати  $\bar{\tau}(-au' \sin u; au' \cos u; v')$ , де і надалі

$u = u(s)$ ,  $v = v(s)$ ,  $u' = \frac{du}{ds}$ ,  $v' = \frac{dv}{ds}$ . Оскільки  $\bar{\tau}$  – одиничний вектор, справджується рівність  $a^2(u')^2 \sin^2 u + a^2(u')^2 \cos^2 u + (v')^2 = 1$ , або

$$a^2(u')^2 + (v')^2 = 1. \quad (8)$$

Знайдемо координати вектора кривини лінії (7)  $k\bar{v} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$  і вектора нормалі поверхні (6) у точці  $(u(s), v(s))$ :  $\bar{N} = [\bar{r}'_u\bar{r}'_v]$ ;  $k\bar{v}(-a(u')^2 \cos u - au'' \sin u; -a(u')^2 \sin u + au'' \cos u; v'')$ , де  $u'' = \frac{d^2u}{ds^2}$ ,  $v'' = \frac{d^2v}{ds^2}$ , знаходимо похідні  $\bar{r}'_u(-a \sin u; a \cos u; 0)$ ,  $\bar{r}'_v(0, 0, 1)$ , тоді  $\bar{N}(a \cos u; a \sin u; 0)$ , і векторний добуток вектора кривини і вектора нормалі має координати  $[(k\bar{v})\bar{N}] = (av'' \sin u; av'' \cos u; -a^2u'')$ . Звідси згідно рівняння (5), враховуючи рівність (8), діста-

немо систему: 
$$\begin{cases} av'' \sin u = 0, \\ av'' \cos u = 0, \\ a^2u'' = 0, \\ a^2(u')^2 + (v')^2 = 1, \end{cases} \quad \text{яка рівносильна системі} \quad \begin{cases} v'' = 0, \\ u'' = 0, \\ a^2(u')^2 + (v')^2 = 1, \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} u = cs + d, \\ v = ms + n, \\ a^2c^2 + m^2 = 1, \end{cases} \quad (9)$$

де  $n, d$  – довільні дійсні числа, а числа  $c, m$  задовольняють умову  $a|c| \leq 1, |m| \leq 1$ . Якщо в системі (9):

1)  $c = 0$ , тоді  $m = \pm 1, u = d, v = \pm s + n$  і позначивши  $\pm s$  через  $t \in (-\infty, \infty)$ , дістанемо рівняння відповідної геодезичної лінії

$$\vec{r} = (a \cos d; a \sin d; t + n), \quad (10)$$

або у вигляді параметричних рівнянь:  $x = a \cos d, y = a \sin d, z = n + t$  – це рівняння прямої, яка проходить через точку  $M(a \cos d; a \sin d; n)$  паралельно вектору  $\vec{k}(0, 0, 1)$ . При значеннях  $d \in [0, 2\pi)$  рівняння (10) визначають усі твірні циліндра, які є координатними лініями  $v$  цієї поверхні.

2)  $m = 0$ , тоді  $c = \pm \frac{1}{a}, u = \pm \frac{1}{a}s + d, v = n$ , позначивши  $\pm \frac{1}{a}s + d$  через  $t$  дістанемо рівняння геодезичної лінії у вигляді

$$\vec{r} = (a \cos t; a \sin t; n), \quad (11)$$

якщо  $t \in (-\pi, \pi]$ ,  $n$  – фіксоване дійсне число, то останнє рівняння визначає коло радіуса  $a$ , що лежить у площині  $z = n$ , а якщо  $n \in (-\infty, \infty)$ , рівняння (11) визначає сім'ю кіл циліндра – паралелей, які є лініями  $u$  поверхні (6).

3)  $n \neq 0$  і  $m \neq 0$ , тоді рівняння

$$\vec{r} = (a \cos(cs + d); a \sin(cs + d); ms + n) \quad (12)$$

при фіксованих  $c, d, m, n$  визначає гвинтову лінію на поверхні (1), а при всіх дійсних значеннях  $d, n$  і ненульових  $c$  і  $m$  рівняння (12) визначає сім'ю гвинтових ліній на поверхні (6), які є геодезичними лініями.

Позначимо  $cs + d = t$ , тоді  $ms + n = m_1t + n_1$ , де  $m_1 = \frac{m}{c}, n_1 = n - \frac{d}{c}$ , і переконаємося, що геодезична кривина  $k_a$  гвинтових ліній

$$\vec{r} = (a \cos t; a \sin t; m_1t + n_1) \quad (13)$$

на поверхні (6) дорівнює нулю. Для цього достатньо обчислити мішаний добуток  $\vec{r}\vec{r}\vec{N}$  у точці  $(u = t, v = m_1t + n_1)$ :  $\vec{r}(-a \sin t; a \cos t; m_1), \quad \ddot{\vec{r}}(-a \cos t; -a \sin t; 0), \quad \vec{N}(a \cos t; a \sin t; 0),$

$$\vec{r}\vec{r}\vec{N} = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & m_1 \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \cos t & a \sin t & 0 \end{vmatrix} = a^2 m_1 (-\cos t \sin t + \cos t \sin t) = 0. \text{ Тоді за формулою } k_a = \frac{\vec{r}\vec{r}\vec{N}}{|\vec{r}|^3} \text{ гео-}$$

дезична кривина лінії (8)  $k_a = 0$ , тому що  $\vec{r}\vec{r}\vec{N} = -\frac{1}{|\vec{N}|}(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}\vec{N})$ .

Якщо знаходити геодезичні лінії кінчної поверхні з виколотою вершиною

$$\vec{r} = (u \cos v; u \sin v; u), \quad u \neq 0, \quad (14)$$

то задаючи геодезичну лінію  $\gamma$  внутрішніми рівняннями  $u = u(s)$ ,  $v = v(s)$  з природним параметром  $s$ , аналогічно попередньому прикладу знаходимо одиничний вектор дотичної  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ , вектор кривини  $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$  геодезичної лінії  $\gamma$ :

$$\vec{r} = (u(s) \cdot \cos v(s); u(s) \sin v(s); u(s)), \quad u \neq 0, \quad (15)$$

та нормальний вектор поверхні  $\vec{N} = [\vec{r}'_u \vec{r}'_v]$  у точці  $M$  цієї лінії. Складаючи рівняння  $[k\vec{\nu}, \vec{N}] = \vec{0}$  і враховуючи, що  $u \neq 0$ , а вектор  $\vec{\tau}$  – одиничний, дістанемо систему

$$\begin{cases} 2u'' \sin v + 2u'v' \cos v + uv'' \cos v - u(v')^2 \sin v = 0; \\ -2u'' \cos v + 2u'v' \sin v + uv'' \sin v + u(v')^2 \cos v = 0; \\ 2u'v' + uv'' = 0; \\ 2(u')^2 + u^2(v')^2 = 1; \end{cases}$$

яка рівносильна наступній системі

$$\begin{cases} 2u'' - u(v')^2 = 0; \\ 2u'v' + uv'' = 0; \\ 2(u')^2 + u^2(v')^2 = 1. \end{cases} \quad (16)$$

Очевидно рівняння  $2u'v' + uv'' = 0$  задовольняє  $v' = 0$ , тоді з першого рівняння  $2u'' - u(v')^2 = 0$  випливає  $u'' = 0$ . Дістаємо  $v = c$ ,  $u' = a$ ,  $u = as + b$ . З третього рівняння  $2(u')^2 + u^2(v')^2 = 1$  при  $v' = 0$ ,  $u' = a$  випливає умова  $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Отже,  $u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}s + b$ ,  $v = c$ . Позначимо  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}s + b = t$ , де  $t \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ . Тоді при фіксованому значенні  $c$  рівняння геодезичної лінії (15) має вигляд

$$\vec{r} = (t \cos c; t \sin c; t), \quad t \neq 0. \quad (17)$$

Це пряма лінія, що проходить через початок координат (виключаючи точку  $(0, 0, 0)$ ) з напрямним вектором  $\vec{p}(\cos c; \sin c; 1)$ , який утворює з напрямним вектором  $\vec{k}(0, 0, 1)$  осі конуса кут  $\frac{\pi}{4}$ , оскільки  $\cos \left( \widehat{\vec{p}\vec{k}} \right) = \frac{\vec{p}\vec{k}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Якщо  $c$  набуватиме значення з проміжку  $(-\pi; \pi]$ , то рівняння (17) визначатиме сім'ю геодезичних ліній конуса – його твірні, виключаючи вершину.

Розглянемо випадок, коли  $v' \neq 0$ . Помножимо ліву і праву частину рівняння  $2u'v' + uv'' = 0$  на  $u$ :  $u \cdot (2u'v' + uv'') = 0$ . Оскільки  $2uu'v' + u^2v'' = (u^2v')'$ , враховуючи попередню рівність, дістанемо  $u^2v' = c$ , де стале число  $c \neq 0$ , оскільки  $v' \neq 0$  і за умовою  $u \neq 0$ . Тоді враховуючи третє рівняння системи:  $2(u')^2 + u^2(v')^2 = 1$ , одержимо рівняння

$$u^4(v')^2 = c^2(2(u')^2 + u^2(v')^2), \quad (18)$$



оскільки  $u' = \frac{du}{ds}$ ,  $v' = \frac{dv}{ds}$ , з рівняння (18) випливає рівняння  $(u^4 - c^2 u^2)(dv)^2 = 2c^2(du)^2$ , звідси

$$\sqrt{2}cdu = \pm u\sqrt{u^2 - c^2}dv; \quad \frac{\sqrt{2}cdu}{u\sqrt{u^2 - c^2}} = \pm dv. \quad \text{Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо:}$$

$$\sqrt{2}c \cdot \frac{1}{c} \operatorname{arcscc} \frac{u}{c} = \pm v + c_1, \quad \sqrt{2} \operatorname{arcscc} \frac{u}{c} = c_1 \pm v, \quad \operatorname{arcscc} \frac{u}{c} = \frac{c_1 \pm v}{\sqrt{2}}; \quad \frac{u}{c} = \frac{1}{\sin \frac{c_1 \pm v}{\sqrt{2}}}; \quad u = \frac{c}{\sin \frac{c_1 \pm v}{\sqrt{2}}}. \quad \text{Підс-}$$

тавляючи значення  $u$  з останньої рівності у рівняння поверхні (14), дістанемо векторне рівняння (19) сім'ї геодезичних ліній конуса, якщо  $v$  набуває значення з проміжку  $(-\pi; \pi]$ :

$$\vec{r} = \left( \frac{c \cos v}{\sin \frac{c_1 \pm v}{\sqrt{2}}}; \frac{c \sin v}{\sin \frac{c_1 \pm v}{\sqrt{2}}}; \frac{c}{\sin \frac{c_1 \pm v}{\sqrt{2}}} \right). \quad (19)$$

Якщо знаходити геодезичні лінії гелікоїда

$$\vec{r} = (u \cos v; u \sin v; v), \quad u \in (-\infty; \infty), \quad v \in (-\infty; \infty), \quad (20)$$

то система визначення функцій  $u = u(s)$ ,  $v = v(s)$ , що задають внутрішні рівняння геодезичних ліній, аналогічно (16), має вигляд

$$\begin{cases} v'' + 2uu'v' + u^2v'' = 0; \\ u'' - u(v')^2 = 0; \\ (u')^2 + (u^2 + 1) \cdot (v')^2 = 1. \end{cases} \quad (21)$$

Оскільки перше рівняння системи (21) задовольняє  $v' = 0$ , то підставляючи  $v' = 0$  в друге рівняння  $u'' - u(v')^2 = 0$ , одержимо  $u'' = 0$ . Отже,  $v = c$ ,  $u' = a$ ,  $u = as + b$ , де  $a, b, c$  – сталі числа. Далі підставляючи  $u' = a$  та  $v' = 0$  у третє рівняння  $(u')^2 + (u^2 + 1) \cdot (v')^2 = 1$  системи (21) дістанемо  $a = \pm 1$ . Отже, якщо  $v' = 0$ , то  $u = \pm s + b$ ,  $v = c$ . Позначимо  $\pm s + b = t$ , де  $t \in (-\infty; \infty)$ , і підставляючи  $u = t$ ,  $v = c$  в рівняння гелікоїда (20), отримуємо векторне рівняння сім'ї геодезичних ліній

$$\vec{r} = (t \cos c; t \sin c; \tilde{n}). \quad (22)$$

Рівняння (22) для різних значень  $\tilde{n}$  з проміжку  $(-\infty; \infty)$  визначає сім'ю прямих ліній, що проходять через точку  $(0, 0, c)$  паралельно вектору  $\vec{p}(\cos c; \sin c; 0)$ , який перпендикулярний осі  $Oz$ , оскільки  $\vec{p} \cdot \vec{k} = 0$ , де  $\vec{k}(0, 0, 1)$ . Отже лінії –  $u$  гелікоїда є геодезичними лініями цієї поверхні.

Розглянемо випадок, коли в системі (21)  $v' \neq 0$ , тоді  $(v')^2 > 0$ . Визначимо  $(v')^2$  з третього рівняння  $(u')^2 + (u^2 + 1) \cdot (v')^2 = 1$  системи (21):  $(v')^2 = \frac{1 - (u')^2}{u^2 + 1}$ , очевидно, тоді  $1 - (u')^2 > 0$ . Підставляючи одержане значення  $(v')^2$  у друге рівняння  $u'' - u(v')^2 = 0$ , дістанемо диференціальне рівняння

$$(u^2 + 1)u'' - u(1 - (u')^2) = 0. \quad (23)$$

Для пониження порядку рівняння (23) позначимо  $u' = p(s)$ , оскільки  $u = u(s)$ ,  $u' = \frac{du}{ds}$ .

Тоді  $u'' = p \frac{du}{ds}$  і рівняння (23) набуває вигляду  $(u^2 + 1)p \frac{dp}{du} - u(1 - p^2) = 0$ , інтегруючи це рівняння

і враховуючи, що  $1 - p^2 > 0$ , дістанемо

$$\frac{p dp}{1 - p^2} = \frac{u du}{u^2 + 1}, \quad \int \frac{p dp}{1 - p^2} = \int \frac{u du}{u^2 + 1}, \quad \ln(1 - p^2) = -\ln(c^2(u^2 + 1)), \quad c \neq 0, \quad 1 - p^2 = \frac{1}{c^2(u^2 + 1)},$$

$$p = \pm \sqrt{\frac{c^2(u^2 + 1) - 1}{c^2(u^2 + 1)}}. \quad \text{Оскільки } (v')^2 = \frac{1 - p^2}{u^2 + 1}, \text{ то } v' = \frac{1}{c(u^2 + 1)}. \quad \text{А так як } \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{du} p, \text{ то}$$

$$\frac{dv}{du} p = \frac{1}{c(u^2 + 1)}, \text{ звідси } dv = \pm \frac{1}{c(u^2 + 1)} \sqrt{\frac{c^2(u^2 + 1)}{c^2(u^2 + 1) - 1}} du, \text{ або } dv = \pm \frac{du}{\sqrt{(u^2 + 1) \cdot (c^2(u^2 + 1) - 1)}}. \quad \text{Отже,}$$

$$v = c_1 \pm \int \frac{du}{\sqrt{(u^2 + 1) \cdot (c^2(u^2 + 1) - 1)}}. \quad (24)$$

Рівняння (24) визначає геодезичні лінії гелікоїда за умови  $v' \neq 0$ .

В рівнянні (24) замінимо  $\tilde{n}$  оберненим виразом  $\frac{1}{\tilde{n}}$ , оскільки  $\tilde{n} \neq 0$ , тоді дістанемо

$$v = c_1 \pm \int \frac{\tilde{n} \cdot du}{\sqrt{(u^2 + 1) \cdot (u^2 + 1 - \tilde{n}^2)}}. \quad (25)$$

Виявляється, що при довільних дійсних значеннях  $\tilde{n}$  рівняння (25) визначає всю сім'ю геодезичних ліній, оскільки при  $\tilde{n} = 0$  одержуємо рівняння  $v = c_1$  ліній  $u$  гелікоїда, які є геодезичними лініями (див. (22)).

Отже, виконання необхідної і достатньої умови того, щоб лінія  $\gamma$  на поверхні була геодезичною:  $[(k\vec{v})\vec{N}] = \vec{0}$ , спрощує складання системи диференціальних рівнянь для знаходження внутрішніх рівнянь геодезичних ліній поверхонь, заданих векторним рівнянням.

### Література

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч. 2. – М.: Просвещение, 1987, – 352 с.
2. Моденов П.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии. – М.: Учпедгиз, 1949. – 238 с.

# 2

## Фізика

УДК 537.311.41

### ЕФЕКТ ФАРАДЕЯ В ГЕТЕРОВАЛЕНТНИХ ТВЕРДИХ РОЗЧИНАХ (InAs)<sub>x</sub>(CdTe)<sub>1-x</sub> ТА ЛЕГОВАНОМУ ЦИНКОМ АРСЕНІДІ ІНДІЮ

В.О. Аніщенко

Вивчення напівпровідникових твердих розчинів (ТР), зокрема (InAs)<sub>x</sub>(CdTe)<sub>1-x</sub>, є актуальним для одержання елементів оптоелектроніки. Деякі оптичні властивості ТР (InAs)<sub>x</sub>(CdTe)<sub>1-x</sub> вивчалися в роботах [1 – 4]. Ефект Фарадея в твердих розчинах арсеніду індію з телуридом кадмію до цього часу не вивчався не зважаючи на те, що дослідження усереднізонного ефекту Фарадея (УЕФ) дозволяє знайти ефективні маси носіїв заряду із значно меншою похибкою, ніж за допомогою інших методів, і навіть у тих випадках, коли їх визначення іншими методами сумнівне або неможливе.

Таблиця 1

Хімічний склад зразків ТР InAs - CdTe, InAs:Te, концентрація N та рухливість U носіїв заряду, товщина зразків d, відповідний довжині хвилі λ питомий кут повороту площини поляризації променів θ/Hd, фарадеївська ефективна маса електронів  $m_F^* / m_0$  для  $T = 296\text{K}$ .

Система	№ зразка	1 - x	N, см <sup>-3</sup>	$U, \frac{\text{m}^2}{\text{Å} \cdot \text{ns}}$	d, мкм	λ, мкм	$10^3 \frac{\theta}{Hd}, \frac{\text{deg}}{\text{Å} \cdot \text{mT}}$	$m_F^* / m_0$
(InAs) <sub>x</sub> (Te) <sub>1-x</sub>	1	0	$8,1 \cdot 10^{17}$	10000	86	6,52	1,75	0,039±0,004
	2	0,001	$8,8 \cdot 10^{18}$	5300	114	5,70	4,35	0,071±0,007
	3	0,001	$1,1 \cdot 10^{19}$	4730	108	4,18	2,35	0,079±0,008
	4	0,005	$1,6 \cdot 10^{19}$	3790	102	5,0	4,15	0,086±0,009
(InAs) <sub>x</sub> (CdTe) <sub>1-x</sub>	5	0,001	$3,4 \cdot 10^{18}$	6750	89	6,33	3,25	0,057±0,006
	6	0,005	$7,2 \cdot 10^{18}$	3580	86	6,12	5,58	0,061±0,006
	7	0,01	$1,0 \cdot 10^{19}$	2000	100	4,87	5,1	0,060±0,006
	8	0,025	$1,1 \cdot 10^{19}$	1650	80	4,87	3,5	0,076±0,008
	9	0,035	$1,1 \cdot 10^{19}$	1120	100	4,33	1,65	0,1±0,01

Кристали ТР (InAs)<sub>x</sub>(CdTe)<sub>1-x</sub> та (InAs)<sub>x</sub>(Te)<sub>1-x</sub> були отримані методом напрямленої кристалізації при постійному градієнті температури вздовж зливка. Для одержання кристалів використовували вихідні елементи високого ступеня чистоти (99,9999% основної речовини). Кристалізацію розплаву, нагрітого до 1200°C, проводили шляхом зниження температури на спеціальній установці, яка дозволяла вибирати той чи інший режим кристалізації. Таким способом отримували крупноблочні або монокристалічні зливки ТР або легovanого телуридом InAs з електричними властивостями, які плавно змінювалися вздовж зливка. Зразки для дослідження вирізали з середньої частини зливка перпендикулярно до його поздовжньої осі.

Гальваномагнітні вимірювання проводилися на зразках розмірами  $12 \times 3 \times 1,5$  мм<sup>3</sup>. Зразки були низькоомними і електрично однорідними по довжині.

Після виконання електричних вимірювань зразки шліфувалися, полірувалися та оброблялися методом хімічного травлення (1 ч. Вг : 10 ч. C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>OH) до товщини  $\sim 80 \dots 100$  мкм. На таких зразках досліджувався ефект Фарадея в ТР (InAs)<sub>x</sub>(CdTe)<sub>1-x</sub> та (InAs)<sub>x</sub>(Te)<sub>1-x</sub>.

Обертання площини поляризації вимірювалося за методикою [5] в інтервалі довжин хвиль від 2,0 до 7,0 мкм, при кімнатній температурі. Напруженість магнітного поля досягла 10 кЕ. Приймачем випромінювання в ІЧ – діапазоні слугував нікелевий болометр. В якості поляризатора і аналізатора використовувалися репліки дифракційних ґраток з металізованими штрихами на поліетилені. Концентрація електронів в кожному зразку визначалася за допомогою ефекту Холла. Всі характеристики зразків: хімічний склад, товщини, рухливості, концентрації електронів та інші, виміряні і обраховані в процесі дослідження величини, наведені в таблиці 1.

Спектральні залежності фарадеївського обертання (ФО) в легованому телуром арсеніді індію (зразки 1, 2, 4) та ТР (InAs)<sub>x</sub>(CdTe)<sub>1-x</sub> (зразки 1, 5, 6, 7) показані на рис. 1, 2.

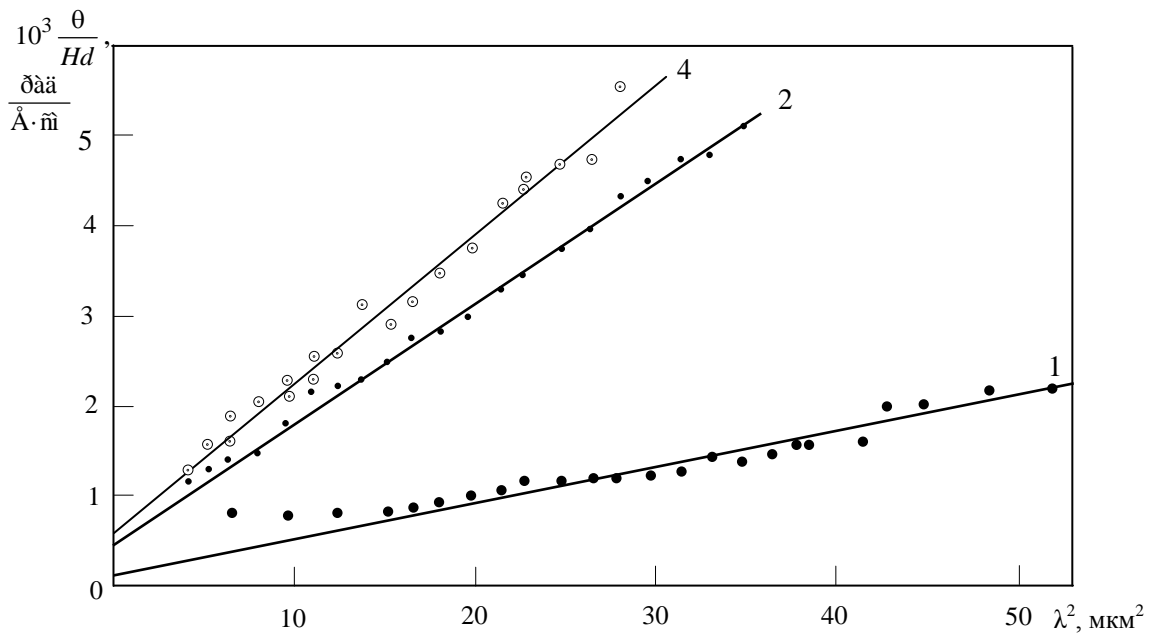


Рис. 1. Залежності питомого кута повороту площини поляризації

ІЧ променів  $\frac{\theta}{Hd}$  від квадрата довжини хвилі  $\lambda^2$  для зразків

1, 2, 4 (InAs)<sub>x</sub>(Te)<sub>1-x</sub> для  $T = 296$  К

(нумерація зразків на рисунку відповідає нумерації в табл. 1)

Залежності  $\theta / Hd$  від  $\lambda^2$  для зразків 3, 8, 9 (табл. 1) аналогічні показаним на рис. 1, 2.

З наведених графіків видно, що в ТР (InAs)<sub>x</sub>(CdTe)<sub>1-x</sub> має місце лінійна залежність питомого кута повороту площини поляризації променів від квадрата довжини хвилі  $\lambda^2$ , що є характерним для ФО на вільних носіях заряду. Проте екстраполяція лінійних ділянок графіків для зразків до  $\lambda = 0$  мкм не приводить їх до початку координат, а відсікає певний додатний відрізок на осі ординат. Існування додаткового обертання при  $\lambda = 0$  мкм можна пов'язати з особливостями досліджуваних матеріалів як неупорядкованих систем [6].

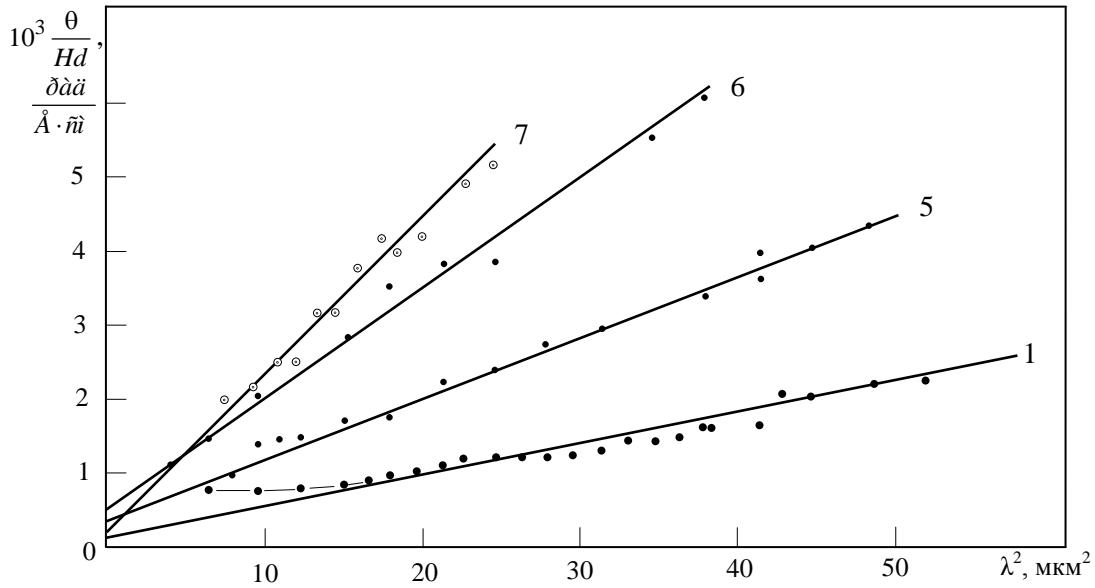


Рис. 2. Залежності питомого кута повороту площини поляризації ІЧ променів  $\frac{\theta}{Hd}$  від квадрата довжини хвилі  $\lambda^2$  для зразків 1, 5, 6, 7  $(\text{InAs})_x(\text{CdTe})_{1-x}$  для  $T = 296\text{K}$

По нахилу залежностей  $\theta/Hd$  від  $\lambda^2$  визначалася фарадеївська ефективна маса  $m_F^*$  за формулою

$$\theta = \frac{2\pi N e^3 H d}{n c^2 (m_F^*)^2 \omega^2}, \quad (1)$$

де  $N$  – концентрація вільних електронів,  $H$  – напруженість магнітного поля,  $d$  – товщина зразка,  $n = \sqrt{\epsilon_\infty}$  – показник заломлення в області прозорості зразків,  $\omega$  – циклічна частота випромінювання,  $\theta$  – кут повороту площини поляризації.

Для обрахунків ефективної маси  $\epsilon_\infty$  приймалась рівною 11,6 [7]. Похибка визначення ефективної маси складала  $\sim 10\%$ .

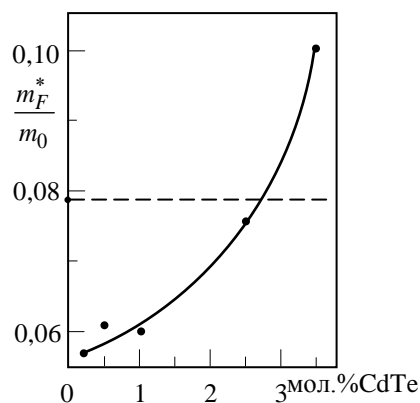


Рис 3. Залежність фарадеївської ефективної маси на рівні Фермі  $m_F^* / m_0$  від складу ТР  $(\text{InAs})_x(\text{CdTe})_{1-x}$

Фарадеївські ефективні маси на рівні Фермі в  $(\text{InAs})_x(\text{Te})_{1-x}$  та ТР  $(\text{InAs})_x(\text{CdTe})_{1-x}$  наведені в табл. 1 та на рис. 3. Зазначимо, що визначені нами ефективні маси електронів в легованому Те арсеніді індію добре узгоджуються з результатами інших авторів [8].

З рис. видно, що ефективна маса електронів в твердих розчинах  $(\text{InAs})_x(\text{CdTe})_{1-x}$  з вмістом CdTe до 2,5 мол.% помітно менша, ніж у легованому телуром InAs з такою ж концентрацією вільних носіїв заряду (на рис.3 цій величині  $m_F^*$  відповідає пунктирна лінія), і зростає із збільшенням вмісту CdTe в сплаві.

На думку авторів [1-3] зменшення ефективної маси носіїв заряду в ТР порівняно з легованим InAs можна пояснити появою сильної міжзонної взаємодії, яка спричиняє суттєве зменшення ширини забороненої зони та ефективної маси електронів. Ймовірно, ця взаємодія досягає максимальної величини при концентраціях CdTe по-

ряду 1,0...1,5 мол% і зменшується із збільшенням вмісту CdTe в сплаві внаслідок утворення „власне” твердих розчинів. З іншого боку, при малому вмісті CdTe в InAs телурид кадмію дисоціює на окремі атоми – Cd і Te, які є відповідно акцепторами і донорами. Із збільшенням вмісту CdTe, внаслідок взаємодії між іонізованими атомами Cd і Te, в розчині зростає кількість донорно-акцепторних пар, які є CdTe. За своєю природою вони ближчі до InAs, аніж атоми Cd і Te. Тому спотворення кристалічної ґратки будуть найбільшими в місцях локалізації окремих донорів і акцепторів [9].

В роботі [10] показано, що вплив деформації на енергетичний спектр кристалічної ґратки вузькозонних напівпровідників може на порядок перевищувати відносні зміни постійної ґратки  $\Delta a/a$ . Хоча інформації про такі дослідження для сплавів  $(\text{InAs})_x(\text{CdTe})_{1-x}$  немає, можна припустити, що за рахунок перевищення концентрації атомів Te над атомами Cd в сплаві можливе зростання  $\Delta a/a$ , а зменшення цього відношення – з утворенням комплексів типу  $(\text{Cd}^- \text{Te}^+)^0$ , які мають близьку до InAs сталу кристалічної ґратки. З огляду на вище сказане на рис.4 проведено співставлення концентраційних залежностей ефективної маси електронів в легованому арсеніді індію [8, С. 487] та твердих розчинах  $(\text{InAs})_x(\text{CdTe})_{1-x}$  (табл. 1).

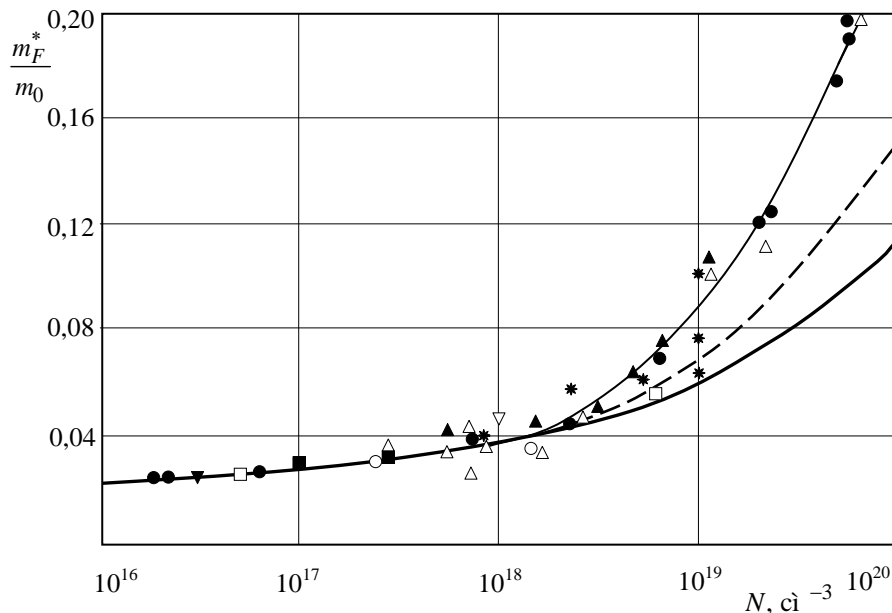


Рис.4. Залежність ефективної маси електронів від концентрації для InAs [8, С.487] та  $(\text{InAs})_x(\text{CdTe})_{1-x}$  (зірочки) для  $T = 296 \text{ K}$

На рис.4 I і II – теоретичні криві, розраховані відповідно без урахування впливу вище розташованих зон (I) та з урахуванням цього впливу (II). Як видно з рисунку, для InAs врахування впливу вищих енергетичних зон не дозволяє узгодити теоретичні розрахунки з експериментом. Разом з тим ефективна маса електронів в зразку 7, який містить 1,0 мол.% CdTe, знаходиться між теоретичними кривими I і II, після чого починає зростати (зразок 8; 2,5 мол.% CdTe) і, нарешті, виходить на експериментальну залежність ефективної маси електронів від концентрації для легованого InAs (зразок 9; 3,5 мол.% CdTe).

Важливо зазначити, що у зразках 7, 8, 9 концентрація електронів практично однакова:  $(1,0 \div 1,1) \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Тому залежність ефективної маси електронів в ТР  $(\text{InAs})_x(\text{CdTe})_{1-x}$  не концентраційна, а обумовлена, імовірно, тією обставиною, що при вмісті CdTe  $\sim (1,0 \div 1,5)$  мол.% відбуваються зміни в структурі зони провідності твердих розчинів.

На користь такого припущення свідчить ФО в зразку із вмістом телуриду кадмію 1,5 мол.% ( $N = 1,1 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ,  $U = 1970 \frac{\text{мВ}}{\text{А} \cdot \text{см}}$ , дбн.5).

В цьому зразку має місце міжзонний ефект Фарадея, в спектрі якого спостерігається максимум, близький до  $E_g$ . Максимум відповідає енергії 0,31 еВ, в той час як ширина забороненої зони у вихідному InAs при  $T = 296$  К дорівнює 0,35 еВ [7].

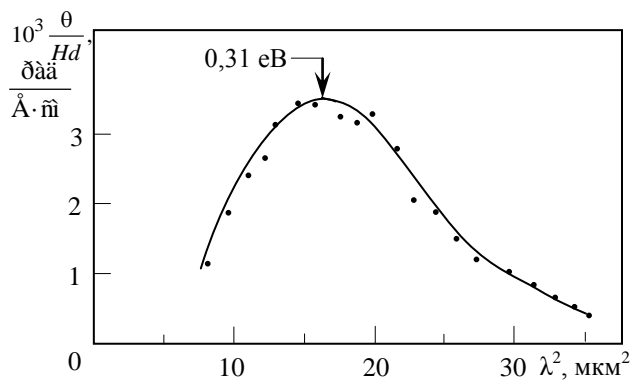


Рис.5. Спектральна залежність ФО в твердому розчині  $(\text{InAs})_{0,985}(\text{CdTe})_{0,015}$  для  $T = 296$  К

Для InAs внесок в міжзонний ефект Фарадея зі станів зони легких дірок та спин-орбітально відщепленої зони від'ємний, в той час як переходи зі станів зони важких дірок спричиняють додатне обертання. При збільшенні енергії фотонів і наближенні її до  $\hbar\omega \sim E_g$  різко зростає внесок переходів з найменшими енергіями. Для InAs та твердих розчинів на його основі в області малих концентрацій другого компонента оптичними переходами з найменшими енергіями в магнітному полі є переходи зі станів зони легких дірок. В кожному конкретному випадку знак фарадеївського обе-

рнання визначається значенням зонних параметрів даного матеріалу і заповненням рівнів носіями заряду [11]. Тому можна припустити, що в області частот  $\hbar\omega \sim E_g$  в TP  $(\text{InAs})_{0,985}(\text{CdTe})_{0,015}$  за рахунок раніше проаналізованих чинників реалізується такий набір зонних параметрів, при яких починають переважати переходи із зони легких дірок над переходами із зони важких дірок, що і обумовлює інверсію знака ФО.

Починаючи з концентрації  $\sim 3,5$  мол.% CdTe взаємодія між зонами, яка розглядалася вище, імовірно, припиняється, що свідчить про утворення „власне” твердих розчинів.

Насамкінець автор вважає приємним обов'язком подякувати члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Сізову Ф.Ф. (інститут фізики напівпровідників НАН України, м. Київ) за сприяння у проведенні свого часу вимірювань ЕФ в TP  $(\text{InAs})_x(\text{CdTe})_{1-x}$ .

### Література

1. Зонная структура твердых растворов типа АЗВ5-А2В6. I. Оптические свойства твердых растворов InAs – CdTe, обусловленные взаимодействием света со свободными носителями тока / Н.А. Семиколенова, Э.Н. Хабаров // Известия высших учебных заведений СССР. Серия «Физика». – 1973. - № 6. – С. 76-82.
2. Зонная структура твердых растворов типа АЗВ5-А2В6. II. Край собственного поглощения в сильно легированном InAs n – типа и в твердых растворах InAs – CdTe / Н.А. Семиколенова, Э.Н. Хабаров // Известия высших учебных заведений СССР. Серия «Физика». – 1973. - № 6. – С. 82-88.
3. Исследование упорядочения твердых растворов  $(\text{InAs})_x(\text{CdTe})_{1-x}$  и  $(\text{InSb})_x(\text{CdTe})_{1-x}$  по межзонному оптическому поглощению / Н.А. Семиколенова, Л.А. Скоробогатова, Э.Н. Хабаров // Физика и техника полупроводников. – 1974. – т.8, в.8. – С. 1498-1501.
4. Аніщенко В.О. Визначення деяких фізичних параметрів сплавів InAs – CdTe з спектральних залежностей коефіцієнта відбивання / В.О. Аніщенко, М.Г. Вялий, Т.М. Канівець, О.С. Шелест // Наукові записки НДУ ім. М.В. Гоголя. т. XV. Серія фізико-математичних наук: Збірник наукових праць. – Ніжин: НДП ім. М.В. Гоголя, 1994. – С. 66-69.
5. Устройство для прецизионного измерения угла вращения плоскости поляризации света / Ф.Ф. Сизов, Г.В. Лашкарев // Труды республиканской конференции по научному приборостроению. – Киев. – 1974, вып. 1. – С. 54-55.
6. Влияние неоднородности образца на спектральный ход инфракрасного эффекта Фарадея / А.Ф. Кравченко, Ю.П. Машуков // Известия высших учебных заведений СССР. Серия «Физика». – 1971. - № 4. – С. 100-103.

7. Маделунг О. Физика полупроводниковых соединений элементов III и V групп / О. Маделунг. – М.: Мир, 1967. – 477 с.
8. Цидильковский И.М. Электроны и дырки в полупроводниках / И.М. Цидильковский. – М.: Наука, 1972. – С. 487.
9. Экспериментальное исследование донорно-акцепторного взаимодействия в твердом растворе на основе InAs / В.М. Глазов, В.А. Ненашев // Физика и техника полупроводников. – 1973. – Т. 7, № 11. – С. 2212.
10. Кнорозок Л. М. Деформаційні зміни кристалічної ґратки і енергетичного спектру електронної підсистеми антимоніду індію при подвійному легуванні: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.04.10 «Фізика напівпровідників та діелектриків» / Л. М. Кнорозок. – К., 1999. – с. 17.
11. Сизов Ф.Ф. Магнетооптические эффекты Фарадея и Фогта в применении к полупроводникам / Сизов Ф.Ф., Уханов Ю.И. – К: «Наукова думка», 1979. – 178с.

УДК 373.5.016:53

## ВИЗНАЧЕННЯ ГУСТИНИ ТВЕРДИХ ТІЛ МЕТОДОМ «ЗАВИСАННЯ»

**Є.Ф. Венгер, Л.Ю. Мельничук, Я.О. Мельничук, І.І.Тищенко**

Як відомо, густину твердого тіла можна визначити кількома незалежними методами: методом гідростатичного зважування, методом пікнометра, за допомогою геометричних вимірювань та зважування [1 – 5]. Але є ще один малоуживаний метод визначення густини твердих тіл, який називається методом зависання [1, 3]. Автором цього маловідомого методу є Роджественський Дмитро Сергійович – видатний російський учений-фізик [6 – 8].

Метод зависання має велике значення в мінералогії для визначення густини маленьких кристалів або кусочків мінералів [9].

Недоліком є те, що таким методом можна визначити густину твердих тіл у певних межах. Під час дослідів використовують різні рідини з різними густинами. Так, зокрема, для мінералів, густина яких перевищує  $2000 \text{ кг/м}^3$ , потрібно брати рідини великої густини, наприклад, хлороформ ( $1500 \text{ кг/м}^3$ ), йодистий метилен ( $3300 \text{ кг/м}^3$ ) тощо. Для визначення густини смоли, каніфолі, янтаря та інших речовин, густина яких трохи більша за густину води, беруть, зазвичай, дистильовану воду і концентрований розчин кухонної солі (або концентрований розчин мідного купоросу).

Метою даної роботи є визначення густини твердих тіл – каніфолі та янтарю – за допомогою методу зависання та порівняння результатів із даними, отриманими іншими методами.

Ідея методу зависання полягає в тому, що необхідно підібрати такий розчин рідин, густина якого б збігалася із густиною досліджуваного тіла [3, 6].

Реалізація методу відбувається наступним чином. Потрібно змішати дві рідини, одна з яких має густину меншу, ніж досліджуване тіло, а друга рідина, навпаки, має більшу густину за густину досліджуваного тіла. Якщо густина суміші рідин при їх змішуванні дорівнюватиме густині твердого тіла, то занурене в цю рідину досліджуване тіло «зависатиме» в ній, тобто перебуватиме у стані рівноваги.

Для визначення густини твердого тіла (незначної густини) необхідно мати пусту скляну посудину, посудину з дистильованою водою, посудину з концентрованим розчином кухонної солі, а також скляну паличку для перемішування.

В якості досліджуваного тіла візьмемо легкий мінерал: янтар, каніфоль тощо. Опустимо його у скляну посудину з дистильованою водою. Він звичайно опуститься на дно згідно умов плавання, оскільки має густину, більшу за густину дистильованої води (рис. 1). При опусканні у розчин кухонної солі янтар (чи каніфоль) розміститься на його поверхні.

Наллємо у пусту скляну посудину дистильованої води, а потім доливатимемо до неї порціями розчин кухонної солі. Після кожного доливання розчин необхідно добре перемішувати склянкою паличкою, щоб досягнути повної однорідності суміші у всьому об'ємі рідини. Щоб швидше і точніше підібрати суміш рідин потрібної густини, необхідно поступово все менше й менше доливати в суміш дистильованої води або концентрованого розчину солі (наприклад,



спочатку доливати по 20 крапель, потім по 10, далі по 5 і, нарешті, по 1 краплі). Після кожного доливання суміш рідин слід перемішувати скляною паличкою до досягнення сумішшю однорідності. При необхідності за допомогою пензлика зняти всі бульбашки повітря, що прилипли до зануреного в рідину тіла, оскільки їх наявність збільшить похибку вимірювань. Температуру суміші протягом досліду потрібно підтримувати сталою. При поступовому збільшенні концентрації розчину спостерігатиметься зависання тіла в утвореному розчині.

Таким чином, ми отримаємо розчин, густина якого збігатиметься з густиною досліджуваного твердого тіла (янтар, каніфоль). Визначивши густину утвореного розчину (ареометром, методом пікнометра тощо), тим самим визначимо густину тіла – янтарю, каніфолі тощо.



Рис. 1. Каніфоль і янтар у воді.



Рис. 2. Каніфоль і янтар у розчині NaCl.

Точність визначення густини твердих тіл методом зависання дуже висока (іноді перевищує  $0,01 \text{ кг/м}^3$ ).

На рис. 3 представлено результат «зависання» досліджуваних тіл у розчинах відповідної їм густини. Даний експеримент є простим у виконанні з досить переконливим ефектом наглядності і результативності.

Результати визначення густин твердих тіл методом зависання у порівнянні із довідковими даними [10] подано в табл. 1.

Таблиця 1

Результати визначення густини досліджуваних тіл при  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

Досліджуване тіло	Каніфоль		Янтар	
	Ареометр	Пікнометр	Ареометр	Пікнометр
$\rho_{\text{експ}}, \text{ кг/м}^3$	1065	1071,8	1080	1078,5
$\rho_{\text{табл}}, \text{ кг/м}^3$	1070 – 1100		1050 – 1090	



**Рис. 3.** «Зависання» каніфолі та янтаря у розчині вода + NaCl.

У табл. 2 вказано відповідно об'єм дистильованої води та розчину кухонної солі для відтворення проведеного нами експерименту.

Таблиця 2

Об'ємне співвідношення рідин для спостереження «зависання» каніфолі та янтаря у їх розчині

Об'єм, см <sup>3</sup>	
Дистильована вода	Насичений розчин NaCl
Для каніфолі	
321	179
Для янтаря	
310	190

Слід відмітити, що каніфоль і янтар є найбільш доступними і безпечними матеріалами для проведення описаних досліджень. Дані досліди є досить простими і наглядними, а їх аналіз дозволяє значно розширити уявлення учнів про густину рідин і твердих тіл та їх взаємозв'язок, про умови плавання тіл тощо. Крім того, цей експеримент є досить корисним при проведенні факультативних занять, гуртків із фізики, у разі проведення практичних конференцій тощо.

Згідно [11], «для реалізації творчого акту у процесі навчання потрібно добитися, щоб був наявним елемент суб'єктивної новизни». Саме наявна суб'єктивна новизна сприяє розвитку творчих здібностей, здатності приймати нестандартні рішення, а отже, практичному застосуванню набутих знань [12 – 14].

Встановлено, що найефективніший вплив на мораль учнів чинить такий навчальний матеріал, котрий має екологічний зміст, який показує історію розвитку науки [15]. На думку авторів, дана тема у повній мірі відповідає зазначеним критеріям висвітлення гуманного характеру фізики, як науки.

**Література**

1. Венгер Є.Ф., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В. Механіка. Лабораторний практикум: Навч. посібник. – Ніжин: Видавництво НДУ ім. М. Гоголя, 2011. – 250 с.
2. Загальна фізика: Лабораторний практикум: Навч. посібник / В.М. Барановський, П.В. Бережний, І.Т. Горбачук та ін.; За заг. ред. І.Т.Горбачука. – К.: Вища шк., 1992. – 509 с.
3. Чепур Д.В., Сірий Є.І., Росєв Л.М. Загальний фізичний практикум: Ч. І: Механіка: Навч. посібник / Під заг. ред. Д.В. Чепура, Є.І. Сірого. – Львів: Видавництво Львівського університету, 1963. – 192 с.
4. Бойко М.П., Венгер Є.Ф., Мельничук О.В. Фізика, 7 кл.: Підруч. для загальноосвіт. навч. закл. – 2-е вид. –К.: Академперіодика, 2011. – 232 с.
5. Коршак Є.В., Ляшенко О.І., Савченко В.Ф. Фізика, 7 кл.: Підруч. для загальноосвіт. навч. закл. – 2-е вид., перероб. та доп. – Київ; Ірпінь: ВТФ «Перун», 2002. – 168 с.
6. Осиновский А. Н., Кононов А.Ф. Д.С. Рождественский. – М.: Просвещение, 1974. – 109 с. – (Люди науки).
7. Гуло Д.Д., Осиновский А.Н. Дмитрий Сергеевич Рождественский (К 100-летию со дня рождения) // Фізика в школі. – 1976. – № 3. – С. 17 – 23.
8. Храмов Ю.А. Физики: Биографический справочник / Под ред. А.И. Ахиезера. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1983. – Из содерж.: Рождественский Д.С. – С. 235.
9. Кац Ц.Б. К опытам по плаванию тел // Фізика в школі. – 1981. – № 2. – С. 57 – 58.
10. Енохович А.С. Справочник по физике. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1990. – 384 с.
11. Разумовский В.Г. Развитие творческих способностей учащихся в процессе обучения физики: Пособие. – М.: Просвещение, 1975. – 272 с.
12. Давиденко А. Розвиток творчих здібностей учнів при складанні баз даних можливості застосування в техніці фізичних явищ // Фізика та астрономія в школі. – № 1. – 2008. – С. 29 – 32.
13. Давиденко А.А. Методика розвитку творчих здібностей учнів у процесі навчання фізики (теоретичні основи). – Ніжин: ТОВ «Аспект-Поліграф», 2004. – 264 с.
14. Терещук С. Розвиток критичного мислення учнів на уроках фізики в старшій школі // Фізика та астрономія в школі. – № 1. – 2008. – С. 13 – 17.
15. Клименко Л. Виховання гуманної особистості під час вивчення фізики // Фізика. – 2002. – Травень. – № 13 (133). – С. 1 – 2.

# 3 Інформатика

УДК 007

## ПОДАННЯ ПОНЯТТЯ «ІНФОРМАЦІЯ»

**В.В. Іванов**

Інформація (лат. *informatio*) належить категорії первинних понять, як *матерія, енергія, час, простір* тощо.

Постулатна природа поняття інформації пояснює деяку суб'єктивність галузевих визначень. З точки зору медіа природно розглядати переважно семантичну складову інформації. Для представників інших галузей більш пріоритетними можуть бути: вірогідність, повнота, корисність, актуальність інформації тощо.

Суб'єктивно ми сприймаємо інформацію як відомості, що формують наші знання про навколишній світ. Здоровий глузд і життєвий досвід дозволяють загалом успішно використовувати поняття інформації на побутовому рівні, навіть не визначаючи його. Наука і освіта, зрозуміло, вимагають його визначення. Різні галузі людської діяльності продукують свої визначення поняття інформації. Наприклад, інформація це:

- повідомлення про стан справ, про стан чогось (преса, радіо, телебачення, кіно);
- сукупність спадкових ознак, переданих від клітини до клітини, від організму до організму (генетика);
- документовані або публічно оголошені відомості про події та явища, що мали або мають місце у суспільстві, державі та навколишньому середовищі (право, політика, інші соціальні науки);
- відомості про навколишній світ і процеси у ньому, що сприймаються людиною або спеціальним пристроєм (кібернетика).

У царині інформаційних технологій предметом є інформаційні ресурси (інформація як товар, матеріал, інструмент) і інформаційні процеси (передача, отримання, опрацювання і збереження інформації), які оперують величинами (одиниці виміру і кількість інформації, інформаційна ємність, пропускна спроможність тощо). Це вимагає відповідного, а саме, кількісного подання поняття інформації.

Наступні тези для вступних лекцій з комп'ютерних дисциплін сформульовані на базі визначень понять теорій інформації і зв'язку.

Інформація – первинна категорія, що має абстрактну і матеріальну суть.

Інформація – це відомості у формі сигналів.

Сигнал – це зміни певних властивостей матеріальних об'єктів чи процесів у просторі чи часі.

Сигнал – це матеріальний носій нематеріальних (абстрактних) відомостей.

Сигнали, а рівно, інформація можуть бути:

- аналоговими і дискретними;
- часовими і просторовими;
- одно- і багатовимірними;
- різними за фізичною природою: механічними, електричними, електромагнітними, магнітними тощо.

Одні і ті ж відомості можуть існувати на різних сигналах.

Інформаційні процеси це рух відомостей через перетворення сигналів.

При перетворенні аналогових сигналів відомості можуть втрачатися.

При перетворенні аналогових сигналів у дискретні відомості кодуються відповідно до мови, що діє у системі джерело + канал + одержувач. Мова має алфавіт і правила (лексичні, синтаксичні). Алфавіт мови комп'ютера – два символи: 0 і 1 (два сигнали: високий і низький електричний потенціал).

Дискретні сигнали несуть кодовану інформацію.

При перетворенні дискретних сигналів відомості не втрачаються.

Кодована (дискретна) інформація (гени, тексти) складає основу інформаційного ресурсу людства і запорукою його прогресу.

Інформація має смисл у системі: джерело – канал – одержувач (суспільство, репродуктивна система життя, комп'ютер). Інформація виникає, коли одержувач потребує відомостей. Потреба відомостей вимірюється невизначеністю.

Невизначеність – це кількість можливих (очікуваних) рівноймовірних подій (сигналів). Реалізація будь-якої з них (приход одного з можливих сигналів) приносить інформацію, що ліквідує невизначеність. Тобто, інформація, як величина (скаляр), є мірою зменшення невизначеності.

Найменша невизначеність дорівнює 2 – це очікування реалізації однієї з двох рівноймовірних подій (результат підкидання монети, відповідь на питання: так чи ні?, ліворуч чи праворуч? тощо). Інформація, що ліквідує таку невизначеність зменшує її вдвоє.

Одиниця виміру інформації (1 біт) це величина інформації, що зменшує невизначеність вдвоє.

Інформація – це відомості у формі сигналів.

Інформація (лат. informatio) – відомості (абстрактна компонента).

Інформація має смисл у системі: джерело+канал+одержувач (суспільство, репродуктивна система життя, комп'ютер тощо).

Інформація, як наукова категорія, – це величина (скаляр), що є мірою зменшення невизначеності.

Одиниця виміру інформації (1 біт) є порція інформації, що зменшує невизначеність вдвоє.

***Сигнал – це зміни певних властивостей матеріальних об'єктів чи процесів у часі чи просторі.***

Сигнал – це матеріальний носій нематеріальних відомостей.

Сигнали, а рівно, інформація можуть бути:

аналоговими і дискретними;

часовими і просторовими;

одно- і багатовимірними;

різними за фізичною природою: механічними, електричними, електромагнітними, магнітними тощо.

Одні і ті ж відомості можуть існувати на різних сигналах.

Предметом інформатики є інформаційні процеси, як процеси руху відомостей через перетворення сигналів.

При перетворенні аналогових сигналів відомості можуть втрачатися.

При перетворенні аналогових сигналів у дискретні відомості кодуються відповідно до мови, що діє у системі джерело+канал+одержувач.

Мова має алфавіт і правила (лексичні, синтаксичні тощо).

Дискретні сигнали несуть кодовану інформацію.

При перетворенні дискретних сигналів відомості не втрачаються.

УДК 004.655

## **РОЗШИРЕНА МУЛЬТИМНОЖИННА ТАБЛИЧНА АЛГЕБРА**

**Д.Б. Буй, І.М. Глушко**

Реляційна модель даних в теперішній час широко використовується як у наукових дослідженнях в базах даних, так на практиці. Дана модель базується на множинах кортежів, тобто не дозволяє дублювати кортежів у відношенні [1]. Проте багато мов, орієнтованих на роботу з базами даних, вимагають реляційну модель даних з мультимножинною семантикою (multi-set semantics), що передбачає розуміння таблиць як мультимножин, тобто сукупностей з дублікатами. Питанню використання мультимножин в базах даних приділяли увагу G. Lamperti,

М. Melchiori, М. Zanella [2], Г. Гарсія-Моліна, Дж. Ульман, Дж. Уидом [3], а також вітчизняні науковці Д.Б. Буй, С.А. Поляков [4]. Разом з тим, це питання вимагає уточнення і розширення.

Розглянемо дві множини:  $A$  – множину атрибутів і  $D$  – універсальний домен. Довільну скінченну множину атрибутів  $R \subseteq A$  назвемо схемою. Рядком схеми  $R$  називається іменна множина на парі  $R, D$ , проєкція якої за першою компонентою рівна  $R$ . Множину всіх рядків схеми  $R$  позначимо  $S(R)$ , а множину всіх рядків –  $S$ .

Під таблицею розуміємо пару  $\langle \psi, R \rangle$ , де перша компонента  $\psi$  – це довільна мультимножина, зокрема, нескінченна, основою якої  $\Theta(\psi)$  є довільна множина рядків однієї схеми, а друга компонента  $R$  – схема таблиці.

Під мультимножинною табличною алгеброю розуміємо алгебру  $\langle \Psi, \Omega_{P, \Xi} \rangle$ , де  $\Psi = \bigcup_{R \subseteq A} \Psi(R)$  – множина усіх таблиць,  $\Psi(R)$  – множина усіх таблиць схеми  $R$ ,

$\Omega_{P, \Xi} = \left\{ \bigcup_{All}^R, \bigcap_{All}^R, \setminus_{All}^R, \sigma_{p,R}, \pi_{X,R}, \otimes_{R_1, R_2}, Rt_{\xi,R}, \sim_R \right\}_{\substack{p \in P, \xi \in \Xi \\ X, R, R_1, R_2 \subseteq A}}$  – сигнатура,  $P, \Xi$  – множини параметрів.

Операції мультимножинної табличної алгебри задано в [5].

Поповнимо сигнатуру мультимножинної табличної алгебри новими операціями: операціями внутрішніх і зовнішніх з'єднань, операцією напівз'єднання, агрегатними операціями.

#### Операції внутрішнього з'єднання.

Під декартовим з'єднанням таблиць схем  $R_1$  та  $R_2$ , причому  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ , розуміється бінарна параметрична операція вигляду  $Cj_{R_1, R_2} : \Psi(R_1) \times \Psi(R_2) \rightarrow \Psi(R_1 \cup R_2)$ ,

$\langle \psi_1, R_1 \rangle Cj_{R_1, R_2} \langle \psi_2, R_2 \rangle = \langle \psi', R_1 \cup R_2 \rangle$ , де  $\langle \psi_1, R_1 \rangle \in \Psi(R_1)$ ,  $\langle \psi_2, R_2 \rangle \in \Psi(R_2)$ . Основою мультимножини  $\psi'$  є множина рядків  $\Theta(\psi') = \{s \mid \exists s_1 \exists s_2 (s_1 \in \Theta(\psi_1) \wedge s_2 \in \Theta(\psi_2) \wedge s = s_1 \cup s_2)\}$ . Кількість дублікатів знаходиться так:  $Osc(s, \psi') = Osc(s_1, \psi_1) \cdot Osc(s_2, \psi_2)$ , де  $s \in \Theta(\psi')$  і  $s = s_1 \cup s_2$ .

Під внутрішнім природним з'єднанням таблиць схем  $R_1$  та  $R_2$  розуміється бінарна параметрична операція  $\otimes_{R_1, R_2}$ , значеннями якої є таблиці схеми  $R_1 \cup R_2$ , що складаються з усяких об'єднань сумісних рядків вихідних таблиць. Таким чином,  $\otimes_{R_1, R_2} : \Psi(R_1) \times \Psi(R_2) \rightarrow \Psi(R_1 \cup R_2)$ ,

$\langle \psi_1, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle \psi_2, R_2 \rangle = \langle \psi', R_1 \cup R_2 \rangle$ , де  $\langle \psi_1, R_1 \rangle \in \Psi(R_1)$ ,  $\langle \psi_2, R_2 \rangle \in \Psi(R_2)$ . Основою мультимножини  $\psi'$  є множина рядків  $\Theta(\psi') = \{s \mid \exists s_1 \exists s_2 (s_1 \in \Theta(\psi_1) \wedge s_2 \in \Theta(\psi_2) \wedge s_1 \approx s_2 \wedge s = s_1 \cup s_2)\}$ . Кількість дублікатів знаходиться так:  $Osc(s, \psi') = Osc(s_1, \psi_1) \cdot Osc(s_2, \psi_2)$ , де  $s \in \Theta(\psi')$  і  $s = s_1 \cup s_2$ .

Під внутрішнім з'єднанням за атрибутами  $A_1, \dots, A_n$ , причому всі  $A_1, \dots, A_n$  попарно різні,  $n \geq 1$ , таблиць схем  $R_1$  та  $R_2$ , де  $R_1 \cap R_2 = \{A_1, \dots, A_n\}$  розуміється бінарна параметрична операція вигляду  $\otimes_{A_1, \dots, A_n, R_1, R_2} : \Psi(R_1) \times \Psi(R_2) \rightarrow \Psi(R_1 \cup R_2)$ ,  $\langle \psi_1, R_1 \rangle \otimes_{A_1, \dots, A_n, R_1, R_2} \langle \psi_2, R_2 \rangle = \langle \psi', R_1 \cup R_2 \rangle$ , де  $\langle \psi_1, R_1 \rangle \in \Psi(R_1)$ ,  $\langle \psi_2, R_2 \rangle \in \Psi(R_2)$ .

Основою мультимножини  $\psi'$  є множина рядків

$\Theta(\psi') = \left\{ s \mid \exists s_1 \exists s_2 \left( s_1 \in \Theta(\psi_1) \wedge s_2 \in \Theta(\psi_2) \wedge \bigwedge_{i=1}^n s_1(A_i) = s_2(A_i) \wedge s = s_1 \cup s_2 \right) \right\}$ . Кількість дублікатів знаходиться так:  $Osc(s, \psi') = Osc(s_1, \psi_1) \cdot Osc(s_2, \psi_2)$ , де  $s \in \Theta(\psi')$  і  $s = s_1 \cup s_2$ .

Значимо, якщо таблиці-аргументи мають ще й інші спільні атрибути, які відрізняються від атрибутів  $A_1, \dots, A_n$ , перед з'єднанням їх потрібно перейменувати.

Нехай  $p : S \times S \rightarrow \{true, false\}$  – частковий бінарний предикат на множині всіх рядків  $S$ , такий, що виконується імплікація  $\forall s_1 \forall s_2 ((s_1, s_2) \in \text{dom } p \wedge p(s_1, s_2) = true \Rightarrow s_1 \approx s_2)$ .

Під внутрішнім з'єднанням за предикатом  $p$  таблиць схем  $R_1$  та  $R_2$  розуміється часткова бінарна параметрична операція вигляду  $\otimes_{p, R_1, R_2} : \Psi(R_1) \times \Psi(R_2) \xrightarrow{\sim} \Psi(R_1 \cup R_2)$ ,  $\text{dom } \otimes_{p, R_1, R_2} = \{ \langle \langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle \rangle \mid \psi_1 \times \psi_2 \subseteq \text{dom } p \}$ ,  $\langle \psi_1, R_1 \rangle \otimes_{p, R_1, R_2} \langle \psi_2, R_2 \rangle = \langle \psi', R_1 \cup R_2 \rangle$ . Основою мультимножини  $\psi'$  є множина рядків  $\Theta(\psi') = \{ s \mid \exists s_1 \exists s_2 (s_1 \in \Theta(\psi_1) \wedge s_2 \in \Theta(\psi_2) \wedge p(s_1, s_2) \simeq \text{true} \wedge s = s_1 \cup s_2) \}$ . Кількість дублікатів знаходиться так:  $\text{Occ}(s, \psi') = \text{Occ}(s_1, \psi_1) \cdot \text{Occ}(s_2, \psi_2)$ , де  $s \in \Theta(\psi')$  і  $s = s_1 \cup s_2$ . Зрозуміло, що пара таблиць  $\langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle$  належить вказаній області означеності.

Операція природного з'єднання  $\otimes_{R_1, R_2}$  є розширенням довільної іншої операції з'єднання в наступному розумінні:

$$\langle \psi_1, R_1 \rangle \underset{R_1, R_2}{Cj} \langle \psi_2, R_2 \rangle = \langle \psi_1, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle \psi_2, R_2 \rangle, \quad \langle \psi_1, R_1 \rangle \underset{A_1, \dots, A_n, R_1, R_2}{\otimes} \langle \psi_2, R_2 \rangle = \langle \psi_1, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle \psi_2, R_2 \rangle,$$

$$\left( \langle \psi_1, R_1 \rangle \otimes_{p, R_1, R_2} \langle \psi_2, R_2 \rangle \right)_1 \preceq \left( \langle \psi_1, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle \psi_2, R_2 \rangle \right)_1,$$

за умови визначення значень операцій у лівих частинах цих двох рівностей та включення (де  $\preceq$  – відношення включення мультимножин [6]).

Під операцією напівз'єднання двох таблиць схем  $R_1$  та  $R_2$  розуміється бінарна параметрична операція  $\bowtie_{R_1, R_2}$ , значенням якої є таблиця схеми  $R_1$ , що містить ті рядки першої таблиці, які входять у (природне) з'єднання таблиць-аргументів. Таким чином,  $\bowtie_{R_1, R_2} : \Psi(R_1) \times \Psi(R_2) \rightarrow \Psi(R_1)$ ,  $\langle \psi_1, R_1 \rangle \bowtie_{R_1, R_2} \langle \psi_2, R_2 \rangle = \langle \psi', R_1 \cup R_2 \rangle$ , де  $\langle \psi_1, R_1 \rangle \in \Psi(R_1)$ ,  $\langle \psi_2, R_2 \rangle \in \Psi(R_2)$ . Основою мультимножини  $\psi'$  є множина рядків  $\Theta(\psi') = \{ s_1 \mid \exists s_2 (s_1 \in \Theta(\psi_1) \wedge s_2 \in \Theta(\psi_2) \wedge s_1 \approx s_2) \}$ . Кількість дублікатів знаходиться так:  $\text{Occ}(s, \psi) = \text{Occ}(s, \psi_1)$ , де  $s \in \Theta(\psi')$ .

#### Операції зовнішнього з'єднання.

При застосуванні операцій внутрішнього з'єднання можлива втрата інформації, оскільки рядки однієї таблиці, які не з'єднуються з рядками іншої таблиці, не будуть включені в результуючу таблицю. В тих випадках, коли необхідно врахувати рядки таблиць-аргументів, які не попали в результат вихідного внутрішнього з'єднання, використовують операції зовнішнього з'єднання.

Для позначення відсутніх значень у результуючій таблиці використовуємо особливий елемент універсального домену  $NULL$ . Позначимо через  $s_R^{NULL}$  константний рядок схеми  $R$ , тобто  $s_R^{NULL} : R \rightarrow \{ NULL \}$ .

Використаємо логічну схему задання операцій зовнішнього з'єднання [6]. Нехай  $\varphi : \Psi(R_1) \times \Psi(R_2) \xrightarrow{\sim} \Psi(R_1 \cup R_2)$  – деяка часткова бінарна операція на множині таблиць, причому

виконується включення  $\left( \varphi(\langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle) \right)_1 \preceq \left( \langle \psi_1, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2} \langle \psi_2, R_2 \rangle \right)_1$  для всіх  $\langle \langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle \rangle \in \text{dom } \varphi$ . Зауважимо, що операції  $\underset{R_1, R_2}{Cj}$ ,  $\otimes_{R_1, R_2}$ ,  $\otimes_{A_1, \dots, A_n, R_1, R_2}$ ,  $\otimes_{p, R_1, R_2}$  саме такі.

Зафіксуємо таблиці  $\langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle$  з області означеності операції  $\varphi$ . Тоді таблиця  $\langle \psi_1, R_1 \rangle$  припускає наступне представлення:  $\langle \psi_1, R_1 \rangle = \left\langle \psi_1 \cap_{\varphi} \psi_2, R_1 \right\rangle \cup_{All}^{R_1} \left\langle \psi_1 -_{\varphi} \psi_2, R_1 \right\rangle$ , де  $\left\langle \psi_1 \cap_{\varphi} \psi_2, R_1 \right\rangle = \langle \psi', R_1 \rangle$ , основою мультимножини  $\psi'$  є множина рядків

<sup>1</sup>Запис  $\left( \langle \psi, R \rangle \right)_1$  позначає першу компоненту пари  $\langle \psi, R \rangle$ , тобто мультимножину  $\psi$ .

$\Theta(\psi') = \{s_1 \mid s_1 \in \Theta(\psi_1) \wedge \exists s_2 (s_2 \in \Theta(\psi_2) \wedge s_1 \cup s_2 \in \Theta(\langle \varphi(\langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle)_1))\}$ , а кількість дублікатів  $Occ(s_1, \psi') = Occ(s_1, \psi_1)$ ,  $s_1 \in \Theta(\psi')$  та  $\langle \psi_1 - \psi_2, R_1 \rangle = \langle \psi', R_1 \rangle$ , основою мультимножини  $\psi'$  є множина рядків  $\Theta(\psi'') = \{s_1 \mid s_1 \in \Theta(\psi_1) \wedge \forall s_2 (s_2 \in \Theta(\psi_2) \Rightarrow s_1 \cup s_2 \notin \Theta(\langle \varphi(\langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle)_1))\}$ , а кількість дублікатів знаходиться так:  $Occ(s_1, \psi'') = Occ(s_1, \psi_1)$ , де  $s_1 \in \Theta(\psi'')$ .

Іншими словами, рядки з таблиці  $\langle \psi_1 \cap \psi_2, R_1 \rangle$  використовуються в формуванні результату з'єднання, а рядки з таблиці  $\langle \psi_1 - \psi_2, R_1 \rangle$  не використовуються. Представлення таблиці  $\langle \psi_2, R_2 \rangle$  отримаємо, замінивши ролі таблиць  $\langle \psi_1, R_1 \rangle$  і  $\langle \psi_2, R_2 \rangle$  у представленні таблиці  $\langle \psi_1, R_1 \rangle$ .

Задамо чотири операції зовнішнього з'єднання, індуковані операцією внутрішнього з'єднання  $\varphi$ . Для цього розглянемо наступні природні з'єднання:  $\langle \psi_1 - \psi_2, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2 \setminus R_1} \langle \{s_{R_2 \setminus R_1}^{NULL}\}, R_2 \setminus R_1 \rangle = \langle \psi', R_1 \cup R_2 \rangle$ , де основою мультимножини  $\psi'$  є множина рядків  $\Theta(\psi') = \{s_1 \cup s_{R_2 \setminus R_1}^{NULL} \mid s_1 \in \Theta(\psi_1 - \psi_2)\}$ , а кількість дублікатів  $Occ(s', \psi') = Occ(s_1, \psi_1 - \psi_2)$ ,  $s' \in \Theta(\psi')$  і  $s' = s_1 \cup s_{R_2 \setminus R_1}^{NULL}$  та  $\langle \psi_2 - \psi_1, R_2 \rangle \otimes_{R_2, R_1 \setminus R_2} \langle \{s_{R_1 \setminus R_2}^{NULL}\}, R_1 \setminus R_2 \rangle = \langle \psi'', R_1 \cup R_2 \rangle$ , де основою мультимножини  $\psi''$  є множина рядків  $\Theta(\psi'') = \{s_{R_1 \setminus R_2}^{NULL} \cup s_2 \mid s_2 \in \Theta(\psi_2 - \psi_1)\}$ , а кількість дублікатів  $Occ(s'', \psi'') = Occ(s_2, \psi_2 - \psi_1)$ ,  $s'' \in \Theta(\psi'')$  і  $s'' = s_{R_1 \setminus R_2}^{NULL} \cup s_2$ .

Під зовнішнім лівим з'єднанням, індукованим операцією  $\varphi$ , розуміється часткова бінарна операція вигляду  $\varphi_l : \Psi(R_1) \times \Psi(R_2) \xrightarrow{\sim} \Psi(R_1 \cup R_2)$ , де  $\text{dom } \varphi_l = \text{dom } \varphi$ ,  $\varphi_l(\langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle) = \varphi(\langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle) \cup_{All}^{R_1 \cup R_2} \langle \psi_1 - \psi_2, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2 \setminus R_1} \langle \{s_{R_2 \setminus R_1}^{NULL}\}, R_2 \setminus R_1 \rangle$ .

Під зовнішнім правим з'єднанням, індукованим операцією  $\varphi$ , розуміється часткова бінарна операція вигляду  $\varphi_r : \Psi(R_1) \times \Psi(R_2) \xrightarrow{\sim} \Psi(R_1 \cup R_2)$ , де  $\text{dom } \varphi_r = \text{dom } \varphi$ ,  $\varphi_r(\langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle) = \varphi(\langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle) \cup_{All}^{R_1 \cup R_2} \langle \psi_2 - \psi_1, R_2 \rangle \otimes_{R_2, R_1 \setminus R_2} \langle \{s_{R_1 \setminus R_2}^{NULL}\}, R_1 \setminus R_2 \rangle$ .

Під повним зовнішнім з'єднанням, індукованим операцією  $\varphi$ , розуміється часткова бінарна операція вигляду  $\varphi_f : \Psi(R_1) \times \Psi(R_2) \xrightarrow{\sim} \Psi(R_1 \cup R_2)$ , де  $\text{dom } \varphi_f = \text{dom } \varphi$ ,

$$\varphi_f(\langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle) = \varphi(\langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle) \cup_{All}^{R_1 \cup R_2} \langle \psi_1 - \psi_2, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2 \setminus R_1} \langle \{s_{R_2 \setminus R_1}^{NULL}\}, R_2 \setminus R_1 \rangle \cup_{All}^{R_1 \cup R_2} \langle \psi_2 - \psi_1, R_2 \rangle \otimes_{R_2, R_1 \setminus R_2} \langle \{s_{R_1 \setminus R_2}^{NULL}\}, R_1 \setminus R_2 \rangle.$$

Під зовнішнім з'єднанням об'єднанням розуміється часткова бінарна операція вигляду  $\varphi_{\cup} : \Psi(R_1) \times \Psi(R_2) \xrightarrow{\sim} \Psi(R_1 \cup R_2)$ , де  $\text{dom } \varphi_{\cup} = \text{dom } \varphi$ ,

$$\varphi_{\cup}(\langle \psi_1, R_1 \rangle, \langle \psi_2, R_2 \rangle) = \langle \psi_1 - \psi_2, R_1 \rangle \otimes_{R_1, R_2 \setminus R_1} \langle \{s_{R_2 \setminus R_1}^{NULL}\}, R_2 \setminus R_1 \rangle \cup_{All}^{R_1 \cup R_2} \langle \psi_2 - \psi_1, R_2 \rangle \otimes_{R_2, R_1 \setminus R_2} \langle \{s_{R_1 \setminus R_2}^{NULL}\}, R_1 \setminus R_2 \rangle.$$

Введемо у розгляд таблицю  $\langle \psi_{\varepsilon}, \emptyset \rangle$ , де  $\Theta(\psi_{\varepsilon}) = \{\varepsilon\}$ ,  $\varepsilon$  – це порожня іменна множина, яка є одиницею по з'єднанню. Це важливо у випадку, коли операції зовнішнього з'єднання застосовуються до таблиць однієї схеми.

#### Агрегатні операції.

Широко використовуваними агрегатними операціями є *Sum*, *Avg*, *Min*, *Max*, *Count*. Їхніми аргументами є скінченні таблиці, а значеннями – одноатрибутні таблиці з одним рядком.



Так, операція *Sum* розраховує суму значень у відповідному стовпці заданої таблиці, при цьому значення *NULL* ігноруються. Операція *Avg* визначає середнє арифметичне значень у відповідному стовпці заданої таблиці, при цьому значення *NULL* ігноруються. Операції *Min* та *Max* знаходять найменше та найбільше значення у відповідному стовпці заданої таблиці, при цьому значення *NULL* так само ігноруються. Операція *Count* визначає кількість значень, відмінних від *NULL*, у відповідному стовпці заданої таблиці. Операція *Count(\*)* визначає кількість рядків у заданій таблиці.

Нехай  $\langle \psi, R \rangle \in \Psi(R)$ , причому  $\psi$  – скінченна мультимножина і  $A$  – деякий атрибут схеми  $R$ ,  $A \in R$ . Позначимо через  $\alpha_A$  – мультимножину, яка містить всі елементи стовпця з атрибутом  $A$  таблиці  $\langle \psi, R \rangle$ . Тоді  $\alpha_A = D_{A,\psi}$ , де  $D_{A,\psi} = \pi_{A,R}(\langle \psi, R \rangle)$  – активний домен атрибута  $A$  відносно таблиці  $\langle \psi, R \rangle$ . Нехай  $2_m^{D'} = \{\alpha \mid \Theta(\alpha) \in 2^{D'}\}$  – сім'я всіх мультимножин, основи яких є скінченними підмножинами множини  $D'$ ; тут  $D' \subseteq D$  – підмножина універсального домену.

Нехай *Num* – числа підмножина універсального домену  $D$ , замкнена відносно додавання. Множина *Num* розширена включенням особливого елемента *NULL*, але при цьому операція додавання на випадок, коли хоча б один з аргументів є *NULL* не розширюється.

Задамо агрегатні операції *Sum*, *Avg*, *Min*, *Max*, *Count*. Їхніми аргументами є скінченні таблиці, а значеннями – одноатрибутні таблиці з одним рядком. Загальна схема: спочатку на скінченній мультимножині визначаються функції сумування, взяття найменшого та найбільшого значення, визначення середнього арифметичного і кількості елементів, а потім ці функції переносяться на таблиці.

Під операцією агрегування  $Sum_{A,R}$  за атрибутом  $A$  (скінченних) таблиць схеми  $R$ ,  $A \in R$ , розуміється унарна параметрична операція вигляду  $Sum_{A,R} : \Psi(R) \rightarrow \Psi(\{A\})$ ,  $Sum_{A,R}(\langle \psi, R \rangle) = \langle \{ \{ \langle A, Sum(\alpha_A) \rangle \}^1, \{A\} \rangle$ , де  $\langle \psi, R \rangle \in \Psi(R)$ , а *Sum* – функція, що повертає суму значень стовпця з атрибутом  $A$  таблиці  $\langle \psi, R \rangle$  (ці значення можуть повторюватися), які відрізняються від значення *NULL*, крім того, цей стовпець містить лише дані числового типу. Отже,  $Sum : 2_m^{Num} \rightarrow Num$ ,

$$Sum(\alpha_A) = \begin{cases} NULL, \text{ якщо } \Theta(\alpha_A) = \emptyset; \\ NULL, \text{ якщо } \Theta(\alpha_A) = \{NULL\}; \\ \sum_{d \in \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\}} d \alpha(d), \text{ якщо } \Theta(\alpha_A) \setminus \{NULL\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Таким чином,  $Sum(\emptyset_m) = NULL$ ,  $Sum(\{NULL^n\}) = NULL$ ,  $Sum(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}) = \sum_{i=1}^k d_i n_i$ , в припущенні, що всі елементи  $d_i$  відрізняються від елемента *NULL*.

Для випадку порожньої таблиці  $\langle \psi_\emptyset, R \rangle$  операція агрегування  $Sum_{A,R}$  застосовується так:  $Sum_{A,R}(\langle \psi_\emptyset, R \rangle) = \langle \{ \{ \langle A, NULL \rangle \}^1, \{A\} \rangle$ .

Нехай  $\leq$  – лінійний порядок на універсальному домені  $D$ . Під операцією агрегування  $Min_{A,R}$  за атрибутом  $A$  (скінченних) таблиць схеми  $R$ ,  $A \in R$ , розуміється унарна параметрична операція вигляду  $Min_{A,R} : \Psi(R) \rightarrow \Psi(\{A\})$ ,  $Min_{A,R}(\langle \psi, R \rangle) = \langle \{ \{ \langle A, Min(\alpha_A) \rangle \}^1, \{A\} \rangle$ , де  $\langle \psi, R \rangle \in \Psi(R)$ , а *Min* – функція, що повертає найменше значення серед значень стовпця з атрибутом  $A$  таблиці  $\langle \psi, R \rangle$ , відмінних від значення *NULL*, тобто  $Min : 2_m^D \rightarrow D$ ,

$$\text{Min}(\alpha_A) = \begin{cases} \text{NULL}, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) = \emptyset; \\ \text{NULL}, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) = \{\text{NULL}\}; \\ \min\{d \mid d \in \Theta(\alpha_A) \setminus \{\text{NULL}\}\}, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) \setminus \{\text{NULL}\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Таким чином,  $\text{Min}(\emptyset_m) = \text{NULL}$ ,  $\text{Min}(\{\text{NULL}^n\}) = \text{NULL}$ ,  $\text{Min}(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}) = \min\{d_1, \dots, d_k\}$ , в припущенні, що всі елементи  $d_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , відрізняються від елемента  $\text{NULL}$ .

Для випадку порожньої таблиці  $\langle \psi_\emptyset, R \rangle$  операція агрегування  $\text{Min}_{A,R}$  застосовується так:  $\text{Min}_{A,R}(\langle \psi_\emptyset, R \rangle) = \langle \{\{A, \text{NULL}\}^i\}, \{A\} \rangle$ .

Під операцією агрегування  $\text{Max}_{A,R}$  за атрибутом  $A$  (скінченних) таблиць схеми  $R$ ,  $A \in R$ , розуміється унарна параметрична операція вигляду  $\text{Max}_{A,R}: \Psi(R) \rightarrow \Psi(\{A\})$ ,  $\text{Max}_{A,R}(\langle \psi, R \rangle) = \langle \{\{A, \text{Max}(\alpha_A)\}^i\}, \{A\} \rangle$ , де  $\langle \psi, R \rangle \in \Psi(R)$ , а  $\text{Max}$  – функція, що повертає найбільше значення серед значень стовпця з атрибутом  $A$  таблиці  $\langle \psi, R \rangle$ , відмінних від  $\text{NULL}$ , тобто  $\text{Max}: 2_m^D \rightarrow D$ ,

$$\text{Max}(\alpha_A) = \begin{cases} \text{NULL}, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) = \emptyset; \\ \text{NULL}, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) = \{\text{NULL}\}; \\ \max\{d \mid d \in \Theta(\alpha_A) \setminus \{\text{NULL}\}\}, & \text{якщо } \Theta(\alpha_A) \setminus \{\text{NULL}\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Таким чином,  $\text{Max}(\emptyset_m) = \text{NULL}$ ,  $\text{Max}(\{\text{NULL}^n\}) = \text{NULL}$ ,  $\text{Max}(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}) = \max\{d_1, \dots, d_k\}$ , в припущенні, що всі елементи  $d_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , відрізняються від значення  $\text{NULL}$ .

Для випадку порожньої таблиці  $\langle \psi_\emptyset, R \rangle$  операція агрегування  $\text{Max}_{A,R}$  застосовується так:  $\text{Max}_{A,R}(\langle \psi_\emptyset, R \rangle) = \langle \{\{A, \text{NULL}\}^i\}, \{A\} \rangle$ .

Зазначимо, що функції  $\text{Min}$  та  $\text{Max}$  визначають найменший або найбільший елемент основи мультимножини  $\alpha_A$  серед елементів основи, відмінних від  $\text{NULL}$ , тому порівнянність особливого елемента  $\text{NULL}$  з рештою елементів універсального домену в даному випадку неістотна.

Під операцією агрегування  $\text{Count}_{A,R}$  за атрибутом  $A$  (скінченних) таблиць схеми  $R$ ,  $A \in R$ , розуміється унарна параметрична операція вигляду  $\text{Count}_{A,R}: \Psi(R) \rightarrow \Psi(\{A\})$ ,  $\text{Count}_{A,R}(\langle \psi, R \rangle) = \langle \{\{A, \text{Count}(\alpha_A)\}^i\}, \{A\} \rangle$ , де  $\langle \psi, R \rangle \in \Psi(R)$ , а  $\text{Count}$  – функція, що повертає кількість значень відмінних від  $\text{NULL}$ , з урахуванням дублікатів, у стовпці з атрибутом  $A$  таблиці  $\langle \psi, R \rangle$ , тобто  $\text{Count}: 2_m^D \rightarrow N$ ,  $\text{Count}(\alpha_A) = \sum_{d \in \Theta(\alpha_A) \setminus \{\text{NULL}\}} \alpha_A(d)$ ; покладається за означенням, що сума порожньої множини доданків дорівнює нулю.

Таким чином,  $\text{Count}(\emptyset_m) = 0$ ,  $\text{Count}(\{\text{NULL}^n\}) = 0$ ,  $\text{Count}(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}) = n_1 + \dots + n_k$ , в припущенні, що всі елементи  $d_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , відрізняються від елемента  $\text{NULL}$ .

Для випадку порожньої таблиці  $\langle \psi_\emptyset, R \rangle$  операція агрегування  $\text{Count}_{A,R}$  застосовується так:  $\text{Count}_{A,R}(\langle \psi_\emptyset, R \rangle) = \langle \{\{A, 0\}^i\}, \{A\} \rangle$ .

Припустимо, що числова підмножина  $\text{Num}$  універсального домену замкнена відносно (часткової операції) ділення  $/: \text{Num} \times \text{Num} \xrightarrow{\sim} \text{Num}$ . Довизначимо операцію ділення так, що коли перший аргумент дорівнює  $\text{NULL}$ , то функція приймає значення  $\text{NULL}$ . Це пов'язано з тим, що ми будемо здійснювати суперпозиції і замість першого аргументу підставляти значення фу-

нкції  $Sum$ , а замість другого – значення функції  $Count$ , враховуючи, що функція  $Count$  не може дати значення  $NULL$ .

Під операцією агрегування  $Avg_{A,R}$  за атрибутом  $A$  (скінченних) таблиць схеми  $R$ ,  $A \in R$  розуміється унарна параметрична операція вигляду  $Avg_{A,R} : \Psi(R) \rightarrow \Psi(\{A\})$ ,  $Avg_{A,R}(\langle \psi, R \rangle) = \langle \{ \{ A, Avg(\alpha_A) \} \}^l, \{A\} \rangle$ , де  $\langle \psi, R \rangle \in \Psi(R)$ , а  $Avg$  – функція, що повертає середнє арифметичне значення елементів стовпця з атрибутом  $A$  таблиці  $\langle \psi, R \rangle$ , які відрізняються від значення  $NULL$ , з урахуванням дублікатів, тобто  $Avg : 2_m^{Num} \rightarrow Num$ ,  $Avg(\alpha_A) = Sum(\alpha_A) / Count(\alpha_A)$ .

Таким чином, з означення випливають рівності  $Avg(\emptyset_m) = Sum(\emptyset_m) / Count(\emptyset_m) = NULL / 0 = NULL$ ,  $Avg(\{NULL^n\}) = Sum(\{NULL^n\}) / Count(\{NULL^n\}) = NULL / 0 = NULL$ ,  $Avg(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}) = Sum(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}) / Count(\{d_1^{n_1}, \dots, d_k^{n_k}\}) = \frac{1}{(n_1 + \dots + n_k)} \sum_{i=1}^k d_i n_i$ , в припущенні, що всі елементи  $d_i$  відрізняються від елемента  $NULL$ .

Для випадку порожньої таблиці  $\langle \psi_\emptyset, R \rangle$  операція агрегування  $Avg_{A,R}$  застосовується так:  $Avg_{A,R}(\langle \psi_\emptyset, R \rangle) = \langle \{ \{ A, NULL \} \}^l, \{A\} \rangle$ .

Під операцією агрегування  $Count_{A,R}^*$  (скінченних) таблиць схеми  $R$  розуміється унарна параметрична операція вигляду  $Count_{A,R}^* : \Psi(R) \rightarrow \Psi(\{A\})$ ,  $Count_{A,R}^*(\langle \psi, R \rangle) = \langle \{ \{ A, \|\psi\| \} \}^l, \{A\} \rangle$ , при цьому  $\langle \psi, R \rangle \in \Psi(R)$ , а  $\|\psi\|$  – це ранг мультимножини  $\psi$ .

Для випадку порожньої таблиці  $\langle \psi_\emptyset, R \rangle$  операція агрегування  $Count_{A,R}^*$  застосовується так:  $Count_{A,R}^*(\langle \psi_\emptyset, R \rangle) = \langle \{ \{ A, \|\emptyset_m\| \} \}^l, \{A\} \rangle = \langle \{ \{ A, 0 \} \}^l, \{A\} \rangle$ .

Отже, мультимножинна таблична алгебра поповнена новими операціями: операціями внутрішніх і зовнішніх з'єднань, операцією напівз'єднання, агрегатними операціями. Для задання зовнішніх операцій введено особливий елемент універсального домену  $NULL$ .

## Література

1. Codd E.F. Relational Completeness of Data Base Sublanguages / Codd E.F. // Data Base Systems. – New York: Prentice-Hall. – 1972. – P. 65-93.
2. Lamperti G. On Multisets in Database Systems / G. Lamperti, M. Melchiori, M. Zanella // Multiset Processing: Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View, number 2235 in Lecture Notes in Computing Since. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – P. 147-215.
3. Гарсиа-Молина Г. Системы баз данных: [полный курс: пер. с англ.] / Г. Гарсиа-Молина, Дж. Ульман, Дж. Уидом. – Москва: "Вильямс", 2004. – 1088 с.
4. Буй Д.Б. Композиційна семантика SQL-подібних мов: мультимножини, рядки, впорядковані таблиці / Д.Б. Буй, С.А. Поляков // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. 2. – С. 183-194.
5. Глушко І.М. Мультимножинна таблична алгебра / І.М. Глушко // Proceedings of the International Scientific Conference of Student and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics" (ТААС'2011, Kyiv, February 21–25, 2011). – P. 77-79.
6. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 198 с.

УДК 004.032.2:53

## ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ MATHCAD ПРИ ОБРОБЦІ ДАНИХ ФІЗИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

А.І. Євтушенко

Сучасні персональні комп'ютери роблять можливим використання ЕОМ у дослідній роботі з підключенням відповідних допоміжних пристроїв як засобів контролю, реєструючих приладів, пристроїв відображення та ін. У експериментально-дослідній роботі проміжною ланкою між ЕОМ і об'єктом дослідження є датчики та перетворюючі пристрої. На екрані графічного дисплея можна формувати систему шкал різних вимірювальних приладів залежно від використовуваних датчиків (вимірювальних перетворювачів), що реєструють певні параметри досліджуваних об'єктів. Як правило, датчики сприймають інформацію в аналоговому вигляді (температура, тиск, освітленість, вологість, напруга та ін.), яка за допомогою аналого-цифрового перетворювача (АЦП) перетворюється в цифрову форму й надходить до комп'ютера. Після обробки експериментальних даних ЕОМ результати надходять в необхідному для аналізу вигляді на пристрої виводу [1].

Для обробки цих даних за допомогою математичного апарату користуються різними функціями, які можна задавати різними способами. Так функціональна залежність між фізичними величинами може бути задана аналітичним виразом, за допомогою якого можна обчислити значення функцій для конкретних значень аргументів. Іноді функціональна залежність виражається за допомогою нескінченного ряду. Але обчислення значень такої функції досить складне. Функціональна залежність також може бути виражена за допомогою невизначеного інтегралу або диференціальним рівнянням. Інтеграл та розв'язки диференціальних рівнянь також можуть виявитись громіздкими і малоприматними для обчислення значень функцій для будь-яких значень аргументів.

При проведенні фізичних експериментів, в яких вивчають залежність між фізичними величинами, результати, зазвичай, отримують у вигляді таблиць із значеннями певних аргументів. До таких таблиць занесене значення функцій тільки для деяких значень аргументів. Табличні значення функцій і аргументів називають *вузлами* таблиці. Для зручності бажано подати таку таблицю у вигляді функціональної залежності  $y = f(x)$ . Якщо функціональна залежність  $y = f(x)$  невідома, або аналітичний вираз її складний і малоприматний для обчислень, то в такому разі треба знайти таку найпростішу неперервну монотонну функцію  $y = \varphi(x)$ , яка для вузлових значень аргументу  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  має відповідні значення  $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ , а в точках, що лежать між  $x_0$  та  $x_n$ , наближено передає залежність  $y = f(x)$ . Завдання побудови такої функції  $\varphi(x)$  називають *задачею інтерполяції* в широкому розумінні слова, функцію  $\varphi(x)$  називають *інтерполюючою* або *апроксимуючою функцією*. Більш вужчим завданням інтерполяції є знаходження значень функції для значень аргументів  $x$ , які лежать між вузлами таблиці. Такі обчислення проводять за допомогою інтерполюючої функції  $\varphi(x)$ .

Інтерполяцію можна здійснити також графічно. На координатній сітці наносять точки, які відповідають вузловим точкам таблиці  $x_i, y_i$ , і через них проводять інтерполюючу криву. Цю криву приймають як наближений графік функції, за допомогою якого і проводять інтерполяцію. Точність графічного способу інтерполяції залежить від характеру залежності  $y = f(x)$  і точності побудови графіків.

Інтерполюючу функцію  $\varphi(x)$  в переважній більшості шукають у вигляді многочлена. Користуватись многочленами зручно не тільки тому, що вони становлять собою прості функції, а й тому, що функцію  $f(x)$  легко апроксимувати многочленами з будь-якою точністю. Крім того інтерполювання функції  $f(x)$  за допомогою многочленів спрощує задачі дискретного диференціювання та інтегрування функцій.

Знайдемо інтерполяційну формулу  $y = \varphi(x)$ , яка для вузлових точок  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  відповідає такій умові:

$$\varphi(x_0) = y_0; \varphi(x_1) = y_1; \dots; \varphi(x_n) = y_n. \quad (1)$$

Інтерполяційну функцію шукатимемо у вигляді полінома  $n$ -го степеня. Для цього введемо нову змінну [2]

$$u = \frac{x - x_0}{h} \text{ або } x = x_0 + uh, \quad (2)$$

яка для рівновіддалених значень аргументу  $x_k = x_0 + kh$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) набуває відповідно значень  $u_0 = 0; u_1 = 1; \dots; u_n = n$ .

Інтерполяційну функцію  $y(x) = y(x_0 + uh)$  шукатимемо у вигляді полінома  $n$ -го степеня відносно змінної  $u$ .

$$y(x_0 + uh) = a_0 + a_1u + a_2u(u-1) + a_3u(u-1)(u-2) + \dots + a_nu(u-1)\dots(u-n+1). \quad (3)$$

Щоб знайти коефіцієнти  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , скористаємось умовою (1)

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 \\ y_1 &= a_0 + a_1 \\ y_2 &= a_0 + 2a_1 + 2a_2 \\ &\dots \\ y_n &= a_0 + na_1 + n(n-1)a_2 + \dots + n!a_n. \end{aligned} \quad (4)$$

З системи рівнянь (4) дістанемо

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 \\ a_1 &= y_1 - a_0 = y_1 - y_0 = \Delta y_0 \\ a_2 &= \frac{1}{2!}(y_2 - 2a_1 - a_0) = \frac{1}{2!}(y_2 - 2y_1 - y_0) = \frac{1}{2!}\Delta^2 y_0 \\ &\dots \\ a_n &= \frac{1}{n!}\Delta^n y_0. \end{aligned}$$

Після підстановки виразів для коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  у формулу (3) дістанемо інтерполяційну формулу Грегори-Ньютона для інтерполювання вперед [2]

$$y(x + uh) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (5)$$

Увівши нову безрозмірну змінну

$$v = \frac{x - x_n}{h},$$

аналогічно дістаємо формулу Грегори-Ньютона для інтерполювання назад [2]

$$y(x + vh) = y_n + v\Delta y_{n-1} + \frac{v(v-1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{v(v-1)\dots(v-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Існує ще ряд інтерполяційних формул на детальному розгляді яких зупинятись не будемо.

Всі ці громіздкі дії можна замінити кількома вбудованими в MathCad функціями. Розглянемо деякі з них.

Система Mathcad дозволяє здійснювати інтерполяції двома типами функцій: шматочно-лінійною і сплайновою.

При шматочно-лінійній інтерполяції обчислення додаткових точок виконується за лінійною залежністю. Графічно це означає просте з'єднання вузлових точок відрізками прямих, для чого використовується функція  $\text{linterp}(VX, VY, x)$  - для заданих векторів  $VX$  та  $VY$  вузлових точок і заданого аргументу  $x$   $\text{linterp}$  повертає значення функції при її лінійній інтерполяції.

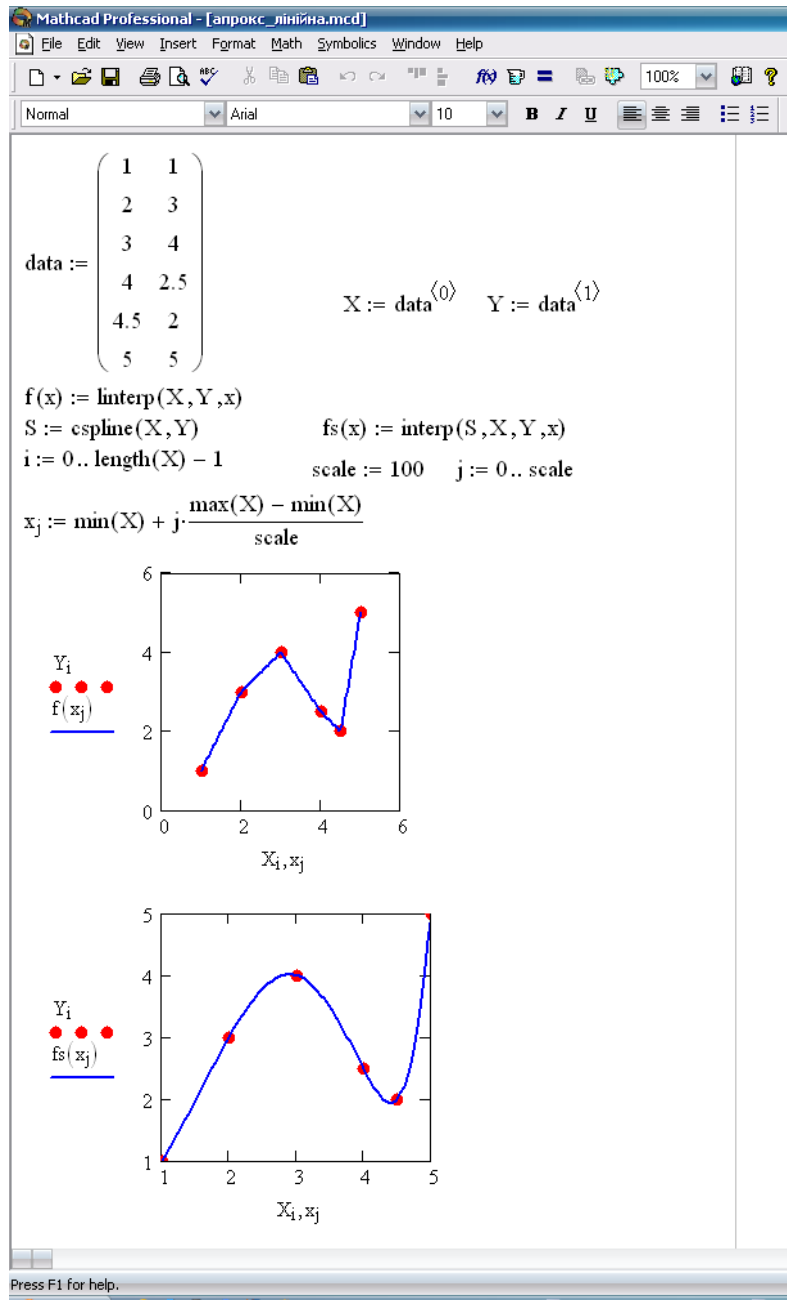


Рис. 1. Приклади проведення апроксимації в системі Mathcad

При лінійній інтерполяції вже перша похідна функції, яку апроксимують, має розриви у вузлових точках. У тих випадках, коли не тільки апроксимуюча функція, але і ряд її похідних неперервні, кращі результати дає сплайн-апроксимація, коли вихідна функція замінюється відрі-

зками кубічних поліномів, які проходять через три суміжні вузлові точки. Коефіцієнти поліномів розраховуються так, щоб неперервними були перша і друга похідні. Лінія, яку описує сплайн-функція, нагадує за формою гнучку лінійку, яку закріплено у вузлових точках.

Для здійснення сплайнової апроксимації Mathcad пропонує чотири вбудовані функції. Три з них призначені для отримання векторів других похідних сплайн-функцій за різних видів інтерполяції:

**Cspline(VX,VY)** – повертає вектор VS других похідних при наближенні в опорних точках до кубічного поліному;

**Pspline(VX,VY)** – повертає вектор VS других похідних при наближенні до опорних точок параболічної кривої;

**Lspline(VX,VY)** – повертає вектор VS других похідних при наближенні до опорних точок прямої;

**Interp(VS,VX,VY,x)** – повертає значення  $y(x)$  для заданих векторів VS,VX,VY та заданого значення  $x$ .

Таким чином, сплайн-апроксимація проводиться в два етапи. На першому за допомогою однієї із функцій Cspline(VX,VY), Pspline(VX,VY) або Lspline(VX,VY) відшукується вектор других похідних функції  $y(x)$ , заданої векторами VX та VY її значень (абсцис та ординат). Потім на другому етапі для кожної шуканої точки обраховується значення  $y(x)$  за допомогою функції Interp [3-5].

Приклади проведення шматочно-лінійної та сплайнової апроксимації в системі MathCad наведено на рис. 1.

Даний приклад показує, що застосування вбудованих в системі MathCad функцій, призначених для проведення інтерполяції та апроксимації, дозволяє зробити обробку результатів експериментальних фізичних досліджень значно простішою, точнішою і швидшою, і не вимагає від дослідника знань спеціального математичного апарату.

### Література

1. В.Ф. Савченко. Навчальний фізичний експеримент (методичний практикум): Навчальний посібник для студентів / В.Ф. Савченко, М.П. Бойко, М.М. Дідович, В.М. Закалюжний, М.П. Руденко. – Ніжин: Видавництво НДУ ім. М. Гоголя, 2011. – 540 с.
2. І.М. Кучерук. Обробка результатів фізичних вимірювань / І.М. Кучерук, В.П. Дущенко, В.М. Андріанов. – К.: Вища школа, 1981. – 216 с.
3. В.П. Дьяконов. Mathcad 7.0 в математике, физике и в Internet /В.П. Дьяконов, И.В. Абраменкова. – М.: Нолидж, 1999. – 352 с.
4. Кудрявцев Е.М. MathCad 2000 Pro / Кудрявцев Е.М. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 576 с.
5. Дьяконов В. Mathad 2000: учебный курс / Дьяконов В. – СПб.: Питер, 2001. – 592 с.

УДК 681.3

## РОЗРОБКА ТА ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРИЗОВАНИХ МУЛЬТИМЕДІЙНИХ ІНТЕРАКТИВНИХ СИСТЕМ ДЛЯ НАВЧАННЯ ТА ВИКЛАДАННЯ

І.В. Казачков

Системи мультимедійного навчання та викладання почали розробляти в США та Європі приблизно з початку 90-х років минулого сторіччя, коли стали доступними досить потужні персональні комп'ютери. Однією з перших була платформа мультимедія-Директор розробки фірми Макромедія (США), яку купували університети та застосовували для швидкого і зручного впровадження інтерактивних лекційних матеріалів та різних вправ для самостійної роботи, тощо. Всі матеріали після перетворення до формату системи ставали графічними і будь-які прав-

ки в подальшому можна було зробити тільки для вихідного матеріалу, що було не досить зручним та вимагало багато часу.

Різноманітність використовуваних середовищ робить доволі дорогим поведіння з такими системами та їх обслуговування, в тому числі накопиченні та зберігання потрібних навчальних матеріалів. Одне з можливих рішень цієї проблеми - створення відповідних централізованих комп'ютерних репозиторій, що націлені на спрощення роботи учня та відповідне помітне зростання ефективності навчання.

На протязі більше десяти років ми співробітничали з факультетом енергетичних технологій Королівського технологічного інституту у Швеції (Стокгольм), де з 1996 року при підтримці потужних компаній-спонсорів та за участі на паритетних засадах багатьох університетів Європи створили мультимедійну інтерактивну систему для навчання та викладання усіх дисциплін, що вивчаються на факультеті. Названа ця система CompEdu (Computerized education) – скорочення від «комп'ютеризоване навчання» англійською мовою [1-9]. Учасники університетів розробляли та презентували свої найкращі навчальні матеріали, маючи за це право використовувати систему у своїх університетах безкоштовно. Ми також приймали участь у проєкті на подібних засадах. Система створена англійською мовою, але вона містить глосарій декількома іншими мовами та книжки учасників проєкту також декількома мовами, зокрема, шведською, німецькою, російською.

У системі розроблена спеціальна форма для оцінки використовуваних матеріалів студентами та викладачами. Відгуки накопичуються та обробляються ліценціатами та докторантами у їх наукових дослідженнях. Результати досліджень публікуються та використовуються для подальшого покращення системи та навчальних матеріалів. Спочатку система розроблялась та використовувалась у вигляді CD та DVD дисків, побудована з використанням мультимедійної системи Директор, яка призначена для роботи з різними графічними матеріалами, а також аудіо і відео матеріалами.

Робота з лекційними матеріалами, що містять математичні формули та багато тексту, була незручною, тому ми приймали участь у розробці спеціального засобу Chapter Creator (створювач розділів) для створення нових розділів та редагування вже існуючих розділів. Цей програмний засіб, розроблений спеціалістами з Києва, зокрема, з Інституту кібернетики НАНУ та Дитячої академії мистецтв (інженер-програміст О.О. Коваль) дозволяє працювати з файлами системи Директор, автоматично розпізнаючи тексти. Він дозволяє редагувати тексти та розробляти нові лекційні матеріали або вставляти копійовані (копи-пейст). Це значно підсилило можливості мультимедійної системи, дозволивши викладачам самим редагувати свої лекції, без допомоги програмістів, як раніше.

З початку нового тисячоліття розвиток Інтернет-технологій та комп'ютерних систем досяг такого рівня, що почали розробляти он-лайн системи навчання. Рішення про перехід до Інтернет-версії системи CompEdu було викликано бажанням інтенсивного використання дистанційних форм навчання. Цей перехід було здійснено зусиллями усіх учасників за декілька років. І це призвело до майже десятикратного збільшення кількості студентів у Королівському технологічному університеті на названому факультеті.

Також почали використовувати мобільні методи навчання, коли навчальні матеріали можна вивчати і з мобільного телефону у будь-якому місці (наприклад, у черзі у магазині або на зупинці, чекаючи на автобус, у транспорті, подорожуючи до університету чи додому, тощо), що зберігає чимало часу для вивчення та перегляду матеріалу.

В автоматизації навчання за допомогою ЕОМ на всіх рівнях - від дитячих садків до вищої школи - основою служать так звані програмовані підручники і учбові курси. Дослідження психологів з аналізу застосувань електронних технологій з використанням мультимедіа в учбовому процесі показують, що такі технології дозволяють підвищити ефективність навчання на 20-30 %, тобто зменшити число помилок і час на засвоєння матеріалу, підвищити міцність засвоєння знань і навиків. Це досягається за рахунок цілого ряду чинників, серед яких:

1) індивідуалізація навчання завдяки використуванню електронних підручників, в яких освітні напрямки і темп учбового процесу вибирається самим навчаним

2) можливість використання інтенсивних методів активного навчання, ділові і імітаційні ігри, занурення в проблемні ситуації, моделювання реальних і віртуальних процесів і об'єктів.



Дослідження показують, що використання технологій мультимедіа дозволяє отримати абсолютно новий якісний рівень освіти і, по суті, змінити процес передачі і засвоєння знань, навиків і умінь. В даний час створюються повнофункціональні технології, що дозволяють уніфікувати і «поставити на потік» процес розробки інтерактивних моделей як наукового, так і учбового характеру [10-19]. Є успішні приклади та досвід застосування подібних систем навчання як у Королівському технологічному інституті (Стокгольм, Швеція), так і на Україні: у Національному технічному університеті України „КПІ”, Ніжинському університеті ім. Миколи Гоголя, КНУ імені Тараса Шевченка та у ряді інших університетів.

Автоматизація навчання практикується в багатьох вузах, як в Україні, так і за кордоном. Комп'ютер автоматично реєструє помилки і за програмою, параметри якої визначені підручником, виставляє оцінки учням. Під час самостійної роботи студентів викладач може за бажанням контролювати роботу, виконувану кожним студентом, і одержувати ним оцінки. Система автоматизації навчання передбачає автоматичне управління показом демонстраційних матеріалів і учбових кінофільмів (Див. Рис. 1).

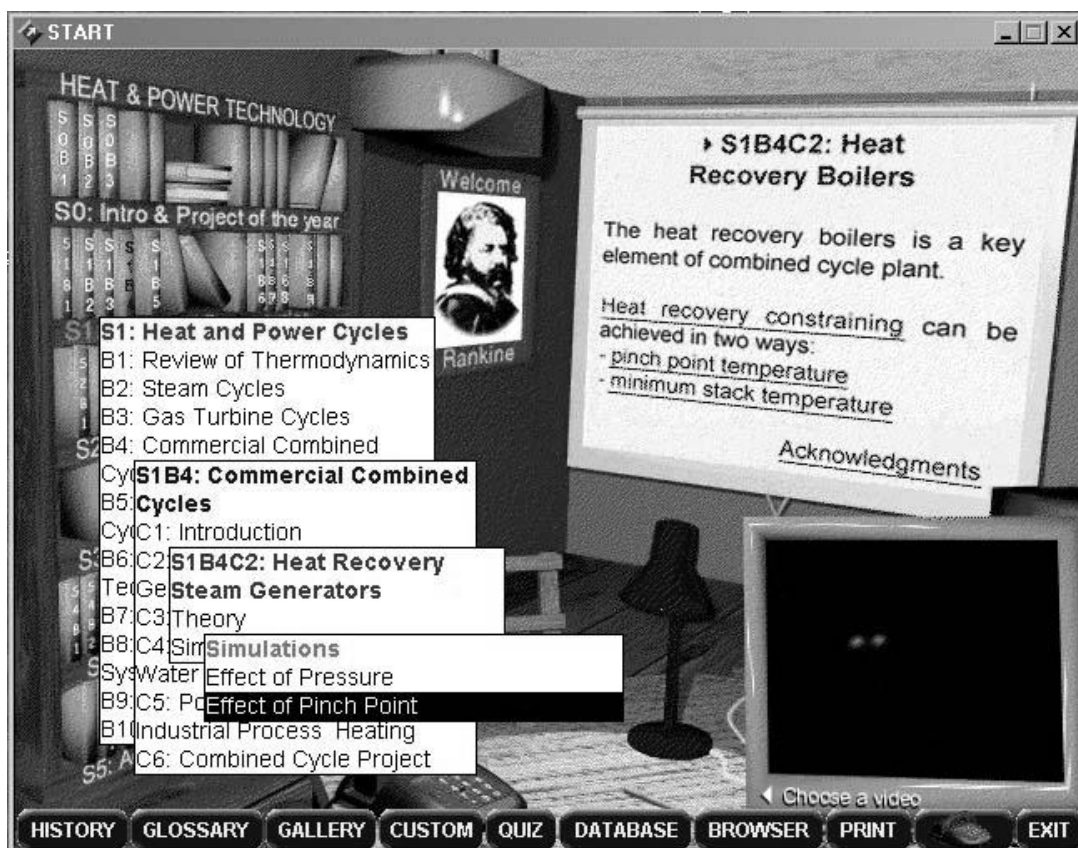


Рис. 1. Один із варіантів головної сторінки інтерактивної системи CompEdu

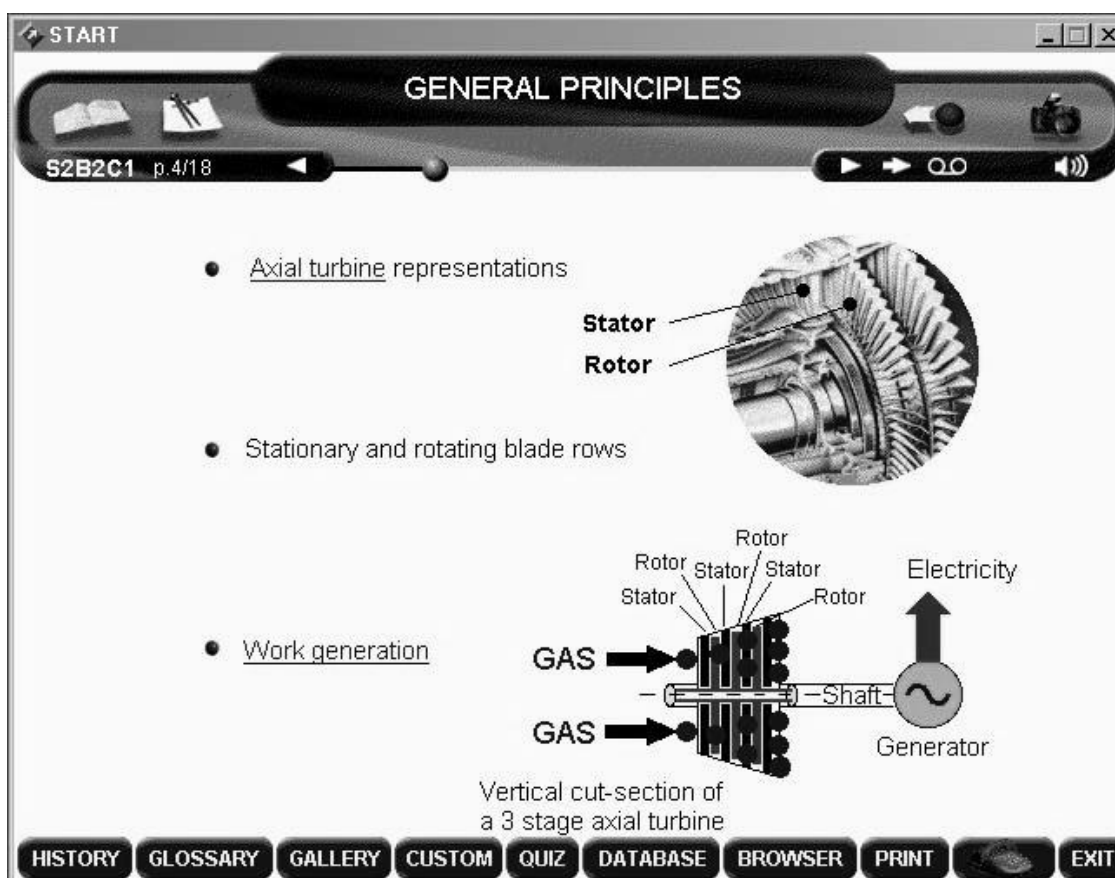
Мультимедійна система CompEdu, яка успішно працює вже майже 16 років, з яких близько 8 років в Інтернет-варіанті, постійно розвивається та вдосконалюється на основі відгуків і пропозицій студентів та викладачів. Така робота ведеться за напрямками: навчальні матеріали (нові розділи, ілюстративні матеріали та інтерактивні вправи для тренувань та закріплення навичок), методика навчання та викладання (розвиток методики, використання кращих надбань психологічних досліджень, адаптація методик до умов мультимедійного навчання), програмна платформа (розвиток та вдосконалення платформи для індивідуального, мобільного).

Захищаються дисертації ліценціата та доктора філософії з мультимедійного навчання. Закордонні громадяни - аспіранти (докторанти) КТН (Королівського технологічного інституту) навчаються не тільки за стандартною формою, але і за так званою сендвіч-програмою, коли чотири місяці на рік отримують зарплатню докторанта КТН і за бажанням можуть бути в КТН,

решту часу працюють вдома. захист дисертації відбувається в КТН, або також і на батьківщині (дисертант отримує два дипломи).

Більшість користувачів інтерактивної платформи визнали її як прогресивну і корисну: значно підсилює можливості учнів і викладачів, учні можуть побудувати свою навчальну програму та стиль за власним бажанням, задовольняючи свої потреби у найкращий спосіб завдяки потужним інтерактивним засобам. Особливо корисними та ефективними визнано інтерактивні вправи, які дозволяють легше і швидше засвоювати матеріал, найважливіші теоретичні положення, та опанувати практичні навички.

Психологічні принципи, застосовані видатним вчителем-новатором, професором Віктором Шаталовим ще в 60-70 роки минулого сторіччя, які показали високу ефективність, тепер підтвердились на новому рівні у новітніх інтерактивних мультимедійних платформах. Тільки замість компактних схем та плакатів Шаталова у мультимедійних системах застосовують комп'ютерні тренування, такі собі комп'ютерні ігри на задані теми з предмету (див. Рис. 2).



**Рис. 2.** Приклад сторінки інтерактивної платформи з використанням анімацій для пояснення принципу роботи турбін

З перших кроків використання комп'ютерів у навчальному процесі впродовж приблизно двадцяти років основна увага була зосереджена на використанні мультимедійних методів та інтерактивності. Але надто багато зусиль було витрачено на спрощення можливих шляхів навчання усілякими складними засобами. Зокрема, це пояснюється агресивною стратегією маркетингу комп'ютерних компаній, які обіцяли швидкий успіх у навчанні за рахунок застосування ідеальних засобів. Поступово викладачі університетів та студенти розставили правильно всі за та проти і тому на сьогоднішній день ми маємо досить розвинені засоби та методологію інтерактивного навчання.

Цікавою особливістю мультимедійних систем останніх років є розробки віртуальних лабораторій, які дозволяють записати на відео та відтворювати у будь-який час он-лайн з будь-якої точки планети експериментальні дослідження фізичних явищ та повторювати цікаві елементи

для їх вивчення. Всі учасники кластеру можуть це використовувати, обмінявшись своїми лабораторними можливостями.

Інший тип віртуальної лабораторії – це проведення експериментів он-лайн на установках з дистанційним он-лайн керуванням. Декілька таких дослідних установок створено учасниками CompEdu з різних університетів. Кожний студент, що має доступ до системи, може у зазначені години ввійти через Інтернет до віртуальної лабораторії, включити установку і провести експериментальні дослідження.

Однією з перших у Королівському технологічному інституті була віртуальна лабораторна установка з дослідження аеродинамічних характеристик лінійного каскаду статорних лопатей турбін. Вона має 2 відеокамери спостереження, через які експериментатор візуально нею керує за допомогою електромеханічних систем дистанційного керування. Установка має компресор, що нагнітає за командою 2,5 кг/с повітря у каскад лопатей. Система містить прилади вимірювання тиску у декількох точках простору, за показаннями яких обчислюються коефіцієнти опору.

Слід також відмітити, що сучасні мобільні технології вже дозволяють керувати віртуальною лабораторією навіть з мобільного пристрою, тому ідеї, закладені у віртуальній лабораторії, вирішено розвивати у декількох напрямках, зокрема відпрацьовувати навички віртуального спілкування з технікою та обладнанням. Велике майбутнє у цього напрямку очікується за рахунок значної економії коштів кластером дослідних та навчальних лабораторій з різних університетів Європи та інших місць планети, що може значно підвищити ефективність навчання та спільних досліджень.

**Висновки.** Розвиток та використання мультимедійних засобів в освітній сфері впродовж показав великі можливості і високу ефективність за умови високопрофесійного застосування комп'ютерних технологій. Особливо великі надії на суттєвий прорив учасники кластеру університетів і дослідних установ покладають на подальший розвиток віртуальних лабораторій для навчання студентів та спільних експериментальних досліджень.

## Література

1. Bates A. Technology, Open Learning and Distance Education/ Routledge Studies in Distance Education. ISBN 0-415-12799-8.-1995.
2. Benson T.J., Trefny C.J., Walker J.F. Interactive Design Tool for Turbine Based Combine Cycle Engines.-1997.- AIAA 97-3160.
3. Léotard P., Roy S., Gaulard F., Fransson T.H. Computerized Educational Program in Turbomachinery.- 1998.- ASME Paper 98-GT-415.
4. Benson T.J. Using Computers in Fluids Engineering Education.- 1998.- NASA TM-1998-208810.
5. Boyle T. Design for Multimedia Learning.- Prentice Hall Europe.- 1997.- ISBN 0-13-242215-8.
6. Davies C.H.J. Student Engagement with Simulations: a Case Study// Computers and Education.- Elsevier Science Ltd.- 2002.- Vol. 39.- P. 271-282.
7. EPF-Lausanne, Switzerland.- ASME papers 1999.
8. Fransson T.H., Hillion F.-X., Klein E. An international, electronic and interactive teaching and life-long learning platform for gas turbine technology in the 21st century/ ASME Turboexpo 2000 May 8-11, 2000.- Munich.- Germany.- Paper 2000-GT-0581.
9. Kurzke J. Gas Turbine Cycle Design Methodology: a Comparison of Parameter Variation with Numerical Optimization.- 1998.- ASME Paper 98-GT-343.
10. Laurillard. Program Design Checklist for Making the most of the medium.- 1993.- <http://iet.open.ac.uk/h802/2/sup/DesignCheckList.html>.
11. Mattingly J.D. New Software to Support System Approach to Conceptual Design of Aircraft Engines.- 1999.- AIAA 99-2849.
12. Kazachkov I.V., Fransson T.H., Salomón M. Interactive teaching and learning platform for numerical methods in energy/ Proc. 41st Aerospace Sci. Meeting and Exhibit.- Reno, Nevada 6-9 Jan 2003.- Paper AIAA-2003-0943.

13. Вигоцький Л.С. Вибрані твори, Том 5, Психологія дитини, Під редакцією Роберта В. Рибера.- Plenum Publishers.- New York.- 1998.- Ч. 2: Проблеми дитини (Психологія розвитку).- С. 187-296 (Англійською).
14. Люгер, Джордж Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем. - М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. - 864 с.
15. Navarathna, N.; Fedulov, V.; Martin, A.; Fransson T. H. Design of a Remotely-Controlled Laboratory Exercise in Aerodynamics// J. Mekanisten (Svenska Mekanisters Riksförening), No. 2, p.58, 2003.
16. Navarathna, N.; Fedulov, V.; Martin, A.; Fransson T. H. Web-Based, Interactive Laboratory Experiment in Turbomachine Aerodynamics/ Proceedings of ASME Turbo Expo 2004, 14-17 June, 2004, Vienna, Austria.
17. Kazachkov I.V., Fransson T.H., Shmakov Yu.I., Kazachkova O.M. Collaboration in development and implementation of an interactive teaching-learning platform in educational process at the Royal Institute of Technology (KTH) and Kyiv T. Shevchenko National University (KNU). Dept of Energy Technology. Division of Heat and Power Technology. Royal Institute of Technology. Stockholm. Internal Report.- 2003.- 137pp.
18. Salomón, M.; Fransson, T. H.; Fedulov, V. Interactive Teaching and Learning Platform in Energy Technology. CAL-laborate Vol. 12 November 2004, UniServe Science, University of Sydney.
19. Fedulov, V. Evaluation of Interactive Teaching-Learning Platform in Energy Technology. Stockholm, Royal Institute of Technology, Licentiate thesis.- 2005.- 109 pp.

УДК 621.039.586:004.942+532.5

## **РОЗРОБКА ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМИ ЗАХИСТУ АЕС ВІД ТЯЖКИХ АВАРІЙ**

**О.В. Коновал, І.В. Казачков**

Стаття присвячена важливій для безпеки атомних електростанцій (АЕС) проблемі розробки інформаційно-аналітичного забезпечення для проведення математичного моделювання та обчислювальних експериментів для захисту атомних електростанцій від тяжких аварій. Зокрема, розглянуто особливості розробки нелінійних математичних моделей розповсюдження струменів розплаву ядерного палива з домішками зруйнованих конструкцій та бетону у підреакторному басейні охолоджувача, що має місце в одній з перспективних пасивних систем захисту АЕС.

Ключові слова: інформаційно-аналітичне забезпечення, тяжка аварія, математична модель, обчислювальний експеримент.

### **Актуальність проблеми**

На сьогоднішній день міжнародним ядерним товариством прийнято, що створення пасивних систем безпеки для захисту АЕС від тяжких аварій, що працюють без використання активних елементів - один з перспективних напрямів розвитку. Ядерні реактори третього та четвертого поколінь обов'язково повинні мати такі системи.

На початкових етапах розвитку атомної енергетики пропонувалося на дні шахти реактора розташовувати басейн, заповнений водою, для охолодження коріуму на випадок проплавлення ним корпусу реактора. Такий варіант пропонувався в Швеції для реакторів киплячим теплоносієм [1-8]. Але існує сумнів щодо того, чи не може падіння коріуму у воду паровий вибух, при якому параметри ударної хвилі перевищать запас міцності контейнента [9-16]. На користь цього типу пасивних систем захисту свідчать результати дослідження руйнування корпусу реактора: коли відбувається розрив корпусу, то струмінь розплаву крізь тонкий отвір витікає у басейн, інтенсивно подрібнюючись і охолоджуючись. Б, внутрішнє розігрівання коріуму, що у водяному басейні, не веде до зростання температури в центрі розплаву до критичної величини, тому що дрібні частинки коріуму і надалі надійно охолоджуються водою у басейні [4-8, 14-17].

Розробка інформаційно-аналітичного забезпечення для проведення математичного моделювання та обчислювальних експериментів для захисту атомних електростанцій від тяжких аварій є першим важливим кроком в успішному вирішенні цієї проблеми, оскільки велика кількість невизначеності задачі як щодо можливих сценаріїв перебігу аварій, так і фізичних властивостей утворених під час аварій матеріалів, вимагає широкомасштабних комп'ютерних експериментів та узагальнення отриманих даних.

Нами розглянуто особливості розробки нелінійних математичних моделей струменів розплаву коріуму у підреакторному басейні охолоджувача, що планують або вже застосовують як одну з перспективних пасивних систем захисту на деяких АЕС Фінляндії, Швеції та інших країн. Результати проведеного за розробленими методиками чисельного моделювання теплогідравлічних процесів під час аварій, а також аналізу знайдених закономірностей є корисними науковцям та інженерам-конструкторам пасивних систем захисту від тяжких аварій і тому їх важливість важко переоцінити.

#### Постановка задачі досліджень

На деяких енергоблоках (в Швеції, Болгарії, Китаї, тощо) вже існують так звані шахти локалізації розплаву з басейнами аварійного відведення теплоти з різними цікавими конструкціями [1-8, 18-23]. Розглянуті сценарії розповсюдження розплаву коріуму під час тяжкої аварії показали, що вони, незважаючи на порівнянню простоту конструкції, мають невизначеність сценаріїв протікання тяжких аварій і як наслідок - невизначеність теплогідравлічних процесів, зумовлену значними змінами фізичних властивостей коріуму, що неможливо передбачити. Тому для успішного функціонування систем пасивного захисту необхідно проводити широкомасштабні модельні дослідження процесів, з урахуванням якнайбільшої кількості різних параметрів. Нами розглянуто проблему побудови математичних моделей взаємодії розплаву коріуму з охолоджувачем та інформаційного забезпечення, які б дозволили досліджувати закономірності перебігу тяжких аварій.

Незважаючи на велику кількість робіт стосовно струменевих течій, починаючи з класиків, а також численні роботи минулого століття, особливості розповсюдження струменів розплаву коріуму у басейні з водою недостатньо досліджені. Це викликано тим, що такі струмені багато в чому принципово відрізняються від вивчених: вони масивні, інтенсивна дія пари на високотемпературні струмені (перепад температур струменів та охолоджувача складає дві-три тисячі градусів, можливі парові вибухи, тощо). До того ж ці струмені розплаву ядерного палива мають внутрішнє джерело постійного генерування теплоти внаслідок реакцій радіоактивного розпаду. Характерна відмінність таких струменевих течій від більшості досліджених випадків також є те, що вони розповсюджуються, в основному, під дією чотирьох сил: архімедових, гідродинамічних (сил тиску води та протидії тертя), сил дії пари, що утворюється та виходить з басейну назустріч струменям розплаву, а також інерційних. А від інтенсивного випаровування води під дією високотемпературного струменя він входить до басейну переважно у паровому «мішку». Тож важкий струмінь розплаву коріуму проникає до басейну як паровий струмінь, котрий на лінії насичення має густину меншу за густину води, а після швидкого розширення – значну меншу, і тому має значний вплив архімедової сили, що діє вгору, проти руху струменя. Але ця дія архімедових сил не прикладена безпосередньо до струменя розплаву, вона прикладена до парового струменя, всередині якого знаходиться струмінь коріуму. Математичні моделі проникнення тонких та товстих струменів розплаву до басейну з рідиною розроблялись у [4, 6, 8, 26-28], де були виконані також експерименти з дослідження особливостей струменів.

#### Побудова математичних моделей для інформаційно-аналітичного забезпечення системи

Для одновимірної моделі проникнення товстого струменя, що отримана з урахуванням нелінійних процесів та змінності маси струменя, який постійно виходить з корпусу зруйнованого реактора, рівняння руху має наступний вигляд:

$$\rho_1 \frac{d(hv_1)}{dt} = h(\rho_1 - \rho_2)g - \beta_c \rho_2 v_1^2, \quad (1)$$

де  $h$  - поточна глибина проникнення струменя до басейну (м),  $\rho_1, \rho_2$  - густина рідини струменя та рідини охолоджуючого басейну ( $\text{кг/м}^3$ ),  $v_1 = dh/dt$  - швидкість проникнення струменя до басейну охолоджувача (м/с).

Для товстих струменів можна знехтувати поверхневими силами на міжфазній поверхні струменя, оточеного повітрям, порівняно з силою опору та інерції. Силу опору можна у першому наближенні врахувати як повний динамічний тиск охолоджувача на головну частину струменя, з коефіцієнтом  $\beta_c = 0,5$  (максимальне значення, коли увесь тиск струменя йде на подолання опору басейну). Рівняння (1) має наступний безрозмірний вигляд:

$$h \frac{d^2 h}{dt^2} + (1 + \beta_c \rho_{2/1}) \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + \frac{\rho_{2/1} - 1}{Fr} h = 0, \quad (2)$$

де за масштаби довжини, швидкості і часу, взято, відповідно: радіус струменя,  $r_0$ ,  $u_0$  і  $r_0/u_0$ . Тут  $Fr = u_0^2/(gr_0)$  – число Фруда,  $g$ - прискорення вільного падіння. Збережені ті ж позначення, що і для розмірних величин. Згідно (2), процес розповсюдження струменя в басейні визначається числом Фруда і відношенням густини охолоджувача і струменя.

Якщо побудувати процес розрахунку струменя згідно рівняння (1) або в безрозмірному вигляді - рівняння (2), то для розрахунку впровадження струменя, починаючи з нульового моменту часу, коли  $h=0$ , вибирається кінцево-різницева сітка за часом, починаючи з  $t = 0$ , з вибраним початковим кроком. У наступний момент часу згідно з вибраною кінцево-різницевою сіткою контролюється швидкість за допомогою рівняння збереження маси так, що розраховане для цього моменту часу значення по рівнянню (1) або (2), а також відповідне значення швидкості струменя  $v$  підставляється в рівняння збереження маси  $\rho_1 v \pi r_0^2 = \rho_1 v_1 \pi r_1^2$  і обчислюється значення радіусу струменя, що відповідає цьому значенню швидкості, де  $v$ ,  $r_0$  і  $v_1$ ,  $r_1$ - відповідно, швидкість і радіус струменя в нульовий момент часу і в перший момент часу згідно з вибраною кінцево-різницевою сіткою. У такому ітераційному процесі можна використовувати рівняння (2), коригуючи на кожному кроці за часом початкові дані, і знайдені значення глибини проникнення струменя додавати по інтервалах з урахуванням того, що безрозмірні значення на кожному кроці віднесені до поточного значення радіусу струменя (тобто на першому кроці до  $r_0$ , на другому –  $r_1$  і т.д.). Рівняння (2) використовується окремо на кожному кроці за часом для обчислення значення глибини  $h$ , на яку струмінь увійшов до басейну за поточний крок, аналогічно - для обчислення швидкості.

На наступному кроці за початкові дані обирають отримані на попередньому кроці значення швидкості. Остаточно усі відрізки проникнення струменя підсумовуються по кроках. Якщо використовується безрозмірне рівняння (2), то підсумкове значення  $h$  одержується з урахуванням того, що безрозмірні значення  $h$  в рівнянні (2) на кожному кроці віднесені до поточного значення радіусу струменя, яке обчислюється з рівняння збереження маси на кожному кроці по набутих значеннях швидкості струменя. Це – класична схема.

### Руйнування класичної схеми розповсюдження струменя у басейні іншої рідини

Експерименти по розповсюдженню падаючих струменів у басейні охолоджувача показують, що цей клас струменевих течій різко відрізняється від класичних тим, що в ньому сама схема розрахунку струменів відмінна. Згідно класичної схеми, базуючись на рівнянні збереження маси струменя, приймається схема його розповсюдження у середовищі як струменя змінного радіусу (швидкість падає – радіус зростає). Але аналіз нелінійних ефектів і експериментальних даних (див. на Рис. 1) показує, що це не завжди так. Струмінь може міняти радіус не поступово, а із запізненням у часі і тому – раптово.

Особливість нелінійного розв'язку розповсюдження струменя є наступною. Спочатку струмінь проникає до басейну на глибину  $h_0$ , що визначається початковою довжиною струменя, числом Фруда і відношенням густини рідин струменя та басейну. У разі неперервного струменя, що витікає зі зруйнованого корпусу реактора, початкова глибина проникнення струменя до басейну визначається числом Фруда і відношенням густини рідин. Потім струмінь йде з поступовим розширенням в міру втрати швидкості до  $h_1$ . Після цієї точки біфуркації струмінь стрибком розширюється і далі зберігає приблизно постійний радіус. Це підтверджується експериментами [8] (автори не визначили це як біфуркацію):

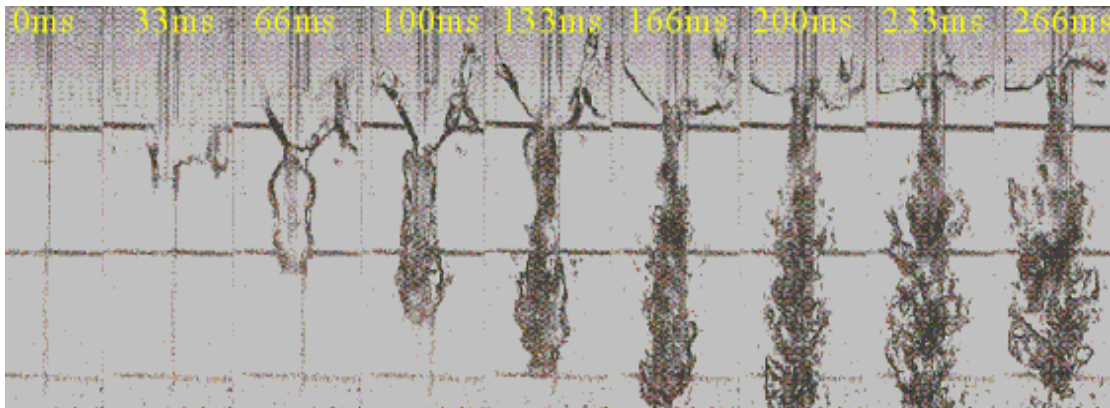


Рис. 1. Експериментальна картина проникнення струменя до басейну

Щоб оцінити особливості розширення струменя, запишемо рівняння збереження маси струменя і перший інтеграл рівнянь руху у формі рівняння Бернуллі:

$$S_1[(\rho_1 - \rho_2)hg + 0,5\rho_1v_1^2] = 0,5\rho_1u_0^2S_0, \quad \rho_1v_1S_1 = \rho_1u_0S_0, \quad (3)$$

де  $S$ - площа поперечного перерізу струменя ( $m^2$ ). Індокси 0 і 1 відносяться до початкового і поточного станів струменя, відповідно. У безрозмірному виді, зберігаючи ті ж позначення:

$$S_1[2h(1 - \rho_{2/1})/Fr + v_1^2] = 1, \quad S_1v_1 = 1. \quad (4)$$

Система рівнянь (4) має наступний розв'язок:

$$S_1 = \frac{Fr}{4h(1 - \rho_{2/1})} [1 \pm \sqrt{1 - 8h(1 - \rho_{2/1})/Fr}], \quad v_1 = 1/S_1. \quad (5)$$

Цікава особливість розв'язку (5) в тому, що радіус струменя до точки  $h = \frac{Fr}{8(1 - \rho_{2/1})}$  може

приймати два абсолютно різних значення. А після цієї особливої точки розв'язку не існує (у дійсних числах), тому струмінь може перемикатися різко, стрибком між цими двома можливими режимами. Умова перемикання з цього розв'язку незрозуміла і для цього потрібні окремі дослідження, але це явище, з досвіду теорії стійкості, схоже на біфуркацію розв'язку, яка має бути досліджена окремо методами теорії стійкості. Точку  $h = \frac{Fr}{8(1 - \rho_{2/1})}$  можна вважати максима-

льною глибиною проникнення струменя. Після неї струменя не існує, він розпадається на краплі та окремі фрагменти.

Струмінь починає входити до басейну при  $S_1 = 1$ . Аналізуючи рівняння (5), можна помітити, що при малих глибинах проникнення струменя, при  $8h(1 - \rho_{2/1}) \ll Fr$ , виходить:  $S_1 \approx 1$  або  $S_1 \approx \frac{Fr}{2h(1 - \rho_{2/1})} \gg 1$ . І немає причин для раптової зміни радіусу від початкового значення попе-

речного перерізу,  $S_1 \approx 1$ , до інших, великих поперечних перерізів, оскільки імпульс струменя спрямований в основному уздовж його осі. Але далі, з втратою струменем його швидкості і внаслідок нестійкості вільних поверхонь, струмінь може змінювати свій радіус. Підставляючи  $S_1 = 2$  в останній вираз (5) маємо  $v_1 = 0,5$ . Струмінь йде від рівня початкового проникнення (визначається особливостями удару об поверхню басейну в початковий момент часу)  $h = h_0$

до  $h_1 = \frac{1}{8Ri}$  ( $Ri = (1 - \rho_{2/1})/Fr$  – число Річардсона) і в цей час його радіус росте від 1 до

$r_1 = \sqrt{2}$ , коли швидкість струменя стає  $v_1 = 0,5$ , наприклад, при відношенні густини 0,1 загальна глибина проникнення струменя у цей момент часу складе  $h_0 + h_1 \approx 5,5 + 13,9 \approx 19,4$ .

З (5) виходить для перерізу струменя при  $h = h_0$ :  $S_1 = 0,5\rho_{1/2}(1 \pm \sqrt{1 - 4\rho_{2/1}})$ , звідки для відношення густини 0,1 слідує  $S_1 \approx 1,15$ ,  $r_1 \approx 1,07$ ,  $v_1 \approx 0,87$ , або  $S_1 \approx 8,87$ ,  $r_1 \approx 2,98$ ,  $v_1 \approx 0,11$ , отже перший набір параметрів близький до зроблених припущень, тоді як другий набір - можливе рішення, яке може реалізуватися після точки біфуркації  $h = h_1$ .

### Розрахунок параметрів розповсюдження струменя розплаву у басейні

Для рівняння (1) необхідно поставити початкові умови

$$t = 0, h = 0, dh/dt = u_0, \quad (6)$$

після чого отримується задача Коші (1), (6) щодо проникнення струменя до басейну. Тут  $u_0$  - початкова швидкість струменя (на підході до поверхні басейну). Умова (6) є наближеною, оскільки при торканні струменем поверхні басейну ( $h=0$ ) відбувається удар струменя об поверхню, який може значно знизити швидкість. Внаслідок цієї особливості виникає сингулярність задачі Коші, оскільки в нульовий момент часу стикаються струмінь і поверхня басейну, що мають, відповідно, швидкості  $u_0$  і 0. Рідина в басейні в результаті контакту із струменем стрибком міняє швидкість з нульової в області контакту до кінцевої величини. Для усунення сингулярності задачі Коші можна початкові умови (6) замінити на такі:

$$t = 0, h = h_0, dh/dt = u_p, \quad (7)$$

де  $h_0$  і  $u_p$  - початкова глибина і швидкість впровадження струменя в басейн, після удару струменя об поверхню басейну. Ці величини для високошвидкісних струменів [29-31] такі:

$$u_p = \frac{\lambda}{1 + \lambda} u_0 \quad (8)$$

де  $\lambda = \sqrt{\rho_{1/2}}$ ,  $\rho_{1/2} = \rho_1 / \rho_2$ . Відстань, на якій струмінь втрачає задану частину швидкості, може бути розрахована по формулі

$$v_1 = u_p (h_0 / h)^{3/2}. \quad (9)$$

Значення  $h_0$  і  $u_p$  визначаються на підставі рівняння руху струменя і рівняння Бернуллі:

$$\rho_1 H u_0 = \rho_1 H u_p + \rho_2 h_0 u_p, \quad 0,5\rho_1 u_0^2 = 0,5\rho_1 u_p^2 + (\rho_1 - \rho_2) g h_0 / u_0^2 - 0,5\rho_2 u_p^2 \quad (10)$$

де  $H$  - початкова довжина струменя (якщо він має обмежену довжину, тобто не є неперервним). Розв'язок рівнянь (10) може бути записаний в такому безрозмірному вигляді:

$$\bar{h}_0 = \frac{h_0}{r_0} = \frac{H}{r_0 \rho_{2/1}} \left( \frac{\sqrt{1 + \rho_{2/1}}}{\sqrt{1 + 2(1 - \rho_{2/1})\bar{h}_0 / Fr}} - 1 \right), \quad \bar{u}_p = \frac{u_p}{u_0} = \sqrt{\frac{1 + 2\bar{h}_0(1 - \rho_{2/1}) / Fr}{1 + \rho_{2/1}}} \quad (11)$$

який добре корелюється з вищенаведеним виразом (8) для високошвидкісних струменів. Тож розв'язується нелінійне диференціальне рівняння з початковими умовами (7), враховуючи отримані вирази параметрів початкового моменту входу струменя до басейну (11).

Залишаючи поза розглядом явища всмоктування повітря до басейну та втрати імпульсу струменя при ударі об поверхню басейну, зосередимось на основних закономірностях проникнення струменя розплаву до басейну. Проведемо моделювання цього процесу по викладеній вище нелінійній моделі, базуючись на результатах відомих експериментальних досліджень і даних обчислювальних експериментів. Нелінійна модель (2), (7), (11) дозволяє отримати аналітичне рішення. Для таких рівнянь другого порядку успішно застосовуються одночасні перетворення залежної і незалежної змінних. Перетворення рівняння (2) за методикою [32] знайдено у вигляді [6]:



$$h = \left(\frac{2A+1}{2}\right)^{\frac{2}{2A+1}} X^{\frac{2}{2A+1}}, \quad dt = \left(\frac{1}{2A+1}\right)^{\frac{1}{2A+1}} X^{\frac{1}{2A+1}} d\tau. \quad (12)$$

Звідси рішення задачі Коші (2), (4) можна представити в явному вигляді

$$h = \left(\frac{3 + \rho_{2/1}}{2}\right)^{\frac{2}{3+\rho_{2/1}}(1-chk\tau)} h_0^{chk\tau} e^{\frac{2}{3+\rho_{2/1}}shk\tau}, \quad (13)$$

де  $\alpha = \frac{\sqrt{1-\rho_{2/1}}}{u_p} \sqrt{\frac{h_0}{Fr}} \left(\frac{2}{3+\rho_{2/1}}\right)^{\frac{\rho_{2/1}+1}{2(3+\rho_{2/1})}} (3+\rho_{2/1})^{\frac{1}{3+\rho_{2/1}}+1}$ . Звідси слідує для  $\rho_{2/1} < 1$  і  $\rho_{2/1} > 1$ :

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{3 + \rho_{2/1}}{2}\right)^{\frac{2}{3+\rho_{2/1}}-1} (3 + \rho_{2/1})^{\frac{1}{3+\rho_{2/1}}} k(c_1 e^{k\tau} - c_2 e^{-k\tau}) e^{\frac{c_1 e^{k\tau} + c_2 e^{-k\tau}}{3+\rho_{2/1}}}, \quad (14)$$

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{3 + \rho_{2/1}}{2}\right)^{\frac{2}{3+\rho_{2/1}}-1} (3 + \rho_{2/1})^{\frac{1}{3+\rho_{2/1}}} k(c_2' \cos k\tau - c_1' \sin k\tau) e^{\frac{c_1' \cos k\tau + c_2' \sin k\tau}{3+\rho_{2/1}}}. \quad (15)$$

На основі отриманого аналітичного розв'язку (13)-(15) можна провести аналіз особливостей проникнення струменя розплаву до басейну охолоджувача. Так, глибина проникнення визначається умовою  $dh/dt=0$ . Звідси для  $\rho_{2/1} < 1$  та  $\rho_{2/1} > 1$ , відповідно:

$$h_* = \left(\frac{3 + \rho_{2/1}}{2}\right)^{\frac{2}{3+\rho_{2/1}}} e^{\frac{4}{3+\rho_{2/1}}\sqrt{c_1 c_2}}, \quad h_* = \left(\frac{3 + \rho_{2/1}}{2}\right)^{\frac{2}{3+\rho_{2/1}}} e^{\frac{2c_1' + (c_2')^2 / c_1'}{3+\rho_{2/1}}}. \quad (16)$$

З отриманих виразів (16), враховуючи (8), (9), (11), можна визначити параметри струменя:

$$h \approx \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\rho_{2/1}}{2} Fr \right]^{chk\tau} e^{\frac{1}{\sqrt{\rho_{2/1}}}shk\tau} \quad (17)$$

$$\frac{dh}{dt} \approx \frac{2h}{\sqrt{\rho_{2/1}} Fr} \left( \frac{t}{\rho_{2/1} Fr} + 1 \right)^{-1} \left\{ \ln \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\rho_{2/1}}{2} Fr \right] shk\tau + \frac{chk\tau}{\sqrt{\rho_{2/1}}} \right\} \quad (18)$$

### Модель проникнення струменів до басейну з урахуванням запізнюючих аргументів

Нелінійне диференціальне рівняння руху струменя (1) з урахуванням запізнюючих аргументів можна записати у вигляді:

$$\rho_1 \frac{d(hv_1)}{dt} = (\rho_1 - \rho_2)gh(t - \tau_1) - \beta_c \rho_2 v_1^2 (t - \tau_2), \quad (19)$$

де  $\tau_1, \tau_2$  - відповідні запізнення в часі для архімедової сили та сили тиску пари на струмінь. Архімедова сила має запізнення внаслідок затримки реакції басейну на нове положення струменя у басейні, а затримка сили тиску пари пов'язана з тим, що на передачу зусиль від пари до струменя потрібен певний час, що визначається процесом течії пари.

Рівняння (19) в безрозмірному вигляді записується так:

$$\frac{d(hv_1)}{dt^2} + \beta_c \rho_{2/1} \left( \frac{dh(t - \tau_2)}{dt} \right)^2 + \frac{\rho_{2/1} - 1}{Fr} h(t - \tau_1) = 0, \quad (20)$$

де, як і раніше, для безрозмірних величин зберігаються ті ж самі позначення. Не маючи підстав для визначення  $\tau_1, \tau_2$ , рівняння (19), (20) слід розглядати для якісного аналізу. Після визначення значень  $\tau_1, \tau_2$ , вони можуть бути використані для кількісних розрахунків. Як видно з (19), (20), врахування запізнюючих аргументів суттєво змінює якісний характер системи. Якщо розв'язок рівняння (20) одержувати чисельними методами, то необхідно враховувати значення  $\tau_1, \tau_2$  як на початку процесу (на проміжку часу до максимального із значень  $\tau_1, \tau_2$  запізнення не можна врахувати, тому що процес починається з нульового моменту часу), так і в процесі чисельного розв'язку: інтегрування із заданою точністю визначає величину кроків за часом (автоматичний вибір кроку за часом), тому моменти  $\tau_1, \tau_2$  потрібно штучно вставляти за допомогою апроксимаційних методів.

Згідно з теоремою Ельсгольца [33], нелінійні члени погіршують апроксимацію функцій системи (20) рядами Тейлора, тому можна обмежитись лінійними членами:

$$h(t - \tau_i) \approx h(t) - \tau_i dh/dt. \quad (21)$$

Тоді, з урахуванням (21), рівняння (20) перетворюється на наступне

$$(h - 2\beta_c \rho_{2/1} \tau_2 \frac{dh}{dt}) \frac{d^2 h}{dt^2} + (1 + \beta_c \rho_{2/1}) (\frac{dh}{dt})^2 + \tau_1 \frac{1 - \rho_{2/1}}{Fr} \frac{dh}{dt} + \frac{\rho_{2/1} - 1}{Fr} h = 0, \quad (22)$$

звідки видно, що тип рівняння суттєво змінився. Рівняння (22) має значно складніші нелінійності порівняно з (20). При цьому особливо великий вплив може мати запізнення  $\tau_2$ , яке визначає хаотичний характер процесу випаровування та впливу течії пари на струмінь. Очевидно, що в загальному випадку величина запізнення  $\tau_2$  сама є функцією часу.

Відомо, що властивості багатьох реальних складних систем визначаються ефектом післядії, який полягає в тому, що поведінка системи залежить не тільки від її поточного стану, а й від попередніх станів системи. Для таких систем будують диференціальні рівняння з запізнюючими аргументами. Теорію таких систем розвивали Л.С. Понтрягін, Л.Е. Ельсгольц, Р. Bellman, V. Volterra, Г.І. Марчук, М.М. Красовський, О.Д. Мишкіс та інші вчені. Математична модель потенційно небезпечного об'єкта розглядалась в [34-36].

В рівнянні (19) та в наступних рівняннях із запізненнями величину  $\tau_2$  можна оцінити, розглядаючи задачу течії пари після її утворення внаслідок дії високотемпературного струменя. А величину  $\tau_1$  важко оцінити і її можна тільки спробувати моделювати якісно, надалі поклавши в розрахунках  $\tau_1 = 0$ .

Для рівняння (22) можна розглядати початкові умови (6)-(9), але треба мати на увазі, що за початковий момент часу в них обрано момент після удару струменя об поверхню басейну, а це коротший проміжок часу, ніж  $\tau_2$  (окрім випадку парового вибуху, коли ці характерні проміжки часу можуть бути приблизно одного порядку). У випадку високотемпературного струменя йде інтенсивне випаровування охолоджувача, тому удару струменя об поверхню немає і буде початкова умова в наступному безрозмірному вигляді:

$$t = \tau_2, h = 0, dh/dt = 1, \quad (23)$$

Задача Коші (22), (23) описує поведінку струменя у басейні з урахуванням запізнення дії пари внаслідок кінцевого часу розповсюдження пари та передачі її дії на струмінь. У розрахунках, як відмічалось вище, треба покласти  $\tau_1 = 0$ , оскільки ми не маємо можливості оцінити цю величину. Можна також розглядати безрозмірну задачу Коші виду (22), (23), розв'язуючи її чисельно, без застосування спрощення на основі теореми Ельсгольца. Розгляд цих задач цікавий тим, що він надає можливість порівняти одержане рішення з таким без урахування запізнень у

часі і встановити їх вплив як якісно, так і кількісно. На основі створеного інформаційно-аналітичного забезпечення були проведені масштабні обчислювальні експерименти.

### Висновки

Розглянуті математичні моделі можуть використовуватись для розрахунку параметрів систем пасивного захисту від тяжких аварій на АЕС. Особливості проникнення струменів до басейну мають також важливе теоретичне значення, оскільки поширення високотемпературних струменів у басейні охолоджувача є порівняно новою і маловивченою темою у сучасній теплогидравлічній теорії. У реальних практичних ситуаціях при проникненні струменів однієї рідини до басейну з іншою рідиною необхідно враховувати, окрім випаровування рідини від високотемпературного струменя, також ряд інших чинників.

### Література

1. Sehgal B.R. et al. Experiments and analyses of melt jet impingement during severe accidents/ Proc. NUTHOS-5.- Beijing.- China.- 1997.
2. Sehgal B.R., Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Karbojian A.K. Integral experiments on in-vessel coolability and vessel creep: results and analysis of the FOREVER-C1 test/ Proceedings of the Workshop on 'Severe Accident Research in Japan, SARJ98'.- Japan.- 1998.
3. Sehgal B.R., Nourgaliev R.R., Dinh T.N. Characterization of heat transfer processes in a melt pool convection and vessel-creep experiment/ NURETH-9.- San Francisco.- 1999.
4. Haraldsson H.O., Kazachkov I.V., Dinh T.N., Sehgal B.R. Analysis of thin jet breakup length in immiscible fluids/ Abstr. of the 3rd Int. Conf. on Advances in Fluid Mechanics 2000, 24-26 May.- Montreal.- Canada.- 2000.
5. Казачков И.В. Современное состояние и некоторые проблемы моделирования тяжелых аварий на зарубежных АЭС// Ядерная и радиационная безопасность.- 2003.- №1.- С. 25-34.
6. Казачков И.В., Али Хасан Могаддам. Моделирование теплогидравлических процессов при тяжелых авариях на АЭС.- Монография.- Киев: НТУУ «КПИ».- 2008.- 172 с.
7. Али Хасан Могаддам, Казачков И.В. Удержание кориума в контейнменте в тяжелых авариях на АЭС// Энергетика: економіка, технології, екологія.- Киев.- 2007.- №2.- С. 13-21.
8. Park H.S., Kazachkov I.V., Sehgal B.R., Maruyama Y. and Sugimoto J. Analysis of Plunging Jet Penetration into Liquid Pool in Isothermal Conditions/ ICMF 2001: Fourth International Conference on Multiphase Flow, New Orleans, Louisiana, U.S.A., May 27 – June 1. – 2001. – P. 65–69.
9. Pilch M.M. et al. The probability of containment failure by direct containment heating in Zion/ NUREG/ CR-6075, Sand93-1535.- 1993.
10. Takumi K. et al. Results of recent NUPEC hydrogen related tests/ Water Reactor Safety Information Meeting.- Washington D.C.- 1993.
11. Dorofeev S. et al. Flame acceleration limits for nuclear safety applications/ CSARP Meeting.- New Mexico.- 1999.
12. Berthoud G., Brayer C. First vapor explosion calculations performed with the MC3D code/ Proc. CSNI specialists meeting on FCIs.- Tokai.- Japan.- 1997.
13. Theofanous T.G., Yuen W.W., Freeman K., Chen, X., 1996a. Propagation of steam explosions: ESPROSE.m verification studies, DOE/ID-10503.
14. Sehgal B.R. et al. Core Melt Pressure Vessel Interactions During a Light Water Reactor Severe Accident (MVI Project)/ Proceeding of FISA-99 Meeting of EU Research on Severe Accidents.- 1999.
15. Sehgal B.R., Bui V.A., Dinh T.N., Nourgaliev R.R. Heat transfer processes in reactor vessel lower plenum during late phase of in-vessel core melt progression// J. Advances in Nuclear Science and Technology.- Plenum Publ. Corp.- 1998.- Vol. 26.
16. Asmolov V.V. Latest findings of RASPLAV Project/ Proc. OECD/CSNI workshop on in-vessel core debris retention and coolability.- 1998.
17. Huhtiniemi I., Magallon D. Insight into steam explosions with corium melts in KROTOS/ Proc. NURETH-9.- 1999.

18. Kazachkov I.V. Konovalikhin M.J. and Sehgal B.R. Coolability of melt pools and debris beds with bottom injection// 2nd Japanese-European Two-Phase Flow Group Meeting, Tsukuba, Japan, 2000.- P. 90-96.
19. Konovalikhin M.J., Kazachkov I.V. and Sehgal B.R. A model of the steam flow through the volumetrically heated saturated particle bed/ ICMF 2001: Fourth International Conference on Multiphase Flow, New Orleans, Louisiana, U.S.A., May 27 - June 1, 2001.- P. 37-43.
20. Kazachkov I.V. and Konovalikhin M.J. A Model of a Steam Flow through the Volumetrically Heated Particle Bed// Int. J. of Thermal Sciences.- 2002.- Vol.41.- P. 1077-1087.
21. Alsmeyer H., Farmer M., Ferderer F., Spencer B.W. and Tromm W. 1998. The COMET-Concept for Cooling of Ex-Vessel Corium Melts. CD-ROM Proc. of ICONE-6. San Diego, California. pp. 437-445.
22. Али Калванд, И. В. Казачков. Особенности процессов плавления-затвердевания при погружении блоков в расплав высокотемпературного кориума// Ядерна фізика та енергетика.- 2009.- Т. 10.- № 2.- С. 178-184.
23. Takada Shoji. Research and development on passive cooling system// Nuclear Engineering and Design.- 2004.- 233.- P. 185-195.
24. Gorislavets Yu.M., Kazachkov I.V., Kolesnichenko A.F. et al. Controlled decomposition of a liquid metal jets and films in technological and power devices/ Liquid metal MHD flows.- Kluwer Acad. Publ.- Holland.- 1989.- P. 293-298.
25. Колесниченко А.Ф., Казачков И.В., Водянюк В.О., Лысак Н.В. Капиллярные МГД-течения со свободными границами.- Киев: Наукова Думка.- 1988.- 176 с.
26. Вахид Хасани Могоддам, И.В. Казачков. О моделировании изгибных возмущении струй расплава в подреакторном бассейне с водой при тяжелой аварии на АЭС// Ядерна фізика та енергетика.- Київ.- 2009.- № 3.- С. 293-298.
27. Вахид Хасани Могоддам, И.В. Казачков. Моделирование струй расплава в испаряющемся охладителе// Энергетика: економіка, технології, екологія. - Киев.- 2010.- № 1.- С. 86-95.
28. Вахид Хасани Могоддам, И.В. Казачков. Моделирование проникания струй кориума в подреакторный бассейн с испаряющимся охладителем // Ядерна фізика та енергетика.- 2010.- Т. 11.- № 2.- С. 151 - 158.
29. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.- М.: Наука.- 1973.
30. Eichelberger R. J. Experimental test of the theory of penetration by metallic jets// J. Appl. Physics.- 1956.- V. 27.- 1.
31. Кинеловский С.А., Маевский К.К. Проникание кумулятивных струй в твердую преграду// Ж. Прикладной механики и технической физики.- 1989.- 2.
32. Sachdev P.L. Non-linear ordinary differential equations and their applications.-Marcel Dekker, Inc.- N.Y.- Basel.- Hong Kong.- 1991.- 578p.
33. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию уравнений с отклоняющимися аргументами.- Москва: Наука.- 1971.- 296 с.
34. Kazachkov I.V., Chesnokov Ye.V. and Kazachkova O.M. Modelling of Potentially Hazardous Objects with Time Shifts// WSEAS Trans. on Business & Economics. 2004, Issue3, №1, p. 37-43.
35. Kazachkov I.V., Chesnokov Ye.V. and Kazachkova O.M. Modelling of Potentially Hazardous Objects with Time Shifts/ Abstr. Of WSEAS Conf. on Business & Economics. 2004, Venice, Nov. 18-20, Italy.
36. Бегун В.В., Бегун С.В., Широков С.В., Казачков И.В., Литвинов В.В., Письменный Е.Н. Культура безопасности на ядерных объектах Украины. Навчальний посібник НТУУ «КПІ».- Киев.- 2009.- 386 с.

УДК 519.7(075/8)

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ І СИСТЕМ НЕРІВНОСТЕЙ У ПРОВІДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМАХ

В. С. Фетісов

### Система комп'ютерної алгебри Mathematica

Розв'язування нерівностей і їх систем здійснюється за допомогою функції **Reduce**. Синтаксис функції:

`Reduce[{вирази}], змінна, для якої знаходиться одне або кілька рішень]]`

Розв'язок одержується у вигляді діапазону можливих значень.

У наведеному нижче прикладі шукається розв'язок нерівності  $\frac{(x+2)}{(x-3)} > 2$ .

```
In[43]= Reduce [ ( (x + 2) / (x - 3) ) > 2 ]
Out[43]= 3 < x < 8
```

За необхідності розв'язування системи нерівностей синтаксис функції **Reduce** змінюється. У наведеному прикладі розв'язується система нерівностей  $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 2x - 8 > 0 \end{cases}$ :

```
In[44]= Reduce [ { (x - 1) > 0 , (2 * x - 8) > 0 } ]
Out[44]= x > 4
```

Функція **Reduce** також застосовується для розв'язування системи рівнянь, на яку накладаються певні обмеження. У наступному прикладі розв'язується система рівнянь для  $x > 1$ :

```
In[45]= Reduce [ {x^2 + y^2 == 4 , x - y == 2 , x > 0} , ]
Out[45]= y == 0 && x == 2
```

### Система комп'ютерної алгебри Maple

Розв'язування нерівностей у системі здійснюється за допомогою функції **solve**. При цьому (як, до речі, і під час розв'язування рівнянь), нерівність може бути розв'язана двома способами. Якщо другий аргумент (змінна) відсутній або визначається у вигляді змінної, то відповідь буде отримана через функції **RealRange** і **Open**. Перша з цих функцій визначає замкнений відрізок дійсних чисел, а друга використовується для вказівки того, що гранична точка не входить до розв'язку. Якщо ж другий аргумент **solve** подати у вигляді множини, то і розв'язок одержуватиме як множини.

У наведеному нижче прикладі шукається розв'язок нерівності  $\frac{(x+2)}{(x-3)} > 2$ .

$$\text{solve}\left(\frac{(x+2)}{(x-3)} > 2, x\right) \\ \text{RealRange}(\text{Open}(3), \text{Open}(8)) \quad (11)$$

$$\text{solve}\left(\frac{(x+2)}{(x-3)} > 2, \{x\}\right) \\ \{3 < x, x < 8\} \quad (12)$$

У цьому прикладі розв'язується система нерівностей  $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 2x - 8 > 0 \end{cases}$

$$\text{solve}(\{x - 1 > 0, 2 \cdot x - 8 > 0\}) \\ \{4 < x\} \quad (9)$$

Функція *solve* має кілька модифікацій для розв'язування рівнянь спеціального виду, наприклад: *isolve* – для розв'язування рівнянь у цілих числах; *msolve* – для розв'язування за модулем; *fsolve* – для чисельного розв'язування рівнянь.

### Математична система Mathcad 14

Для розв'язування нерівностей застосовують функцію *solve* (*розв'язати*). Для цього слід вести математичний вираз і на палітрі “Символьная” натиснути кнопку «*solve*».

$$\frac{x1 + 2}{x1 - 3} > 2 \text{ solve} \rightarrow 3 < x1 < 8$$

Розв'язування систем нерівностей здійснюється за таким алгоритмом: створюється вектор-стовпчик, кількість елементів якого дорівнює кількості нерівностей і рівнянь системи;

у кожний елемент вектора вводиться відповідний математичний вираз; на палітрі “Символьная” натискається кнопка «*solve*».

$$\left( \begin{array}{l} x1 - 1 > 0 \\ 2 \cdot x1 - 8 > 0 \end{array} \right) \text{ solve}, x1 \rightarrow 4 < x1$$

### Література

1. Дьяконов В. П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 576 с.
2. В.Ф. Очков. Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия. СПб.: ВHV – 2009.
3. Образовательный математический сайт Exponenta.ru // <http://exponenta.ru>

УДК 514.18

## ПОБУДОВА МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ, УТВОРЕНИХ З ІЗОТРОПНИХ КРИВИХ, ЗАСОБАМИ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ МАХІМА

Е.О. Чернишова

Останніми роками в області конструювання поверхонь все більше уваги стали приділяти мінімальним поверхням. Мінімальні поверхні широко розповсюджені в природі як найбільш економні поверхні: вони мають найменшу площу між замикаючим їх контуром, напруження у всіх напрямках поверхні однакове. Ці властивості мінімальних поверхонь визначають їх переваги в проектуванні та будівництві.

Одним із способів отримання мінімальних поверхонь є побудова їх на основі ізотропних кривих за формулами Вейерштрасса [1]. Як відомо, ізотропна крива (або, як її ще називають, мінімальна крива) – це просторова крива, для якої виконується умова

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = 0. \quad (1)$$

Нехай маємо довільну плоску криву, задану явно рівнянням  $y = f(x)$ . Знайдемо відповідну їй ізотропну криву. Для цього в якості параметризації оберемо  $x = t$ ,  $y = f(t)$  та підставимо в умову (1):

$$z'(t) = \sqrt{-((x'(t))^2 + (y'(t))^2)} = i\sqrt{1 + (f'(t))^2}.$$

Проінтегрувавши, отримаємо вираз для третьої координати

$$z(t) = i \int \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Отже рівняння ізотропної лінії мають вигляд:

$$x = t, y = f(t), z = i \int \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt. \quad (2)$$

Для утвореної просторової ізотропної лінії крива  $y = f(x)$  буде проекцією цієї лінії на площину  $xOy$ , а сама ізотропна крива – уявною кривою.

Формули Вейерштрасса для мінімальної поверхні отримуються з рівнянь ізотропної лінії заміною  $t = u + i \cdot v$ . Після цього знаходяться дійсні частини комплексних функцій по кожній координаті, тобто

$$X = \operatorname{Re}\{x(u + i \cdot v)\}; \quad Y = \operatorname{Re}\{y(u + i \cdot v)\}; \quad Z = \operatorname{Re}\{z(u + i \cdot v)\}. \quad (3)$$

Серед мінімальних виділяють такий клас ізометричних поверхонь, як приєднані або, як їх ще називають, спряжені, мінімальні поверхні. Вони цікаві тим, що дозволяють отримати одну поверхню з іншої за допомогою її згинання без деформації. Спряжені мінімальні поверхні можна «з'єднати» між собою гладкою сім'єю проміжних ізометричних мінімальних поверхонь, які називають асоційованими [2].

Щоб отримати рівняння приєднаної до (3) мінімальної поверхні, необхідно знайти уявні частини тих же комплексних функцій по кожній координаті:

$$X = \operatorname{Im}\{x(u + i \cdot v)\}; \quad Y = \operatorname{Im}\{y(u + i \cdot v)\}; \quad Z = \operatorname{Im}\{z(u + i \cdot v)\}.$$

Виконаємо аналогічні дії щодо рівнянь (2). А саме: введемо заміну  $t = u + i \cdot v$ , знайдемо дійсні частини утворених виразів і отримаємо рівняння мінімальної поверхні:

$$X = u; \quad Y = \operatorname{Re}\{f(u + i \cdot v)\}; \quad Z = \operatorname{Re}\{i \int_0^{u+i \cdot v} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt\}. \quad (4)$$

Слід зазначити, що крива  $y = f(x)$  буде знаходитися на мінімальній поверхні (4) і буде для неї геодезичною лінією.

Виділивши уявні частини виразів, знайдемо рівняння приєднаної мінімальної поверхні:

$$X = v; \quad Y = \operatorname{Im}\{f(u + i \cdot v)\}; \quad Z = \operatorname{Im}\{i \int_0^{u+i \cdot v} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt\}. \quad (5)$$

Розглянемо приклад. При виконанні розрахунків та для побудови отриманих мінімальних поверхонь скористаємося можливостями системи комп'ютерної алгебри *Matha*, яка дозволяє проводити як символльні, так і чисельні розрахунки.

Нехай  $y = x^2$ . Тоді рівняння ізотропної лінії (2) для нашого випадку будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \\ z &= i \left( \frac{a \sinh(2 t)}{4} + \frac{t \sqrt{4 t^2 + 1}}{2} \right) \end{aligned}$$

Запишемо рівняння мінімальної поверхні (4):

$$X = u$$

$$Y = u^2 - v^2$$

$$Z = - \left( \operatorname{atan2} \left( (4v^2 - 4v + 4u^2 + 1)^{1/4} (4v^2 + 4v + 4u^2 + 1)^{1/4} \right. \right.$$

$$\left. \sin \left( \frac{\operatorname{atan2}(8uv, -4v^2 + 4u^2 + 1)}{2} \right) + 2v, (4v^2 - 4v + 4u^2 + 1)^{1/4} (4v^2 + 4v + 4u^2 + 1)^{1/4} \right.$$

$$\left. \cos \left( \frac{\operatorname{atan2}(8uv, -4v^2 + 4u^2 + 1)}{2} \right) + 2u \right) + (4v^2 - 4v + 4u^2 + 1)^{1/4} (4v^2 + 4v + 4u^2 + 1)^{1/4}$$

$$\left( 2u \sin \left( \frac{\operatorname{atan2}(8uv, -4v^2 + 4u^2 + 1)}{2} \right) + 2v \cos \left( \frac{\operatorname{atan2}(8uv, -4v^2 + 4u^2 + 1)}{2} \right) \right) / 4$$

Побудована мінімальна поверхня представлена на рис. 1.

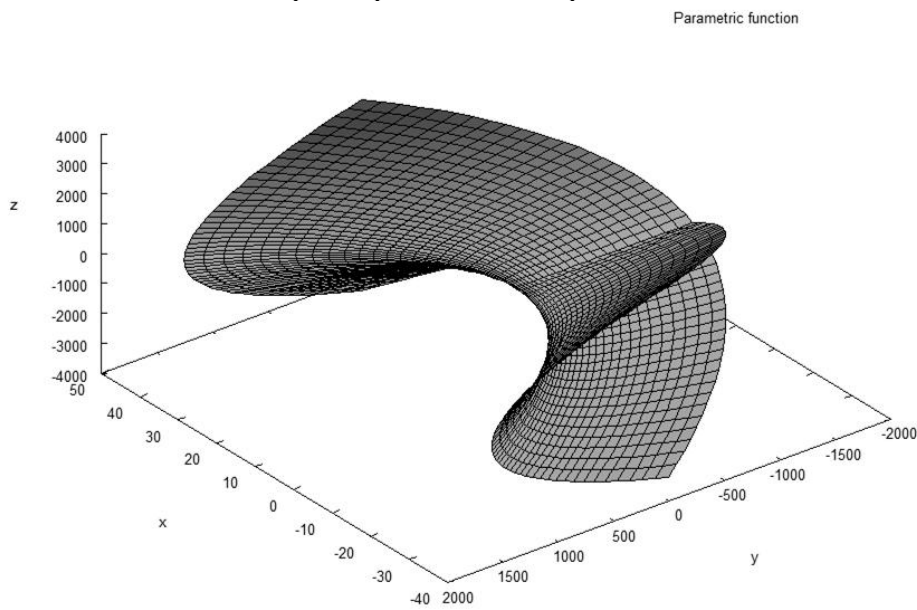


Рис. 1

Рівняння приєднаної мінімальної поверхні (5) для заданої функції мають вигляд:

$$X1 = v$$

$$Y1 = 2uv$$

$$Z1 = - \left( (4v^2 - 4v + 4u^2 + 1)^{1/4} (4v^2 + 4v + 4u^2 + 1)^{1/4} \right.$$

$$\left. \left( 4v \sin \left( \frac{\operatorname{atan2}(8uv, -4v^2 + 4u^2 + 1)}{2} \right) - 4u \cos \left( \frac{\operatorname{atan2}(8uv, -4v^2 + 4u^2 + 1)}{2} \right) \right) - \log \left( \right.$$

$$\left. \sqrt{4v^2 - 4v + 4u^2 + 1} \sqrt{4v^2 + 4v + 4u^2 + 1} \right.$$

$$\left. \left( \sin \left( \frac{\operatorname{atan2}(8uv, -4v^2 + 4u^2 + 1)}{2} \right)^2 + \cos \left( \frac{\operatorname{atan2}(8uv, -4v^2 + 4u^2 + 1)}{2} \right)^2 \right) + \right.$$

$$\left. (4v^2 - 4v + 4u^2 + 1)^{1/4} (4v^2 + 4v + 4u^2 + 1)^{1/4} \right.$$

$$\left. \left( 4v \sin \left( \frac{\operatorname{atan2}(8uv, -4v^2 + 4u^2 + 1)}{2} \right) + 4u \cos \left( \frac{\operatorname{atan2}(8uv, -4v^2 + 4u^2 + 1)}{2} \right) + 4v^2 + 4u^2 \right) / 8$$

Дана поверхня побудована на рис. 2.



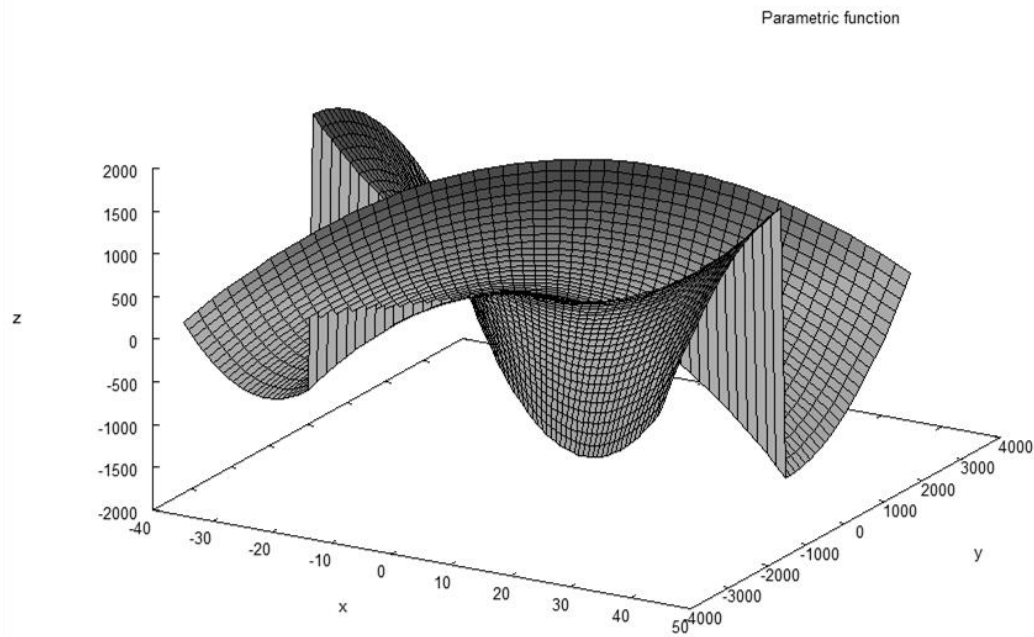


Рис. 2

### Література

1. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. – М: Гостехиздат, 1957. – 223 с.
2. Тужилин А.А., Фоменко А.Т. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. – М.: Наука. 1991. – 176 с.
3. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов / Е.А.Чичкарёв – М. : ALT Linux, 2012. – 384 с.
4. Пилипака С.Ф., Чернишова Е.О. Мінімальні поверхні, отримані з ізотропних кривих // Збірник наукових праць КНУДТ (спецвипуск): Доповіді третьої кримської науково-практичної конференції “Геометричне та комп’ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн”. – К.: ДОП КНУДТ, 2006. – С. 40 – 45.

# 4

## Вимірювання в освіті

УДК 371

### ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ ПСИХОЛОГІЧНИХ РИС ТА ОСОБИСТІСНИХ ТЕОРЕТИЧНИХ КОНСТРУКТІВ

Ю.О. Ковальчук

Під *порівнянням* результатів різних вимірювань будемо розуміти ту частину теорії освітніх вимірювань і загалом психометрії, яка в англійській літературі позначається терміном *linking* (зв'язування, з'єднування), і який означає трансформацію оцінок шкали одного тесту в оцінки шкали іншого тесту, або трансформацію оцінок двох тестів у єдину шкалу.

Методи порівняння результатів різних вимірювань можна поділити на три групи: передбачення, вирівнювання шкал, і пряме прирівнювання.

*Передбачення* (англ. *predicting*) застосовується у ситуаціях, коли необхідно передбачити оцінку опитуваного з деякого тесту на основі спостереженої оцінки з іншого тесту або батареї тестів, чи інших джерел інформації. Цей вид порівняння зазвичай базується на моделі лінійної регресії (для ситуації з одним предиктором), або множинної лінійної регресії (для ситуації з кількома предикторами), тому ми згадали про нього тут лише для повноти викладу. Прикладом ситуації, коли використовується передбачення, є дослідження прогностичної валідності тесту. Проте це далеко не єдина ситуація, яка вимагає використання методів прогнозування.

*Вирівнювання шкал* (англ. *scale aligning*) означає трансформацію оцінок двох різних тестів у єдину шкалу. Прикладом вирівнювання шкал є переведення оцінок двох тестів з певної дисципліни у систему зовнішнього незалежного оцінювання, які пред'являються різним групам випускників шкіл у двох сесіях тестування, в нормалізовану шкалу методом еквіпроцентильної нормалізації.

Ще одним прикладом вирівнювання шкал, щоправда не пов'язаним з тестуванням, є введення оцінок накопичувальної 100-бальної шкали в українських університетах у буквену шкалу ECTS (A, B, C, D, E, Fx, F), за тієї умови, що будуть дотримані рекомендації щодо частотного розподілу оцінок. Наприклад, передбачається, що оцінку A повинні отримати приблизно 10 відсотків кращих студентів і т.д. У такому випадку, за умови, що множини студентів у двох різних університетах, які вивчали дану дисципліну, належать одній і тій же популяції з однаковою розподілом рівня успішності з цієї дисципліни, оцінку, отриману в одному університеті, можна перерахувати в іншому університеті. Якщо ж оцінки за 100-бальною шкалою виставлялися без будь-якого дотримання розподілу частот, а потім механічно переводилися в шкалу ECTS (якщо отримано від 90 до 100, то A, і т.д.), то тоді вже немає ніякої змоги перерахувати оцінку в іншому університеті, не ризикуючи порушити принцип справедливості оцінювання.

Зауважимо, що останнім часом Європейська комісія, розуміючи особливості національних систем оцінювання, пропонує відмовитися від переведення всіх оцінок в єдину «ідеальну» шкалу ECTS, рекомендуючи натомість використовувати пряме прирівнювання розподілів оцінок, отриманих достатньо великими групами студентів в обох університетах.

*Прирівнювання* (англ. *equating*) об'єднує в собі методи визначення взаємно-однозначної відповідності між шкалами оцінок двох різних тестів, тобто трансформації оцінок шкали одного вимірювання у оцінки шкали іншого вимірювання, і навпаки. Саме властивість зворотності трансформації є причиною виділення цих методів в окрему групу.

В усіх випадках порівняння різних вимірювань повинні виконуватися певні додаткові припущення, які дозволяють порівнювати або інструменти вимірювання, або популяції, для яких використовуються ці інструменти. Якщо вимірювати зріст марсіанина у марсіанських одиницях довжини, а жителя Венери – у венеріанських одиницях, то не буде жодної змоги сказати, хто з них вищий, якщо не буде додаткової інформації, яка б дозволила порівняти або одиниці вимірювання (інструменти), або зріст жителів цих двох планет. Так само, враховуючи про відмінність вимірювань у сфері психіки від фізичних вимірювань, доводиться визнати, що не

можна порівняти результати двох різних тестувань, проведених на двох різних популяціях, не маючи додаткової «якірної» (англ. anchor) інформації, яка є своєрідним містком або між тестами, або між популяціями. Розглянемо детальніше методи вирівнювання та прямого прирівнювання.

**Методи вирівнювання шкал.** Цю групу методів можна поділити на дві підгрупи.

Перша підгрупа стосується ситуацій, коли потрібно порівняти результати двох тестувань, якими вимірюються різні конструкти. Тут теж можливі два випадки. У першому випадку вважається, що групи, яким пред'являлися тести, належать до однієї популяції. У другому випадку вважається, що тести пред'являлися групам з різних популяцій. Перший випадок іноді називають шкалюванням батареї (battery scaling). Те, що дві групи належать одній популяції, означає, що це або одна і та ж група, або групи еквівалентні з точки зору розподілу у них рівнів вимірюваної якості. Оскільки у цьому випадку результати кожного з тестувань можуть бути поширені на всю популяцію, то достатньо виконати трансформацію розподілу оцінок кожного з тестів (точніше, емпіричної функції розподілу) у спільну шкалу. Наприклад, батарея тестів SAT I (тесту здібностей до навчання), яка складається з двох субтестів – вербального та логіко-математичного, була приведена до єдиної шкали у 1990 році. Результат такого вирівнювання дозволяє стверджувати, що екзаменований, оцінка якого за математичний субтест є вищою за його оцінку з вербального субтесту, має рівень математичних здібностей вищий, ніж вербальних здібностей.

У другому випадку, коли групи екзаменованих, у яких вимірювалися різні якості, є різними, необхідно залучати додаткову, якірну інформацію. Відповідні методи називають *якірним шкалюванням* (anchor scaling). Зауважимо, що у деяких випадках тести, які пред'являються різним групам, є вимушено різними. Наприклад, при тестуванні з іноземної мови в системі ЗНО одні випускники складають тест з англійської, інші – з французької, залежно від того, яку мову вони вивчали. Якірне вимірювання – це спільне для обох груп вимірювання. Воно має бути достатньо сильно корельованим з тими обома вимірюваннями, які потрібно порівняти, інакше воно не дасть достатньо повної сполучної інформації.

На практиці використовують два різні підходи до якірного вимірювання. Перший підхід передбачає, що якірне вимірювання має спільний для обох груп розподіл. Це фактично означає, що обидві групи належать до однієї гіпотетичної популяції. Цей підхід використовується, наприклад, для порівняння результатів предметних тестів SAT II. Різні особи складають тести з різних предметів, а якірним є спільний для всіх тестів SAT I. Другий підхід полягає у тому, що результати тієї групи екзаменованих, яким пред'являвся тест  $Y$  і якірне вимірювання  $A$ , використовуються для визначення *функції порівняння*, такої, як еквіпроцентильна функція чи лінійна функція порівняння, для порівняння тесту  $X$  та вимірювання  $A$ . Таким чином, результати обох тестів  $X$  та  $Y$  трансформуються у шкалу якірного вимірювання  $A$ .

**Пряме прирівнювання.** Метою прямого прирівнювання є інтерпретація результатів різних тестів у такий спосіб, ніби вони є результатами одного і того ж вимірювання. Для цього необхідно, щоб обидва тести вимірювали один і той же конструкт на одному і тому ж рівні трудності і з однаковою надійністю. Це найбільш строга форма порівняння результатів двох тестувань. Пряме прирівнювання є необхідною частиною будь-якої програми тестування, яка передбачає багатократне тестування за допомогою різних форм тестів. Хоча різні форми тесту можуть базуватися на одних і тих же специфікаціях тестових завдань і тестів, вони все ж зазвичай мають різні статистичні характеристики, наприклад, одна форма може бути в цілому складніша за іншу. головна мета прямого прирівнювання – уникнути ефектів, які є наслідками розбіжностей в статистичних характеристиках форм.

**Збір даних для порівняння тестів.** Існує багато методів (дизайнів) збору даних для порівняння тестів. Розглянемо основні чотири дизайни, подавши їх у вигляді таблиць.

1. Дизайн *єдиної групи* екзаменованих (SG, Single Group). Таблиця 1 демонструє схему цього дизайну. Тут  $i$  в наступних таблицях  $X$ ,  $Y$  і  $A$  означають тести,  $P$  і  $Q$  – популяції. У цьому дизайні одна й та ж група екзаменованих проходить обидва тести.

Таблиця 1. SG-дизайн

Популяція	Вибірка	$X$	$Y$
$P$	1	+	+

2. Дизайн *еквівалентних груп* (EG, таблиця 2). Тут є дві вибірки з однієї популяції, кожна з груп проходить свій відмінний тест. Якірною інформацією є належність обох груп до однієї вибірки.

Таблиця 2. EG-дизайн

Популяція	Вибірка	$X$	$Y$
$P$	1	+	
$P$	2		+

3. Дизайн *рівноваги* (CB, Counterbalanced). Таблицею 3 представлено дизайн з двома групами із однієї популяції.

Таблиця 3. CB-дизайн

Популяція	Вибірка	$X_1$	$Y_1$	$X_2$	$Y_2$
$P$	1	+			+
$P$	2		+	+	

Цей дизайн використовується для того, щоб усунути ефект послідовності у пред'явленні тестів у дизайні SG. Якщо тести пред'являти одній і тій же групі у різній послідовності, результати можуть істотно відрізнятись. У дизайні CB група розбивається на дві підгрупи. Одна підгрупа виконує спочатку тест  $X$ , потім тест  $Y$  (позначається як  $X_1, Y_2$ ), інша – навпаки ( $X_2, Y_1$ ). Як бачимо, фактично цей дизайн є поєднанням двох попередніх – SG і EG.

4. Дизайн якірного тесту ( $A$ ) для нееквівалентних груп (NEAT, таблиця 4).

Таблиця 4. NEAT-дизайн

Популяція	Вибірка	$X$	$A$	$Y$
$P$	1	+	+	
$Q$	2		+	+

Якірний тест може входити як частина в обидва тести  $X$  і  $Y$ , а може й бути окремим тестом. Якщо  $P = Q$ , то отримаємо ще один дизайн, який називають EG-дизайном з якірним тестом. У цьому випадку тест  $A$  може вимірювати не обов'язково той же конструкт, що й  $X$  та  $Y$ , але повинен тоді корелювати з ними.

### Література

1. Educational Measurement. – 4th edition / Edited by Robert L. Brennan. – ACE, 2006. – 796 pp.
2. Крокер Л., Алгина Дж. Введение в классическую и современную теорию тестов. – М.: Логос, 2010. – 668 с.

УДК 371.26

## РІЗНІ ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ ТЕСТІВ З ПОЛІТОМІЧНИМИ ЗАВДАННЯМИ

Т.В. Лісова

Дихотомічне завдання допускає лише дві можливі категорії відповіді: правильно/неправильно або 1/0. Політомічне завдання – більше двох категорій, наприклад: правильно/частково правильно/неправильно або 2/1/0.

Можна виділити чотири основних джерела політомічності (багатоваріантності) тестових завдань, коли результат представляється у вигляді деяких впорядкованих категорій. Перше з них – повторні випробування, коли опитані мають фіксовану незалежну кількість спроб відповіді на кожне питання. Спостережене значення успіхів  $x$  може набувати значень від 0 до кількості спроб  $m$ . Такий формат корисний при дослідженні психомоторних навичок, тоді  $x$  – кількість спроб, у яких завдання виконано правильно. У даному випадку порядок появи успіхів не враховується, а лише кількість. Впорядковані категорії відповідей тут мають значення  $0, 1, \dots, m$ .

Другий тип впорядкованих категорій виникає тоді, коли немає верхньої межі кількості незалежних успіхів або невдач. Спостереженим значенням  $x$  може бути, наприклад, кількість успішно завершених спроб за указаний проміжок часу, кількість помилок, які робить людина при читанні заданого абзацу тощо. Впорядковані категорії відповідей тут мають значення  $0, 1, 2, \dots, \infty$ . Математичні моделі для аналізу таких завдань були запропоновані Рашем у 1960-х роках та досліджені його послідовниками.

Третій тип політомічності походить від рейтингових шкал, коли відповіді на кожне завдання можуть оцінюватись фіксованим набором альтернатив, наприклад: погано, посередньо, добре. Або коли потрібно висловити своє відношення до кожного пункту анкети за допомогою альтернатив типу не підтримую, підтримую частково, підтримую повністю. Особливістю такого формату даних є те, що для кожного завдання повинен використовуватись один і той самий набір категорій  $0, 1, 2, \dots, m$ .

Четвертий тип впорядкованих категорій відповідей може виникати тоді, коли завдання потребує покрокового виконання і кожен крок оцінюється як частковий успіх певною кількістю балів. Мотивом для такого оцінювання є надія, що це дасть більш точну характеристику здібностей опитаних, ніж оцінка типу здав – не здав. Для кожного  $j$ -го завдання може використовуватись свій набір категорій  $0, 1, 2, \dots, m_j$ . До даного типу політомічності можна віднести і рейтингові шкали (типу Лайкерта). Тоді перехід від однієї позиції шкали до іншої можна вважати одним кроком.

Найбільш вживаною математичною моделлю для таких завдань є модель Partial Credit Model (PCM), яку запропонував Дж.Мастерс (G.Masters) у 1982 р. Дослівний переклад «Модель часткових кредитів» вживається рідко. Інколи модель PCM називають політомічною моделлю Раша.

Нехай за виконання  $j$ -го завдання тесту ( $j = \overline{1, k}$ )  $i$ -ий опитуваний ( $i = \overline{1, n}$ ) може одержати  $x_{ij}$  балів, де  $x_{ij} = 0, 1, \dots, m_j$ . Щоб дістати найвищу категорію (рівень)  $m_j$ , учасник повинен послідовно подолати  $m_j$  кроків: на першому кроці спочатку потрібно досягти першого рівня в один бал, потім на другому кроці досягти категорії в два бали і так далі. У таблиці 1 наведено різні можливі ситуації для 10 учасників при відповіді на трикрокове завдання. Дихотомічна змінна  $y_{ij}$  приймає значення 1, якщо  $i$ -ий учасник подолав  $l$ -ий крок  $j$ -го завдання, і 0 – якщо ні. У даному випадку сім учасників подолали перший крок і досягли рівня 1, п'ять учасників подолали другий крок і досягли рівня 2, а три учасники повністю впоралися із завданням і досягли найвищого рівня 3. При цьому жоден учасник не може досягти  $l$ -го рівня, якщо до цього він не досяг  $(l-1)$ -го рівня.

Таблиця 1

Учасник, <i>i</i>	Рівень виконання				Бали, $x_{ij}$
	0	1	2	3	
	$y_{0ij}$	$y_{1ij}$	$y_{2ij}$	$y_{3ij}$	
	Перший крок	Другий крок	Третій крок		
1	1	→ 1	→ 1	→ 1	3
2	1				0
3	1	→ 1	→ 1		2
4	1	→ 1			1
5	1				0
6	1	→ 1	→ 1	→ 1	3
7	1	→ 1			1
8	1	→ 1	→ 1		2
9	1				0
10	1	→ 1	→ 1	→ 1	3
Всього	$s_{j0} = 10$	$s_{j1} = 7$	$s_{j2} = 5$	$s_{j3} = 3$	

Рівень складності виконання  $l$ -го кроку  $j$ -го завдання позначимо через  $\delta_{jl}$  ( $l = \overline{0, m_j}$ ), причому вважаємо, що цей параметр не несе ніякої інформації про складність попередніх кроків. Тобто, це не складність досягнення  $l$ -го кроку, як у деяких інших моделях, а складність переходу з одного кроку на інший. Таким чином, умовна ймовірність того, що буде подолано  $l$ -ий крок (дихотомічна змінна  $y_{lij} = 1$ ), якщо перед цим було подолано  $(l-1)$ -ий крок, залежить лише від рівня підготовки учасника тестування  $\theta_i$  та від складності переходу між кроками  $\delta_{jl}$  і повинна зростати на всій області визначення латентної змінної рівня підготовленості. Це дає підставу застосувати на цьому кроці логістичну модель Раша:

$$p_{lij}^{ym} = P\{y_{lij} = 1 \mid \theta_i, \delta_{jl}\} = (1 + \exp[-(\theta_i - \delta_{jl})])^{-1}.$$

З іншого боку, ця умовна ймовірність за означенням

$$p_{lij}^{ym} = \frac{p_{lij}}{p_{(l-1)ij} + p_{lij}}, \quad (1)$$

де чисельник вказує на ймовірність того, що  $i$ -та особа у  $j$ -ому завданні виконає всі  $l$  кроків (відповідно набере  $l$  балів, а не  $(l-1)$ ), а знаменник – ймовірність того, що ця особа виконає  $l$  або  $(l-1)$  кроків. Аналогічно можна було б трактувати умовну ймовірність для дихотомічних завдань, але там  $p_{lij}^{ym} = p_{lij}$ , оскільки  $p_{0ij} + p_{1ij} = 1$ .

Отже,  $\frac{p_{lij}}{p_{(l-1)ij} + p_{lij}} = \frac{1}{1 + \exp(-(\theta_i - \delta_{jl}))}$ . Звідси отримуємо рекурентне співвідношення

$$p_{lij} = p_{(l-1)ij} \cdot e^{(\theta_i - \delta_{jl})}. \quad (2)$$

Послідовно можна виразити усі безумовні ймовірності через  $p_{0ij}$ :

$$\begin{aligned} p_{1ij} &= p_{0ij} \cdot e^{(\theta_i - \delta_{j1})}, \\ p_{2ij} &= p_{1ij} \cdot e^{(\theta_i - \delta_{j2})} = p_{0ij} \cdot e^{(\theta_i - \delta_{j1}) + (\theta_i - \delta_{j2})}, \\ p_{3ij} &= p_{2ij} \cdot e^{(\theta_i - \delta_{j3})} = p_{0ij} \cdot e^{(\theta_i - \delta_{j1}) + (\theta_i - \delta_{j2}) + (\theta_i - \delta_{j3})}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3)$$

$$P_{m,ij} = P_{(m_j-1)ij} \cdot e^{(\theta_i - \delta_{jm_j})} = P_{0ij} \cdot e^{(\theta_i - \delta_{j1}) + (\theta_i - \delta_{j2}) + (\theta_i - \delta_{j3}) + \dots + (\theta_i - \delta_{jm_j})}$$

Оскільки кожен учасник набере хоча б якусь кількість балів від 0 до  $m_j$ , то сума всіх ймовірностей дорівнює 1:

$$P_{0ij} + P_{1ij} + P_{2ij} + P_{3ij} + \dots + P_{m,ij} = 1. \tag{4}$$

Підставляючи в (4) вирази з (3), отримаємо

$$P_{0ij} \left[ 1 + e^{(\theta_i - \delta_{j1})} + e^{(\theta_i - \delta_{j1}) + (\theta_i - \delta_{j2})} + \dots + e^{(\theta_i - \delta_{j1}) + (\theta_i - \delta_{j2}) + (\theta_i - \delta_{j3}) + \dots + (\theta_i - \delta_{jm_j})} \right] = 1.$$

Для зручності далі в усіх формулах вважатимемо  $e^{(\theta_i - \delta_{j0})} = 1$ . Тоді

$$P_{0ij} = \frac{1}{\sum_{h=0}^{m_j} \exp \sum_{g=0}^h (\theta_i - \delta_{jg})}. \tag{5}$$

Повертаючись до рівностей (3), можемо записати загальну формулу для ймовірності того, що  $i$ -та особа у  $j$ -ому завданні виконає рівно  $l$  кроків (або ж отримає  $l$  балів):

$$P_{lij} = P\{x_{ij} = l \mid \theta_i, (\delta_j)\} = \frac{\exp \sum_{g=0}^l (\theta_i - \delta_{jg})}{\sum_{h=0}^{m_j} \exp \sum_{g=0}^h (\theta_i - \delta_{jg})}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots, m_j) \tag{6}$$

Формула (6) і визначає модель **Partial Credit**. Тут  $(\delta_j)$  – вектор складностей усіх кроків  $j$ -ого завдання. Зауважимо, що у чисельнику фігурують складності лише тих  $l$  кроків, які дана особа подолає, а у знаменнику – складності всіх можливих у даному завданні кроків.

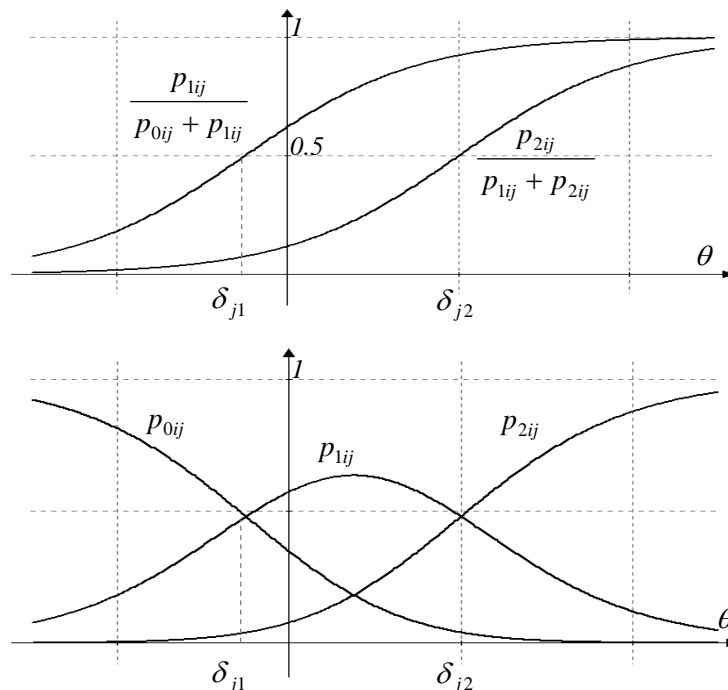


Рис. 1.

На рис.1 та 2 показана залежність умовних (верхня частина рисунка) та безумовних (нижня частина) ймовірностей від рівня підготовки опитаних для деякого двокрокового завдання. Якщо складність другого кроку вища, ніж першого (рис.1), то ймовірність подолати два кроки, а не один, на всій множині рівнів підготовки є меншою.

Складність кожного кроку  $\delta_{jl}$  є абсцисою точки перетину кривих безумовних ймовірностей двох сусідніх категорій ( $l-1$ ) та  $l$ , тобто, це те значення рівня підготовки, де ймовірності досягти кожної з даних категорій однакові:  $p_{(l-1)ij} = p_{lij}$ . Ординати точок перетину не обов'язково дорівнюють 0.5, на відміну від деяких інших моделей.

Для учасників тестування з рівнями підготовки  $\theta$  між  $\delta_{j1}$  та  $\delta_{j2}$  найбільш ймовірною є можливість подолати саме перший крок. Якщо складності обох кроків стають близькими, для кожного учасника тестування ймовірність завершити лише перший крок зменшується, а збільшується ймовірність завершити обидва кроки, або жодного. Якщо ж складність другого кроку менша, ніж першого  $\delta_{j2} < \delta_{j1}$  (рис.2), то ще менш ймовірно для кожного учасника завершити лише один крок. Таке завдання перетворюється на дихотомічне, де кожен учасник має більше шансів отримати 0 або 2 бали. Категорія в 1 бал не працює, її не доцільно виділяти у даному завданні.

Функції, зображені на рис.1 та 2, мають назву Item Category Response Function (ICRF), аналогічно до Item Response Function (IRF) у дихотомічному випадку. На одному рисунку зображувати та аналізувати ICRF для кількох різних завдань не зовсім зручно через велику кількість кривих та точок їх перетину. Але можна порівнювати *характеристичні криві* ICC різних завдань, які у загальному випадку вказують на залежність очікуваного бала (математичного сподівання) за завдання від рівня підготовки. У випадку політомічних завдань характеристична крива завдання ICC визначається рівнянням:

$$E_j(\theta) = \sum_{l=0}^{m_j} l \cdot p_{lij} = 0 \cdot p_{0ij} + 1 \cdot p_{1ij} + 2 \cdot p_{2ij} + \dots + m_j \cdot p_{m_j ij}. \quad (7)$$

Для дихотомічних завдань криві ICC та IRC дійсно збігаються, оскільки очікуваний бал  $E_j(\theta) = 0 \cdot p_{0ij} + 1 \cdot p_{1ij} = P_j(\theta)$ .

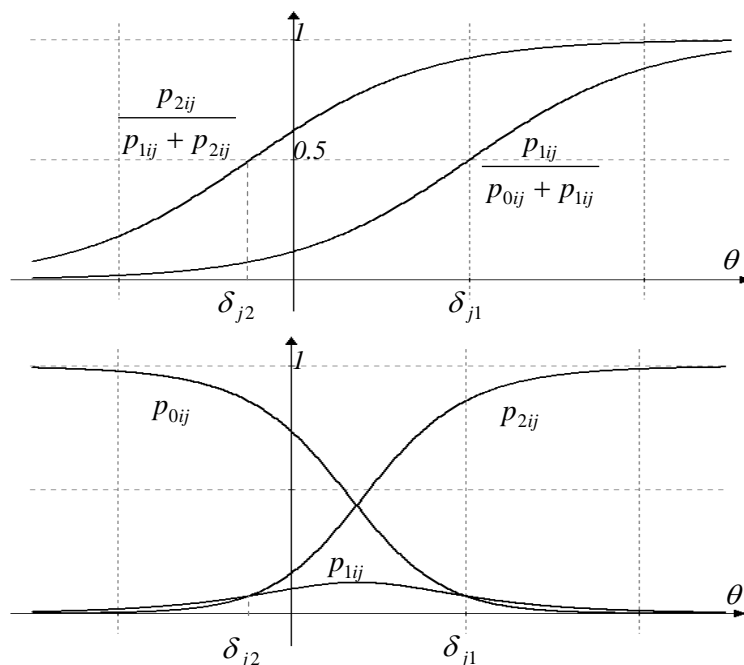


Рис. 2.

На рис.3 зображено ICC двох двокрокових завдань. Перше завдання (суцільна лінія) має складності кроків  $\delta_{11} = -0.5$ ,  $\delta_{12} = 2.0$  (як на рис.1), для другого завдання (пунктирна лінія) навпаки,  $\delta_{21} = 2.0$ ,  $\delta_{22} = -0.5$  (як на рис.2).



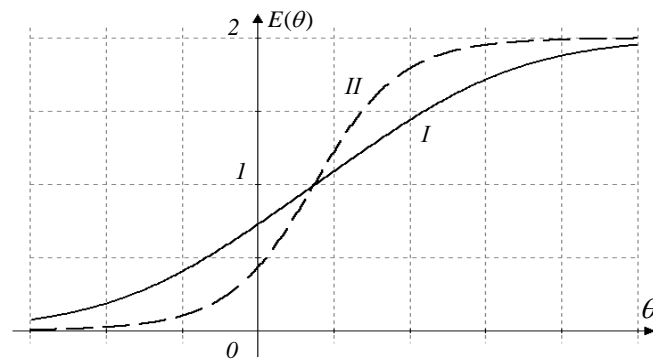


Рис. 3.

Ще до появи моделі Partial Credit у 1978 р. Д.Андріч (D.Andrich) запропонував математичну модель Rating Scale Model (RSM) для аналізу анкет з впорядкованими відповідями, у якій важливо, щоб усі запитання мали однакову кількість категорій ( $l = 0, 1, 2, \dots, m$ ). Зараз цю модель можна отримати з моделі Partial Credit як частинний випадок.

Якщо у моделі PCM не накладається ніяких обмежень на складність кроків для різних завдань, деякі кроки можуть бути легші в одному завданні і складніші в іншому, то у моделі RSM складність кроків всередині кожного завдання не повинна змінюватись від завдання до завдання. Щоб це врахувати, будемо вважати, що на рівень складності виконання  $l$ -го кроку  $j$ -го завдання у моделі Partial Credit впливають два параметри – складність самого завдання та складність кроку, яка однакова для всіх завдань, тобто

$$\delta_{jl} = \delta_j + \tau_l. \tag{8}$$

На рис.4 показано, як формуються складності кроків у RSM.

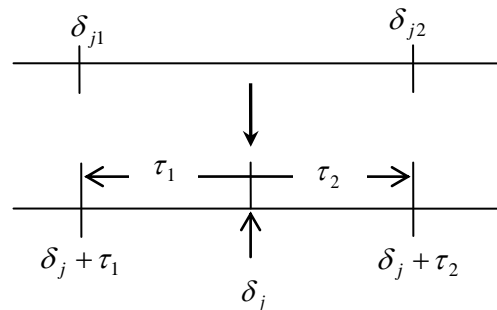


Рис. 4.

Враховуючи (8) у основній формулі (6) для моделі PCM, отримаємо

$$P_{lij} = \frac{\exp \sum_{g=0}^l (\theta_i - (\delta_j + \tau_g))}{\sum_{h=0}^m \exp \sum_{g=0}^h (\theta_i - (\delta_j + \tau_g))}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Перегрупувавши доданки, отримаємо відому раніше основну формулу моделі **Rating Scale**:

$$P_{lij} = \frac{\exp \left[ - \sum_{g=0}^l \tau_g + l \cdot (\theta_i - \delta_j) \right]}{\sum_{h=0}^m \exp \left[ - \sum_{g=0}^h \tau_g + h \cdot (\theta_i - \delta_j) \right]}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots, m) \tag{9}$$

Графіки ICRF для всіх завдань мають однакову форму, але їх положення на горизонтальній осі визначається складністю  $\delta_j$  кожного завдання, криві ICC для різних завдань не перети-

наються (як у моделі Раша).

Моделі Partial Credit та Rating Scale належать до сім'ї моделей Раша, оскільки володіють основними властивостями моделі Раша. Зауважимо, що у обох моделях не враховується дискримінуюча здатність завдання (вона однакова для всіх завдань).

При побудові математичних моделей для політомічних завдань спочатку переважав підхід, коли впорядковані категорії відповідей розглядались як граничні точки (пороги), що розділяють деяку неперервну область. Значення порогів залежать від складності досягнення відповідного рівня.

Популярну модель на основі такого підходу Graded Response Model (GRM) запропонувала Ф.Самейма (F. Samejima) ще у 1969 р. В основі моделі такі міркування: коли особа  $i$  отримує питання  $j$ , у якому є можливість подолати  $m$  категорій, з'являється деяка латентна випадкова змінна  $\varepsilon_{ij}$ . Ймовірність того, що ця змінна набуде значення вище, ніж  $l$ -та категорія, залежить від рівня підготовки особи  $\theta_i$ , складності подолання даного порогу  $\lambda_{jl}$ , ( $l=1,2,\dots,m$ ) та диференціуючої здатності завдання  $a_j$ . Якщо припустити, що  $\varepsilon_{ij}$  має логістичний розподіл, який схожий на нормальний, але з важчими хвостами та більшим ексцесом, то ймовірність того, що  $i$ -та особа у  $j$ -му завданні подолає  $l$ -ий або вищий поріг матиме вигляд:

$$p_{ij}^* = \frac{\exp(a_j(\theta_i - \lambda_{jl}))}{1 + \exp(a_j(\theta_i - \lambda_{jl}))} = \left(1 + \exp[-a_j(\theta_i - \lambda_{jl})]\right)^{-1}. \quad (10)$$

У даній моделі  $\lambda_{jl}$  – складність подолання  $l$ -го порогу, тоді як у попередніх моделях  $\delta_{jl}$  – складність переходу між сусідніми порогами, причому тут  $\lambda_{j1} < \lambda_{j2} < \dots < \lambda_{jm}$ . Вище значення подоланого порогу завжди відповідає вищому рівню підготовки. На рис.5 показано зв'язок між ймовірностями (10) та ймовірностями  $p_{lij}$  того, що особа у даному завданні подолає рівно  $l$  порогів (на прикладі завдання з двома порогами).

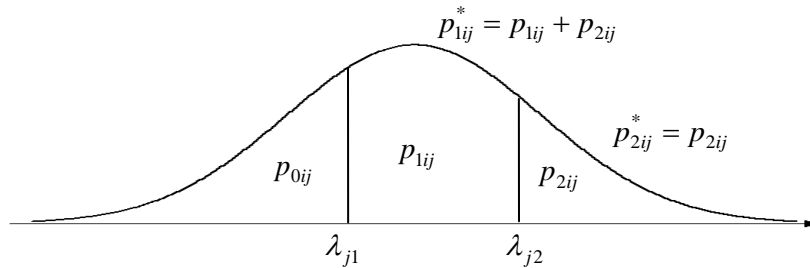


Рис. 5.

Ймовірності  $p_{lij}$  можна знайти послідовним відніманням (для даного прикладу):

$$\begin{aligned} p_{0ij} &= 1 - p_{1ij}^* = \frac{1}{\Psi} \left(1 + \exp[a_j(\theta_i - \lambda_{j2})]\right), \\ p_{1ij} &= p_{1ij}^* - p_{2ij}^* = \frac{1}{\Psi} \left(\exp[a_j(\theta_i - \lambda_{j1})] - \exp[a_j(\theta_i - \lambda_{j2})]\right), \\ p_{2ij} &= p_{2ij}^* = \frac{1}{\Psi} \left(\exp[a_j(\theta_i - \lambda_{j2})] + \exp[a_j(2\theta_i - \lambda_{j1} - \lambda_{j2})]\right), \end{aligned}$$

де  $\Psi = \left(1 + \exp[a_j(\theta_i - \lambda_{j1})]\right) \cdot \left(1 + \exp[a_j(\theta_i - \lambda_{j2})]\right)$ .

У загальному ж випадку отримаємо основну формулу моделі **Graded Response**:

$$p_{lij} = P\{x_{ij} = l \mid \theta_i, a_j, (\lambda_j)\} = p_{lij}^* - p_{(l+1)ij}^* = \quad (11)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp[-a_j(\theta_i - \lambda_{jl})]} \cdot \frac{1}{1 + \exp[-a_j(\theta_i - \lambda_{j(l+1)})]}$$

Застосовуючи формулу (11) для  $l = \overline{0, m}$ , потрібно мати на увазі, що  $p_{0ij}^* = 1$  та  $p_{(m+1)ij}^* = 0$ . Це має очевидний ймовірнісний зміст: кожна особа подолає 0-порог або вище і жодна –  $(m+1)$ -порог.

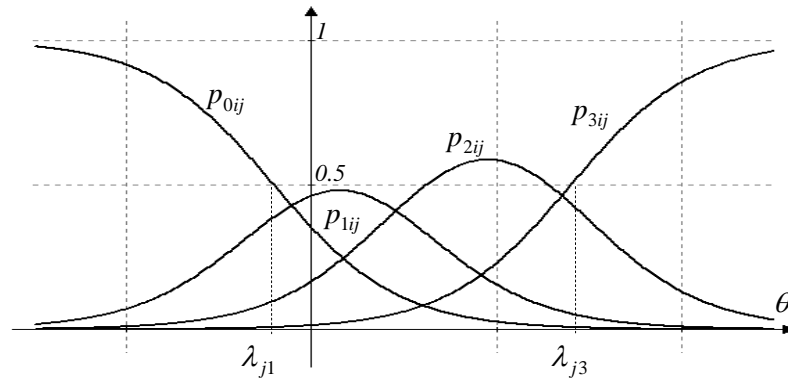


Рис. 6.

На рис.6 представлені функції ICRF для деякого завдання з чотирма категоріями (трьома порогами). Тут, як і у попередніх двох моделях, монотонними є лише ICRF, що відповідають двом крайнім категоріям. Два крайніх порогових значення  $\lambda_{j1}$  та  $\lambda_{j3}$  відповідають рівням підготовки, коли  $p_{0ij} = 0.5$  та  $p_{3ij} = 0.5$ . Якщо відстань між  $\lambda_{j1}$  та  $\lambda_{j3}$  збільшується, то ймовірності проміжних категорій  $p_{1ij}$  та  $p_{2ij}$  зростають. Якщо складності крайніх порогів дуже близькі, ймовірності проміжних категорій зменшуються і завдання перетворюється на дихотомічне 0/3. Інші значення порогових складностей не мають якоїсь інтерпретації на графіках функцій ICRF.

У межах одного завдання коефіцієнт дискримінації  $a_j$  не змінюється, це дозволяє уникнути зайвих перетинів кривих та від'ємних ймовірностей. Але навіть якщо  $a_j = 1$ , модель GRM не має властивостей, притаманних моделям сімейства Раша. Зокрема, не вдається алгебраїчно відокремити латентні параметри завдань та учасників тестування.

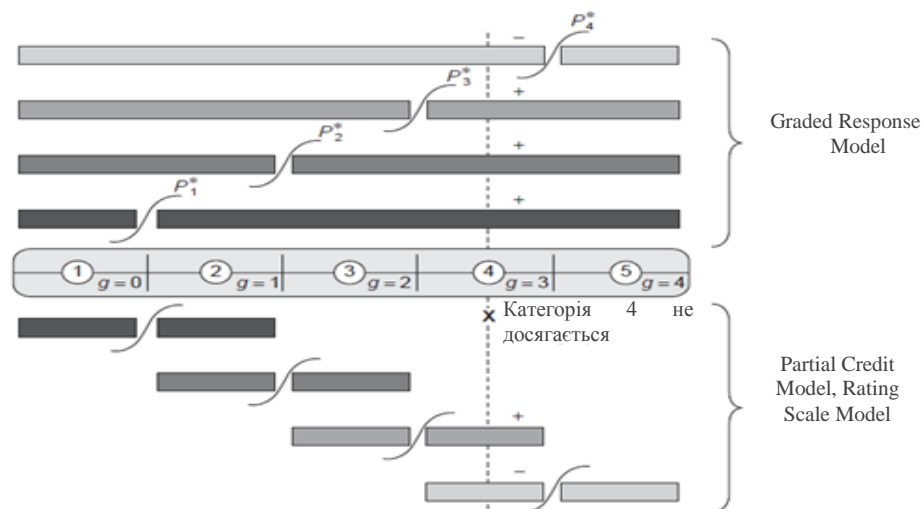


Рис. 7.

На рис.7 проілюстровано два розглянуті вище підходи до дихотомізації кроків при побудові математичних моделей для тестів із завданнями політомічного типу.

Р.Бок (R.Bock) у 1972 р. запропонував для аналізу політомічних завдань модель Nominal Response Model (NRM), альтернативну до попередніх моделей, у якій нема заздалегідь визначеної залежності між порядком взаємовиключних категорій та рівнями підготовки. Тобто, не накладається умова, що вибір вищої категорії відповідає вищому рівню підготовки.

Ймовірність того, що особа з рівнем підготовки  $\theta_i$  обере категорію  $l$  у  $j$ -ому завданні ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) у моделі *Nominal Response* має вигляд:

$$p_{lij} = \frac{\exp(a_{jl}\theta_i + c_{jl})}{\sum_{k=1}^m \exp(a_{jk}\theta_i + c_{jk})}, \quad (12)$$

де  $a_{jl}$  - параметри диференціації, які змінюються для різних ICRF навіть у межах одного завдання,  $c_{jl}$  - інтерсепти кривих ICRF, які відображають популярність категорії. Величину  $z_{jl} = a_{jl}\theta_i + c_{jl}$  називають багатовимірним логітом, а сама модель будується за принципом багатовимірної моделі Раша. Додатково вводяться обмеження на параметри:

$$\sum_{k=1}^m a_{jk} = \sum_{k=1}^m c_{jk} = 0.$$

Ця модель використовується, зокрема, для визначення положення нейтральної відповіді серед впорядкованих відповідей на шкалі Лайкерта.

### Література

1. Brennan R. Educational Measurement. – Westport, CT: Praeger, 2006. – 796 pp.
2. Geoff N. Masters. A Rasch model for partial credit scoring. / Psychometrika. –vol 47, NO.2. June, 1982. – P. 150-174.
3. Hambleton R.K. Fundamentals of Item Response Theory / Hambleton R.K., Swaminathan H., Rogers H. J. – Newbury Park, CA: Sage, 1991. – 175 pp.
4. Ostini R. Polytomous item response theory models. / Remo Ostini, Michael L. Nering. (Series: Quantitative applications in the social sciences). – London, New Delhi: Sage, 2006. – 107 p.
5. Wright B.D., Stone M.H. Best Test Design. – Chicago, Mesa Press, 1979. – 222 pp.

# 5

## Методика

УДК 51(07)

### ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ПРИ ГРАФІЧНОМУ МЕТОДІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

Н. А. Барило, А.В. Горова

В діючій програмі з математики [4] задачам з параметрами відводять незначне місце. Так, з параметрами учні зустрічаються при введенні таких понять, як:

- пряма пропорційність  $y = kx$  (де  $x, y$  - змінні,  $k$  - параметр,  $k \neq 0$ );
- лінійна функція  $y = kx + b$  (де  $x, y$  - змінні,  $k, b$  - параметри);
- лінійне рівняння  $ax + b = 0$  (де  $x$  - змінна,  $a, b$  - параметри);
- рівняння першого степеня  $ax + b = 0$  (де  $x$  - змінна,  $a, b$  - параметри,  $a \neq 0$ );
- квадратне рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$  (де  $x$  - змінна,  $a, b, c$  - параметри,  $a \neq 0$ ) тощо.

Слово «параметр» походить від грецького слова *parametron*, що означає «такий або той, що вимірює». Параметр – величина, числові значення якої дозволяють виділити певний елемент. Наприклад, криву із множини елементів кривих цього ж роду. Так, в рівнянні  $x^2 + y^2 = r^2$  величина  $r$  – параметр кола.

Параметри на відміну від змінних  $x, y, z$  тощо найчастіше позначають літерами  $a, b, c$  тощо.

До задач з параметрами, які розглядаються в курсі середньої школи, можна віднести: пошук розв'язків лінійних та квадратних рівнянь в загальному вигляді, дослідження кількості їх коренів в залежності від значень параметрів.

В більшості випадків при дослідженні рівнянь (нерівностей, систем) розв'язуються такі питання:

- 1) знайти значення параметрів, при яких рівняння(система) має розв'язок, при яких не має розв'язку;
- 2) визначити кількість розв'язків в залежності від параметрів;
- 3) знайти множину допустимих значень параметрів, при яких розв'язки задовольняють певні умови;
- 4) при складанні рівнянь до задач встановлюються умови, які повинні задовольняти допустимі значення невідомих і параметрів.

При розв'язуванні задач з практичним змістом зустрічаються параметри – величини, що характеризують основні властивості того чи іншого процесу, явища, машини, приладу тощо. Наприклад, фізичні величини: електричний опір, теплоємність, маса, індукція, тощо.

Природно, що такий невеликий клас задач багатьом учням не дозволяє усвідомити те, що параметр (фіксоване, але невідоме число) має двоїсту природу. По-перше, параметр можна розглядати як число, а по-друге, - невідоме. Наприклад, ділення на вираз, який містить параметр, добування кореня парного ступеня із таких виразів потребує попередніх досліджень. Як правило, результати досліджень впливають і на розв'язок, і на відповідь.

Головне, що необхідно усвідомити при роботі з параметром - це необхідність обережного відношення до фіксованого, але невідомого числа.

Особливої уваги в задачах з параметрами заслуговують графічні методи їх розв'язання.

Здебільшого при тому чи іншому графічному прийомі будується «графічний образ» на координатній площині  $(x, y)$  та на координатній площині  $(x, a)$ .

На площині  $(x, y)$  функція  $y = f(x, a)$  задає сім'ю кривих, які залежать від параметра  $a$ . Кожній сім'ї функцій  $f$  властиві деякі властивості. При побудові їх графіків розкриваються здебільшого такі питання: за допомогою якого перетворення площини (паралельний перенос, поворот, гомотетія і т.д.) можна перейти від однієї кривої сім'ї до будь-якої іншої. Але не завжди графічний образ сім'ї функцій  $y = f(x, a)$  описується простим перетворенням. Тому в таких ситуаціях необхідно зосередити увагу не на тому, як пов'язані криві однієї сім'ї, а на самі криві. Іншими словами, можна виділити ще один тип задач, в яких ідея розв'язку перш за все заснована на властивостях конкретних геометричних фігур, а не властивостях сім'ї взагалі. Нас будуть цікавити прямі та параболи. Такий вибір обумовлено окремим (основним) положенням лінійної та квадратичної функції в шкільному курсі математики.

Говорячи про графічні методи, неможливо обійти одну проблему точності розв'язку, який заснований на графічних зображеннях. З формальної точки зору результат, який «знятий» з рисунку, знайдений не строго.

Здебільшого побудова графічних образів основана на побудові графіків виду  $y = f(x + a)$ ,  $y = f(x) + a$ ,  $y = f(|x|)$ ,  $y = |f(x)|$ ,  $y = f(kx)$ ,  $y = kf(x)$  які отримуємо за допомогою того чи іншого перетворення графіка функції  $y = f(x)$ . В складніших випадках для побудови необхідного графічного образу використовується апарат похідної. На прикладах доцільно дібраних задач в даній статті розкрито наочно-графічні міркування при побудові графічного образу з використанням апарату похідної.

**Приклад 1.** Скільки розв'язків в залежності від параметра  $a$  має рівняння  $x^5 + x = a + 2x^3$ ?

*Розв'язання.*

Перепишемо рівняння у вигляді:  $a = x^5 + x - 2x^3$ .

Маємо  $a(x) = x^5 + x - 2x^3$ ,  $a'(x) = 5x^4 + 1 - 6x^2$ ,  $a'(x) = 0$ ,  $5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$  Звідки

$$5x^4 - 6x^2 + 1 = (x-1)(x+1)(\sqrt{5}x-1)(\sqrt{5}x+1) = 0.$$

Отже,

$x$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1; -1/\sqrt{5})$	$-1/\sqrt{5}$	$(-1/\sqrt{5}; 1/\sqrt{5})$	$1/\sqrt{5}$	$(1/\sqrt{5}; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$a'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$a(x)$	↑	0	↓	$-16\sqrt{5}/125$	↑	$-16\sqrt{5}/125$	↓	0	↑

Побудувавши графік функції  $a(x) = x^5 + x - 2x^3$ ,

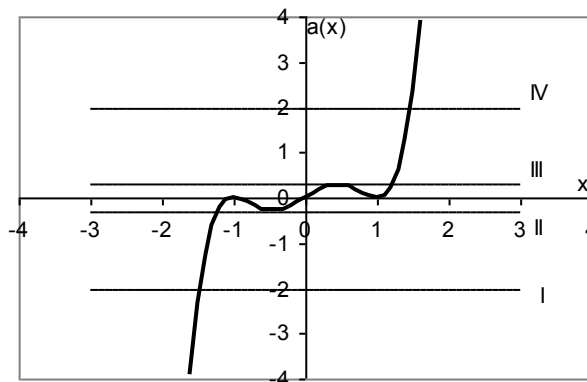


Рис. 1

бачимо якщо  $a < -\frac{16\sqrt{5}}{125}$  або  $a > \frac{16\sqrt{5}}{125}$ , то рівняння має 1 розв'язок (положення I та IV);

якщо  $a = \pm \frac{16\sqrt{5}}{125}$  (положення II та III), то рівняння має 2 розв'язки; якщо  $-\frac{16\sqrt{5}}{125} < a < \frac{16\sqrt{5}}{125}$ , то рівняння має 3 розв'язки (між положеннями II та III).

*Відповідь:* якщо  $a < -\frac{16\sqrt{5}}{125}$  або  $a > \frac{16\sqrt{5}}{125}$ , то 1 розв'язок; якщо  $a = \pm \frac{16\sqrt{5}}{125}$ , то 2 розв'язки; якщо  $-\frac{16\sqrt{5}}{125} < a < \frac{16\sqrt{5}}{125}$ , то 3 розв'язки.

**Приклад 2.** При яких  $a$  рівняння  $x^3 + ax + 2 = 0$  має три розв'язки?

*Розв'язання.* Перепишемо рівняння у вигляді:  $a(x) = -\frac{2}{x} - x^2$ ,  $x \neq 0$ . Знаходимо похідну:

$$a'(x) = \frac{2}{x^2} - 2x = 0, \text{ звідки } x = 1, x \neq 0. \text{ Отже,}$$

x	$(-\infty, 0)$	$(0;1)$	1	$(1; +\infty)$
$a'(x)$	+	+	0	-
$a(x)$	↑	↑	-3	↓

Побудувавши графік функції  $a(x) = -\frac{2}{x} - x^2$ ,

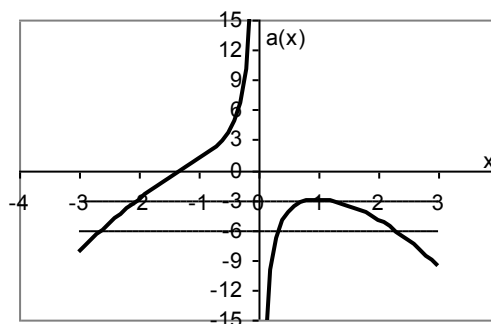


Рис.2

знаходимо ті значення  $a$ , для яких відповідні горизонтальні прямі перетинають побудований графік в трьох точках, які і будуть шуканими. Тобто  $a < -3$ .

*Відповідь:*  $a < -3$ .

**Приклад 3.** При яких  $a$  рівняння  $x^2 e^x = a$  має три розв'язки?

*Розв'язання.* Перепишемо рівняння у вигляді:  $a(x) = x^2 e^x$ . Знаходимо похідну:

$a'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = 0$ , звідки  $e^x x(2+x) = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$ . Отже,

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$a'(x)$	+	0	-	0	+
a(x)	↑	$4/e^2$	↓	0	↑

Побудуємо графік функції  $a(x) = x^2 e^x$  (Рис.3). Ті значення  $a$ , для яких відповідні горизонтальні прямі перетинають побудований графік в трьох точках і будуть шуканими. Отже,

$$0 < a < \frac{4}{e^2}.$$

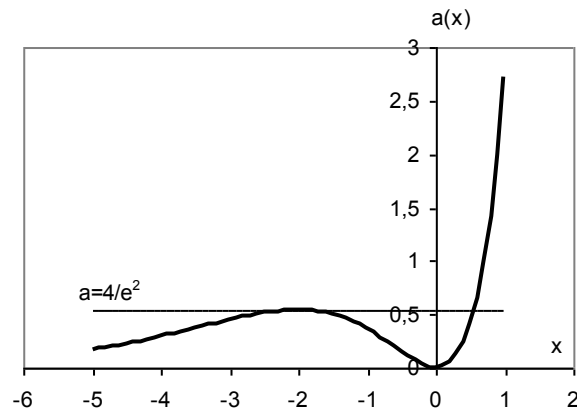


Рис.3

*Відповідь:*  $0 < a < \frac{4}{e^2}$ .

**Приклад 4.** Скільки розв'язків має рівняння  $x^2 - 2ax - 1 = 0$  на проміжку  $|x| < 2$ ?

*Розв'язання.* Перепишемо рівняння у вигляді:  $a(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$ ,  $x \neq 0$ . Знаходимо похід-

ну:  $a'(x) = \frac{(2x)^2 - 2(x^2 - 1)}{4x^2} = \frac{2x^2 + 2}{4x^2} = 0$ . Побудуємо графік функції

$$a(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}, x \neq 0 \text{ (Рис.4)}.$$

Знайдемо значення функції в кінцевих точках проміжку  $-2 < x < 2$ :

$$a(-2) = -\frac{3}{4}, a(2) = \frac{3}{4}.$$

З рис.4 випливає, що при  $a < -\frac{3}{4}$  або  $a > \frac{3}{4}$  рівняння має 1 розв'язок; при



$-\frac{3}{4} \leq a \leq \frac{3}{4}$  рівняння має 2 розв'язки.

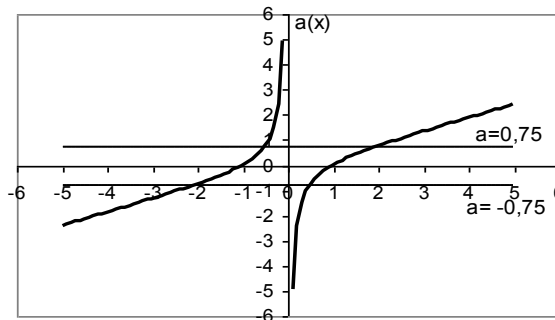


Рис.4

Відповідь: якщо  $a < -\frac{3}{4}$  або  $a > \frac{3}{4}$ , то 1 розв'язок; якщо  $-\frac{3}{4} \leq a \leq \frac{3}{4}$ , то 2 розв'язки.

**Приклад 5.** При яких значеннях  $a$  всі три корені рівняння  $x^3 - ax + 2a + 32 = 0$  дійсні?

Розв'язання. Точка  $x = 2$  не є коренем рівняння при ні яких значеннях  $a$ . Тому запишемо  $a(x) = \frac{x^3 + 32}{x - 2}$ ,  $a'(x) = \frac{2(x - 4)(x^2 + x + 4)}{(x - 2)^2}$ .

Функція  $a(x)$  спадає на кожному з проміжків  $(-\infty, 2)$  та  $(2, 4]$ , а зростає на  $[4, \infty)$ , причому  $x = 4$  - точка мінімуму,  $a(4) = 48$ .

$x$	$(-\infty, 2)$	$(2; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$a'(x)$	-	-	0	+
$a(x)$	↓	↓	48	↑

Побудуємо графік функції  $a(x) = \frac{x^3 + 32}{x - 2}$  (Рис.5).

Ті значення  $a$ , для яких відповідні горизонтальні прямі перетинають побудований графік в трьох точках і будуть шуканими. З рисунка видно, що  $a > 48$ .

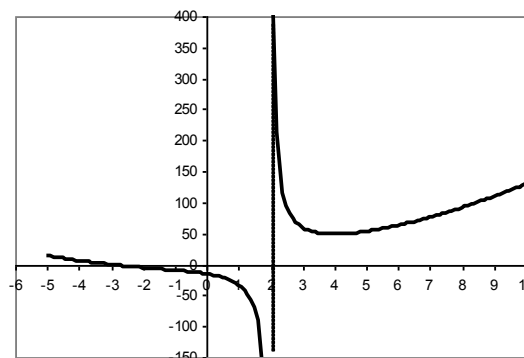


Рис.5

Відповідь:  $a > 48$ .

**Приклад 6.** Розв'язати рівняння  $(x + 2a)(x^2 - a^2 - 2a - 1) = 0$ . При яких значеннях параметра  $a$  добуток коренів менше найменшого кореня цього рівняння?

*Розв'язання.* Із заданого рівняння одразу знаходимо  $x_1 = -2a$ ,  $x_2 = a + 1$ ,  $x_3 = -(a + 1)$ . Розглянемо функції  $f_1(a) = -2a$ ,  $f_2(a) = a + 1$ ,  $f_3(a) = -(a + 1)$ ,  $f(a) = f_1(a)f_2(a)f_3(a) = 2a(a + 1)^2$ . Побудуємо графіки цих функцій.

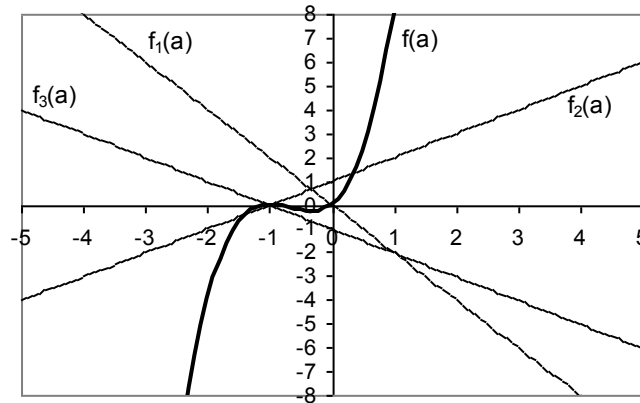


Рис.6

Необхідно знайти такі значення параметра, при яких графік  $f(a)$  лежить нижче  $\min(f_1(a), f_2(a), f_3(a))$ . Шукані значення  $a$  - це всі значення, менше  $a_0$ , де  $a_0$  найменший корінь рівняння  $f_2(a) = f(a)$ .

Звідси знаходимо, що  $a_0 = \frac{-\sqrt{3}-1}{2}$ .

Відповідь:  $a < \frac{-\sqrt{3}-1}{2}$ .

**Приклад 7.** Визначити як розташовані корені рівняння  $ax^2 - 3(a + 1)x + 2a + 7 = 0$  відносно відрізка  $[-1, 4]$ .

*Розв'язання.* Запишемо  $a(x^2 - 3x + 2) = 3x - 7$ . Точки  $x = 1$  та  $x = 2$  не є коренями заданого рівняння ні при яких  $a$ . Тоді  $a(x) = \frac{3x - 7}{x^2 - 3x + 2}$ .

Знайдемо похідну

$$a'(x) = -\frac{3x^2 - 14x + 15}{(x^2 - 3x + 2)^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ або } x = 3.$$

Точка  $x = \frac{5}{3}$  - точка мінімуму,  $x = 3$  - точка максимуму,  $a(\frac{5}{3}) = 9$ ,  $a(3) = 1$ .

Функція  $a(x)$  спадає на кожному з проміжків  $(-\infty, 1)$ ,  $(1, \frac{5}{3}]$ ,  $[3, \infty)$  та зростає на

$[\frac{5}{3}, 2), (2, 3]$ . Графік функції  $a(x) = \frac{3x-7}{x^2-3x+2}$  наведено на рис.7.

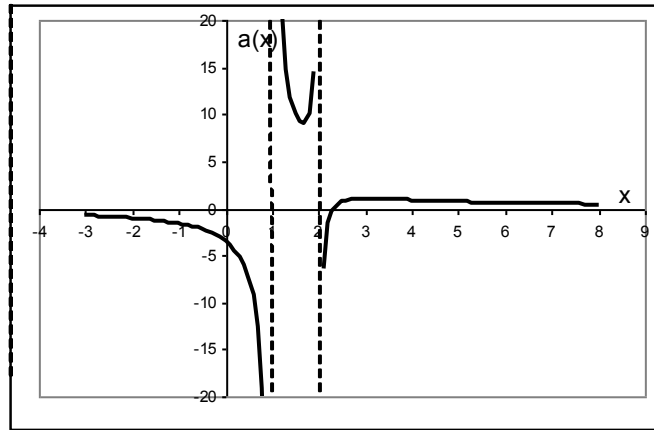


Рис.7

Розташування коренів рівняння відносно проміжку  $[-1, 4]$  можна визначити, перетинаючи побудований графік горизонтальними прямими. Нехай  $x_1$  - менший корінь,  $x_2$  - більший. Тоді, якщо  $a < -\frac{5}{3}$ , то  $-1 < x_1 < x_2 < 4$ ; якщо  $a = -\frac{5}{3}$ , то  $-1 = x_1 < x_2 < 4$ ;

якщо  $-\frac{5}{3} < a < 0$ , то  $x_1 < -1 < x_2 < 4$ ; якщо  $a = 0$ , то  $-1 < x = \frac{7}{3} < 4$ ;

якщо  $0 < a < \frac{5}{6}$ , то  $-1 < x_1 < 4 < x_2$ ; якщо  $a = \frac{5}{6}$ , то  $-1 < x_1 < x_2 = 4$ ;

якщо  $\frac{5}{6} < a < 1$ , то  $-1 < x_1 < x_2 < 4$ ; якщо  $a = 1$ , то  $-1 < x_1 = x_2 < 4$ ;

якщо  $1 < a < 9$ , то рівняння коренів немає; якщо  $a = 9$ , то  $-1 < x_1 = x_2 < 4$ ;

якщо  $a > 9$ , то  $-1 < x_1 < x_2 < 4$ .

**Приклад 8.** При яких значеннях параметра  $a$  рівняння  $\sin x \cos 2x \sin 3x = a$  має рівно два корені на відрізку  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ?

*Розв'язання.* Запишемо задане рівняння в такому вигляді:

$$\cos 2x (\cos 2x - \cos 4x) = 2a$$

Нехай  $\cos 2x = t$ . Оскільки за умовою  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $-1 \leq t \leq 0$ . Далі, знаходимо

$$t(t+1-2t^2) = 2a, \quad -2t^3 + t^2 + t = 2a.$$

Для побудови графіка функції  $f(t) = -2t^3 + t^2 + t$  при  $-1 \leq t \leq 0$  обчислимо похідну та складемо таблицю

$$f'(t) = -6t^2 + 2t + 1 = 0, D = 4 - 4(-6) = 28, t_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2(-6)} = \frac{1 \mp \sqrt{7}}{6}.$$

X	$(-1, \frac{1-\sqrt{7}}{6})$	$\frac{1-\sqrt{7}}{6}$	$(\frac{1-\sqrt{7}}{6}; 0)$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↓	$\frac{10-7\sqrt{7}}{54}$	↑

Побудуємо графік функції:

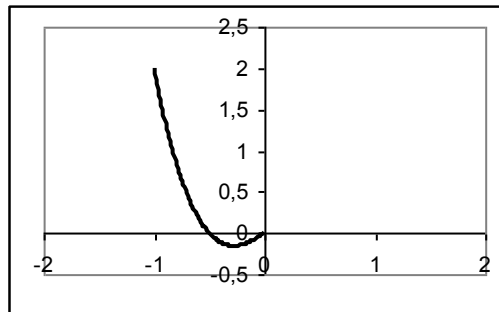


Рис.8

Звідки рівняння  $f(t) = 2a$  має рівно два корені, якщо  $\frac{10-7\sqrt{7}}{54} < 2a \leq 0$ . Функція

$y = \cos 2x$  монотонна на  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ , а значить на цьому відрізку кожне своє значення приймає тільки один раз.

Відповідь:  $\frac{10-7\sqrt{7}}{54} < 2a \leq 0$ .

**Приклад 9.** При яких дійсних  $a$  рівняння  $\cos x \cos 2x \cos 3x + a = \cos 2x$  має більше одного кореня на відрізку  $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}]$ ?

*Розв'язання.*

Перепишемо рівняння у вигляді

$$\cos x (2 \cos^2 x - 1) (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 1 = 2 \cos^2 x - 1$$

$$8 \cos^6 x - 10 \cos^4 x + \cos^2 x + 1 = -a$$

Нехай  $\cos x = t$ , оскільки за умовою  $\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{3\pi}{8}$ , то  $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ .

Далі знаходимо,  $a(t) = -8t^6 + 10t^4 - t^2 - 1$ .

Похідна дорівнює

$$a'(t) = -48t^5 + 40t^3 - 2t,$$

$$a'(t) = t(-24t^4 + 20t^2 - 1) = 0, D = 400 - 96 = 304,$$

$$t_1 = 0, t_{2,3} = \frac{-20 \pm 4\sqrt{19}}{2(-24)} = \frac{5 \mp \sqrt{19}}{12}$$

Побудуємо графік функції  $a(t) = -8t^6 + 10t^4 - t^2 - 1$  (рис.9).

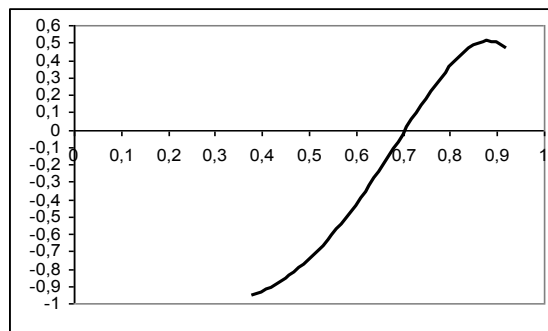


Рис.9

Знайдемо  $a$ . Рівняння  $a(t) = a$  має більше одного кореня, якщо  $\frac{2\sqrt{2}-1}{4} \leq a < \frac{19\sqrt{19}-28}{108}$ .

Що наближено дорівнює  $0,457 \leq a < 0,507$ .

Відповідь:  $0,457 \leq a < 0,507$ .

**Приклад 10.** При яких  $a$  рівняння  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}x^3 + x + 1} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 + x - 1} = \sqrt[3]{ax}$  має рівно чотири корені?

*Розв'язання.* Побудуємо графіки функцій

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^3 + x + 1} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 + x - 1} \text{ та } y = \sqrt[3]{ax} \text{ (рис.10).}$$

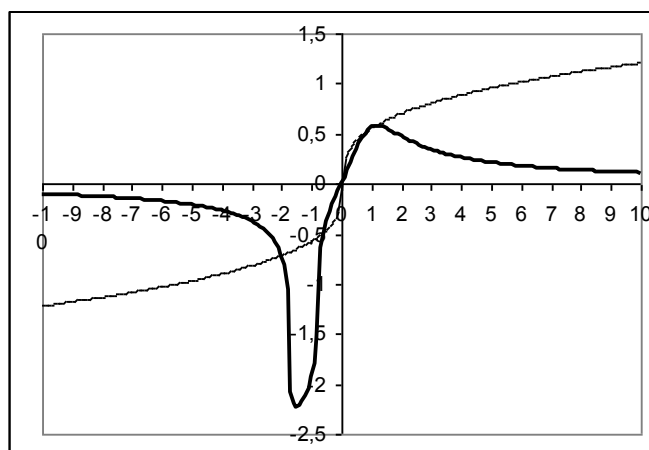


Рис.10

Рівняння має чотири розв'язки, коли графік  $y = \sqrt[3]{ax}$  перетинає  $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^3 + x + 1} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 + x - 1}$  в чотирьох точках (див. рис.10).

$$\text{Відповідь: } a = \frac{(\sqrt[3]{5} - 1)^3}{2}.$$

#### Задачі для самостійної роботи

1. Знайти всі значення  $a$ , при яких рівняння  $x|x + 2a| + 1 - a = 0$  має єдиний розв'язок. Відповідь:  $a < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  або  $a > 1$ .

2. Знайти всі значення  $a$ , при яких для всіх  $x$  за модулем не перевищуючих 1, виконуються нерівність:  $\frac{ax - a(1 - a)}{a^2 - ax - 1} > 0$ . Відповідь:  $a < -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$  або  $a > 2$ .

3. Знайти всі  $a$ , при кожному з яких область визначення функції  $f(x) = \lg((x - 1)^2 x^2 - ax^2 - 1)$  не перетинається з множиною  $[1; 2]$ . Відповідь:  $a \geq \frac{3}{4}$ .

4. При яких  $a$  знайдеться  $b$  з інтервалу  $(0, 1)$  таке, що рівняння  $x \cos x \sin b - a \sin x \cos b = x \cos x \cos b$  має хоча б два розв'язки на інтервалі  $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$ ?

Відповідь:  $-1 < a < \operatorname{tg} 1 - 1$ .

5. При  $x = x_0$  - більший з коренів рівняння  $x^2 + (3ab + 3a - 2)x + 5ab + 5a - 17 = 0$ . Знайти найбільше значення  $x_0$  при  $a \geq 1$ ,  $b \geq 0$ . Відповідь:  $x_0 = 3$ .

#### Література

1. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. - К.: Євро індекс Лтд, 1995. - 336 с.
2. Дорофеев Г.В., Затакавай В.В. Решение задач, содержащих параметры. - М.: Перспектива, 1990. - Ч.2. - 38 с.
3. Нестеренко Л.И. Рівняння і нерівності з параметрами. - Ніжинський державний пед. ін.-т, 1997. - 18с.
4. Програми з математики для 5-11 кл. загальноосвітньої школи / Мін. освіти України. - К., 1992. - 89 с.
5. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. - 2-е изд. перераб. и доп. - М.: Наука, 1989. - 576 с.
6. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами. - М.: Просвещение, 1986. - 128 с.

УДК 517.2

## ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМІВ ЕВРИСТИЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Н.П. Варущик, Т.В. Іллющенко

Актуальним завданням сучасної математичної освіти є формування потреби і здатності самостійно вчитися, здобувати і засвоювати інформацію, оцінювати її, виробляти вміння застосовувати способи пізнавальної та евристичної діяльності.

Значну роль у дослідженні проблеми формування евристичної діяльності мають роботи О.І. Скафи, К.В. Власенко, І.А. Горчакової, Ю.Я. Смржевського та ін.[4].

У своїх роботах дослідники вказують на необхідність використання прийомів, евристичних схем, правил, досліджують методику їх використання на факультативних заняттях, у процесі навчання алгебри основної школи, планіметрії та стереометрії. Актуальним залишається питання формування загальних та спеціальних прийомів евристичної діяльності.

У даній статті розглядаються і можливості та особливості формування прийомів евристичної діяльності прямим шляхом (з використанням правил-орієнтирів).

У відповідності до теорій Л.С.Виготського процеси навчання і виховання розвивають учня не самі по собі, а лише в тому випадку, коли мають відповідний зміст і набувають форму діяльності. Між навчанням і психічним розвитком людини завжди стоїть його діяльність. У процесі навчання провідною є навчальна діяльність.

З точки зору педагогічної психології навчальна діяльність – це діяльність суб'єкта по оволодінню узагальненими способами навчальних дій і саморозвитку в процесі розв'язування навчальних задач, спеціально підібраних учителем, на основі зовнішнього контролю і оцінки, які переходять у самоконтроль і самооцінку.

У працях П.Я.Гальперіна і Н.Ф. Талізінної розроблена теорія поетапного формування розумових дій, введено поняття типів орієнтованої основи та форми дій.

Перша форма орієнтування передбачає, що учень працюватиме за зразком дій і знатиме очікуваний результат, проте, не матиме вказівок, щодо виконання дій необхідних для досягнення результату.

У другому випадку учню дається готовий алгоритм дії, поетапне виконання вказівок якого дає змогу одержати результат при меншій кількості помилок, ніж у попередньому випадку.

Третій тип орієнтування передбачає аналіз навчальної ситуації, результатом якого, як правило, є особисто значуще відкриття учня: чи то алгоритм, чи евристичне правило розв'язування задач конкретного виду[1].

Для прикладу розглянемо роботу по складанню алгоритму розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів.

Учитель пропонує учням розв'язати нерівності

$$(x-5)(7-x) > 0; \frac{2x-4}{5-x} < 0.$$

Оскільки раніше відомий спосіб заміни нерівностей рівносильними сукупностями двох систем громіздкий, то виникає потреба знайти більш раціональний. Зіставляючи нерівності, легко зробити висновок, що другу нерівність можна звести до попереднього вигляду  $(2x-4)(5-x) < 0$  і що кожна з нерівностей тепер має вигляд  $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) < 0$ .

Числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  перетворюють множники в нуль і тому розбивають числову пряму на проміжки знакосталості, залишається з'ясувати знак виразу, що в лівій частині, на кожному з проміжків.

Колективно знаходять знак виразу на двох останніх проміжках; одержують  $(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_{n-1})(x_0-x_n) > 0$ , якщо  $x_0 \in (x_n; \infty)$ , оскільки усі множники додатні

і  $(x'_0-x_1)(x'_0-x_2)\dots(x'_0-x_{n-1})(x'_0-x_n) < 0$ , якщо  $x'_0 \in (x_{n-1}; x_n)$ , оскільки один множник  $x'_0-x_n < 0$ .

Учні самостійно можуть зробити висновок, що знаки чергуються справа наліво, починаючи з плюса.

Виділивши істотне, самостійно одержать алгоритм розв'язування нерівностей цього виду і зможуть його застосувати як в стандартних, так і не стандартних ситуаціях.

Загальновідомо, що здібності людини до певного виду діяльності розвиваються лише за умови включення її в діяльність саме такого виду.

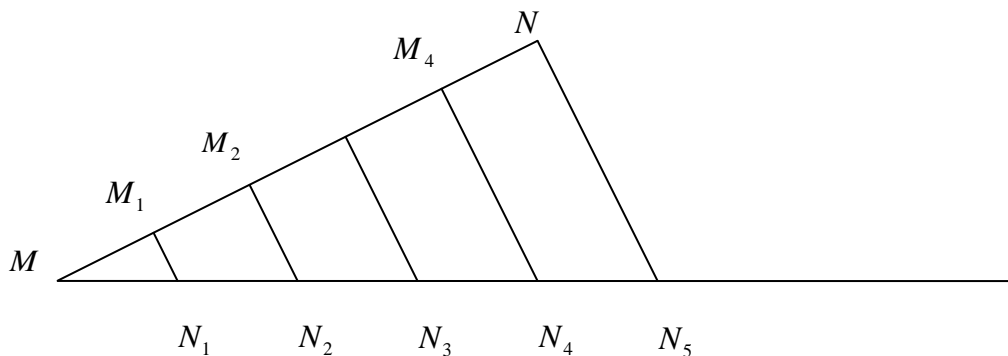
У праці А.Н.Леонтьєва теорія діяльності набуває виду системи. У працях В.В.Давидова і Д.Б.Ельконіна введено важливе поняття теорії діяльності – навчальна діяльність.

Навчальна діяльність вважається результативною лише за наявності в ній трьох компонентів: мотиву і навчальних задач, навчальних дій, дій контролю і оцінювання знань учнів.

Діяльність породжується мотивом. Мотивація може здійснюватись шляхом попередньої бесіди з використанням відповідних прийомів (застосування навчального матеріалу до розв'язування прикладних задач, задач курсу математики, аналізу історичних відомостей про відкриття конкретної теорії і т.д.). Результатом бесіди може бути проблемна ситуація, яка потребує вивчення нового матеріалу, чітке формулювання дидактичної мети уроку, прояв пізнавальних інтересів учнів.

Для прикладу розглянемо прийом мотивації необхідності вивчення теореми Фалеса для розв'язання задачі на побудову.

*Задача.* Розділити даний відрізок на 5 рівних частин за допомогою циркуля і лінійки.



Виконуючи послідовні дії:

- 1) побудова променя  $MN$ ;
- 2) послідовне відкладання п'яти рівних відрізків на промені від його початкової точки;

3) проведення прямих паралельних до прямої  $M_5N$  через точки поділу, учитель мотивує необхідність вивчення теореми, розкриваючи цим самим її зміст.

Якщо навчальний процес протікає в умовах мотиваційного включення школярів у пізнавальну діяльність, то вона стає бажаною для школярів, приносить задоволення від участі в ній.

Учень сам оперує навчальним змістом і тільки в цьому випадку він засвоюється свідомо і міцно, відбувається процес розвитку інтелекту школяра, формується здатність до самонавчання, самоосвіти, самоорганізації.

Діяльнісний підхід у навчанні математики передбачає не лише засвоєння знань, а й відповідних прийомів по його вивченню.

Розрізняють загальні прийоми розумових дій: порівняння, аналіз, синтез, аналіз через синтез, абстрагування, узагальнення, аналогія, індукція і дедукція та спеціальні: підведення під поняття, виведення наслідків з поняття.

Досвід підтверджує теоретичні висновки про те, що спеціальні і загальні прийоми розумових дій слід формувати не опосередковано, а прямим шляхом, використовуючи правила-орієнтири.

Прийом порівняння є основою усіх інших прийомів, розрізняють два його види: зіставлення і протиставлення об'єктів, явищ, суджень, він здійснюється шляхом розгляду їх спільних



та відмінних ознак і властивостей. Наприклад, зіставлення та протиставлення прямої та оберненої теореми дає змогу більш глибоко зрозуміти їх суть та взаємні зв'язки.

Приєм порівняння виражається за допомогою правила-орієнтира, що реалізується за допомогою такої послідовності дій:

- 1) визначення мети порівняння;
- 2) виділення відмінних ознак об'єктів, що порівнюються;
- 3) визначення можливих ліній порівняння у відповідності з поставленою метою та поміченими ознаками;
- 4) встановлення спільних ознак;
- 5) встановлення відмінності в порівнюваних об'єктах;
- 6) формулювання висновку про схожість та відмінність даних об'єктів у відповідності до поставленої мети[3].

Наприклад, розглянемо комбінаторні сполуки без повторень: перестановки, розміщення, комбінації.

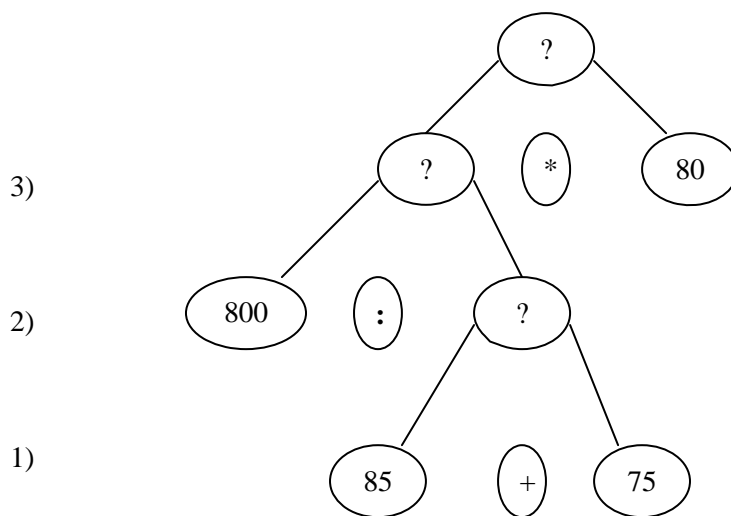
Використання правила-орієнтира сприяє формуванню загального прийому прямим шляхом.

Перестановки, на відміну від розміщень та комбінацій, - це множини елементів, які обираються з довільної множини; у розміщеннях значну роль грає порядок елементів.

Дані сполуки мають як спільні, так і відмінні ознаки: вони є впорядкованими множинами, але відрізняються порядком та складом елементів.

Аналіз – це мисленнєве розчленування властивостей об'єкта або виділення об'єктів з даними властивостями в даній множині, виділення зв'язків та відношень між виділеними елементами. Аналітичний спосіб пошуку конкретної задачі – це спосіб міркування від вимоги задачі до її даних («з кінця»)[5].

Наприклад, розв'язуючи задачу: “З пункту А і В назустріч один одному виїхали мотоциклісти із швидкістю 75 км/год та 85 км/год. З пункту А в цей момент вилетіла ластівка, швидкість якої 80 км/год. Ластівка літала до зустрічі з другим мотоциклістом, поверталась назад до зустрічі з першим, літала доти, коли мотоциклісти зустрілись. Скільки кілометрів літала ластівка, якщо відстань між пунктами 800 км?”, учень виділяє величини, про які йде мова в задачі та залежності між ними. Логіка мислення учня може мати вигляд: щоб знайти відстань треба знати швидкість і час руху, останній невідомий легко знайти час руху до зустрічі, для цього досить знати відстань між пунктами та швидкість зближення рухомих тіл. Зобразимо аналітичний спосіб пошуку розв'язання задачі у вигляді структурної схеми:

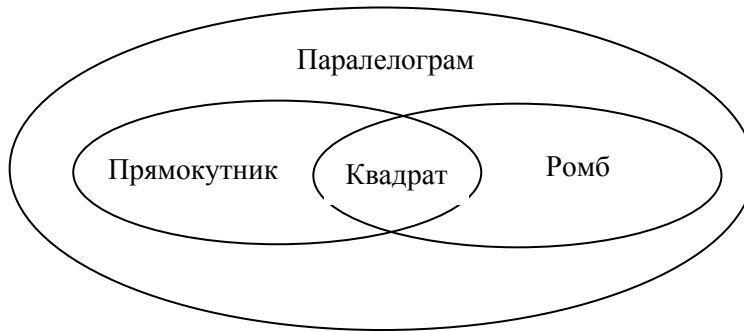


Синтез – уявне об'єднання в єдине ціле виділених під час аналізу елементів, побудова структури об'єкта, що вивчається.

Синтетичний спосіб полягає в пошуку розв'язування задачі це зворотній спосіб міркувань – з початку. Для попередньої задачі це дії 1-3.

Узагальнення полягає в мисленнєвому виділенні спільних властивостей і ознак об'єктів даної множини, тобто істотних ознак, в побудові образів з виділеними властивостями й ознаками.

Залежність між обсягом поняття паралелограм та його видів є результатом узагальнення і зображення у вигляді кругів Ейлера.



Абстрагування – розумова дія, спрямована на виділення в предметах і явищах суттєвого і відокремлення несуттєвого в них. Результатом абстрагування є математичні поняття.

В процесі навчання від узагальнення практично невіддільний прийом абстрагування. В емпіричному мисленні йому передують порівняння та елементарний аналіз. Даний прийом виражається за допомогою наступного правила-орієнтира:

- 1) визначення мети абстрагування;
- 2) визначення відмінних властивостей об'єктів;
- 3) виділення тих властивостей, які повинні бути відхилені у зв'язку з поставленою метою;
- 4) виділення тих властивостей, від яких треба відволіктися у відповідності з поставленою метою;
- 5) знаходження відхилень властивостей в інших предметах;
- 6) формулювання назви відхилених властивостей на математичній мові.

Диференційоване формування прийому абстрагування можна виконати за допомогою завдання учням випереджаючого домашнього завдання:

1. сформулювати задачі, обернені класичним, що привели до появи похідної та дії диференціювання функції;
2. скласти правило-орієнтир про відкриття означення. Цьому сприяють прийоми запису означення у вигляді структурної схеми, у якій чітко виділені родові поняття та видові відмінності.

Наприклад:

Парна функція = Функція + 1)  $\mathcal{D}(y)$  – симетрична відносно нуля;

$$2) f(-x) = f(x)$$

Чи є парною функція

$$f(x) = \sin x + \sqrt{x-1} + \frac{1}{|x|}?$$

Область визначення несиметрична відносно нуля, а тому функція не є парною, але і не є непарною.

Для парної функції, наприклад, суттєвим є симетричність області визначення відносно нуля та рівність значення функції при протилежних значеннях аргументу.

Аналогія – прийом розумової діяльності, спрямований на одержання нових знань про властивості, ознаки, відношення предметів і явищ, що вивчається, на підставі знань про їхню схожість.

Наприклад, знаючи, означення арифметичної прогресії та її властивості, методи одержання формул загального члена та суми  $n$ -членів, аналогічно, можна одержати формулу  $n$ -ого члена геометричної прогресії, сформулювати властивість її членів.

У планіметрії, наприклад, засвоївши спосіб доведення І ознаки рівності (подібності) трикутників, учень може аналогічно довести решту ознак рівності (подібності) трикутників.

Правило-орієнтир цього прийому реалізується такими діями:

- 1) визначення мети;
- 2) розгляд деяких властивостей або відношення об'єкту, що вивчається;
- 3) згадати, чи не зустрічався раніше схожий предмет; якщо так, то згадати всі його властивості;
- 4) порівняння властивостей першого та другого предметів;
- 5) якщо другий предмет має властивості, що не знайдені поки що в першому, то їх відшукання;
- 6) висновок відповідно до заданої мети.

Аналогія в навчальному процесі сприяє виведенню гіпотези, вона постійно присутня в інших мисленневих прийомах і в способах навчальної роботи.

Розглянемо приклад застосування аналогії при розв'язуванні задач.

Нехай послідовно розв'язуються дві задачі.

1. Доведіть, що  $\lim_n \frac{n+1}{n} = 1$ .

2. Яку границю має послідовність (доведіть)  $a_n = \frac{5n-1}{2n}$  ?

Досвід показує, що частина учнів розв'язує приклади як незалежні один від іншого. Розв'язавши першу задачу, деякі з них мають певні труднощі при розв'язуванні наступної. Тепер припустимо, що школяр добре володіє прийомом аналогії. Перейшовши до другої задачі, він бачить, що в ній використовуються поняття послідовності, границі.

Раніше розв'язували схожу задачу. Відмінність їх в тому, що в першій уже була відома границя і потрібно було довести істинність саме цієї границі. А в другій задачі границя не відома. Слід висунути гіпотезу, і тоді ця задача буде аналогічною до першої.

Індукція – прийом дослідження і міркувань від окремого до загального, від нижчого ступеня загальності до вищого. Це один із шляхів абстрагування і тому є окремим видом узагальнення. Розрізняють неповну, повну і математичну індукції. Метод неповної індукції застосовується для одержання формул загальних членів арифметичної і геометричної прогресій.

Дедукція – метод міркувань від загального до окремого, конкретного, від вищого ступеня загальності до нижчого. Вона здійснюється в єдності з аналізом і є деяким видом конкретизації. Приклад таких міркувань був вище проведений для одержання алгоритму методу інтервалів для розв'язувань раціональних нерівностей.

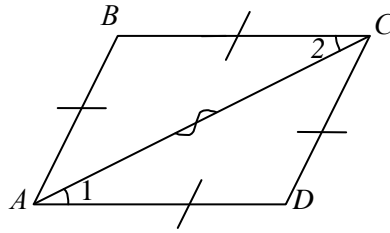
Формування спеціальних прийомів розумових дій сприяє використанню відповідної методичної схеми.

Методична схема підведення під поняття включає такі етапи:

1. З'ясування суттєвих ознак даного поняття на основі означення, властивостей
2. Відшукання суттєвих ознак у розглядуваного математичного об'єкта.
3. Зіставлення ознак, одержаних на першому і другому етапі.
4. Формулюванням висновку про належність об'єкта обсягу розглядуваного поняття.

Задача на доведення того факту, що чотирикутник із рівними сторонами є ромбом по суті є задачею на підведення під поняття ромб. Для її розв'язання виконаємо відповідні методичній схемі міркування:

1. Для того, щоб чотирикутник був ромбом, він повинен бути паралелограмом і мати рівні сторони.
2. У даного чотирикутника сторони рівні, залишається довести, що цей чотирикутник паралелограм. Для цього достатньо довести паралельність двох сторін, тобто показати, що внутрішні різносторонні кути при цих сторонах і сінній рівні. Утворимо ці кути:



Включимо ці кути в трикутники:  $\Delta ABC = \Delta CDA$  (за трьома сторонами),  $\angle ACB = \angle CAD$  (за означенням рівності трикутників, як їх відповідні кути). Отже  $BC \parallel AD$  (за ознакою паралельності прямих). Отже  $ABCD$  - паралелограм.

3. Даний об'єкт має усі ознаки ромба.

4.  $ABCD$  - ромб.

Формулювання прийому підведення під поняття, сприяє виробленню дій адекватних до знань. Наприклад, щоб встановити належність функції  $y = 3x + 5$  до зростаючих (за означенням), слід виконати відповідні означенню дії:

1. Нехай  $x_1 > x_2$ , тоді  $x_1 - x_2 > 0$  (за означенням).

2.  $y(x_1) = 3x_1 + 5$ ,  $y(x_2) = 3x_2 + 5$ .

3.  $y(x_1) - y(x_2) = 3(x_1 - x_2)$ ,  $y(x_1) - y(x_2) > 0$ , тому  $y(x_1) > y(x_2)$ .

4. Функція зростаюча, оскільки більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Виведення наслідків з поняття дає змогу відібрати суттєві ознаки, узагальнити знання про конкретне поняття.

Наприклад, щоб з'ясувати відомості про медіану трикутника, учень повинен сформулювати її означення, властивість точки перетину медіан, властивість медіани рівнобедреного трикутника, звідси зробити висновок проте, що точка перетину медіан рівностороннього трикутника є центром вписаного і описаного навколо нього кіл, вміти обчислити довжину медіани

рівностороннього трикутника:  $m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , медіани трикутника із сторонами  $a, b, c$ , добуду-

вавши його до паралелограма:  $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}$ , медіани проведеної до гіпотенузи

прямокутного трикутника:  $m_c = \frac{c}{2}$ .

Виконуючи завдання, доводиться мисленнєво включати даний математичний об'єкт в дедалі нові зв'язки, набуваючи щоразу нової якості, нового змісту, він ніби повертається щоразу іншим боком, у нього кожного разу виявляються нові властивості. Така логіка мислення є аналізом через синтез, який С.Л. Рубінштейн назвав «основним нервом будь-якої регульованої діяльності» [2].

Прийнято вважати, що учень оволодів прийомом розумових дій, якщо усвідомив його суть, знає правило-орієнтир, уміє його застосовувати як у стандартній, так і нестандартній ситуаціях.

Розумовий розвиток учнів у процесі навчання математики – це програмова вимога. Необхідно спеціально вчити вмінню мислити, формувати розумову культуру, яка характеризується ступенем сформованості прийомів евристичної діяльності. Оволодіння ними не лише забезпечує якісно новий рівень засвоєння знань, а й дає позитивні результати в розумовому розвитку.

### Література

1. Гальперин П.Я. Формирование начальных геометрических понятий на основе организации действий учащихся / Гальперин П.Я., Тальзина Н.Ф. // Вопросы психологи. 1957. №1.

2. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях по наследования / Рубинштейн С.Л.- М.:Издательство АН СССР, 1958. – 148 с.
3. Осинская В.Н. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9-10 классах. / Осинская В.Н. – К.: «Рад. школа»,1998. – 148 с.
4. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика,технология. Монография / Е.И. Скафа. – Донецк: Издательство ДонНУ, 2004. – 440 с.
5. Слепкань З.І. Методика навчання математики. Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів / Слепкань З.І. – К.:Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

УДК 378.146

## **ФОРМУВАННЯ ІКТ-КОМПЕТЕНТНОСТІ СТУДЕНТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ КУРСУ «НОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ»**

**Н.О. Головіна, Т.М. Канівець**

Необхідною умовою інформатизації вищої освіти є формування в студентів здатності вирішувати задачі пов'язані з обробкою інформації, використовуючи сучасні інформаційні і комунікаційні технології, проявляючи наявність так званої ІКТ-компетентності, яку відносять до ключових компетенцій активного громадянина сучасного інформаційного суспільства. З позицій компетентнісного підходу суттю освіти стає розвиток здібності до самостійного вирішення проблем у різних сферах і видах діяльності на основі використання соціального досвіду, елементом якого стає і власний досвід навчених.

В науковій літературі поняття ІКТ-компетентності має різноманітне трактування.

Так, П.В. Беспалов визначає дане поняття як інтегральну характеристику особи, що припускає мотивацію до засвоєння відповідних знань, здібність до вирішення задач в навчальній і професійній діяльності за допомогою комп'ютерної техніки і володіння прийомами комп'ютерного мислення. Формується вона як на етапі вивчення комп'ютера, так і на етапі його застосування як засіб подальшого навчання та професійній діяльності і розглядається як одна з граней особової зрілості [2].

О.О. Єлізаров під ІКТ-компетентністю розуміє сукупність знань, умінь і досвіду діяльності, причому саме наявність такого досвіду, є визначальною по відношенню до виконання професійних функцій [3]. О.М. Шилова та М.Б. Лебедева визначають ІКТ-компетентність як здатність індивіда вирішувати навчальні, життєві, професійні задачі з використанням інформаційно-комунікаційних технологій [7].

За Н.В. Насировою, це – мотивація, потреба й інтерес до отримання знань, умінь і навичок у галузі технічних, програмних засобів й інформації [8]. Компетентність педагогів в області ІКТ розглядається Л.М. Горбуновой і А.М. Семибратовим як готовність і здатність педагога самостійно і відповідально використовувати ці технології в своїй професійній діяльності [5].

Українськими вченими також було розкрито зміст ключових компетентностей під час застосування інформаційних і комунікаційних технологій (О.В. Овчарук [6], М.І. Жалдак, Н.В. Морзе [3] та ін.). Вони передбачають здатність орієнтуватися в інформаційному просторі, отримувати інформацію та оперувати нею відповідно до власних потреб і вимог сучасного високотехнологічного інформаційного суспільства.

Таким чином, узагальнюючи наведені означення, в рамках даної роботи під ІКТ-компетентністю – будемо розуміти сукупність знань, умінь, навичок, практичного досвіду, тобто обізнаність, що забезпечує здатність застосовувати сучасні інформаційно-комунікаційні технології у реальному житті, розуміти зміст і методи інформаційного моделювання, вміння будувати інформаційні моделі, досліджувати їх методами інформатики, інтерпретувати отримані результати.

ІКТ-компетентність заслуговує на особливу увагу тому, що саме вона дає можливість особистості бути сучасною, активно діяти в інформаційному середовищі, використовувати найновітніші досягнення техніки в своїй професійній діяльності. Слід відмітити, що майже всі науковці виділяють цю компетентність як обов'язкову складову професійної компетентності педагога. Важливість формування ІКТ грамотності населення, створення неперервної системи

підвищення кваліфікації в галузі ІКТ чітко відображена в Міжнародній програмі ЮНЕСКО «Інформація для всіх», оскільки саме від вчителів залежить розвиток інформаційної культури молоді [1].

Важливим компонентом інформаційної культури можна вважати вміння переходити від змістовного наповнення знання до модельної формалізації цього знання і навпаки, тобто про вміння, пов'язані з дослідженнями інформаційних моделей у комп'ютерному середовищі.

У студентів необхідно сформулювати знання про основні етапи розв'язання практичної задачі: постановка задачі, побудова моделі, вибір готового ПЗ, розробка алгоритму розв'язання задачі з використанням вибраного ПЗ, дослідження алгоритму за комп'ютером, аналіз результатів; операційні вміння і навички зі створення та опрацювання моделей у комп'ютерному середовищі, готовністю систематично використовувати програми загального та спеціального призначення як засіб організації своєї діяльності, вміннями ухвалювати рішення, які мають бути вироблені на основі усестороннього аналізу отриманих результатів комп'ютерного дослідження.

Студентами відпрацьовуються вміння уточнювати дані у недовизначених задачах, умови їх існування, визначаються галузі науки, апарат якої дасть змогу побудувати модель їх розв'язання. Студенти набувають навичок формалізації текстової і графічної інформації, знайомляться з різноманітними моделями та їх роллю в тих чи інших наукових дослідженнях. На цих же заняттях студентам пропонується побудувати моделі задач обговорюються програмні засоби, які можуть бути використані для реалізації розроблених моделей.

В якості засобів моделювання можуть бути, наприклад, текстові й графічні редактори, електронні таблиці, СУБД тощо. У подальшому комп'ютерні моделі діагностуються, проводиться експериментальне дослідження, отримані результати аналізуються.

До побудови моделей краще звертатися під час розв'язання задач з використанням електронних таблиць. Наведемо деякі задачі, що можуть бути запропоновані студентам у процесі виконання практичних робіт.

#### **Задача №1.**

Визначити свою ідеальну вагу. Побудувати табличну модель, що визначає вашу ідеальну вагу, дає рекомендації по її врегулюванню, а також визначає тип статури. За допомогою цієї моделі складіть відповідні характеристики для студентів вашої групи.

Інформаційна модель.

Для визначення ідеальної ваги довгий час користувалися формулою Брока: вага = (зріст, см) – 100. Зараз уведені поправки для різних пропорцій тіла.

Нині більшою популярністю користується формула індексу маси тіла – ІМТ (або індекс Кетле):  $IMT_k = \frac{\text{вага}}{(\text{зріст, см})^2}$ . Згідно його значень, маємо наступні критерії: гострий дефіцит ваги: нижче 15; дефіцит ваги: 15 – 20; нормальна вага: 20 – 25; надлишкова вага: 25 – 30; ожиріння: вище 30.

Крім того, виділимо ще й три основні антропологічні типи статури: астенік, нормостенік, гіперстенік.

Астенік – людина з довгими ногами і руками, вузькими плечима, стегнами і грудною кліткою. Обмін речовин злегка підвищений. Нормостенік – людина з нормальним обміном речовин. Таких більшість. Гіперстенік – людина з широкими плечима, укороченими руками, ногами. Таких ще в народі називають «ширококостими». Обмін речовин сповільнений. Тому їм більше за все і загрожує повнота.

Який тип вашої статури? Щоб його визначити, скористайтеся такими замірами. Великим і вказівним пальцями правої руки обхватіть зап'ясток лівої руки в тому місці, де виступає кісточка. Обхватили легко, навіть з перебором – астенік. Обхватили, але прийшлося напружитися – нормостенік. Обхват не вийшов, як не старалися, – гіперстенік.

Математична модель.

У відповідні комірки увести формули:

Вага, що рекомендується: =IF(A2<155; A2-95; IF(A2<165; A2-100; IF(A2<175; A2-105; A2-110))).

Зауваження: У Вас =IF(B2>D2; «зайвих»; «недостає») і =ABS(D2-B2).

Індекс маси тіла: =B2/(A2/100)^2.

Діагноз: =IF(G2<15; «гострий дефіцит ваги»; IF(G2<20; «дефіцит ваги»; IF(G2<25; «нормальна вага»; IF(G2<30; «надлишкова вага»; «ожиріння»))))

Тип статури: =IF(C2=«легко»; «астенік»; IF(C2=«проблемно»; «нормостенік»; «гіперстенік»)).

Комп'ютерний експеримент.

Таблиця 1

Ріст людини	Вага людини	Обхват зап'ястку	Вага, що рекомендується	Зауваження: у Вас (кг)		Індекс маси тіла	Діагноз	Тип статури
				зайвих	не достас			
160	64	проблемно	60	зайвих	4	25,00	надлишкова вага	гіперстенік
161	50	легко	61	не достас	11	19,29	дефіцит ваги	астенік
183	80	легко	73	зайвих	7	23,89	нормальна вага	астенік
163	55	легко	63	не достас	8	20,70	нормальна вага	астенік

### Задача №2.

Скласти модель біоритмів для конкретної людини від вказаної поточної дати (дня відліку) на місяць вперед з метою подальшого аналізу моделі.

Інформаційна модель.

Об'єкт «людина».

- має керовані параметри: дата народження; день відліку; тривалість прогнозу.
- має некеровані параметри (константи): період фізичного циклу: 23 дні; період емоційного циклу: 28 днів; період інтелектуального циклу: 33 дні.

Математична модель.

Формули для розрахунків:

$$R_f = \sin\left(\frac{2\pi x}{23}\right) - \text{фізичний цикл};$$

$$R_e = \sin\left(\frac{2\pi x}{28}\right) - \text{емоційний цикл};$$

$$R_i = \sin\left(\frac{2\pi x}{33}\right) - \text{інтелектуальний цикл};$$

$x$  – це кількість днів від дня народження до конкретної дати.

Комп'ютерна модель.

Для моделювання використовуємо середовище електронної таблиці, в якій інформаційна і математична моделі об'єднуються в таблицю, яка має дві області:

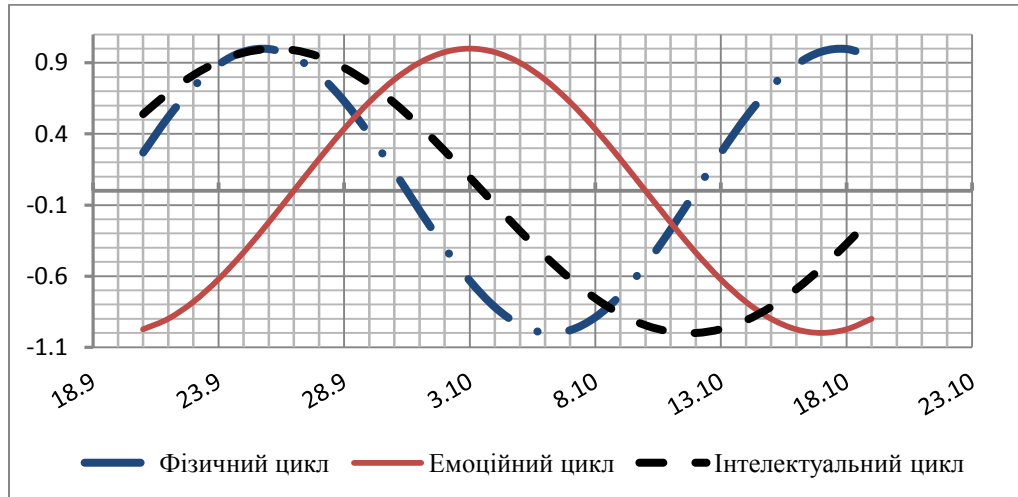
- вихідні дані – константи і керовані параметри;
- розрахункові дані (результати).

Комп'ютерний експеримент.

Таблиця 2

Керовані дані		Некеровані дані	
Дата народження	13.02.1991	Фізичний цикл	23
Дата відліку	20.09.2012	Емоційний цикл	28
Тривалість прогнозу	30	Інтелектуальний цикл	33
Результати			
<u>Порядковий день</u>	<u>Фізичний цикл</u>	<u>Емоційний цикл</u>	<u>Інтелектуальний цикл</u>

20.09.2012	0,270	-0,975	0,541
21.09.2012	0,520	-0,901	0,690
22.09.2012	0,731	-0,782	0,815
23.09.2012	0,888	-0,623	0,910
24.09.2012	0,979	-0,434	0,972
25.09.2012	0,998	-0,223	0,999
26.09.2012	0,942	0,000	0,990
27.09.2012	0,817	0,223	0,945
28.09.2012	0,631	0,434	0,866



Діаграма 1

Аналіз результатів:

За діаграмою студент може визначити день для реалізації свого освітнього потенціалу, день для відвідування театру або музею, день для поліпшення своїх спортивних досягнень.

Задача №3.

Скласти модель розрахунку, чисельності зростаючої популяції вовків, щоб чисельність зайців була відносно стабільною (тобто дорівнювала приблизно 1000) протягом перших п'яти років існування популяції. Як змінюватиметься чисельність популяції зайця протягом наступних років? Представити дані графічно.

Вихідні дані:

- Початкова чисельність популяції зайця (жертви) – 1000 особин ( $N_{з_0} = 1000$ ).
- Частина популяції зайця, що вижила до кінця кожного року, збільшує свою чисельність на 30 % ( $P_з = 0,3$ ).
- Річний приріст популяції вовків – 10% ( $P_в = 0,2$ ).
- Один вовк споживає по 40 зайців щорік ( $R_{1в} = 40$ ).
- Смертність зайця по інших причинах дорівнює нулю.
- Смертність вовків дорівнює нулю.
- Визначити початкову чисельність популяції вовків ( $N_{в_0} = ?$ ).

Усі набуті в результаті розрахунків значення повинні бути цілими невід'ємними числами, оскільки вони вказують на абсолютну кількість тварин. Зрозуміло, що не можна округлювати значення, а необхідно брати лише цілу частин від числа.

Математична модель:

$$N_{з_0} = 1000$$

$$N_з = N_{з_0}$$

$$P_з = 0,3$$

$$N_з = (N_з - N_в * R_{1в}) * (1 + P_з)$$

$$P_в = 0,2$$

$$N_в = N_{в_0} + N_{в_0} * P_в$$



$$R_{1в} = 40$$

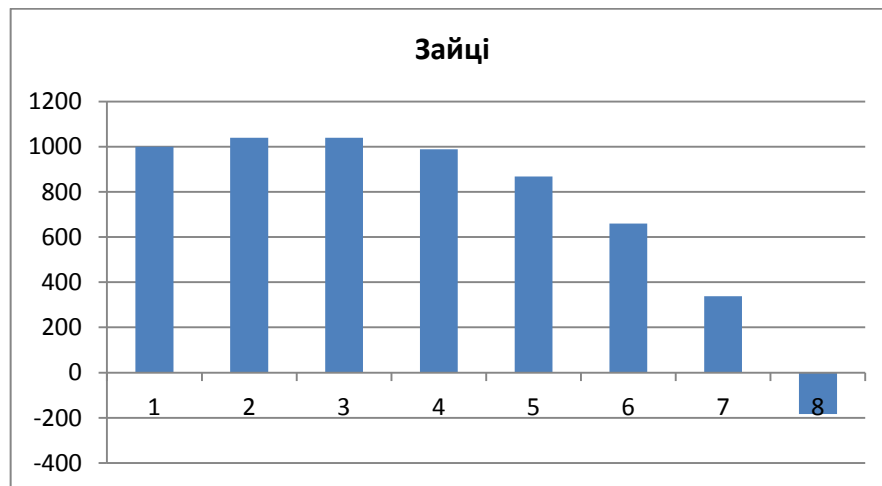
$$N_{в0} = ?$$

### Експеримент у середовищі електронних таблиць.

У завданні потрібно підібрати таку початкову кількість вовків, при якій чисельність зайців мінімально змінюватиметься протягом перших п'яти років існування. Підбирати початкове число будемо у комірці  $N_{в0}$ .

Таблиця 3

Зайці (умова)		Вовки (умова)		Кількістьвовків
$N_{з0}$	$P_z$	$R_{1в}$	$P_v$	$N_{в0}$
1000	0,3	40	0,2	5
Роки	Зайці	Вовки		
0	1000	5		
1	1040	6		
2	1040	7		
3	988	8		
4	868	9		
5	660	10		
6	338	12		
7	-184	14		



Діаграма 2

Аналіз результатів: При вивченні діаграми можна зробити наступні висновки. Порівняно невелика популяція вовка в п'ять особин здатна стримувати зростання популяції зайця і впродовж перших 5-6 років існування підтримувати її приблизно на одному рівні.

Рамки статті не дозволяють розглянути весь спектр задач, що пропонуються студентам, але зауважимо, що головним при їх відборі є їх прикладний «життєвий» характер. В задачах не завжди зрозуміло «що дано» і «як це подати», «що треба отримати» і «в якому вигляді», який математичний апарат задіяти і в якому програмному середовищі реалізувати.

Під час виконання практичних робіт студенти використовують навички набуті з інших курсів, закріплюють вміння та навички по створенню інформаційних об'єктів (текст, список, таблиця, діаграма, малюнок, програма і ін.) і інформаційних моделей засобами текстових та графічних редакторів, вчать здійснювати операції по обробці даних. Проводять цілеспрямовану роботу по закріпленню вмінь і навичок правильно вибирати форму представлення інфор-

мації залежно від завдання, що стоїть, і представляти інформацію у вибраній формі, що дозволяє студентам «читати» і самостійно будувати схеми, таблиці, графіки, діаграми і інші інформаційні моделі, використовувати їх як інструмент систематизації навчального матеріалу, вільно переходити від однієї форми представлення інформації до іншої.

В результаті виконаної роботи в студентів буде сформована готовність до усвідомленого і ефективного використання засобів ІКТ не тільки при подальшому самостійному вивченні інформатики, але і під час роботи в якості вчителя, що і є основою їх ІКТ-компетентності.

### Література

1. Міжнародна програма ЮНЕСКО «Інформація для всіх» [Електронний ресурс] – Режим доступу: [http://www.dlab.irtc.org.ua/unescochair/intallprog\\_ukr.html](http://www.dlab.irtc.org.ua/unescochair/intallprog_ukr.html).
2. Беспалов П. В. Компьютерная компетентность в контексте личностно-ориентированного обучения / Беспалов П. В. // Педагогика. – 2003. – № 4. – С. 45–50.
3. Морзе Н. В. Як навчати вчителів, щоб комп'ютерні технології перестали бути дивом на уроці? // Післядипломна освіта в Україні. – 2005. – №2. – С. 25-33.
4. Елизаров А. А. Базовая ИКТ компетенция как основа Интернет-образования учителя: (Міжнар. конф. RELARN2004) [Електронний ресурс] / А. А. Елизаров // Режим доступу до статті: <http://www.relarn.ru/conf/conf2004/section3/311.html>.
5. Горбунова Л. М., Семибратов А. М. Построение системы повышения квалификации педагогов в области информационно-коммуникационных технологий на основе принципа распределенности: (Междунар. конф. ИТО 2004) [Електронний ресурс] / Л. М. Горбунова, А. М. Семибратов // Режим доступу до статті: <http://ito.edu.ru/2004/Moscow/Late/Late04937.html>.
6. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи: Бібліотека з освітньої політики / Під заг. ред. О. В. Овчарук. – К. : "К.І.С.", 2004. – 112 с.
7. Лебедева М. Б., Шилова О. Н. Что такое ИКТ-компетентность студентов педагогического университета и как ее формировать? / М. Б. Лебедева, О. Н. Шилова // Информатика и образование. – 2004. – № 3. – С. 95-100.
8. Насырова Н. В. Технология развития информационной компетентности студентов гуманитарных факультетов: (материалы телеконференции "Информационные технологии в гуманитарных науках 2005") [Електронний ресурс] / Н. В. Насырова // Режим доступу: [http://www/kcn.ru/tatru/universitet/gum\\_konf/otl.htm](http://www/kcn.ru/tatru/universitet/gum_konf/otl.htm).
9. Биков В.Ю. Сучасні завдання інформатизації освіти / В.Ю. Биков. // Інформаційні технології і засоби навчання: електронне наукове фахове видання [Електронний ресурс] / Ін-т інформ. технологій і засобів навчання АПН України, Ун-т менеджменту освіти АПН України; гол. ред.: В.Ю. Биков. – 2010. – № 1(15). – Режим доступу: <http://www.ime.edu-ua.net/em15/emg.html>.
10. Сьомкін В.С., Гладова В.В. Вивчення питань «Формалізації і моделювання» в «Шкільному курсі інформатики і методики навчання». – У зб. Пошуки і знахідки. В. 1. СПБУ. 2010.- с.140-148.

УДК 378.147:537.86

## ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯЦІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ КОЛИВАНЬ В КУРСІ «КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ»

В.М. Закалюжний

У цілому теоретичний курс «Коливання і хвилі» містить низку тем, які мають велике практичне значення, оскільки забезпечують основу для розуміння процесів, що протікають в складних технічних системах. Однією з таких тем є «Модуляція коливань», яка має прямий вихід на радіотехніку та електроніку, а тому повинна викладатися в тісному взаємозв'язку з

зазначеними дисциплінами. З урахуванням можливостей міждисциплінарних зв'язків, вивчення теми може бути побудоване так.

Модуляцією коливань називають зміну амплітуди, частоти чи фази високочастотного коливання за законом низькочастотного.

Найпростішою є однотонова модуляція, тобто модуляція однією частотою. Слід зазначити, що реальна модуляція в усіх видах радіозв'язку є багатотоною.

При однотоновій модуляції:

$$\text{амплітудній: } A = A_0 (1 + b \cos \omega_2 t);$$

$$\text{частотній: } \omega = \omega_0 (1 + b \cos \omega_2 t);$$

$$\text{фазовій: } \varphi = \varphi_0 (1 + b \cos \omega_2 t).$$

Технічно модуляцію здійснюють за допомогою нелінійних елементів, тобто елементів з нелінійною вольт-амперною характеристикою – діодів, транзисторів тощо. Блок-схема передавача, незалежно від виду модуляції, може бути такою:

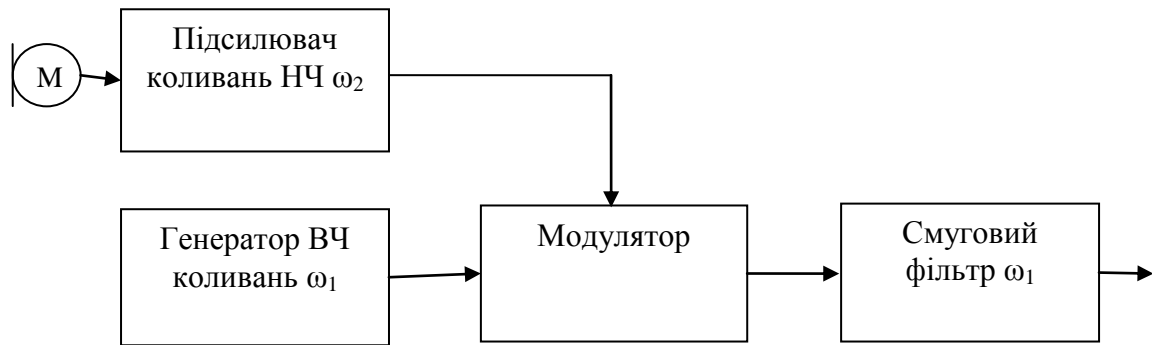


Рис. 1

Розглянемо, як можна математично описати амплітудну модуляцію, якщо закон нелінійності активного елемента модулятора найпростіший, наприклад, такий:

$$i = \sigma_1 u + \sigma_2 u^2,$$

де  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$  - лінійна та нелінійна провідності відповідно. Тобто, миттєве значення сили струму через активний нелінійний елемент має дві складові – лінійну та нелінійну;  $u_1$  та  $u_2$  – миттєві значення напруг високочастотних та низькочастотних коливань відповідно.

$$\text{Якщо } \left. \begin{array}{l} u_1 = U_{1m} \cos \omega_1 t \\ u_2 = U_{2m} \cos \omega_2 t \end{array} \right\} \rightarrow u = u_1 + u_2,$$

$$\text{тоді: } i = \sigma_1 (U_{1m} \cos \omega_1 t + U_{2m} \cos \omega_2 t) + \sigma_2 (U_{1m} \cos \omega_1 t + U_{2m} \cos \omega_2 t)^2 =$$

$$\begin{aligned} & \sigma_1 U_{1m} \cos \omega_1 t + \sigma_1 U_{2m} \cos \omega_2 t + \sigma_2 U_{1m}^2 \cos^2 \omega_1 t + \sigma_2 \cdot 2U_{1m} U_{2m} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t + \\ & + U_{2m} \sigma_2 \cos^2 \omega_2 t \approx \end{aligned}$$

На виході модулятора установлено, як правило, коливальний контур, настроєний на частоту  $\omega_1$ , який пригнічує коливання з частотами, що істотно відрізняються від  $\omega_1$  (наприклад,  $\omega_2$ ,  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ), тому:

$$\begin{aligned} &\approx \sigma_1 U_{1m} \cos \omega_1 t + 2\sigma_2 U_{1m} U_{2m} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \\ &= \sigma_1 U_{1m} \cos \omega_1 t \left( 1 + 2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} U_{2m} \cos \omega_2 t \right) = \end{aligned}$$

Величину  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} U_{2m} = m$  називають глибиною модуляції!

$$= \sigma_1 U_{1m} \cos \omega_1 t (1 + 2m \cos \omega_2 t)$$

Перепишемо рівняння так:

$$\begin{aligned} i &= \sigma_1 U_{1m} \cos \omega_1 t + 2m \sigma_1 U_{1m} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \\ &= I_{1m} \cos \omega_1 t + 2m I_{1m} \cdot \frac{1}{2} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \end{aligned}$$

Звідси видно, що внаслідок нелінійності модулятора, крім несучої частоти  $\omega_1$ , у вихідному сигналі присутні бічні частоти  $(\omega_1 + \omega_2)$  та  $(\omega_1 - \omega_2)$  (рис. 2)

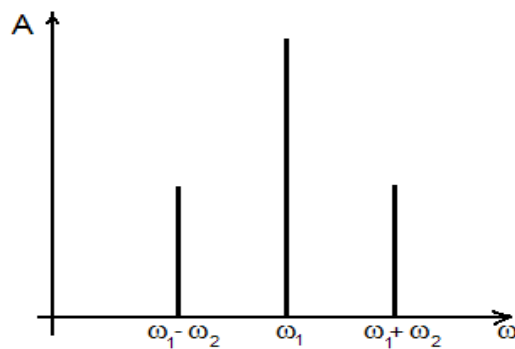
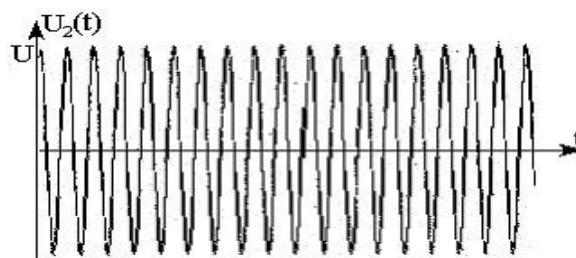


Рис. 2

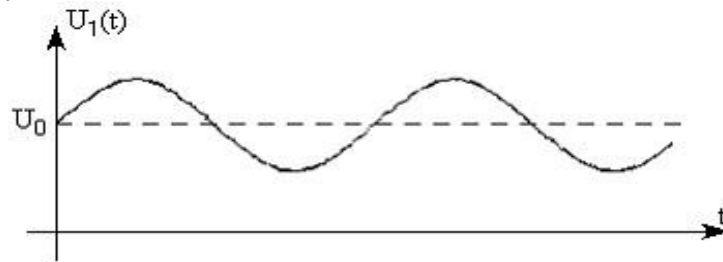
В реальній багатотоновій модуляції на виході утворюється цілий спектр частот. Тому будь-яка радіостанція на будь-якому каналі зв'язку займає не одну частоту, а смугу частот.

Продемонструвати однотонову амплітудну модуляцію можна різними способами. Найпростіше, якщо лабораторний генератор високої частоти має вбудований НЧ-модулятор, наприклад ГСС-8. Під'єднавши його до осцилографа, на екрані можна показати:

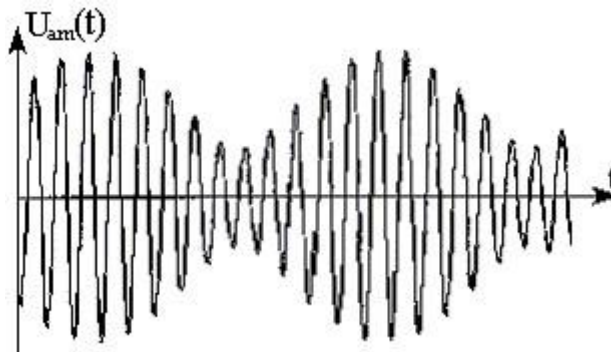
1. Несучі коливання ВЧ.



## 2. Модуючі коливання НЧ.



## 3. Промодульовані коливання ВЧ.



## 4. Залежність форми промодульованих коливань від глибини модуляції.

На завершення студентам слід пояснити, що захищеність радіосигналу від перешкод залежить від смуги випромінювання передавача і смуги пропускання вхідного тракту та фільтра основної селекції приймача. В сучасних системах службового радіозв'язку для звуження смуги випромінюваних передавачем частот найчастіше застосовують амплітудну модуляцію з пригніченою несучою та однією бічною частотою – SSB.

Як показала практика, такий підхід до викладання теми «Модуляція коливань», є досить ефективним, забезпечує розвиток пізнавального інтересу студентів та ілюструє тісний зв'язок теорії з практикою.

УДК 51(07)

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ РІВНЯНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ФОРМУЛ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

В.Г. Опанасенко

Використання формул скороченого множення, в дещо зміненому вигляді, дозволяє показати студентам один з раціональних методів розв'язування рівнянь, систем рівнянь, розвиває у них певні алгоритмічні прийоми під час розв'язування рівнянь.

Відомі формули можна записати так:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab, \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab, \quad (2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b), \quad (3)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b). \quad (4)$$

### Приклади

1. Обчислити  $x_1^2 x_2^5 + x_1^5 x_2^2$ , де  $x_1$  і  $x_2$  - корені рівняння  $2x^2 - 4x + 1 = 0$ .

**Розв'язання**

Перетворимо даний вираз  $x_1^2 x_2^5 + x_1^5 x_2^2 = x_1^2 x_2^2 ((x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2))$ .

За теоремою Віста:

$$x_1 + x_2 = 2, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Отже, } x_1^2 x_2^5 + x_1^5 x_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(2^3 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

**Відповідь:**  $1\frac{1}{4}$ .

2. *Розв'язати рівняння:*  $2x^2 + \frac{2}{x^2} - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$ .

**Розв'язання**

Застосуємо формулу (1):

$$2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0,$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0,$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0.$$

Нехай  $x + \frac{1}{x} = t$ ,  $x \neq 0$ .

Маємо рівняння:

$$2t^2 - 7t + 5 = 0,$$

$$t_1 = \frac{5}{2} \text{ або } t_2 = 1.$$

Одержали сукупність рівнянь:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \\ x + \frac{1}{x} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0, \\ x^2 - x + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

**Відповідь:**  $\left\{2; \frac{1}{2}\right\}$ .

3. *Розв'язати рівняння*  $3\left(\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2}\right) = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$ .

**Розв'язання**

Використаємо формулу (2):

$$3\left(\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{4}{3}\right) = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right),$$

$$3\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right) + 8 = 0.$$

Нехай  $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = t$ ,  $x \neq 0$ .

$$3t^2 - 10t + 8 = 0,$$

$$t_1 = 2 \text{ або } t_2 = \frac{4}{3}.$$

Отже,  $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2, \\ \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3}; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 12 = 0, \\ x^2 - 4x - 12 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{21}, \\ x_2 = 3 - \sqrt{21}; \\ x_1 = -2, \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

**Відповідь:**  $\{-2; 3 - \sqrt{21}; 6; 3 + \sqrt{21}\}$ .

4. Розв'язати рівняння  $x^2 + \frac{16x^2}{x^2+8x+16} = 20$ .

**Розв'язання**

За формулою (2) ліву частину рівняння записуємо так:

$$x^2 + \left(\frac{4x}{x+4}\right)^2 = \left(x - \frac{4x}{x+4}\right)^2 + 2x \cdot \frac{4x}{x+4} = \left(\frac{x^2}{x+4}\right)^2 + \frac{8x^2}{x+4}.$$

Маємо рівняння:  $\left(\frac{x^2}{x+4}\right)^2 + \frac{8x^2}{x+4} = 20$ .

Нехай  $\frac{x^2}{x+4} = t$ ,  $x \neq -4$ , тоді

$$\begin{aligned} t^2 + 8t - 20 &= 0, \\ t_1 &= 2, \quad t_2 = -10. \end{aligned}$$

Отже,  $\begin{cases} \frac{x^2}{x+4} = 2, \\ \frac{x^2}{x+4} = -10; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 10x + 4 = 0, \\ x^2 - 2x - 8 = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

**Відповідь:**  $\{-2; 4\}$ .

5. Розв'язати рівняння  $x^2 + 9\left(\frac{x}{x-3}\right)^2 = 16$ .

**Розв'язання**

Застосуємо формулу (1):

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{3x}{x-3}\right)^2 - 2x \cdot \frac{3x}{x-3} &= 16, \\ \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{x^2}{x-3} - 16 &= 0. \end{aligned}$$

Нехай  $\frac{x^2}{x-3} = t$ ,  $x \neq 3$ , тоді

$$\begin{aligned} t^2 - 6t - 16 &= 0, \\ t_1 &= 8 \text{ або } t_2 = -2. \end{aligned}$$

Отже,  $\begin{cases} \frac{x^2}{x-3} = 8, \\ \frac{x^2}{x-3} = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 8x + 24 = 0, \\ x^2 + 2x - 6 = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{7}, \\ x_2 = -1 - \sqrt{7}. \end{cases}$$

**Відповідь:**  $\{-1 - \sqrt{7}; -1 + \sqrt{7}\}$ .

6. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} xy + 5x + y = 21, \\ 25x^2 + y^2 = 89. \end{cases}$

**Розв'язання**

Запишемо друге рівняння, використавши формули (1):

$$\begin{cases} xy + (5x + y) = 21, \\ (5x + y)^2 + 10xy = 89. \end{cases}$$

Нехай  $\begin{cases} xy = t, \\ 5x + y = z, \end{cases}$  тоді:

$$\begin{cases} t + z = 21, \\ z^2 - 10t = 89; \end{cases} \quad \begin{cases} t = 21 - z, \\ z^2 + 10z - 299 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 21 - z, \\ \begin{cases} z = 13, \\ z = -23; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} t = 8, \\ z = 13; \end{cases} \\ \begin{cases} t = 44, \\ z = -23. \end{cases} \end{cases}$$

Маємо сукупність двох систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} xy = 8, \\ 5x + y = 13; \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 44, \\ 5x + y = -23; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} 5x^2 - 13x + 8 = 0, \\ y = 13 - 5x; \end{cases} \\ \begin{cases} 5x^2 + 23 + 44 = 0, \\ y = -23 - 5x; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1,6, \\ y = 5; \end{cases} \\ \begin{cases} z = 1, \\ y = 8. \end{cases} \end{cases}$$

**Відповідь:**  $\{(1,6; 5); (1; 8)\}$ .

7. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} x - 4y^2 + 4xy = -29, \\ x^2 + 16y^2 = 41. \end{cases}$

#### Розв'язання

Запишемо друге рівняння, використавши формули (2):

$$\begin{cases} (x - 4y) + 4xy = -29, \\ (x - 4y)^2 + 8xy = 41. \end{cases}$$

Нехай  $\begin{cases} x - 4y = t, \\ xy = z; \end{cases}$  тоді:  $\begin{cases} t + 4z = -29, \\ t^2 + 8z = 41. \end{cases}$

Домножимо перше рівняння системи на -2 і додамо до другого рівняння, одержимо:

$$\begin{cases} t^2 - 2t - 99 = 0, \\ t + 4z = -29; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} t = 11, \\ t = -9, \end{cases} \\ z = \frac{-29-t}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} t = 11, \\ z = -10; \end{cases} \\ \begin{cases} t = -9, \\ z = 5. \end{cases} \end{cases}$$

Маємо сукупність двох систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} x - 4y = 11, \\ xy = -10; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 4y = -9, \\ xy = -5; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = 11 + 4, \\ 4y^2 + 11y + 10 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -9 + 4y, \\ 4y^2 - 9y + 5 = 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = -4, \\ y = \frac{5}{4}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5, \\ y = 1. \end{cases} \end{cases}$$

**Відповідь:**  $\left\{ \left( -4; \frac{5}{4} \right); (-5; 1) \right\}$ .

8. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$



**Розв'язання**

Запишемо перше рівняння, використавши формули (4):

$$\begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 35, \\ xy(x+y) = 30. \end{cases}$$

Нехай  $\begin{cases} x+y = t, \\ xy = z; \end{cases}$  тоді:  $\begin{cases} t^3 - 3tz = 35, \\ zt = 30. \end{cases}$   $\begin{cases} t^3 - 3 \cdot 30 = 35, \\ z = \frac{30}{t}; \end{cases}$

$$\begin{cases} t^3 = 125, \\ z = \frac{30}{t}; \end{cases} \quad \begin{cases} t = 5, \\ z = 6. \end{cases}$$

Отже,  $\begin{cases} x+y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$   $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3; \\ x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$

**Відповідь:**  $\{(2; 3); (3; 2)\}$ .

9. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} x^3 - y^3 = 35, \\ x^2y - xy^2 = -30. \end{cases}$

**Розв'язання**

Використаємо формули (3):

$$\begin{cases} (x-y)^3 + 3xy(x-y) = 35, \\ xy(x-y) = -30. \end{cases}$$

Нехай  $\begin{cases} x-y = t, \\ xy = z; \end{cases}$  тоді:  $\begin{cases} t^3 + 3tz = 35, \\ zt = -30. \end{cases}$

$$\begin{cases} t^3 + 3 \cdot (-30) = 35, \\ z = -\frac{30}{t}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^3 + 3 \cdot = 125, \\ z = -\frac{30}{t}; \end{cases} \quad \begin{cases} t = 5, \\ z = -6. \end{cases}$$

Отже,  $\begin{cases} x-y = 5, \\ xy = -6; \end{cases}$   $\begin{cases} x = 3, \\ y = -2; \\ x = 2, \\ y = -3. \end{cases}$

**Відповідь:**  $\{(3; -2); (2; -3)\}$ .

Формули скороченого множення (1-4) корисно застосовувати при спрощенні виразів, розв'язуванні трансцендентних рівнянь, рівнянь з параметрами.

**Література**

1. Бевз Г.П. Методика розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Рад. шк., 1975. – 240 с.
2. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Рад. шк., 1991. – 128 с.
3. Новоселов С.И. Специальный курс элементарной алгебры. – 7-е изд. – М.: Высш. шк., 1965. – 552 с.
4. Шунда Н.М. Збірник задач для 7-9 класів. – К.: Техніка, 2001. – 338 с.

УДК 37.026

## СУЧАСНІ МЕТОДИ НАВЧАННЯ ФІЗИКИ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

М.П. Руденко, В.С. Шовкопляс

У дидактиці метод навчання – це певний спосіб цілеспрямованої реалізації процесу навчання, досягнення поставленої мети. Метод – це головний інструмент педагогічної діяльності, лише з його допомогою виробляється продукт навчання, здійснюється взаємодія вчителя й учнів. Правильний підбір методів відповідно до мети та змісту навчання, вікових особливостей учнів сприяє розвитку їхніх пізнавальних здібностей, озброєнню їх уміннями й навичками використовувати здобуті знання на практиці, готує учнів до самостійного набуття знань, формує їхній світогляд.

Методи навчання поділяються на загальні та спеціальні. Загальні застосовуються у школі при вивченні різних навчальних предметів; спеціальні – під час вивчення окремих дисциплін.

У педагогічній науці використовуються різні класифікації методів навчання. Найпоширенішими серед них є наступні:

- за джерелом передачі та сприймання навчальної інформації (словесні, наочні, практичні);
- за характером пізнавальної діяльності учнів (пояснювально-ілюстративний, репродуктивний, проблемне викладання, частково-пошуковий, дослідницький);
- залежно від основної дидактичної мети і завдань (методи оволодіння новими знаннями, формування вмінь і навичок, перевірки та оцінювання знань, умінь і навичок); методи усного викладу знань, закріплення навчального матеріалу, самостійної роботи учнів з осмислення й засвоєння нового матеріалу, роботи із застосування знань на практиці та вироблення вмінь і навичок, перевірки та оцінювання знань, умінь і навичок
- класифікація з точки зору цілісного підходу до діяльності у процесі навчання (методи організації та здійснення навчально-пізнавальної діяльності, стимулювання й мотивація учіння, контролю, самоконтролю, взаємоконтролю і корекції, самокорекції, взаємокорекції в навчанні).

Найпоширенішою в дидактиці останніх років є класифікація методів навчання, яку запропонував видатний дидактик Ю. Бабанський. За його підходом, доцільно виділяти чотири великих групи методів навчання:

- методи організації та здійснення навчально-пізнавальної діяльності;
- методи стимулювання й мотивації навчально-пізнавальної діяльності;
- методи контролю (самоконтролю, взаємоконтролю), корекції (самокорекції, взаємокорекції) за ефективністю навчально-пізнавальної діяльності;
- бінарні, інтегровані (універсальні) методи.

Під час навчання фізики використовуються перелічені вище методи. Але традиційні погляди в освіті на формування в учнів знань, умінь і навичок уже не задовольняють суспільство. Сучасному суспільству потрібні не просто добросовісні виконавці, що мають певні знання, уміння й навички, а особистості. Адже лише сформована особистість може успішно справитися з проблемами сьогодення. Однією з проблем освіти на сьогодні є її швидке реагування на зміни в суспільстві. Це вимагає відкритості системи освіти до змін, що відбуваються в суспільстві, постійного перегляду й адаптування нормативної бази в освіті, розробки й впровадження в педагогічний процес нових методів і форм навчання та виховання. Як наслідок – з'явилися поняття «традиційне навчання» та «інноваційне навчання». Традиційність навчання пов'язана з нормами освіти, що розробляються різними органами освіти, науковцями, педагогами-новаторами. Традиційне навчання покликане сформувати в учнів певну базу знань, умінь і навичок, без яких формування особистості проблематичне. Тому традиційне навчання є важливим аспектом підготовки учнів до самостійного життя. Однак традиційне навчання як система володіє певною замкнутістю, консервативністю й часто «не встигає» за швидкозмінним розвитком суспільства. Саме тому в науці виникла інша стратегія навчання – інноваційне навчання. Воно орієнтоване на розвиток особистості учня, на формування готовності учня до реального життя, до його швидких змін, до творчого мислення, критичного аналізу навколишнього світу й себе в ньому, до постійного оволодіння учнями новими видами діяльності й спілкування.

Інноваційні методи передбачають порушення статичної досконалості традиційної системи навчання, введення в неї нових активаторів, що викличе порушення стійкості, звичності, прогнозованості, типовості ситуацій тощо. Тому інновації пов'язані з певним ризиком, непрогнозованістю результатів навчання, нетиповістю ситуацій, що й утруднює їхнє впровадження в навчальний процес.

Інноваційне навчання передбачає використання методів особистісно зорієнтованого, проблемного, розвивального, інтерактивного навчання, розвитку критичного мислення тощо.

Метод *особистісно зорієнтованого навчання* полягає в тому, що в основі його лежить визнання індивідуальності, самобутності, самоцінності кожної людини, що вимагає забезпечення розвитку і саморозвитку особистості учня виходячи із виявлення його індивідуального, неповторного, суб'єктивного досвіду, здібностей, інтересів, ціннісних орієнтацій, можливостей реалізувати себе в пізнанні, навчальній діяльності, поведінці. Використання цього методу дає можливість: визначити життєвий досвід кожного учня, рівень інтелекту, пізнавальні здібності, інтереси, якісні характеристики, які спочатку треба розкрити, а потім розвинути в навчальному процесі; формувати позитивну мотивацію учнів до пізнавальної діяльності, потребу в самопізнанні, самореалізації та самовдосконаленні школярів у межах соціокультурних та моральних цінностей нації; озброїти учнів механізмами адаптації, саморегуляції, самозахисту, самовиконання, необхідним для становлення самобутньої сучасної людини, здатної вести конструктивний діалог з іншими людьми, природою, культурою та цивілізацією в цілому.

В основі методу *проблемного навчання* лежить створення вчителем самостійної пошукової діяльності школярів із розв'язання навчальних проблем, у ході якої формується нове знання, уміння, навички та розвиваються здібності дитини, активність, зацікавленість, ерудиція, творче мислення та інші особисто значущі якості.

Створювати проблемні ситуації на уроках фізики можна різними способами: зіткнення школяра з явищами, фактами, які вимагають теоретичного пояснення; спонукання учнів до аналізу зовнішніх суперечливих фактів, явищ, висловлювань; спонукання школярів до вибору із суперечливих фактів, висловлювань тих, які вважають вірними і обґрунтування свого вибору; спонукання до самостійного порівняння, зіставлення фактів, явищ, дій; спонукання до висування гіпотез, формулювання висновків та їх перевірки.

Суть методу *розвивального навчання* полягає в тому, що це активно-діяльнісний спосіб навчання, під час якого враховуються та використовуються природні закономірності індивідуального розвитку дитини, що зумовлюють розвиток знань, умінь, навичок і способів розумових дій, скерованих механізмів особистості, емоційно-ціннісної та діялісно-практичної сфер. Ця технологія ставить на меті загальний розвиток учня, його інтелектуальних можливостей, почуттів, уміння вчитися та спілкуватися, формування творчої особистості. Ми вчимо дітей фізики не тільки для того, щоб вони пізнали світ, а й навчилися думати, аналізувати, систематизувати, знаходити компроміси, виділяти головне, критично ставитися до будь-яких аргументів, уміти відстоювати свою позицію. Під час навчання фізики елементи розвивального навчання доцільно використовувати у процесі проведення лабораторних та дослідницьких робіт, спостереження, при розв'язуванні експериментальних та якісних задач.

Метод *розвитку критичного мислення* формує творче мислення, сприяє розвитку креативності. Критичне мислення необхідне під час розв'язування проблемних задач, формулювання висновків, оцінювання та прийняття рішень. Сприймання, розуміння, усвідомлення та засвоєння навчальної інформації вимагає активної розумової діяльності, у тому числі критичного мислення. Критичне мислення – складний процес, який починається з ознайомлення з інформацією, а закінчується прийняттям рішення. Критичне мислення проявляється у: здатності людини самостійно аналізувати інформацію; умінні бачити помилки або логічні порушення у твердженні різних авторів; аргументувати свої думки (змінювати їх, якщо вони неправильні, і відстоювати, якщо вони вірні); прагненні до пошуку оптимальних і аргументованих рішень. Сприятливі умови для використання цього методу складаються при розв'язуванні творчих завдань.

Метод *інтерактивного навчання* – це спеціальна форма організації пізнавальної діяльності, яка має конкретну, передбачувану мету створити комфортні умови навчання, за яких кожен учень відчуває свою успішність, інтелектуальну спроможність. Сутність інтерактивного навчання полягає в тому, що навчальний процес відбувається за умови постійної, активної взаємодії всіх учнів, де і учень і вчитель є рівноправними, рівнозначними суб'єктами навчання.

Організація інтерактивного навчання передбачає моделювання життєвих ситуацій, використання рольових ігор, спільне вирішення проблеми на основі аналізу обставин та відповідної ситуації. Інтерактивні методи навчання на уроках фізики дозволяють забезпечити значну глибину вивчення матеріалу.

Використання розглянутих методів у процесі навчання фізики в середній школі дає можливість повніше задовольнити сучасні потреби суспільства у фізичних знаннях та формуванні якостей особистості.

### Література

1. Андрєєва В.М., Григораш В.В. Настільна книга педагога / В.М. Андрєєва, В.В. Григораш. – Х.: Основа, 2006. – 352 с.
2. Андрєєва В.М. Практична педагогіка для вчителя / В.М. Андрєєва, В.В. Григораш. – Х.: Основа, 2009. – 120 с.
3. Шарко В. Д. Сучасний урок фізики: технологічний аспект / Посібник для вчителів і студентів / Валентина Дмитрівна Шарко. – К., 2005. – 220 с.

УДК 371.32

## ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПРИСКОРЕННЯ. РІВНОПРИСКОРЕНИЙ РУХ» У КЛАСАХ ГУМАНІТАРНОГО ПРОФІЛЮ

В.А. Ігнатенко, С.І. Карпенко, Л.М. Кнорозок

У старшій школі вивчення фізики відбувається на рівні засвоєння основ фундаментальних фізичних теорій — класичної та релятивістської механіки, молекулярно-кінетичної теорії та термодинаміки, електродинаміки, квантової та ядерної фізики. Відмінністю навчання фізики в основній та старшій школі є глибина й обсяг вивчення фізичних теорій і застосування отриманих знань для розв'язання теоретичних та експериментальних завдань. Навчання фізики здійснюється відповідно до змісту, який закладено в навчальних програмах трьох рівнів: рівні стандарту, академічному та профільному рівнях. Зміст навчальної програми рівня стандарту спрямовано на вивчення фізики як елементу загальнолюдської культури, на формування світоглядних уявлень про картину світу. Програма рівня стандарту є по суті світоглядною.

Тема «Прискорення. Рівноприскорений рух» у 10 класі вивчається за підручником «Фізика. 10 клас» (Л. Е. Генденштейн, І. Ю. Ненашев). Автори прагнуть подати фізику як живу науку, що є частиною загальної культури: наведено багато прикладів виявлення та застосування фізичних законів у навколишньому житті, відомостей з історії фізичних відкриттів, подається ілюстрований опис фізичних дослідів. Чітка структура підручника полегшує розуміння навчального матеріалу. У тексті виділено головне, а в кінці параграфів і розділів зібрано висновки для узагальнення, повторення та конспекту учня. Виклад навчального матеріалу у підручнику ведеться у формі діалогу: багато розділів починаються із запитань, відповіді на які можна знайти в цих розділах.

Вивчення теми розпочинається із введення поняття миттєвої швидкості. Наочне уявлення про миттєву швидкість дає прилад для вимірювання швидкості руху автомобіля – спідометр. Далі формулюється означення: «Якщо швидкість тіла змінюється з часом, для опису руху треба знати, чому дорівнює швидкість тіла в даний момент часу (або в даній точці траєкторії). Цю швидкість називають миттєвою.»

Поняття миттєвої швидкості добре ілюструє такий приклад із знаменитих «Фейнманівських лекцій з фізики».

Поліцейський зупиняє машину і між ним та жінкою за кермом відбувається такий діалог:

– Ви порушили правила дорожнього руху: їхали зі швидкістю 90 км/год.

– Я всього 7 хвилин тому виїхала з дому, як же я могла проїхати 90 км за годину?

– Але якби ви продовжували так їхати, то ви проїхали б за годину 90 км.

– А я й не збиралася так їхати аж годину! Я збиралася проїхати ще один квартал і зупинитися.

Рух матеріальної точки, під час якого її швидкість за будь-які однакові проміжки часу збільшується або зменшується на ту саму величину, називається рівнозмінним. Такий рух є найпростішим нерівномірним рухом. На практиці трапляються такі його наближення: гальмування всіх засобів транспорту, початок їх руху з поступовим збільшенням швидкості, вільне падіння тіл, коли вплив опору повітря незначний, тощо. До встановлених кінематичних величин для рівномірного прямолінійного руху (координати, переміщення, шляху, швидкості) в рівнозмінному прямолінійному русі додається прискорення, що характеризує швидкість зміни швидкості.

Нехай швидкість тіла в момент часу  $t_1$  дорівнювала  $\vec{v}_1$ , а в момент часу  $t_2$  стала рівною  $\vec{v}_2$ . Позначимо зміну швидкості  $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ , а проміжок часу  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Прискоренням називають відношення зміни швидкості тіла до проміжку часу, за який ця зміна відбулася:  $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ .

З означення випливає, що прискорення – величина векторна. Напрямок прискорення збігається з напрямком зміни швидкості.

Якщо швидкість за будь-які однакові проміжки часу збільшується на одну й ту саму величину, то такий рух називається **рівноприскореним**. Якщо швидкість тіла зменшується з часом на одну й ту саму величину, то рух називають **рівносповільненим**. Прикладами рівноприскореного руху є падіння тіл зі стану спокою, якщо можна знехтувати опором повітря, а також рух тіла вздовж похилої площини.

З визначення прискорення  $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$  випливає:  $\Delta\vec{v} = \vec{a} \cdot \Delta t$ .

Отже, під час прямолінійного рівноприскореного руху швидкість тіла за будь-які рівні проміжки часу змінюється на одну й ту ж саму величину.

Позначимо  $\vec{v}_0$  швидкість тіла в початковий момент (при  $t=0$ ), а  $\vec{v}$  – швидкість тіла в момент часу  $t$ . Тоді  $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ , а  $\Delta t = t$ , тому формула  $\Delta\vec{v} = \vec{a} \cdot \Delta t$  набуде вигляду  $\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a} \cdot t$

Звідси випливає:  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$

Якщо направити вісь  $x$  уздовж прямої, по якій рухається тіло, то в проекціях на вісь  $x$  отримаємо:

$$\vec{v}_x = \vec{v}_{x0} + \vec{a}_x \cdot t$$

Таким чином, за умови прямолінійного рівноприскореного руху проекція швидкості лінійно залежить від часу. Це означає, що графіком залежності є відрізок прямої.

Отже, прискорення характеризує зміну швидкості руху тіла і визначається методом непрямих вимірювань.

### Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка: Т. 1. - К.: Техніка, 1999.
2. Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика: Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика та термодинаміка. - К.: Вища шк., 1987; 1993.
3. Гершензон Е.М., Малов Н.Н. Курс общей физики: Механика. - М.: Просвещение, 1987.
4. Савельев И.В. Курс общей физики: Механика. Молекулярная физика: Т. 1. - М.: Высш. шк., 1989.
5. Архангельский М.М. Курс физики. Механика. - М.: Просвещение, 1978.
6. Яворський Б.М., Детлаф А.А., Милковська Л.Б. Курс фізики: Механіка. Основи молекулярної фізики та термодинаміки: Т. 1. - К.: Вища шк., 1970.

УДК 378

## ДО ПИТАННЯ МОТИВАЦІЇ НАВЧАННЯ ПЕРШОКУРСНИКІВ ЕЛЕМЕНТАРНІЙ МАТЕМАТИЦІ З ВИКОРИСТАННЯМ ЕНК

В.М. Харченко, Л.В. Ваврикович

Однією з важливих проблем у педагогіці і педагогічній психології є проблема мотивації навчання [1; 2]. Оскільки у навчальний процес вишів залучені молоді люди, у яких триває формування особистості, то проблема полягає в тому, щоб знайти методи і засоби підвищення мотивації навчання, що сприяють максимальному розвитку особистісних якостей студентів, необхідних для їх успішної професійної діяльності. Саме ці проблеми розглянуто в дослідженнях [1-5].

Проблема мотивації навчальної діяльності розглянута у роботах Л.І. Божовича, Л.С. Виготського, Є.П. Ільїна та ін. Професійну спрямованість вивчення математичних дисциплін у вишах досліджували М.І. Жалдак, О.І. Скафа, Н.А. Тарасенкова та ін.

Згідно з дослідженням [3, с. 253], 67% першокурсників фізико-математичного факультету педагогічного університету не мали бажання здобувати професію вчителя. У дослідженні [6, с. 311] визначено, що у зв'язку з погіршенням матеріального положення сімей в Україні, у 28,3% випадків в 2009 р. саме батьки визначають найближчий ВНЗ як такий заклад, де буде учитися їхня дитина. Тому у студентів відсутній інтерес до занять математикою.

Розглянутий вище спосіб вибору абітурієнтом спеціальності значно позначається на мотивації навчання студента: якщо майбутня професія обрана неусвідомлено, випадково, то в студента, як правило, слабка мотивація до навчання; при усвідомленому виборі для студента характерна сильна мотивація. Згідно з педагогічними дослідженнями, наявність професійної мотивації, активності студентів сприяють підвищенню якості одержаних ними знань, умінь, навичок.

У сучасній психології та педагогіці існують істотні розбіжності в деяких деталях і щодо визначення поняття мотиву і мотивації. Уважатимемо, що мотив – це внутрішнє спонукання особистості до того чи іншого виду активності, що пов'язана із задоволенням певної потреби. Під мотивом також розуміють ідеали, інтереси особистості, її переконання, соціальні настанови, ціннісні орієнтації. Мотивація – це загальна назва для процесів, методів, засобів спонукання учнів до продуктивної пізнавальної діяльності, активного освоєння змісту освіти.

На базі загальної мотивації навчальної діяльності у студентів з'являється певне відношення до різних навчальних предметів. Воно визначається:

- а) важливістю предмета для професійної підготовки;
- б) інтересом до певної галузі знань і до даного предмета як її частини;
- в) якістю викладання;
- г) мірою труднощів щодо вивчення предмету, виходячи із власних здібностей;
- г) взаємовідносинами з викладачем даного предмету [1, с. 267].

У дослідженні [7] вказано мотивацію навчальної діяльності учнів при роботі з дистанційним курсом математики: урізноманітнення форм і засобів представлення навчального матеріалу в дистанційному курсі; створення ефективної комунікації.

Не зважаючи на значну кількість психолого-педагогічної літератури, на даний час існує потреба в дослідженні умов підвищення мотивації студентів до вивчення математики з використанням інформаційних технологій.

У 2011 р. нами був створений електронний навчальний курс «Математика» для учнів Ніжинського обласного педагогічного ліцею [8]. При створенні названого курсу було враховано програму підготовки до ЗНО 2012 [9]. Розроблений курс містить 9 розділів. У розділі новин розміщені програма ЗНО, специфікація тесту ЗНО, короткий опис курсу, відомості про авторів, інструкція до тестування та форум для обговорення проблем підготовки до ЗНО. Кожен із наступних шести розділів містить мотиваційний вступ, короткі теоретичні дані, методичні рекомендації щодо розв'язання завдань цього розділу й тести, які перевіряють досягнення у вивченні конкретної теми, а також підсумковий тест. Тематичні тести розраховані на 15-20 хвилинну роботу учнів, а розділові – на 40 хвилинну. Окремим розділом виділено 5 пробних тестів, які складено у форматі ЗНО і на виконання яких передбачається 150 хвилин.

Аналіз робочої програми дисципліни «Елементарна математика» для студентів напряму підготовки 6.040201 «Математика\*» показав, що розроблений ЕНК містить завдання з усіх тем, які вивчаються у даній дисципліні. Тому ним успішно можуть користуватися студенти першого курсу спеціальності «Математика\*» після попередньої реєстрації.

Для того щоб процес навчання був більш ефективним, викладач елементарної математики повинен враховувати аспекти, що пов'язані з психологією студентів. Психологи стверджують, що у природі людини закладене прагнення вчитися. Учіння, оволодіння новими навичками, знаннями є діяльністю з великим мотиваційним потенціалом. Навчально-пізнавальні мотиви формуються в ході самої навчальної діяльності, тому важливо, як ця діяльність здійснюється.

Розглянемо за [1] основні умови підвищення мотивації студентів до вивчення елементарної математики з використанням електронного навчального курсу «Математика».

**Ліквідація прогалин у знаннях з елементарної математики.** Багато методичних досліджень свідчать про стійку тенденцію до погіршення якості математичної підготовки випускників шкіл і, зокрема, абітурієнтів педагогічних спеціальностей, що визначає недостатній стартовий рівень для підготовки майбутнього вчителя математики у виші. Зокрема, згідно з [10], у 2012 році на спеціальність «Математика\*» НДУ ім. Миколи Гоголя поступило 77% випускників, які склали ЗНО з математики менше ніж 173 бали. Скорочення обсягу аудиторних занять не дозволяє ліквідувати всі прогалини в аудиторії. Однією з ефективних форм навчання студентів є самостійна робота, яка здійснюється як в навчальній, так і в позанавчальній час. Зокрема, після розгляду тієї чи іншої теми, студенти можуть зайти на ЕНК «Математика», ознайомитися із наведеними прикладами розв'язання відповідних вправ та потренуватися, пройшовши відповідні тести. Проходження тестів сприятиме виявленню прогалин у знаннях та усуненню їх за допомогою самостійної роботи студентів. Оскільки повторне проходження тесту можливе, то студенту рекомендується у таких випадках проходити тестування до

**Демонстрація необхідності знань з елементарної математики для майбутньої професійної діяльності.** На лекціях студентам наголошується, що систематизовані знання будуть потрібні не тільки для успішного навчання у виші, а й для майбутньої професійної діяльності з підготовки учнів до ЗНО. Розроблений нами ЕНК надасть можливість першокурсникам пройти тестування у відповідності із вимогами ЗНО. У даному випадку використання розділу пробних тестів з шкільного курсу математики буде наочним прикладом того, що без гарних знань не можна стати гарним учителем і якісно підготувати своїх учнів до подальшої навчальної діяльності.

**Організація навчального процесу.** З педагогіки відомо, що навчальний матеріал засвоюється краще, якщо студенти зацікавлені досліджуваною темою. Для активізації навчальної діяльності студентів на початку семестру їх знайомлять із модулями, які слід засвоїти. Також доречно наголосити, що успішне проходження підсумкових тестів із відповідних розділів ЕНК сприятиме успішній здачі модульних контрольних робіт. Відомо, що можливість формування у студентів пізнавальної мотивації створюються при використанні різних форм, методів і засобів як традиційного, так і дистанційного навчання, в якому реалізований принцип проблемності. Тому можна запропонувати студентам підібрати завдання, які аналогічні до тих, що вони розв'язували в ЕНК.

**Самостійна робота студентів.** Самостійна робота студентів над навчальним матеріалом – це базис сучасного освітнього процесу у виші. Активна самостійна робота студентів можлива тільки за наявності серйозної і стійкої мотивації. Мета самостійної роботи – не тільки засвоєння знань, формування умінь, навичок, а й розвиток особистісних якостей студентів, необхідних для діяльності учителя математики. Показником ступеня та рівня розвитку самостійності як риси особистості є поступова зміна мотиву навчальної діяльності – від елементарного відтворення прочитаного чи вивченого до глибокого інтересу та потреби в нових знаннях.

Найчастіше самостійність характеризують як узагальнену властивість, вміння систематизувати, аналізувати, контролювати волю та наполегливість для досягнення мети. Студентам з низьким рівнем пізнавальної самостійності даються завдання репродуктивного характеру: виконати зазначені задачі ЕНК за зразком, обговорити методи розв'язання задач у форумі. Для студентів з більш високим рівнем пізнавальної активності необхідно передбачити підбір мето-

дичних рекомендацій щодо розв'язування певних типів задач, огляд нової навчально-методичної літератури. Такі завдання мають професійно-орієнтований характер.

**Контроль навчальної діяльності.** Відомо, що форми контролю навчальної діяльності студентів можуть бути різними, але вони повинні відповідати таким вимогам, як індивідуалізація, систематичність проведення, наявність зрозумілих і доступних критеріїв оцінки. Важливо, щоб в оцінці давався якісний аналіз навчальної діяльності студента, містилася інформація про рівень його компетентності. Зокрема, при рейтинговій системі оцінки підвищується мотивація студентів до освоєння навчального матеріалу шляхом більш високої диференціації оцінки їх навчальної роботи, стимулюється пізнавальна активність, виникає зацікавленість до виконання завдань більш високого рівня складності.

Для того, щоб під час перевірки були різні завдання з одного й того ж розділу створено банк запитань, який містить більше 1000 задач. Задачі взято із варіантів ЗНО за минулі роки та навчальних посібників. Як і на ЗНО кожна категорія задач розбита на підкатегорії: задачі на відповідності, на вибір однієї відповіді та уведення короткої відповіді. Найменша кількість тестових завдань на відповідності – близько 100. Створений таким чином банк задач дозволяє по кілька разів тестувати учнів і студентів з однієї й тієї теми. При цьому повтори завдань мінімальні. Єдине обмеження – інтервал часу між сусідніми тестуваннями – 1 доба. Це зроблено для того, щоб учні й студенти могли виявити прогалини в своїх знаннях та усунути їх. А після цього ще раз перевірити якість своїх знань.

Таким чином, вивчення елементарної математики з використанням ЕНК «Математика» сприятиме підвищенню мотивації не тільки вивчення курсу «Елементарна математика», а й інших математичних дисциплін.

### Література

1. Ильин Е.П. Мотивация и мотивы. / Е.П. Ильин. – СПб.: Питер, 2000. – 512 с.
2. Чирков В.И. Мотивация учебной деятельности. / В.И. Чирков. – Ярославль: ЯрГУ, 1991. – 52 с.
3. Мартиненко О.В. Про мотивацію навчання студентів при викладанні математичного аналізу в педагогічних університетах / О.В. Мартиненко, С.А. Колесник. // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО-2010). – Черкаси, 24-26 листопада 2010. – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2010. – С. 252-253.
4. Непомняща Т.В. Підвищення рівня мотивації майбутніх інженерів до вивчення математичних дисциплін / Т.В. Непомняща. // Дидактика математики: проблеми і дослідження, 2012. - № 37. – С. 21-25.
5. Соколовська С.М. Формування позитивної мотивації професійного саморозвитку майбутніх учителів математики при вивченні курсу «елементарна математика» / С.М. Соколовська. // Всеукраїнська дистанційна науково-методична конференція з міжнародною участю науковців, студентів та вчителів «ІТМ\*плюс-2011». [Електронний ресурс]. Режим доступу: [http://laboratoriya.at.ua/ITM\\_plus\\_2011/sekcion\\_2.pdf](http://laboratoriya.at.ua/ITM_plus_2011/sekcion_2.pdf) - С. 69-70.
6. Хом'юк І.В. Професійна мотивація як засіб забезпечення професійної мобільності / І.В. Хом'юк, М.Б. Ковальчук. // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології, 2011. - № 4-5. – С. 305 – 312.
7. Хара О.М. Мотивація навчальної діяльності в дистанційному курсі з математики. / О.М. Хара // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – № 32. – 2009. – С. 77-81.
8. Харченко В.М. Використання електронного навчального курсу математики як засобу підготовки до ЗНО. / В.М. Харченко, Л.В. Ваврикович, І.І. Карпенко // Друга міжнародна науково-практична конференція FOSS Lviv 2012: Збірник наукових праць. Львів, 26-28 квітня. – Львів, 2012. – С. 58-63.
9. Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://testportal.gov.ua/index.php/text/math/> – Назва з екрану.
10. [vstup.info/2012/i2012i155b.html](http://vstup.info/2012/i2012i155b.html)



## ЗМІСТ

<b>1. МАТЕМАТИКА .....</b>	<b>3</b>
<i>Віра М. Б., Шапка О. А.</i> Про побудову асимптотичного розв'язку лінійної сингулярно збуреної крайової задачі .....	3
<i>Курниш А.В.</i> Особливості інваріантних підпросторів .....	6
<i>Тарасенко О.В.</i> Принцип максимуму Л. С. Понтрягіна для вироджених лінійних систем .....	8
<i>Циганок Л.В.</i> Один векторний метод знаходження геодезичних ліній на поверхні .....	13
<b>2. ФІЗИКА .....</b>	<b>19</b>
<i>Аніщенко В.О.</i> Ефект Фарадея в гетеровалентних твердих розчинах (InAs) <sub>x</sub> (CdTe) <sub>1-x</sub> та легованому цинком арсеніді індію .....	19
<i>Венгер Є.Ф., Мельничук Л.Ю., Мельничук Я.О., Тищенко І.І.</i> Визначення густини твердих тіл методом «зависання» .....	24
<b>3. ІНФОРМАТИКА.....</b>	<b>28</b>
<i>Іванов В.В.</i> Подання поняття «інформація» .....	28
<i>Буй Д.Б., Глушко І.М.</i> Розширена мультимножинна таблична алгебра .....	29
<i>Євтушенко А.І.</i> Застосування системи MATHCAD при обробці даних фізичного експерименту.....	36
<i>Казачков І.В.</i> Розробка та використання комп'ютеризованих мультимедійних інтерактивних систем для навчання та викладання .....	39
<i>Коновал О.В., Казачков І.В.</i> Розробка інформаційно-аналітичного забезпечення для моделювання проблеми захисту АЕС від тяжких аварій.....	44
<i>Фетісов В.С.</i> Розв'язування нерівностей і систем нерівностей у провідних математичних комп'ютерних системах.....	53
<i>Чернишова Е.О.</i> Побудова мінімальних поверхонь, утворених з ізотропних кривих, засобами системи комп'ютерної алгебри MAXIMA.....	54
<b>4. ВИМІРЮВАННЯ В ОСВІТІ .....</b>	<b>58</b>
<i>Ковальчук Ю.О.</i> Порівняння результатів вимірювань психологічних рис та особистісних теоретичних конструктів .....	58
<i>Лісова Т.В.</i> Різні підходи до побудови моделей тестів з політомічними завданнями .....	61
<b>5. МЕТОДИКА .....</b>	<b>69</b>
<i>Барило Н. А., Горова А.В.</i> Застосування похідної при графічному методі розв'язування задач з параметрами .....	69
<i>Варущик Н.П., Ілющенко Т.В.</i> Формування прийомів евристичної діяльності у навчанні математики .....	79
<i>Головіна Н.О., Канівець Т.М.</i> Формування ІКТ-компетентності студентів при вивченні курсу «Нові інформаційні технології» .....	85
<i>Закалюжний В.М.</i> Особливості вивчення модуляції електромагнітних коливань в курсі «Коливання і хвилі».....	90
<i>Опанасенко В.Г.</i> Розв'язування рівнянь та систем рівнянь з використанням формул скороченого множення.....	93

<i>Руденко М.П., Шовкопляс В.С.</i> Сучасні методи навчання фізики в середній школі .....	98
<i>Ігнатенко В.А., Карпенко С.І., Кнорозок Л.М.</i> Особливості вивчення теми «Прискорення. Рівноприскорений рух» у класах гуманітарного профілю ...	100
<i>Харченко В.М., Ваврикович Л.В.</i> До питання мотивації навчання першокурсників елементарній математиці з використанням ЕНК .....	102

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

Збірник наукових праць

Відповідальний редаткор – Ковальчук Ю.О.  
Технічний редактор – Сливко В. П.  
Верстка, макетування – Ковальчук Ю.О.

*Книга друкується за авторським редагуванням*

---

Підписано до друку 29.11.12  
Гарнітура Computer Modern.  
Замовлення №

Формат 60x84/8  
Обл.-вид. арк. 5,5  
Ум. друк. арк. 5,5

Папір офсетний  
Тираж 50 прим.

---



Ніжинський державний університет  
імені Миколи Гоголя.  
м. Ніжин, вул. Воздвиженська, 3/4  
(04631)7-19-72  
E-mail: [vidavn\\_ndu@mail.ru](mailto:vidavn_ndu@mail.ru)  
[www.ndu.edu.ua](http://www.ndu.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 2137 від 29.03.05 р.