

НІЖИНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИКОЛИ ГОГОЛЯ

Фізико-математичні записки

Збірник наукових праць

Ніжин – 2011

Збірник друкується за рішенням Вченої ради
Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя
Протокол №2 від 06.10.11 р.

Редакційна колегія:

к. фіз.-мат. н. Аніщенко В.О. (відп. ред.), к. фіз.-мат. н. Ковальчук Ю.О. (відп. секретар), д. техн. н. Казачков І.В., д. фіз.-мат. н. Мельничук О.В., д. фіз.-мат. н. Зінченко Н.М., к. пед. н. Руденко М.П., к. пед. н. Стрельнікова Н.М.

Рецензенти:

докт. фіз.-мат. н., професор, член-кореспондент НАН України ***Венгер Є. Ф.***,
докт. пед. н., професор, член-кореспондент АПН України ***Бурда М. І.***

До збірника включені наукові статті викладачів, наукових співробітників та аспірантів кафедр вищої математики, прикладної математики, інформатики та освітніх вимірювань, фізики Ніжинського державного університету ім. Миколи Гоголя з актуальних питань вищої математики, фізики, методики викладання дисциплін фізико-математичного циклу, загальних проблем педагогіки.

Для фахівців у галузі математики, фізики, педагогіки вищої та середньої школи.

На обкладинці зображено герб фізико-математичного факультету НДУ ім. Миколи Гоголя

1

Математика

УДК 517.949.21

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ
РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Старун І.І.

1. За останні 25 років значно зросла зацікавленість математиків до вивчення різницевих рівнянь з змінними коефіцієнтами. Особлива увага приділяється таким питанням, як асимптотичне поведіння розв'язків та стійкість розв'язків [1-3]. Варто зауважити, що різницеві рівняння в бувшому СРСР вивчалися переважно в київській математичній школі [4-7]. Так в монографії [4] розглядалася система вигляду

$$x(t+1) = W(t)(E + C(t))x(t), t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, \quad (1)$$

де $x(t)$ – шукана послідовність векторів, $W(t)$ – діагональна матриця, $C(t)$ – $n \times n$ матриця. Такі системи І.М.Рапопорт назвав l – діагональними. Ним доведена наступна теорема.

Теорема (Рапопорта). Якщо діагональні елементи $w_i(t)$ матриці $W(t)$ такі, що $w_i(t) \neq 0$ і задовольняють умовам

$$\left| \frac{w_i(t)}{w_j(t)} \right| \leq 1 \text{ чи } \left| \frac{w_i(t)}{w_j(t)} \right| \geq 1 \text{ при всіх } i, j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

а елементи матриці $C(t)$ задовольняють умові

$$\sum_{t=t_0}^{\infty} |c_{ij}(t)| < \infty, \quad (3)$$

то система (1) має n лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$x_i(t) = \prod_{\tau=t_0}^{t-1} w_i(\tau)(e_i + \varphi_i(\tau)), t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, \quad (4)$$

де $e_i = \text{colon}(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)$, $\varphi_i(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, або ж

$$x(t) = \prod_{\tau=t_0}^{t-1} W(\tau)(E + \Phi(\tau)) \cdot p, \Phi(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \quad (5)$$

$p = \text{colon}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ – довільний сталий вектор.

(Матриця $\prod_{\tau=t_0}^{t-1} W(\tau)(E + \Phi(\tau))$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (1)).

В роботах [4-7] розглядалася система

$$x(t+1) = A(t)x(t), t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots \quad (6)$$

у випадку, коли характеристичне рівняння

$$\det(A(t) - \lambda E) = 0 \quad (7)$$

при $t \geq T \geq t_0 > 0$ має прості, відмінні від нуля корені і будувалися підстановки, які систему (6) приводили до l – діагонального вигляду (1). Проте, якщо порядок системи високий, то знайти точні корені рівняння (7) досить проблематично. Те ж саме можна сказати і у випадках, коли рівняння (7) має кратні корені, або серед коренів є нульові (особливо кратні). В запропонованій роботі пропонується метод приведення системи (6) до l – діагонального вигляду, подібний до запропонованого нами [8] методу приведення системи лінійних диференціальних рівнянь до так званого L – діагонального вигляду. Цей метод не вимагає відшукування коренів рівняння (7), тому байдуже які корені має це рівняння – прості, чи кратні, зберігають вони свою кратність при різних t , чи ні.

2. Отже, нехай маємо систему (6), асимптотичну поведінку розв'язків якої потрібно дослідити. Введемо в розгляд допоміжну систему з параметром

$$\varepsilon x(t+1) = (W + \varepsilon(A(t) - W))x(t), t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, \quad (8)$$

в якій

$$W = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\} = \text{const}, w_i, i = \overline{1, n} \quad (9)$$

– довільні додатні числа, які задовольняють, наприклад, нерівностям $0 < w_1 < w_2 < \dots < w_n$. (При $\varepsilon = 1$ система (8) співпадає з системою (6)). В системі (8) зробимо заміну

$$x(t) = Q_m(t, \varepsilon)y(t), \quad (10)$$

де

$$Q_m(t, \varepsilon) = E + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k Q^{(k)}(t). \quad (11)$$

(Про вибір числа m буде сказано пізніше). Отримаємо систему

$$\varepsilon Q_m(t+1, \varepsilon)y(t+1) = (W + \varepsilon(A(t) - W))Q_m(t, \varepsilon)y(t). \quad (12)$$

Матрицю $Q_m(t, \varepsilon)$ будемо будувати, виходячи з рівності

$$(W + \varepsilon(A(t) - W))Q_m(t, \varepsilon) = (Q_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \Delta Q^{(k)}(t)) \cdot (\Lambda_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} C_m(t, \varepsilon)), \quad (13)$$

в якій

$$\Lambda_m(t, \varepsilon) = W + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k \Lambda^{(k)}(t), \Lambda^{(k)} = \text{diag}\{\lambda_1^{(k)}(t), \dots, \lambda_n^{(k)}(t)\}, \quad (14)$$

$C_m(t, \varepsilon)$ – $n \times n$ матриця, що підлягає визначенню, як і $\Lambda_m(t, \varepsilon)$ та $Q_m(t, \varepsilon)$, $\Delta Q^{(k)}(t) = Q^{(k)}(t+1) - Q^{(k)}(t)$.

Прирівнявши коефіцієнти при степенях $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^m$, отримаємо наступну систему матричних рівнянь:

$$WQ^{(1)} - Q^{(1)}W = \Lambda^{(1)} + (W - A), \quad (15^1)$$

$$WQ^{(2)} - Q^{(2)}W = \Lambda^{(2)} + (W - A)Q^{(1)} + Q^{(1)}\Lambda^{(1)}, \quad (15^2)$$

$$WQ^{(m)} - Q^{(m)}W = \Lambda^{(m)} + (W - A)Q^{(m-1)} + \sum_{i=1}^{m-1} Q^{(i)}\Lambda^{(m-i)}. \quad (15^m)$$

(тут, і надалі, ми аргумент t опустили; при ε^0 маємо тотожність $W \equiv W$).

Розглянемо рівняння (15¹). В координатній формі воно має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & (w_1 - w_2)q_{12}^{(1)} & (w_1 - w_3)q_{13}^{(1)} \dots & (w_1 - w_n)q_{1n}^{(1)} \\ (w_2 - w_1)q_{21}^{(1)} & 0 & (w_2 - w_3)q_{23}^{(1)} \dots & (w_2 - w_n)q_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (w_n - w_1)q_{n1}^{(1)} & (w_n - w_2)q_{n2}^{(1)} & (w_n - w_3)q_{n3}^{(1)} \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & w_2 - a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & w_n - a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Оскільки зліва в (16) на головній діагоналі стоять нулі, то прирівнявши до нуля діагональні елементи справа, визначимо елементи матриці $\Lambda^{(1)}$:

$$\lambda_i^{(1)} = w_i - a_{ii}, i = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Прирівнюючи не діагональні елементи матриць, знаходимо:

$$q_{ij}^{(1)} = \frac{a_{ij}}{w_j - w_i}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j. \quad (18)$$

Не визначеними залишилися елементи $q_{ii}^{(1)}$, для визначеності покладемо $q_{ii}^{(1)} = 0, i = \overline{1, n}$.

Таким чином матриці $\Lambda^{(1)}$ та $Q^{(1)}$ однозначно визначені.

Розглянемо рівняння (15²). Підставивши сюди знайдені матриці $\Lambda^{(1)}, Q^{(1)}$ та позначивши

$$F^{(2)} = (W - A)Q^{(1)} + Q^{(1)}\Lambda^{(1)},$$

подібно до попереднього визначаємо

$$\lambda_i^{(2)} = -f_{ii}^{(2)}, i = \overline{1, n}, q_{ij}^{(2)} = \frac{f_{ij}^{(2)}}{w_i - w_j}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j, q_{ii}^{(2)} = 0. \quad (19)$$

Аналогічним чином визначаються і всі наступні матриці $\Lambda^{(s)}, Q^{(s)}, s = \overline{3, m}$:

$$\lambda_i^{(s)} = -f_{ii}^{(s)}, q_{ii}^{(s)} = 0, i = \overline{1, n}, q_{ij}^{(s)} = \frac{f_{ij}^{(s)}}{w_i - w_j}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j, \quad (20)$$

де $f_{ij}^{(s)}, i, j = \overline{1, n}$ – елементи матриці

$$F^{(s)} = (W - A)Q^{(s-1)} + \sum_{i=1}^{s-1} Q^{(i)}\Lambda^{(s-i)}.$$

Отже, матриці $Q_m(t, \varepsilon), \Lambda_m(t, \varepsilon)$ повністю визначені. Зауважимо, що число m в (10) вибираємо так, щоб виконувалися умови

$$\det \Lambda_m(t,1) \neq 0, \det Q_m(t,1) \neq 0, \quad (21)$$

чого завжди можна добитися підбираючи певним чином елементи матриці W . Тоді матриця $C_m(t,1)$ визначиться з (13) згідно формули

$$C_m(t,1) = Q_m^{-1}(t,1)(A(t) - W)Q^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^m \sum_{r=i}^m Q^{(r)}(t)\Lambda^{(m+i-r)} - Q_m(t+1,1)\Lambda_m(t,1). \quad (22)$$

Враховуючи (13) (при $\varepsilon = 1$), система (12) запишеться так:

$$y(t+1) = (\Lambda_m(t,1) + C_m(t,1))y(t),$$

або ж

$$y(t+1) = \Lambda_m(t,1)(E + H_m(t,1))y(t), \quad (23)$$

де $H_m(t,1) = \Lambda_m^{-1}(t,1) \cdot C_m(t,1)$.

Система (23) – це система вигляду (1), а тому якщо елементи матриць $\Lambda_m(t,1), H_m(t,1)$ задовольняють умовам теореми Рапопорта, то фундаментальна матриця розв'язків системи (6) має вигляд:

$$X(t) = Q_m(t,1) \cdot \prod_{\tau=t_0}^{t-1} \Lambda_m(\tau,1)(E + \Phi(\tau)), \Phi(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Загальний асимптотичний розв'язок тоді можна подати у вигляді

$$x(t) = X(t) \cdot p, p = colon(p_1, p_2, \dots, p_n), \quad (25)$$

де p_1, p_2, \dots, p_n – довільні сталі числа.

Література

1. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения - К.: Наукова думка, 1986. – с.277.
2. Рябенский В.С., Филиппов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1996. – с. 289.
3. Игнатьев А.О. Об устойчивости решений систем разностных уравнений в одном критическом случае // Укр. матем. вісник. т.5, № 4, 2008. – с. 488-506.
4. И.М.Рапопорт. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. – К.: Изд-во АН УССР, 1954. – с. 218.
5. Коваль П.И. Об асимптотическом поведении решений линейных разностных и дифференциальных уравнений // ДАН ССР, 114, №5, 1957. – с. 87-94.
6. П.И.Коваль. Об асимптотическом поведении решений систем линейных разностных уравнений // Функциональный анализ и его применения. – Изд-во АН Азерб. ССР, 1961. – с. 124-133.
7. П.Й.Коваль. Про асимптотичне поведження розв'язків різницевих рівнянь // Вісник КДУ, сер. матем. та мех. – 3, 1961. – с. 74-82.
8. І.І.Старун. Асимптотика розв'язків однорідної лінійної системи // Фізико-математичний збірник, збірник наук. праць. – Ніжин, 2007. – с. 19-21.

УДК 512.8

ПРО КРИТЕРІЙ СУМІСНОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Старун І.І., Шеремет О.А.

Розглянемо систему рівнянь

$$Ax=b, \quad (1)$$

де A – матриця, x , b – вектори. Як відомо з курсу алгебри, якщо матриця A – квадратна (розмірності $n \times n$) і невідроджена ($\det A \neq 0$), то система (1) сумісна і має єдиний розв'язок

$$x = A^{-1}b, \quad (2)$$

що встановлюється теоремою Крамера [1]. Якщо ж матриця A – вироджена, або не квадратна, то питання про сумісність системи вирішується теоремою Кронеккера-Капеллі [1]: якщо ранг основної матриці (матриці A) дорівнює рангу розширеної матриці (матриці $B = [A; b]$), то система сумісна, в протилежному випадку вона несумісна. У випадку сумісності розв'язок системи наведений критерій не визначає. В цьому випадку пропонується шукати розв'язок методом Гаусса. Проте при вивченні задач, що приводять до систем лінійних диференціальних рівнянь, чи до інтегральних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром, доводиться визначати сумісність лінійних систем виду (1) та знаходити загальний розв'язок. Одним з критеріїв, який відповідає цим вимогам є наступне твердження [2]:

Теорема 1. Для того щоб система (1) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб вектор b був ортогональний до всіх розв'язків союзної системи:

$$A^*y=0, \quad (3)$$

тобто, щоб скалярний добуток вектора b на будь-який розв'язок системи (3) дорівнював нулю. В системі (3) матриця A^* – це матриця, спряжена до матриці A , яка одержується з A транспонуванням і заміною всіх її елементів комплексно спряженими.

При виконанні цього критерію загальний розв'язок системи (1) подається у вигляді

$$x = x_0 + c_1 y_1 + \dots + c_m y_m, \quad (4)$$

де x_0 – довільний частинний розв'язок системи (1), а y_1, \dots, y_m – лінійно незалежні розв'язки відповідної однорідної системи

$$Ay = 0 \quad (5)$$

(Якщо $\text{rank } A = r$, то $m = n - r$).

Проте при розв'язуванні конкретних задач цей критерій хоча і дає можливість дослідити систему (1) на сумісність і знайти її загальний розв'язок (у випадку або $\det A = 0$, або матриця A має розмірність $m \times n$, де $m \neq n$), але він досить громіздкий і вимагає багато обчислень, що складно при досить великих розмірностях матриці системи. В монографії [3] приведено більш придатний, на наш погляд, критерій сумісності системи (1), який вказує і вигляд загального розв'язку системи. Перш ніж його сформулювати, введемо поняття напівоберненої матриці [3].

Означення. Напівоберненою матрицею до $m \times n$ матриці A називається $n \times m$ матриця A^- , що задовольняє матричному рівнянню

$$AA^-A = A \quad (6)$$

Як показано в [3] для будь-якої матриці A існує напівобернена матриця A^- , причому таких матриць нескінченна множина, яка описується формулою

$$A^- = A_0^- + (E - A_0^-A)P + Q(E - AA_0^-), \quad (7)$$

де A_0^- – яка-небудь напівобернена матриця до матриці A , а P і Q – довільні матриці відповідних розмірів, E – одинична матриця.

Напівобернена матриця знаходиться наступним чином. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де A_1 – максимальний, відмінний від нуля мінор матриці A . Тоді

$$A^- = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

(Якщо $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$, то $A^- = (A_1^{-1}, 0)$, якщо ж $A = (A_1, A_2)$, то $A^- = \begin{pmatrix} A_1^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$).

Теорема 2. Система (1) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$(E - AA^-)b = 0, \quad (10)$$

і якщо вона сумісна, то її загальний розв'язок має вигляд

$$x = A^-b + (E - A^-A)c, \quad (11)$$

де A^- – довільна напівобернена матриця, а c – довільний вектор.

На жаль, в навчальній літературі цей критерій не згадується і швидше за все тому, що він опублікований всього 30 років тому в згаданій монографії [3], яка мало доступна широкому загалу спеціалістів і не відома студентам університетів.

Проілюструємо на конкретному прикладі останній критерій.

Розглянемо систему (1), в якій

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

і вкажемо вигляд вектора b , при якому система сумісна і знайдемо її загальний розв'язок. Ранг

матриці A $r(A)=2$. В поданні (8) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = (2 \ 1)$, $A_4 = (2 \ 3)$.

Тоді $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, а тому, згідно (9),

$$A^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо

$$AA^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E - AA^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

З умови сумісності (10) випливає, що має рівність

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b_1 - b_2 \end{pmatrix} = 0$$

Таким чином вектор b має вигляд

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

де b_1, b_3 – довільні числа.

Загальний розв'язок заданої системи, згідно (11), має вигляд

$$x = A^{-1}b + (E - A^{-1}A)c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - c_3 - c_4 \\ -2b_1 - c_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перепозначивши довільні сталі (c_3 на c_1 , c_4 на c_2) отримуємо такий загальний розв'язок заданої системи

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - c_1 - c_2 \\ x_2 &= -2b_1 - c_2 \\ x_3 &= x_4 = 0. \end{aligned}$$

Література

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. т.3, ч.1 – М.: Наука, 1974. – 323 с.
2. Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Вища шк., 1989. – 287с.
3. Ю. Е. Бояринцев. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск : Наука, Сибирск. отделение, 1980. – 222 с.

УДК 517.977.55

УМОВИ СПОСТЕРЕЖУВАНOSTІ ВИРОДЖЕНИХ ЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Тарасенко О.В.

Розглядається процес керування, що описується системою диференціальних рівнянь

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + C(t)u, \quad (1)$$

де $A(t)$, $B(t)$ – квадратні матриці n -го порядку, $C(t)$ – матриця розмірності $(n \times m)$, $x(t)$ – n -вимірний вектор стану, $u(t)$ – m -вимірний вектор керування, $\det B(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0; T]$.

Припустимо, що система (1) доповнюється рівнянням виходу

(2)

$$z(t) = D(t)x(t),$$

де $D(t)$ - $(r \times n)$ - матриця, $z(t)$ - r - вимірний вектор виходу.

Питання спостережуваності лінійних процесів даного типу у випадку, коли $\det B \equiv 0$ досліджувались в основному для стаціонарних процесів, коли матриці A , B , C є сталими [1]. Для змінних матриць розглядався випадок, коли $B(t)$ – одинична матриця [2, 3, 4]. Використовуючи поняття лівого та правого регуляризуючого оператора у [5] було знайдено достатні умови спостережуваності системи (1), (2).

У роботі [2, с. 63] введено поняття цілком спостережуваної системи. Так, система (1), (2) називається *цілком спостережуваною*, якщо існує таке значення $t_1 > t_0$, що початковий стан $x(0) = x_0$ можна визначити за відомим на відрізьку $[0; T]$ виходом $z(t)$.

Виходячи з теореми про звідність виродженої лінійної системи до центральної канонічної форми, доведень в [6], знайдемо достатні умови спостережуваності системи (1), (2).

Будемо передбачати, що виконуються всі умови цієї теореми, а саме:

$$1) \text{ rank} B(t) = n - r, \forall t \in [0; T];$$

2) матриця $B(t)$ має на $[0; T]$ повний жорданів набір векторів відносно оператора

$$L(t) = A(t) - B(t) \frac{d}{dt}, \text{ який складається з } r \text{ ланцюжків } \varphi_i^{(j)}(t), \quad j = \overline{1, s_i}, \quad i = \overline{1, r},$$

завдовжки s_1, s_2, \dots, s_r ;

$$3) A(t), B(t) \in C^{3p-2}[0; T], C(t), u(t) \in C^{p-1}[0; T], \text{ де } p = \max_{i=1, r} s_i.$$

Позначимо $\Psi(t) = [\psi_1^{(s_1)}(t), \dots, \psi_1^{(1)}(t); \psi_2^{(s_2)}(t), \dots, \psi_2^{(1)}(t); \dots; \psi_r^{(s_r)}(t), \dots, \psi_r^{(1)}(t)]$ – $(n \times s)$ -матрицю ($s = s_1 + s_2 + \dots + s_r$), складену із вектор-стовпців $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, які утворюють жорданові ланцюжки матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt} B^*(t)$ (X^* – матриця, спряжена з X).

Як показано в [7] за виконання умов 1)-3) однорідна система, що відповідає (1)

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (3)$$

має загальний розв'язок типу Коші, який є лінійною комбінацією її $n - s$ лінійно незалежних розв'язків. Позначимо через $X_{n-s}(t)$ фундаментальну матрицю системи (3), складену з цих розв'язків, а через $Y_{n-s}(t)$ – фундаментальну матрицю спряженої системи

$$\frac{d}{dt} (B^*(t)y) = -A^*(t)y. \quad (4)$$

Нехай $\Phi(t) = [\varphi_1^{(1)}(t), \dots, \varphi_1^{(s_1)}(t); \varphi_2^{(1)}(t), \dots, \varphi_2^{(s_2)}(t); \dots; \varphi_r^{(1)}(t), \dots, \varphi_r^{(s_r)}(t)]$ – матриця розмірності $(n \times s)$, складена з векторів, що утворюють повний жорданів набір матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$.

Так, згідно з [7] при виконанні умов 1)-3) розв'язок задачі Коші для системи (1) з допустимим початковим станом $x(0) = x_0$ можна визначити у вигляді

$$x(t) = X_{n-s}(t)Y_{n-s}^*(0)B(0)x_0 + \tilde{x}(t),$$

де

$$\tilde{x}(t) = \int_0^t X_{n-s}(\tau)Y_{n-s}^*(\tau)C(\tau)u(\tau)d\tau - \Phi(t) \sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i} \left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t) \right]^{-1} \Psi^*(t)C(t)u(t),$$

якщо матриці $X_{n-s}(t)$, $Y_{n-s}(t)$ визначені таким чином, щоб виконувалося співвідношення

$$Y_{n-s}^*(t)B(t)X_{n-s}(t) = E.$$

Тоді вихід

$$z(t) = D(t)X_{n-s}(t)Y_{n-s}^*(0)B(0)x_0 + D(t)\tilde{x}(t). \quad (5)$$

Домножимо цю рівність зліва на матрицю $X_{n-s}^*(t)D^*(t)$. Поклавши $x_0 = X_{n-s}(0)c$ і взявши до уваги (5), одержимо

$$X_{n-s}^*(t)D^*(t)D(t)X_{n-s}(t)c = X_{n-s}^*(t)D^*(t)z(t) - X_{n-s}^*(t)D^*(t)D(t)\tilde{x}(t),$$

звідки

$$N(0, t_1)c = \int_0^{t_1} X_{n-s}^*(\tau)D^*(\tau)z(\tau)d\tau - \gamma(0, t_1), \quad (6)$$

де

$$N(0, t_1) = \int_0^{t_1} X_{n-s}^*(\tau)D^*(\tau)D(\tau)X_{n-s}(\tau)d\tau,$$

$$\gamma(0, t_1) = \int_0^{t_1} X_{n-s}^*(\tau)D^*(\tau)D(\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau.$$

Якщо при деякому $t_1 \in [0; T]$ $\det N(0, t_1) \neq 0$, то з (6) однозначно визначається вектор c , а також і x_0 , що дає можливість за відомим виходом $z(t)$ на відрізку $[0; t_1]$ визначити початковий стан системи (1):

$$x_0 = X_{n-s}(0)(N(0, t_1))^{-1} \int_0^{t_1} X_{n-s}^*(\tau)D^*(\tau)z(\tau)d\tau - X_{n-s}(0)(N(0, t_1))^{-1} \gamma(0, t_1).$$

А це означає, що система (1), (2) цілком спостережувана.

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема. Якщо виконуються умови 1)-3) і

$$\det \left[\int_0^{t_1} X_{n-s}^*(\tau)D^*(\tau)D(\tau)X_{n-s}(\tau)d\tau \right] \neq 0$$

при деякому $t_1 \in [0; T]$, де $X_{n-s}(t)$ - фундаментальна матриця однорідної системи (3), то система (1), (2) – цілком спостережувана на $[0; t_1]$.

Література

1. Campbell S. L. Singular systems of differential equations 2 / S. L. Campbell. – S. Francisko, London, Melbourne: Pitman Adv. Publishing Co., 1982. – 234 p.

2. Абгарян К. А. Управляемость и наблюдаемость линейных систем / К. А. Абгарян, М. М. Хрусталева, Э. Б. Жирнова. – М.: Московский авиационный институт, 1977. – 78 с.
3. Габасов Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Наука, 1971. – 508 с.
4. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – Москва: Мир, 1977. – 650 с.
5. Чистяков В. Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. – Новосибирск: Наука, 2003. – 320 с.
6. Самойленко А. М. О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме / А. М. Самойленко, В. П. Яковец // Докл. АН Украины. – 1993. – № 4. – С.10-15.
7. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.

УДК 514.14

КООРДИНАТНО-ГРАФІЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ НЕВИРОДЖЕНИХ ЛІНІЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ПРОЕКЦІЇ

Циганок Л.В., Юрова Ю.В.

1. Зображення фігур на площині, обмежених поверхнями першого та другого порядку, пов'язане з дослідженням та побудовою образів перерізів поверхонь. Якщо фігура \bar{F} – переріз поверхні другого порядку площиною $\bar{\sigma}$, а F_1 – проекція \bar{F} на площину зображень σ у напрямі ненульового вектора \vec{p} , не паралельного площинам $\bar{\sigma}$ і σ , то будь-яку фігуру F , подібну на площині σ паралельній проекції F_1 , називають зображенням фігури \bar{F} на площині σ . Послідовне виконання такого паралельного проектування і перетворення подібності є взаємно однозначним відображенням площини $\bar{\sigma}$ на площину σ , яке три точки прямої площини $\bar{\sigma}$ переводить у три точки прямої площини σ . Згідно з означенням ([1]) таке відображення є афінним відображенням площини $\bar{\sigma}$ на площину σ . За відомою теоремою в ([1]), якщо $\bar{R} = (\bar{O}, \bar{E}_1, \bar{E}_2)$ і $R = (O, E_1, E_2)$ – довільні реperi відповідно на площинах $\bar{\sigma}$ і σ , то існує одне і тільки одне афінне відображення, яке репер \bar{R} переводить у репер R і точку \bar{M} з координатами (x, y) у репері \bar{R} переводить у точку M з тими самими координатами (x, y) в репері R .

З даної теореми випливає: афінне відображення фігур (в тому числі паралельне проектування) зберігає аналітичне задання фігур у відповідних реперах.

Оскільки перерізами поверхонь другого порядку можуть бути коло, еліпс, гіпербола або парабола, проводились дослідження образів цих ліній у паралельному проектуванні. Наприклад, існують різні методи дослідження образів кола, еліпса в паралельних проекціях. Ці дослідження легко провести, використовуючи той факт, що існують афінні системи, в яких невіржені лінії другого порядку одного типу мають однакові рівняння.

Наприклад, нехай еліпс γ у прямокутній системі O_{ij} заданий рівнянням

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0. \quad (1)$$

Якщо перейти до нової афінної системи з репером $R=(O, E_1, E_2)$, де $E_1(p_1, p_2)$, $E_2(q_1, q_2) \in \gamma$, вектори $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ і $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ визначають спряжені напрями відносно еліпса γ , тобто координати (p_1, p_2) , (q_1, q_2) точок E_1, E_2 задовольняють систему

$$\begin{cases} b^2 p_1^2 + a^2 p_2^2 - a^2 b^2 = 0; \\ b^2 q_1^2 + a^2 q_2^2 - a^2 b^2 = 0; \\ b^2 p_1 q_1 + a^2 q_2 p_2 = 0, \end{cases}$$

то за формулами перетворення афінної системи

$$\begin{aligned} x &= x' p_1 + y' q_1, \\ y &= x' p_2 + y' q_2 \end{aligned} \quad (2)$$

в $O_{\vec{e}_1 \vec{e}_2}$ дістанемо рівняння еліпса у вигляді $x'^2 + y'^2 = 1$ (рис.1),

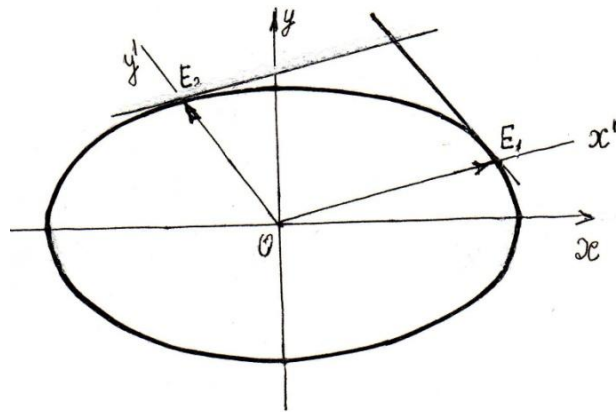


Рис. 1

або замінивши x' на x і y' на y дістанемо рівняння еліпса

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (3)$$

Аналогічно, рівняння кола в $O_{\vec{i} \vec{j}}$ вигляду $x^2 + y^2 = R^2$ зводиться в репері (O, E_1, E_2) до рівняння виду (3), якщо координати точок $E_1(p_1, p_2)$, $E_2(q_1, q_2)$ задовольняють систему

$$\begin{cases} p_1^2 + p_2^2 - R^2 = 0; \\ q_1^2 + q_2^2 - R^2 = 0; \\ p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0, \end{cases}$$

тобто точки E_1, E_2 належать колу і вектори $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}$ взаємно перпендикулярні.

Оскільки внаслідок паралельного проектування спряжені напрями відносно лінії другого порядку проектується у спряжені напрями і репер \bar{R} проектується у репер R із збереженням рівняння лінії, коло може спроектуватися у коло, або в еліпс, а еліпс – у еліпс, або у коло.

Якщо розглянути рівняння гіперболи

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0 \quad (4)$$

у прямокутній системі $O_{\vec{i} \vec{j}}$, то (як і для еліпса і кола) можна довести, що в репері (O, E_1, E_2) , де

координати точок $E_1(p_1, p_2)$, $E_2(q_1, q_2)$ такі, що вектори $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ і $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ спряжені відносно гіперболи γ , точка E_1 належить гіперболі, а сума векторів $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ – асимптотичний напрям відносно гіперболи, рівняння (4) зводиться до рівняння виду

$$x^2 - y^2 = 1. \quad (5)$$

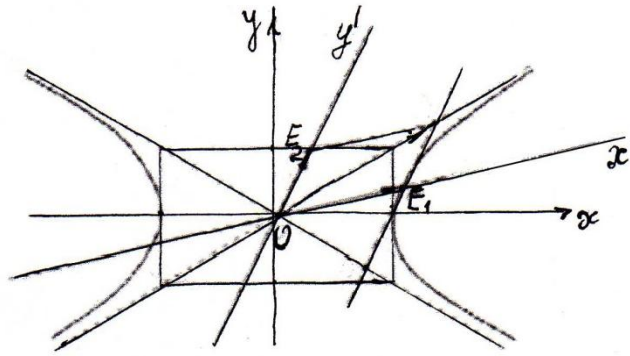


Рис. 2

Отже, осі афінної системи координат – спряжені діаметри гіперболи, точка $E(1;1)$ – будь-яка з вершин паралелограма, сторони якого паралельні вибраним діаметрам, крім того дві з них дотикаються до гіперболи, а діагоналі належать асимптотам гіперболи (рис. 2).

Нехай в системі O_{ij} задана канонічним рівнянням парабола

$$y^2 = 2px. \quad (6)$$

За формулами перетворення

$$\begin{aligned} x &= p_1 x' + q_1 y' + x_0, \\ y &= p_2 x' + q_2 y' + y_0, \end{aligned}$$

де $E_1(p_1, p_2)$, $E_2(q_1, q_2)$, $O'(x_0, y_0)$ вершини репера $R=(O', E_1, E_2)$, O' належить параболі, вектор $\overrightarrow{O'E_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{O'E_2}(y_0, p) = \vec{q}$ – напрямний вектор дотичної у точці O' , рівняння (6) зводиться до вигляду

$$y'^2 = 2px'.$$

Отже, нова вісь $O'x'$ паралельна до осі параболі, тобто є діаметром, а вісь $O'y'$ дотикається до параболі (рис. 3).

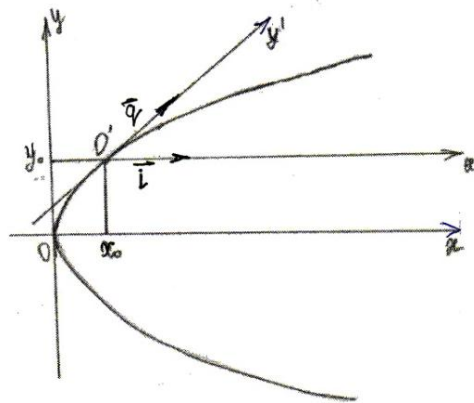


Рис. 3

2. Для розробки графічного методу зображення не вироджених ліній другого порядку в афінній системі розглянемо їх проєктивні координати на розширеній евклідовій площині, поповненій невластими елементами.

Задамо в афінному репері $R=(O, E_1, E_2)$ овальні (невироджені) лінії еліпс і коло рівнянням (3), гіперболу – рівняння (5), параболу – рівнянням (6).

Задамо проєктивні реperi $R_1=(A_\infty, B_\infty, O, E)$ відповідні афінним системам з репером (O, E_1, E_2) , де A_∞ – невласна точка осі абсцис, B_∞ – невласна точка осі ординат афінних систем, E – одинична точка проєктивного репера така, що $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2}$. Використовуючи зв'язок

Дістаємо алгоритм побудови точок параболи:

- 1) проводимо довільну пряму m пучка O_1 ;
 - 2) позначаємо точку M перетину прямих m та l ($M = m \times l$);
 - 3) знаходимо точку M' перетину прямих MX_∞ та l' ($M' = MX_\infty \times l'$);
 - 4) проводимо пряму $m' = O_{2\infty}M'$;
 - 5) дістаємо точку M^* параболи: в перетині відповідних прямих пучків $M^* = m \times m'$.
- Аналогічно будується точка N^* і так далі (рис.4).

Оскільки діаметру s належить геометричне місце середин хорд, паралельних дотичній a , можна будувати додаткові точки параболи косометричні відносно прямої s . Якщо провести, наприклад хорду BB_1 параболи перпендикулярно до діаметра s , то пряма, що проходить через середину B_0 цієї хорди паралельно до s , є віссю параболи і перетинає її у вершині O (рис. 4).

4. Нехай проекція γ однієї вітки гіперболи задана точками O_1, B , дотичною a у точці O_1 та асимптотою s' . Згідно проєктивних властивостей гіперболи на розширеній евклідовій площині асимптота s' є дотичною до γ у їх спільній невластній точці $O_{2\infty}$.

Оскільки дано три точки $O_1, O_{2\infty}, B$ гіперболи і дві дотичні a і s' в $O_1, O_{2\infty}$ відповідно, графічну побудову точок гіперболи можна здійснювати аналогічно побудові параболи.

Зберігаючи попередні позначення, розглянемо допоміжні прямі l , що збігається з $b' = O_{2\infty}B$ і l' , яка проходить через точку B паралельно дотичній a . Тоді задаючи проєктивне відображення f пучка O_1 на прямі пучка $O_{2\infty}$ трьома парами відповідних прямих a і $a' = O_{2\infty}O_1$, $b = O_1B$ і b' , $c = O_1O_{2\infty}$ і c' , та перспективне відображення прямої l на пряму l' , що точки $A = a \times l, B = b \times l, C_\infty = c \times l$ переводить у точки $A' = a' \times l', B' = b' \times l', C' = c' \times l'$ (де C_∞ збігається з $O_{2\infty}$) з центром перспективи $X = AA' \times C_\infty C'$ ($C_\infty C'$ збігається з s') (рис. 5).

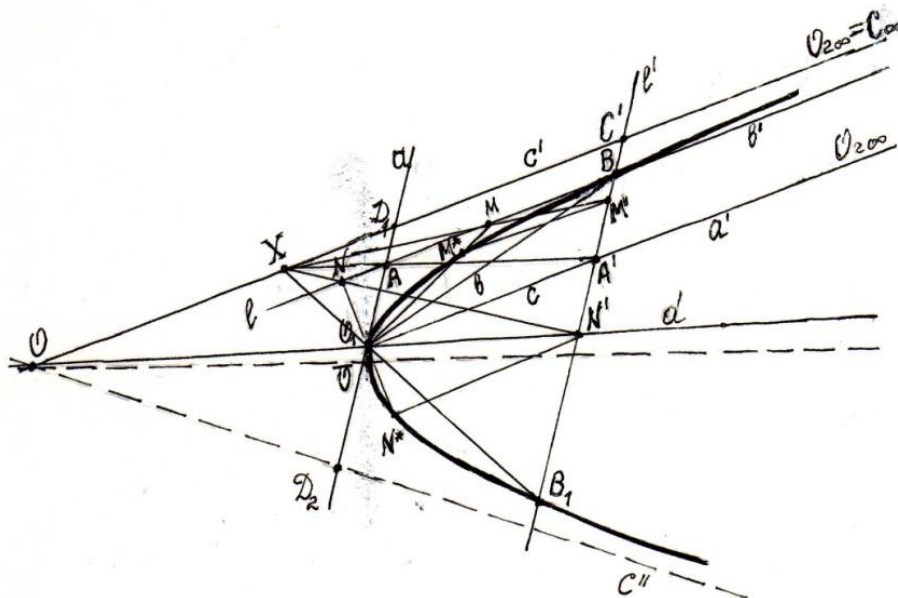


Рис. 5

Отже, маємо алгоритм побудови точок гіперболи:

- 1) через точку O_1 проводимо пряму m до перетину з l у точці M ;
- 2) будуємо точку $M' = XM \times l'$;

3) через M' проводимо пряму паралельну асимптоті c' до перетину з прямою O_1M у точці M^* ($M^* = M'O_{2\infty} \times O_1M$);

де M^* – точка гіперболи.

Провівши пряму XO_1 до перетину з l' , дістаємо точку B_1 гіперболи. Середина N' відрізка BB_1 належить діаметру d гіперболи γ , спряженому напрямку хорди BB_1 .

Отже, пряма O_1N' – діаметр d гіперболи γ , що ділить навпіл хорди, паралельні дотичній a , $O = c' \times d$ – центр гіперболи. А так як відрізок D_1D_2 дотичної a між асимптотами ($D_1 \in c'$) ділиться навпіл точкою дотику O_1 , пряма OD_2 – друга асимптота c'' гіперболи γ . Бісектриса $O\bar{O}$ кута між асимптотами c' і c'' є віссю симетрії гіперболи, \bar{O} – вершина гіперболи (рис. 5).

5. Відомі різні графічні способи побудови еліпса, але і розглянутий вище алгоритм також можна застосувати до побудови еліпса, якщо він заданий, наприклад, спряженими діаметрами O_1O_2 і BB_1 , що перетинаються у точці A' (O_1, O_2, B, B_1 належать еліпсу γ). Тоді прямі, що проходять через точки B і B_1 паралельно O_1O_2 є дотичними до еліпса у цих точках, а прямі, що проходять через точки O_1 і O_2 паралельно BB_1 , є дотичними до еліпса у точках O_1 і O_2 . Дістаємо паралелограм A_1ACC_1 , описаний навколо еліпса (рис. 6).

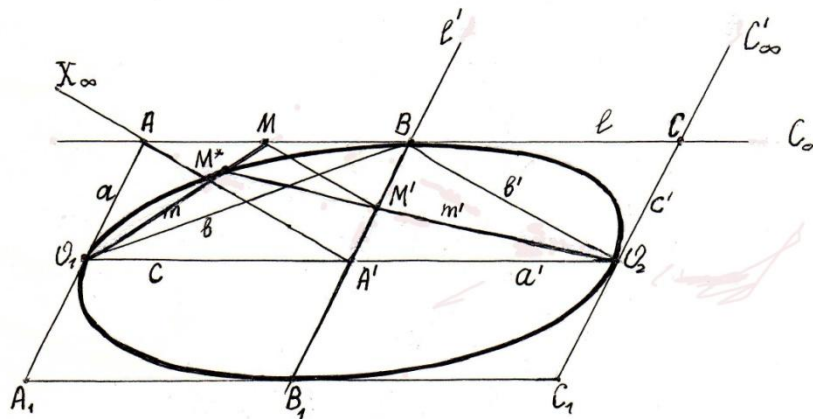


Рис. 6

Якщо задати проєктивне відображення f прямих пучка O_1 на прямі пучка O_2 так, щоб $f(a)=a', f(b)=b', f(c)=c'$, де прямі $a=O_1A, b=O_1B, c=O_1O_2, a'=O_2O_1, b'=O_2B, c'=O_2C$ (рис.6), і позначити відображення $\varphi: l \rightarrow l'$, де l – дотична AB до $\gamma, l'=A'B, \varphi(A)=A', \varphi(B)=B', \varphi(C_\infty)=C'_\infty, A = a \times l, B = b \times l = b' \times l', C_\infty = c \times l, A' = a' \times l', C'_\infty = c' \times l'$. Центром перспективи $\varphi \in$ невласна точка $X_\infty = AA' \times C_\infty C'_\infty$.

Тоді, згідно з попереднім обґрунтуванням побудови параболи, сформулюємо план побудови еліпса γ :

- 1) проводимо пряму m пучка O_1 ;
- 2) позначаємо точку M перетину прямих m та l ;
- 3) будуємо точку M' перетину прямих MX_∞ та l' ($M' = MX_\infty \times l'$);
- 4) проводимо пряму $m'=O_2M'$;
- 5) знаходимо точку $M^* = m \times m'$, яка належить еліпсу.

Аналогічно будуються інші точки еліпса. Рисунок можна доповнювати косометричними точками до побудованих у напрямках спряжених діаметрів (рис. 6).

Зазначимо, що координатний метод застосовується при заданні проєкцій точок та прямих, одержаних в перерізах поверхонь другого порядку, необхідних для графічної побудови цих перерізів на площині зображень.

Література

1. Атанасян Л. С. Геометрия : в 2 ч. Ч. II. / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев – М.: Просвещение, 1986. – 352 с.
2. Циганок Л. В. Проективна геометрія: навчальний посібник / Л. В. Циганок – Ніжин : Видавництво НДУ ім. М. Гоголя, 2010. – 146 с.

УДК 517.9

ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

Чорненька О.В., Майдан І.М.

Розглядається задача про побудову загального асимптотичного розв'язку лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = x^g A(x, \varepsilon) z \quad (1)$$

з іррегулярною особливою точкою $x = \infty$, де $z(x, \varepsilon)$ – шуканий n -вимірний вектор, ε – малий дійсний параметр, $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, x – незалежна змінна, $|x| \geq a$, $h > 0$ і $g \geq 0$; $A(x, \varepsilon)$ – квадратна матриця n -го порядку

$$A(x, \varepsilon) = A_{00} + \varepsilon A_{01} + x^{-1} A_{10}. \quad (2)$$

Дослідження таких систем за умови, що матриця $A(x, \varepsilon)$ допускає асимптотичне розвинення вигляду $A(x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x^{-s} A_{sk}$, наведено в роботах [1–5]. Відповідно в [1]

здійснено асимптотичне розщеплення системи (1) на підсистеми меншої розмірності, у роботі [2] описано побудову асимптотичних розв'язків у випадку простого спектра граничного оператора, дослідження [3 – 5] присвячені ґрунтовному вивченню питання побудови загального асимптотичного розв'язку системи (1) у випадку кратного спектра матриці A_{00} . Проте при розв'язанні деяких практичних задач доводиться мати справу з системами вигляду (1), у яких матриця $A(x, \varepsilon)$ задається скінченним числом доданків. У цих випадках узагальнену теорію досить складно застосувати. Тому дослідження особливостей побудови розв'язків лінійних систем вигляду (1) є досить актуальною та важливою задачею.

У даній роботі наведено основні результати стосовно побудови загального асимптотичного розв'язку системи (1), (2) у випадку, коли гранична матриця A_{00} має одне власне значення λ_0 кратності n , якому відповідає один елементарний дільник такої самої кратності; φ – відповідний власний вектор матриці A_{00} , ψ – елемент нуль-простору матриці $(A_{00} - \lambda_0 E)^*$, підібрані таким чином, щоб виконувалась умова

$$(H^{i-1} \varphi, \psi) = \delta_{i,n}, \quad (3)$$

де H – напівовернена матриця до матриці $(A_{00} - \lambda_0 E)$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \text{ символ } (,) \text{ позначено скалярний добуток у } n\text{-вимірному просторі.}$$

Розв'язки системи (1) будемо шукати у вигляді

$$z(x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{x_0}^x s^g (\lambda_0 + \lambda(s, \varepsilon)) ds\right), \quad (4)$$

де $u(x, \varepsilon)$ – n -вимірний вектор, $\lambda(x, \varepsilon)$ – скалярна функція, які необхідно визначити.

Підставивши вектор (4) в систему (1), дістанемо

$$\varepsilon^h x^{-g} \frac{du(x, \varepsilon)}{dx} + (\lambda_0 + \lambda(x, \varepsilon))u(x, \varepsilon) = A(x, \varepsilon)u(x, \varepsilon),$$

тобто

$$(A_{00} - \lambda_0 E)u(x, \varepsilon) = \left(\lambda(x, \varepsilon)E + \varepsilon^h x^{-g} \frac{d}{dx} - \varepsilon A_{01} - x^{-1} A_{10}\right)u(x, \varepsilon), \quad (5)$$

де E – одинична матриця.

Отже, задача визначення функції $\lambda(x, \varepsilon)$ і вектора $u(x, \varepsilon)$ звалась до задачі про збурення власного значення λ_0 та відповідного власного вектора φ оператора A_{00} під дією

$$\text{збурення } \left(\varepsilon A_{01} + x^{-1} A_{10} - \varepsilon^h x^{-g} \frac{d}{dx}\right).$$

За виконання необхідної та достатньої умови розв'язності рівняння (5)

$$\left(\left(\lambda E - \varepsilon A_{01} - x^{-1} A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} \frac{d}{dx}\right)u, \psi\right) = 0 \quad (6)$$

матимемо

$$u = \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} - \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx}\right)u + c\varphi,$$

або

$$\left(E - \lambda H + \varepsilon H A_{01} + x^{-1} H A_{10} - \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx}\right)u = c\varphi,$$

де c – довільний множник, з точністю до якого визначається вектор $u(x, \varepsilon)$.

Покладемо $c = 1$ і розглянемо рівняння

$$\left(E - \lambda H + \varepsilon H A_{01} + x^{-1} H A_{10} - \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx}\right)u = \varphi. \quad (7)$$

Його розв'язок можна подати у вигляді формального розвинення

$$u = \varphi + \sum_{k \geq 1} \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx}\right)^k \varphi. \quad (8)$$

Дійсно, підставивши (8) в (7), отримаємо

$$\begin{aligned}
& \left(E - \lambda H + \varepsilon H A_{01} + x^{-1} H A_{10} - \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right) \left(\varphi + \sum_{k \geq 1} \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right)^k \varphi \right) = \\
& = \varphi + \sum_{k \geq 1} \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right)^k \varphi - \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right) \varphi - \\
& \quad - \sum_{k \geq 1} \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right)^{k+1} \varphi = \\
& = \varphi + \sum_{k \geq 1} \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right)^k \varphi - \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right) \varphi - \\
& \quad - \sum_{k \geq 2} \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right)^k \varphi = \\
& = \varphi + \sum_{k \geq 1} \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right)^k \varphi - \\
& \quad - \sum_{k \geq 1} \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right)^k \varphi = \varphi.
\end{aligned}$$

Підставивши (8) у (6), отримаємо рівняння розгалуження

$$L(\lambda, x, \varepsilon) \equiv \left(\left(\lambda E - \varepsilon A_{01} - x^{-1} A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} \frac{d}{dx} \right) \sum_{k \geq 0} \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right)^k \varphi, \psi \right) = 0 \quad (9)$$

яке має задовольняти шукана функція $\lambda(x, \varepsilon)$.

Подамо операторний вираз (9) у вигляді формального розвинення

$$L(\lambda, x, \varepsilon) = \sum_{k+r+s \geq 0} x^{-r} \varepsilon^s L_{krs} [\lambda^k],$$

де k, r, s – відповідно сумарні степені функції $\lambda(x, \varepsilon)$, змінної x^{-1} та параметра ε .

Запишемо рівняння (9) у вигляді

$$(\tilde{L} \varphi, \psi) = 0,$$

де

$$\tilde{L} = \left(\lambda E - \varepsilon A_{01} - x^{-1} A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} \frac{d}{dx} \right) \sum_{q \geq 0} \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right)^q.$$

Тоді

$$H \tilde{L} = \sum_{q \geq 1} \left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H \frac{d}{dx} \right)^q. \quad (10)$$

Розглянемо вирази

$$\left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H D \right)^q,$$

де D – оператор диференціювання по змінній x , $D = \frac{d}{dx}$. При $q = 2$ маємо

$$\left(\lambda H - \varepsilon H A_{01} - x^{-1} H A_{10} + \varepsilon^h x^{-g} H D \right)^2 = \lambda^2 H H - \lambda (\varepsilon (H H A_{01} + H A_{01} H) + x^{-1} (H H A_{10} + H A_{10} H)) +$$

$$+ (\varepsilon^2 HA_{01} HA_{01} + \varepsilon x^{-1} (HA_{01} HA_{10} + HA_{10} HA_{01}) + x^{-2} HA_{10} HA_{10} + \varepsilon^h x^{-(g+2)} HHA_{01}) + \varepsilon^h x^{-g} D\lambda HH + \varepsilon^h (\lambda H - \varepsilon HA_{01} - x^{-1} HA_{10} + \varepsilon^h x^{-g} HD) x^{-g} HD.$$

Суми всіх можливих добутоків i множників H , j множників HA_{10} та m множників HA_{01} , позначимо $P_{i,j,m}(H, HA_{10}, HA_{01})$. Крім того, при від'ємних i, j, m будемо покладати $P_{i,j}^{r,s}(H, HA) = 0$. Ці вирази задовольняють співвідношення

$$P_{i,r,s}(H, HA_{10}, HA_{01}) = HP_{i-1,r,s}(H, HA_{10}, HA_{01}) + HA_{10} P_{i,r-1,s}(H, HA_{10}, HA_{01}) + HA_{01} P_{i,r,s-1}(H, HA_{10}, HA_{01}).$$

Позначимо також

$$(s - (g + 1))H \cdot HA_{10} = R_{0+1,s-g-1,0}(H, HA_{10}, HA_{01}).$$

Тоді

$$\begin{aligned} (\lambda H - \varepsilon HA_{01} - x^{-1} HA_{10} + \varepsilon^h x^{-g} HD)^2 &= \lambda^2 HH - \lambda(\varepsilon P_{101}(H, HA_{10}, HA_{01}) + x^{-1} P_{110}(H, HA_{10}, HA_{01})) + \\ &+ (\varepsilon^2 P_{002}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \varepsilon x^{-1} P_{011}(H, HA_{01}, HA_{10}) + x^{-2} P_{020}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \\ &+ \varepsilon^h x^{-(g+2)} R_{0+1,g+2-g-1,0}(H, HA_{10}, HA_{01})) + \varepsilon^h x^{-g} D\lambda HH + \\ &+ \varepsilon^h (\lambda H - \varepsilon HA_{01} - x^{-1} HA_{10} + \varepsilon^h x^{-g} HD) x^{-g} HD, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda H - \varepsilon HA_{01} - x^{-1} HA_{10} + \varepsilon^h x^{-g} HD)^3 &= \lambda^3 H^3 - \lambda^2(\varepsilon P_{201}(H, HA_{10}, HA_{01}) + x^{-1} P_{210}(H, HA_{10}, HA_{01})) + \\ &+ \lambda(\varepsilon^2 P_{102}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \varepsilon x^{-1} P_{111}(H, HA_{01}, HA_{10}) + x^{-2} P_{120}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \\ &+ \varepsilon^h x^{-(g+2)} (HR_{0+1,g+2-g-1,0}(H, HA_{10}, HA_{01}) + HP_{011}(H, HA_{10}, HA_{01}))) - \\ &- [\varepsilon^3 P_{003}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \varepsilon^2 x^{-1} P_{012}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \varepsilon x^{-2} P_{021}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \\ &+ x^{-3} P_{030}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \\ &+ \varepsilon^{h+1} x^{-(g+2)} (HA_{01} R_{0+1,g+2-g-1,0}(H, HA_{10}, HA_{01}) + HP_{011}(H, HA_{10}, HA_{01})) + \\ &+ \varepsilon^h x^{-(g+3)} (HA_{10} R_{0+1,g+2-g-1,0}(H, HA_{10}, HA_{01}) + 2HP_{020}(H, HA_{10}, HA_{01})) + \\ &+ \varepsilon^{2h} x^{-(2g+3)} (g + 2)(HR_{0+1,g+2-g-1,0}(H, HA_{10}, HA_{01})) + \\ &+ \varepsilon^h x^{-g} (D\lambda^2 + \lambda D\lambda) HHH - \\ &- \varepsilon^h x^{-g} D\lambda (\varepsilon P_{210}(H, HA_{10}, HA_{01}) + x^{-1} P_{201}(H, HA_{10}, HA_{01})) + \\ &+ \varepsilon^{2h} x^{-2g} (D - gx^{-1}) D\lambda HHH + \varepsilon^h (\lambda H - \varepsilon HA_{01} - x^{-1} HA_{10} + \varepsilon^h x^{-g} HD)^2 x^{-g} HD. \end{aligned}$$

Використовуючи ідеї [6], символом $D^i[\lambda^k]$ позначмо суму всіх можливих добутоків i операторів $D_s = \left(\frac{d}{dx} - s gx^{-1} \right)$, що діють на k функцій λ , останнім записом в усіх доданках

має бути λ . У кожному доданку цієї суми індекс s пробігає значення від $i-1$ до нуля починаючи зліва, наприклад

$$\begin{aligned} D^1[\lambda] &= D\lambda = D_0\lambda, \\ D^2[\lambda] &= (D - gx^{-1})D\lambda = D_1D^1[\lambda], \\ D[\lambda^2] &= D\lambda^2 + \lambda D\lambda = D_0\lambda^2 + \lambda D^1[\lambda], \\ D^2[\lambda^2] &= (D - gx^{-1})D\lambda^2 + (D - gx^{-1})\lambda D\lambda + \lambda(D - gx^{-1})D\lambda = D_1D^1[\lambda^2] + \lambda D^2[\lambda], \\ &\dots \\ D^i[\lambda^k] &= D_{i-1}D^{i-1}[\lambda^k] + \lambda D^i[\lambda^{k-1}]. \end{aligned}$$

Вираз $R_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)g-p_1, s-(i+p_1)h}(H, HA_{10}, HA_{01})$ – це сума добутків $i+k+p_1$ матриць H , $r-(i+p_1)h$ множників HA_{10} та $r-(i+p_1)g-p_1$ множників HA_{01} , $\left(p_1 = \min \left\{ \left\lceil \frac{r-ih}{h} \right\rceil, \left\lceil \frac{s-ig}{g+1} \right\rceil \right\} \right)$, що обчислюється за рекурентними формулами:

при $p_1 = 1$

$$\begin{aligned} R_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)g-p_1, s-(i+p_1)h}(H, HA_{10}, HA_{01}) &= (1 - \delta_{i,0})HR_{(i+k-1)+p_1, r-(i+p_1)g-p_1, s-(i+p_1)h}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \\ &+ HA_{10}R_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)g-p_1, s-(i+p_1)h-1}(H, HA_{10}, HA_{01}) + HA_{01}R_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)g-p_1-1, s-(i+p_1)h}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \\ &(r - (g+1))HP_{(i+k)+p_1-1, r-(i+p_1)g-p_1, s-(i+p_1)h}(H, HA_{10}, HA_{01}), \end{aligned}$$

при $p_1 \geq 2$

$$\begin{aligned} R_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)g-p_1, s-(i+p_1)h}(H, HA_{10}, HA_{01}) &= (1 - \delta_{i,0})HR_{(i+k-1)+p_1, r-(i+p_1)g-p_1, s-(i+p_1)h}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \\ &+ HA_{10}R_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)g-p_1, s-(i+p_1)h-1}(H, HA_{10}, HA_{01}) + HA_{01}R_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)g-p_1-1, s-(i+p_1)h}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \\ &(r - (g+1))HR_{(i+k)+p_1-1, r-(i+p_1)g-p_1, s-(i+p_1)h}(H, HA_{10}, HA_{01}). \end{aligned}$$

Крім того, $R_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)g-p_1, s-(i+p_1)h}(H, HA_{10}, HA_{01}) = 0$,

якщо $r - (i+p_1)g - p_1 = 0$, $p_1 = 0$.

В загальному випадку має місце формула

$$\begin{aligned} &(\lambda H - \varepsilon HA_{01} - x^{-1} HA_{10} + \varepsilon^h x^{-g} HD)^q = \\ &= \sum_{r+s \geq q} (-1)^q x^{-r} \varepsilon^s \left(\delta_{p_1 0} P_{0,r,s}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \sum_{p_1=1}^{q-1} R_{0+p_1, r-p_1h, s-p_1g}(H, HA_{10}, HA_{01}) \right) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=1}^{q-i} \sum_{r+s \geq q-(i+j)} (-1)^{q+i+j} x^{-r-ig} \varepsilon^{s+ih} D^i[\lambda^j] \left(\delta_{p_1 0} P_{i+j,r,s}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p_1=1}^{q-(i+j+1)} R_{i+j+p_1, r-p_1h, s-p_1g}(H, HA_{10}, HA_{01}) \right) + \varepsilon^h (\lambda H - \varepsilon HA_{01} - x^{-1} HA_{10} + \varepsilon^h x^{-g} HD)^{q-1} x^{-g} HD \quad (11) \end{aligned}$$

Підставивши (11) у (10), дістанемо

$$\begin{aligned} &H\tilde{L} \\ &= \sum_{q \geq 1} \sum_{r+s \geq q} (-1)^q x^{-r} \varepsilon^s \left(\delta_{p_1 0} P_{0,r,s}(H, HA_{10}, HA_{01}) + \sum_{p_1=1}^{q-1} R_{0+p_1, r-p_1h, s-p_1g}(H, HA_{10}, HA_{01}) \right) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{q \geq 1} \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=1}^{q-i} \sum_{r+s \geq q-(i+j)} (-1)^{q+i+j} x^{-r-ig} \varepsilon^{s+ih} D^i [\lambda^j] \left(\delta_{p_1 0} P_{i+j, r, s} (H, HA_{10}, HA_{01}) + \right. \\ \left. + \sum_{p_1=1}^{q-(i+j+1)} R_{i+j+p_1, r-p_1 h, s-p_1 g} (H, HA_{10}, HA_{01}) \right) + \varepsilon^h \sum_{q \geq 1} (\lambda H - \varepsilon HA_{01} - x^{-1} HA_{10} + \varepsilon^h x^{-g} HD)^{q-1} x^{-g} HD.$$

Згрупуємо коефіцієнти при однакових степенях x^{-1} , ε , змінивши порядок підсумовування у кожному з доданків та перепозначивши індекси, отримаємо

$$H\tilde{L} = \sum_{r+s \geq 1} \sum_{q \geq r+s} (-1)^q x^{-r} \varepsilon^s \left(\delta_{p_1 0} P_{0, r, s} (H, HA_{10}, HA_{01}) + \sum_{p_1=1}^{q-1} R_{0+p_1, r-p_1 h, s-p_1 g} (H, HA_{10}, HA_{01}) \right) + \\ + \sum_{k \geq 0} \sum_{r+s \geq 0} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r+s-1}{h+g} \rfloor} \sum_{q=0}^{r+s-i(h+g)} (-1)^q x^{-r} \varepsilon^s D^i [\lambda^k] \left(\delta_{p_1 0} P_{i+k, r-ig, s-ih} (H, HA_{10}, HA_{01}) + \right. \\ \left. + \sum_{p_1=1}^{q-(i+k+1)} R_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)h, s-ig-p_1(g+1)} (H, HA_{10}, HA_{01}) \right) + \\ + \varepsilon^h \sum_{q \geq 1} (\lambda H - \varepsilon HA_{01} - x^{-1} HA_{10} + \varepsilon^h x^{-g} HD)^{q-1} x^{-g} HD.$$

Враховуючи (3) та співвідношення

$$P_{i+k, r-ig, s-ih} (H, HA_{10}, HA_{01}) = H\tilde{P}_{i+k, r-ig, s-ih} (H, HA_{10}, HA_{01}),$$

$$R_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)h, s-ig-p_1(g+1)} (H, HA_{10}, HA_{01}) = H\tilde{R}_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)h, s-ig-p_1(g+1)} (H, HA_{10}, HA_{01}),$$

рівняння розгалуження (2.9) запишемо у вигляді

$$\lambda^n + \sum_{r+s=1}^{\infty} L_{0rs} \varepsilon^s x^{-r} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r+s=1}^{\infty} L_{krs} [\lambda^k] \varepsilon^s x^{-r} = 0, \quad (12)$$

де операторні функції $L_{krs} [\lambda^k]$ визначаються виразами

$$L_{0rs} = \sum_{q=1}^{r+s} (-1)^q \left(\left(\delta_{p_1 0} \tilde{P}_{0, r, s} (H, HA_{10}, HA_{01}) + \sum_{p_1=1}^{q-1} \tilde{R}_{0+p_1, r-p_1 h, s-p_1 g} (H, HA_{10}, HA_{01}) \right) \varphi, \psi \right), \\ r+s \geq 1;$$

$$L_{krs} [\lambda^k] = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r+s-1}{g+h} \rfloor} D^i [\lambda^k] \left[\sum_{q=0}^{r+s-i(h+g)} (-1)^q \left(\delta_{p_1 0} \tilde{P}_{i+k, r-ig, s-ih} (H, HA_{10}, HA_{01}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{p_1=1}^{q-(i+k+1)} \tilde{R}_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)h, s-ig-p_1(g+1)} (H, HA_{10}, HA_{01}) \right) \varphi, \psi \right], \quad r+s \geq 1, \quad k \geq 1. \quad (13)$$

Цим самим доведено таку теорему.

Теорема. Для того, щоб вектор (4) був формальним розв'язком системи (1), необхідно і достатньо, щоб функція $\lambda(x, \varepsilon)$ формально задовольняла рівняння (12), де операторні функції $L_{krs} [\lambda^k]$ визначаються виразами (13).

Підставивши вираз (11) у розвинення (8), отримаємо запис для вектор-функції $u(x, \varepsilon)$

$$u(x, \varepsilon) = \varphi + \sum_{r+s=1}^{\infty} \tilde{L}_{0rs} \varphi x^{-r} \varepsilon^s + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r+s=0}^{\infty} \tilde{L}_{krs} [\lambda^k] \varphi x^{-r} \varepsilon^s,$$

де

$$\tilde{L}_{0rs} = \sum_{q=1}^{r+s} (-1)^q \left(\left(\delta_{p_1 0} P_{0,r,s} (H, HA_{10}, HA_{01}) + \sum_{p_1=1}^{q-1} R_{0+p_1, r-p_1, h, s-p_1, g} (H, HA_{10}, HA_{01}) \right) \varphi, \psi \right),$$

$$r + s \geq 1;$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{krs} [\lambda^k] = & \sum_{i=0}^{\left[\frac{r+s-1}{g+h} \right]} D^i [\lambda^k] \left[\sum_{q=0}^{r+s-i(h+g)} (-1)^q \left(\delta_{p_1 0} P_{i+k, r-ig, s-ih} (H, HA_{10}, HA_{01}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{p_1=1}^{q-(i+k+1)} R_{(i+k)+p_1, r-(i+p_1)h, s-ig-p_1(g+1)} (H, HA_{10}, HA_{01}) \right) \varphi, \psi \right], \quad r + s \geq 1, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Вигляд розвинень розв'язків $\lambda(x, \varepsilon)$ рівняння (12) у подвійний степеневий ряд можна визначити застосовуючи просторовий аналог діаграм Ньютона [7], основна ідея якого полягає у наступному:

1. Кожному відмінному від нуля коефіцієнту $L_{krs} [\lambda^k]$ ставиться у відповідність точка в прямокутній системі координат $Okrs$ простору R^3 .

2. Знаходимо проєкції цих точок на площину $Ok r$. Для отриманої множини побудуємо діаграму Ньютона D_1 (рис. 1).

3. Для точок діаграми знаходимо прообрази, проєкуємо їх на площину $Ok s$ та з'єднуємо лананою. Отримаємо діаграму D_2 , яка в загальному випадку не має стандартного вигляду (рис. 2)

4. Щоб звести діаграму D_2 до стандартного вигляду, роблять підстановку $\frac{1}{x} = \mu \varepsilon^m$, з якої, як

бачимо, й з'являється відношення незалежної змінної та параметра. Застосувавши цю заміну, отримаємо діаграму \bar{D}_2 (рис. 3).

5. Нахили відповідних ланок діаграм D_1 та \bar{D}_2 з від'ємним напрямом осі Ok – це показники, починаючи з яких ведеться розвинення для функції $\lambda(x, \varepsilon)$. Тоді

$$\lambda(x, \varepsilon) = \lambda_{00} \mu^{\frac{p_1}{q_1}} \varepsilon^{\frac{p_2}{q_2}} + \sum_{i+j=1}^{\infty} \mu^{\frac{p_1+i}{q_1}} \varepsilon^{\frac{p_2+j}{q_2}} \lambda_{ij}.$$

Цей метод дозволяє в будь-якому випадку, пов'язаному з поведінкою збурювальних матриць A_{01} , A_{10} , встановлювати дробові показники параметра і

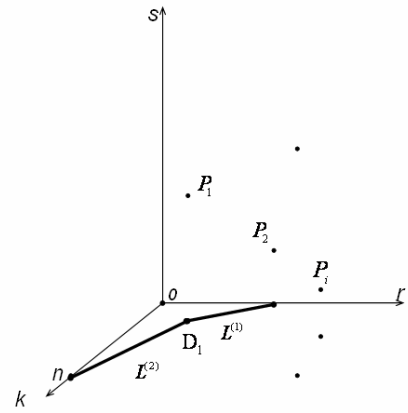


Рис. 1

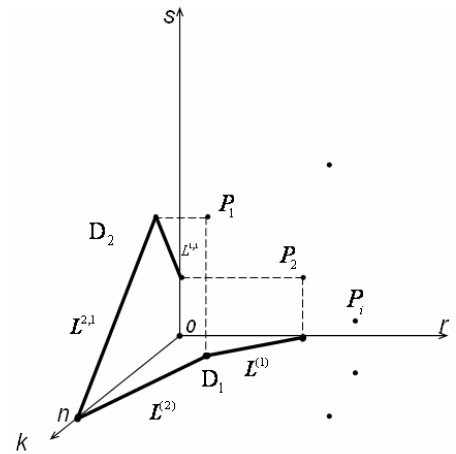


Рис. 2

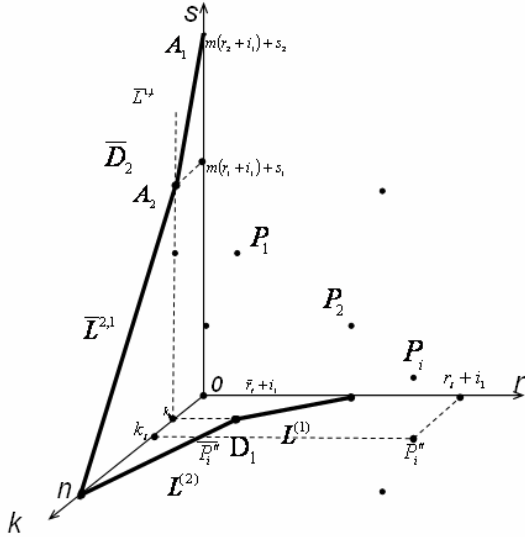


Рис. 3

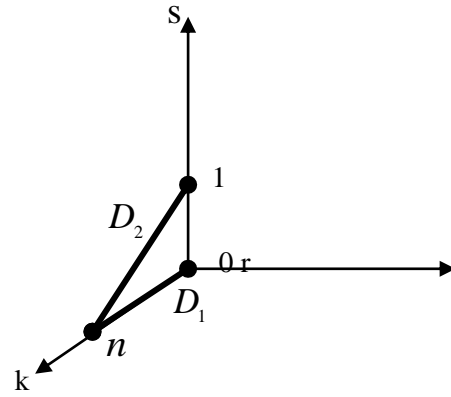


Рис. 4

відношення $\frac{1}{x} : \varepsilon^m$, а також число m у відповідних розвиненнях для функції λ і вектора u .

Зокрема, для випадку $L_{001} \neq 0$ просторові діаграми мають вигляд, поданий на рис. 4. З їх аналізу випливає, що подвійні розвинення слід записати наступним чином

$$\lambda_i(x, \varepsilon) = \sum_{r+s=0}^{\infty} \lambda_{rs}^{(i)} \varepsilon^n \left(\frac{1}{x\varepsilon} \right)^r,$$

$$u_i(x, \varepsilon) = \varphi + \sum_{r+s=1}^{\infty} \varepsilon^n \left(\frac{1}{x\varepsilon} \right)^r u_{rs}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

У цьому випадку при виконанні умов

- 1) $L_{001} = -(A_{01}\varphi, \psi) \neq 0$,
- 2) $\left| \frac{1}{x\varepsilon^{h+g+2}} \right| < 1$,
- 3) $\operatorname{Re} \left((x\varepsilon)^{-g} \mu^{-n(h+g+1)} \lambda_0 + \sum_{r=0}^{g+1} n((h+g+1)(g+2-r)+1) \sum_{s=1}^{s-1} (x\varepsilon)^{g-r} \mu^{s-n(h+g+1)} \lambda_{rs}^{(i)} \right) \leq 0, \quad i = \overline{1, n}$,

має місце асимптотична оцінка

$$\|z_{m_1 m_2}^{(i)}(x, \varepsilon) - \tilde{z}^{(i)}(x, \varepsilon)\| < \left(c_1 |\varepsilon|^{\frac{m_2+2}{n} - (h+g+2)} |x\varepsilon|^{g+1} + c_2 |x\varepsilon|^{g-m_1} |\varepsilon|^{\frac{2}{n} - (h+g+2)} \right),$$

де $z_{m_1 m_2}^{(i)}(x, \varepsilon)$ – формальний розв’язок системи, $\tilde{z}^{(i)}(x, \varepsilon)$ – відповідний точний розв’язок, c_1, c_2 – деякі сталі, що не залежать від ε .

Приклад. Побудуємо лінійно незалежні розв’язки системи (1), (2), якщо

$$A_{00} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h=1, \quad g=2. \quad (15)$$

Випишемо відповідне рівняння розгалуження

$$\lambda^2 + \sum_{r+s=1}^{\infty} L_{0rs} \varepsilon^s x^{-r} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r+s=1}^{\infty} L_{krs} [\lambda^k] \varepsilon^s x^{-r} = 0.$$

Матриця A_{00} має власне значення $\lambda_0 = -1$ кратності 2, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності. Випишемо власний вектор $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та приєднаний вектор $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Напівобернена матриця до $(A_{00} - \lambda_0 E)$ має вигляд $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Обчислимо операторні коефіцієнти $L_{krs} [\lambda^k]$.

$L_{001} = -(A_{01} \varphi, \psi) = 0$, $L_{002} = (A_{01} H A_{01} \varphi, \psi) = 0$; аналізуючи наступні операторні вирази L_{00s} , виявимо, що $L_{00s} = 0$, $s \geq 1$.

Тоді $L_{101} [\lambda] = -\lambda ((A_{01} H + H A_{01}) \varphi, \psi) = -\lambda$,
 $L_{1010} = -(A_{10} \varphi, \psi) = -1$.

Застосовуючи просторовий аналог діаграм Ньютона, отримаємо малюнок 5. Легко помітити, що D_2 складається з двох ланок і не є стандартною діаграмою Ньютона. Щоб звести її до стандартного вигляду, слід ввести заміну $\frac{1}{x\varepsilon^2} = \mu$.

Проаналізувавши діаграми D_1 та $\overline{D_2}$ (рис. 6), випишемо відповідні розвинення для шуканих функцій

$$\lambda_i(x, \varepsilon) = \sum_{r+s=0}^{\infty} \lambda_{rs}^{(i)} \varepsilon^{s+1} \left(\frac{1}{x\varepsilon^2} \right)^r,$$

$$u_i(x, \varepsilon) = \varphi + \sum_{r+s=1}^{\infty} \varepsilon^{s+1} \left(\frac{1}{x\varepsilon^2} \right)^r u_{rs}^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Підставивши вектор (4) у систему (1), враховуючи розвинення (16) та умову задачі (15), прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях параметра та відношення $\frac{1}{x\varepsilon^2}$, знайдемо відповідні значення коефіцієнтів λ_{rs} та векторів u_{rs} . Тоді формальний розв'язок системи матиме вигляд

$$z(x, \varepsilon) = \left(\varphi + \varepsilon u_{01} + \frac{1}{x\varepsilon^2} \varepsilon u_{10} + \left(\frac{1}{x\varepsilon^2} \right)^2 \varepsilon (u_{20} + \varepsilon u_{21}) + \dots \right) \times$$

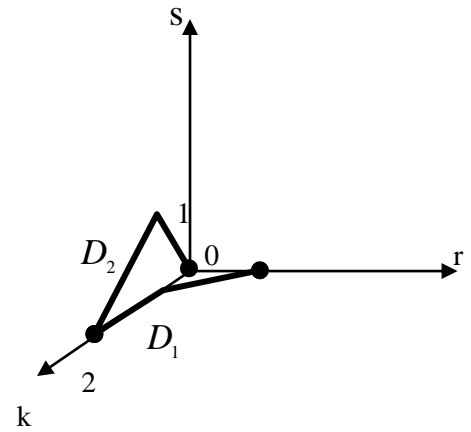


Рис. 5

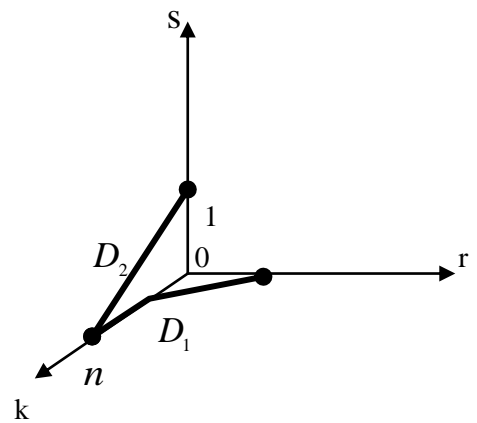


Рис. 6

$$\times \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_{x_0}^x s^2 \left(\lambda_0 + \varepsilon \lambda_{00} + \frac{1}{s \varepsilon^2} \varepsilon \lambda_{10} + \left(\frac{1}{s \varepsilon^2} \right)^2 \varepsilon (\lambda_{20} + \varepsilon \lambda_{21}) + \dots \right) ds \right), \quad (17)$$

де $u_{01} = \lambda_{00} H \varphi - H A_{01} \varphi$, $\lambda_{00}^{(1)} = 0$, $\lambda_{00}^{(2)} = 1$; $u_{10} = \lambda_{10} H \varphi$, $\lambda_{10}^{(1)} = 1$, $\lambda_{10}^{(2)} = -1$;
 $u_{20} = \lambda_{20} H \varphi$, $\lambda_{20}^{(1)} = -1$, $\lambda_{20}^{(2)} = 0$; $u_{21} = \lambda_{21} H \varphi$, $\lambda_{21}^{(1)} = 1$, $\lambda_{21}^{(2)} = -1$.

Вектор (17) є асимптотичним розв'язком шуканого розв'язку оскільки

$$\left| \frac{1}{x \varepsilon^2} \right| < 1, \quad \operatorname{Re} \left(\lambda_0 + \varepsilon \lambda_{00} + \frac{1}{x \varepsilon^2} \varepsilon \lambda_{10} + \left(\frac{1}{x \varepsilon^2} \right)^2 \varepsilon (\lambda_{20} + \varepsilon \lambda_{21}) \right) < 0.$$

Література

1. Сотниченко Н.А. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений / Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф. – К., 1980. – 48 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 80.3).
2. Давидюк Г.П. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой: автореф. дисс. на соискание науч. ст. канд. физ.-мат. наук : спец. 01.01.02. “Дифференциальные уравнения” / Г. П. Давидюк. – Киев, 1983. – 14 с.
3. Головченко О. В. Побудова загального розв'язку сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / О. В. Головченко // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 1 “Фізико-математичні науки”. – 2007. – Вип. 8. – С. 66–81.
4. Головченко О. В. Побудова розв'язків лінійних систем з особливою точкою та параметром / О. В. Головченко, В. П. Яковець // Труды ИПММ НАН Украины. – 2007. – № 15. – С. 40–49.
5. Яковець В. П. Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / В. П. Яковець, О. В. Головченко // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 417–432.
6. Шепель О. А. Про побудову розв'язку виродженої лінійної системи диференціальних рівнянь в околі іррегулярної особливої точки / О. А. Шепель // Нелінійні коливання. – 2004. – Т. 7, № 4. – С. 555–561.
7. Айзенгендлер П. Г. Метод диаграм Ньютона для уравнений с несколькими малыми параметрами и его приложения / П. Г. Айзенгендлер. – Псков, 1989. – 52 с. – Деп. в ВИНТИ 30.10.1989, № 6852-89.

2

Інформатика

УДК 004.655

**УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСИЧНОГО РЕЗУЛЬТАТУ КОДДА-ЛАКРУА-ПРОТТЕ
ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ РЕЛЯЦІЙНОЇ (ТАБЛИЧНОЇ) АЛГЕБРИ
ТА ВІДПОВІДНИХ РЕЛЯЦІЙНИХ ЧИСЛЕНЬ**

Глушко І.М.

У монографії [1] здійснено уточнення реляції в термінах іменних множин. Традиційно під реляцією розуміється скінченна множина рядків, і автори враховують це обмеження, проте, як правило, математичні твердження про стандартні властивості уточнень реляційних операцій залишаються вірними і для нескінченних реляцій. Надалі під реляцією будемо розуміти довільну множину односхемних рядків, зокрема, нескінченну.

Таблична алгебра нескінченних (скінченних) таблиць

Всі невизначені тут поняття та позначення розуміємо в смислі монографії [1]. Розглядаємо дві множини: A – множину атрибутів і D – універсальний домен. Довільну (скінченну) множину атрибутів $R \subseteq A$ назвемо схемою. Рядком схеми R називається іменна множина на парі R, D , проекція якої за першою компонентою рівна R (тобто розглядається функція вигляду $s: R \rightarrow D$).

Під таблицею схеми R розуміємо пару $\langle t, R \rangle$, де t – множина (зокрема, нескінченна) рядків фіксованої схеми R . У монографії [1] в уточнення реляції не вноситься схема, при цьому доводиться розглядати порожню таблицю t_\emptyset , якій можна приписати довільну схему. У даній роботі кожній таблиці приписується її схема. Це по суті впливає тільки на випадок порожньої таблиці t_\emptyset , оскільки за непорожньою таблицею схема відновлюється однозначно. Запис $\langle t_\emptyset, R \rangle$ позначає порожню таблицю схеми R . Як і у роботі [2] у даній статті кожній таблиці приписується певна схема.

Множину усіх рядків (таблиць) схеми R позначимо $S(R)$ (відповідно $T(R)$), а множину всіх рядків (таблиць) – S (відповідно T). Таким чином, $S = \bigcup_{R \subseteq A} S(R)$, $T(R) = P(S(R))$,

$T = \bigcup_{R \subseteq A} T(R)$, де $P(A)$ – булеан множини A .

Під табличною алгеброю нескінченних таблиць розуміємо алгебру $\langle T, \Omega_{P, \Xi} \rangle$, де T – множина усіх таблиць, $\Omega_{P, \Xi} = \{ \cup_R, \cap_R, \setminus_R, \sigma_{p, R}, \pi_{X, R}, \otimes_{R_1, R_2}, \div_{R_1, R_2}^{R_1}, Rt_{\xi, R}, \sim_R \}_{X, R, R_1, R_2 \subseteq A}^{p \in P, \xi \in \Xi}$ – сигнатура, P, Ξ – множини параметрів. Операції сигнатури $\Omega_{P, \Xi}$ задано в [2].

На практиці, зазвичай, мають справу зі скінченними таблицями. Таблична алгебра, розглянута у монографії [1], та узагальнена таблична алгебра, представлена у статті [2], в яких під реляцією розуміється скінченна множина рядків, є підалгебрами табличної алгебри нескінченних таблиць. Справді, якщо $\langle T', \Omega_{P, \Xi} \rangle$ – узагальнена таблична алгебра, то множина T' є підмножиною множини T та T' замкнена відносно кожної операції сигнатури $\Omega_{P, \Xi}$.

Таким чином, під табличною алгеброю скінченних таблиць розуміємо алгебру $\langle T', \Omega_{P, \Xi} \rangle$, де T' – множина усіх скінченних таблиць. Під таблицею схеми R алгебри скінченних таблиць розуміємо пару $\langle t, R \rangle$, де $t \in T(R)$ – скінченна таблиця схеми R . Тоді $T'(R) = \{\langle t, R \rangle \mid t \in T(R)\}$ – множина усіх скінченних таблиць схеми R , а $T' = \bigcup_{R \subseteq A} T'(R)$ – множина всіх скінченних таблиць.

Лема 1. Мають місце наступні твердження:

1) будь-який вираз табличної алгебри нескінченних таблиць можна замінити еквівалентним йому виразом, який використовує операції селекції, з'єднання, проєкції, об'єднання, різниці та перейменування;

2) будь-який вираз табличної алгебри скінченних таблиць можна замінити еквівалентним йому виразом, який використовує сталі таблиці з єдиним атрибутом і єдиним рядком. □

Доведення. Для доведення першого твердження покажемо, що операції перетину, ділення, активного доповнення можна виразити через операції, зазначені у формулюванні леми. Дійсно, мають місце рівності: $\langle t_1, R \rangle \cap_R \langle t_2, R \rangle = \langle t_1, R \rangle \setminus_R (\langle t_1, R \rangle \setminus_R \langle t_2, R \rangle)$, $\langle t_1, R_1 \rangle \div_{R_2}^{R_1} \langle t_2, R_2 \rangle = \pi_{R', R_1}(\langle t_1, R_1 \rangle) \setminus_{R'} \pi_{R', R_1}(\pi_{R', R_1}(\langle t_1, R_1 \rangle) \otimes_{R', R_2} \langle t_2, R_2 \rangle \setminus_{R_1} \langle t_1, R_1 \rangle)$, де $R_2 \subseteq R_1$, $R' = R_1 \setminus R_2$; $\sim_R \langle t, R \rangle = C(\langle t, R \rangle) \setminus_R \langle t, R \rangle$, де $R = \{A_1, \dots, A_n\}$ – схема таблиці $\langle t, R \rangle$, $C(\langle t, R \rangle) = \pi_{A_1, R}(\langle t, R \rangle) \otimes_{\{A_1\}, \{A_2\}} \dots \otimes_{\{A_1, \dots, A_{n-1}\}, \{A_n\}} \pi_{A_n, R}(\langle t, R \rangle)$ (див., наприклад, [1], [3]). □

Для доведення другого твердження замінимо сталу таблицю $\langle t, R \rangle$ виразом $\bigcup_{i=1}^n (\{\langle A_i, d_i \rangle\}_{\{A_i\}, \{A_2\}} \otimes \dots \otimes_{\{A_1, \dots, A_{n-1}\}, \{A_n\}} \{\langle A_m, d_m \rangle\})$, де $t = \{s_1, \dots, s_n\}$, $R = \{A_1, \dots, A_m\}$, причому $s_i = \{\langle A_1, d_i \rangle, \dots, \langle A_m, d_i \rangle\}$, $i = 1, \dots, n$.

Оскільки таблична алгебра скінченних таблиць є підалгеброю табличної алгебри нескінченних таблиць, то згідно першого твердження даної леми будь-який вираз табличної алгебри скінченних таблиць можна замінити еквівалентним йому виразом, який використовує операції селекції, з'єднання, проєкції, об'єднання, різниці та перейменування.

Узагальнене реляційне числення

В основі більшості реляційних мов запитів лежить реляційне числення тому, що на відміну від реляційної алгебри числення виражає лише, яким повинен бути результат і не передбачає визначення того, як його отримати. Реляційне числення ґрунтується на численні предикатів першого порядку. Є дві форми реляційного числення: числення зі змінними-рядками та числення зі змінними на доменах. Ці форми запропоновані Е. Коддом (E. Codd) [4] та М. Лакруа (M. Lacroix) і А. Піротте (A. Pirotte) [5] відповідно.

В класичному численні рядків зазвичай розглядають лише бінарні предикати, а функціональна сигнатура взагалі порожня [3, 6]. У роботі [2] числення рядків поповнено довільними предикатними та функціональними сигнатурами на універсальному домені D . Визначено синтаксис термів, атомів та формул числення рядків; виділено клас дозволених формул, використовуючи поняття вільних та зв'язаних змінних рядків, введено поняття схеми $scheme(x, P)$ та множини атрибутів $attr(x, P)$, з якими змінний рядок зустрічається у формулах.

Областю інтерпретації предметних змінних числення рядків є множина всіх рядків над універсальним доменом. D . Вираз числення рядків має вигляд $\{x(R) \mid P(x)\}$, де

- 1) формула P – дозволена;
- 2) змінна x – єдина змінна, яка входить у формулу P вільно;
- 3) якщо $scheme(x, P)$ визначена, то $scheme(x, P) = R$, інакше $attr(x, P) \subseteq R$.

Числення на домені відрізняється від числення рядків тим, що замість змінних рядків розглядаються змінні значення із домену, які представляють компоненти рядка. Крім того, числення на домені підтримує умову приналежності (membership condition) [7]: $\langle t(\langle A_1, d_1 \rangle, \langle A_2, d_2 \rangle, \dots), R \rangle$, де R – схема, A_i – атрибут таблиці t , а d_i – змінна домену або літерал (предметна константа). Дана умова істинна тоді і тільки тоді, коли в таблиці t існує рядок, якій має вказані значення з універсального домену D для вказаних атрибутів.

У статті [2] числення на домені поповнено довільними предикатними та функціональними сигнатурами на універсальному домені D . Визначено синтаксис термів, атомів і формул числення на домені; виділено клас дозволених формул. Вираз числення зі змінними на домені має вигляд $\{x_1, \dots, x_n \mid P(x_1, \dots, x_n)\}$, де

- 1) формула P – дозволена, а x_1, \dots, x_n – всі вільні змінні, які входять у формулу P ;
- 2) $R = \{A_1, \dots, A_n\}$, $R \subseteq A$ – схема, порядок атрибутів фіксований;
- 3) $scheme(x_i, P) = D$, $i = 1, \dots, n$.

Еквівалентність табличної алгебри нескінченних таблиць та відповідних реляційних числень

Для довільного виразу табличної алгебри нескінченних таблиць можна побудувати еквівалентний вираз узагальненого числення рядків. Вираз узагальненого числення рядків E еквівалентний виразу табличної алгебри нескінченних таблиць F , якщо значення виразу E співпадає із значенням виразу F , за умови, коли табличні константи і табличні змінні інтерпретуються однаково в цих двох виразах.

Теорема 1. Якщо F – вираз табличної алгебри нескінченних таблиць, то можна ефективно (і рівномірно) побудувати еквівалентний йому вираз E узагальненого числення рядків (доведення див., наприклад, у [2]).

У [2] проведено редукцію узагальненого числення рядків до узагальненого числення на домені. Для цього задано відображення $E \mapsto H$, таке, що кожному виразу узагальненого числення рядків ставить у відповідність еквівалентний вираз узагальненого числення на домені. Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 2. Якщо E – вираз узагальненого числення рядків, то можна ефективно (і рівномірно) побудувати еквівалентний йому вираз H узагальненого числення на домені.

Теорема 3. Для кожного виразу узагальненого числення на домені H можна ефективно (і рівномірно) побудувати еквівалентний йому вираз F табличної алгебри нескінченних таблиць (доведення див., наприклад, у [2]).

Враховуючи представлені вище теореми, отримуємо перший основний результат.

Теорема 4. Таблична алгебра нескінченних таблиць, узагальнене числення рядків і узагальнене числення на домені еквівалентні.

Обмеження узагальненого числення рядків для використання лише скінченних таблиць

Узагальнене числення рядків дозволяє визначати нескінченні таблиці. Для подолання даного недоліку, наслідуючи Д. Мейєра (D. Maier) [3] та Дж. Ульмана (J. D. Ullman) [6], будемо розглядати лише, так звані, “безпечні” вирази реляційного числення.

Нехай $E = \{x(R) \mid P(x)\}$ – вираз узагальненого числення рядків і $A \in R$. Розширеним активним доменом атрибута A відносно формули P виразу E називається множина $D_{A,P} = \{d \mid d \text{ – константа в } P\} \cup \bigcup_{t\text{-таблиця } P} D_{A,t}$, де $D_{A,t} = \{d \mid \exists s(s \in t \ \& \ \langle A, d \rangle \in s)\}$ – активний домен атрибута A відносно таблиці t [1, 3]. Покладемо $D_P = \bigcup_{A \in R} D_{A,P}$.

Вираз $\{x(R) \mid P(x)\}$ узагальненого числення рядків називається безпечним, коли виконуються умови:

1) якщо формула $P(s/x)$ істинна, то $s(A) \in D_P$, $A \in R$;

2) якщо y, z_1, z_2, \dots, z_k – всі змінні, які входять у формулу G вільно, а $\exists y(X)G(y, z_1, z_2, \dots, z_k)$ – підформула формули P , то з того, що формула $G(s/y, u_1/z_1, u_2/z_2, \dots, u_k/z_k)$ істинна, слідує, що $s(A) \in D_G$, $A \in X$, а $X \subseteq R$;

3) якщо y, z_1, z_2, \dots, z_k – всі змінні, які входять у формулу G вільно, а $\forall y(X)G(y, z_1, z_2, \dots, z_k)$ – підформула формули P , то з того, що $s(A) \notin D_G$, $A \in X$ слідує, що формула $G(s/y, u_1/z_1, u_2/z_2, \dots, u_k/z_k)$ істинна, причому $X \subseteq R$.

Умови 2) та 3) дозволяють встановлювати істинність формул з кванторами $\exists y(X)G(y, z_1, z_2, \dots, z_k)$ і $\forall y(X)G(y, z_1, z_2, \dots, z_k)$, розглядаючи тільки значення змінної y , що є функціями вигляду $X \rightarrow D_G$.

Аналогічно узагальненому численню рядків введемо поняття безпечного виразу узагальненого числення на домені. Спочатку введемо поняття розширеного активного домену атрибута A відносно формули P виразу H . Нехай $H = \{x_1, \dots, x_n \mid P(x_1, \dots, x_n)\}$ – вираз узагальненого числення на домені, $A \in \mathcal{A}$. Розширеним активним доменом атрибута A відносно формули P виразу H називається множина $D_{A,P} = \{d \mid d \text{ константа в } P\} \cup \bigcup_{t\text{-таблицяз } P} D_{A,t}$, где $D_{A,t}$, як і раніше, активний домен атрибута A .

Вираз $\{x_1, \dots, x_n \mid P(x_1, \dots, x_n)\}$ узагальненого числення на домені називається безпечним, коли виконуються умови:

1) якщо формула $P(d_1/x_1, \dots, d_n/x_n)$ істинна, де d_1, \dots, d_n – константи, то $d_i \in D_{A_i,P}$, $i = 1, \dots, n$, де A_i – атрибут з R , співставлений зі змінною x_i , $R = \{A_1, \dots, A_n\}$;

2) якщо $\exists y(A)G$ – підформула формули P , то з того, що формула $G(d/y)$ істинна, слідує, що $d \in D_{A,G}$, $X \subseteq R$;

3) якщо $\forall y(A)G$ – підформула формули P , то з того, що $d \notin D_{A,G}$, слідує, що формула $G(d/y)$ істинна.

При обмеженій інтерпретації виразу $\{x_1, \dots, x_n \mid P(x_1, \dots, x_n)\}$, значення змінної x_i є значеннями з $D_{A_i,P}$, $i = 1, \dots, n$.

Еквівалентність табличної алгебри скінченних таблиць та відповідних реляційних числень

Теорема 5. Якщо F – вираз табличної алгебри скінченних таблиць, то можна ефективно (і рівномірно) побудувати еквівалентний йому безпечний вираз E узагальненого числення рядків.

Доведення. Згідно леми 1 при доведенні теореми розглядаємо вирази табличної алгебри скінченних таблиць, які містять тільки операції об'єднання, різниці, селекції, проєкції, з'єднання та перейменування, причому допускаються тільки одноатрибутні сталі таблиці з одним рядком.

Доведення проведемо індукцією за числом операцій в F .

База індукції (немає операцій). Можливі два випадки. По-перше, $F = \langle t, R \rangle$, де $t \in T(R)$, покладемо $E = \{x(R) \mid t(x)\}$. Вираз узагальненого числення рядків E безпечний, оскільки будь-який рядок x , який задовольняє $t(x)$ належить таблиці $\langle t, R \rangle$, а отже, $x(A) \in D_t$ для $A \in R$. По-друге, F – стала таблиця $t = \{\{\langle A, d \rangle\}\}$. Покладемо $E = \{x(\{A\}) \mid x(A) = d\}$.

Крок індукції. Припустимо, що твердження теореми виконується для будь-якого виразу табличної алгебри скінченних таблиць, який містить менше k операцій. Нехай вираз F містить k операцій.

Випадок 1. $F = F_1 \cup_R F_2$. Тоді F_1 і F_2 мають менше k операцій, тому існують безпечні вирази узагальненого числення рядків $\{x(R) | P(x)\}$ і $\{x(R) | Q(x)\}$, еквівалентні F_1 і F_2 відповідно. Покладемо E рівним $\{x(R) | P(x) \vee Q(x)\}$ і покажемо, що цей вираз безпечний. Якщо змінний рядок x задовольняє формулі $P(x) \vee Q(x)$, то $x(A) \in D_P$ або $x(A) \in D_Q$. Неважко перевірити, що $D_{P \vee Q} = D_P \cup D_Q$. Таким чином, формула $P(x) \vee Q(x)$ істинна тільки тоді, коли $x(A) \in D_{P \vee Q}$. Крім того, будь-яка підформула вигляду $\exists y(X)G(y, z_1, z_2, \dots, z_k)$ (або вигляду $\forall y(X)G(y, z_1, z_2, \dots, z_k)$) формули $P(x) \vee Q(x)$ є підформулою формули $P(x)$ або формули $Q(x)$. Тому у відповідності з гіпотезою індукції виконуються умови безпечності щодо підформул.

Випадок 2. $F = F_1 \setminus_R F_2$. Тоді як і у випадку 1 існують безпечні вирази узагальненого числення рядків $\{x(R) | P(x)\}$ і $\{x(R) | Q(x)\}$, еквівалентні F_1 і F_2 відповідно. Покладемо E рівним $\{x(R) | P(x) \wedge \neg Q(x)\}$. Доведення безпечності приводиться аналогічно попередньому випадку з використанням рівності $D_{P \wedge \neg Q} = D_P \cap D_Q$.

Випадок 3. $F = \sigma_{\tilde{p}, R}(F_1)$. Нехай $\{x(R) | P(x)\}$ – безпечний вираз узагальненого числення рядків, еквівалентний F_1 . Покладемо E рівним $\{x(R) | P(x) \wedge p(x(A_1), \dots, x(A_m))\}$, де $R = \{A_1, \dots, A_m\}$ схема таблиці, яка є значенням виразу F_1 . Тут припускається, що предикат-параметр селекції заданий так: $\tilde{p}(s) = true \Leftrightarrow p(s(A_1), \dots, s(A_m)) = true$, $s \in S(R)$, де p – m -арний сигнатурний предикатний символ. Вираз E безпечний, оскільки кожен рядок x обмежується значеннями, що задовольняють формулі P .

Випадок 4. $F = \pi_{X, R}(F_1)$. Нехай $\{x(R) | P(x)\}$ – безпечний вираз узагальненого числення рядків, еквівалентний F_1 . Покладемо E рівним $\{y(X \cap R) | \exists x(R)(P(x) \wedge \bigwedge_{A \in X \cap R} y(A) = x(A))\}$. Даний вираз є безпечним, оскільки $y(A)$ обмежується значеннями, які може приймати $x(A)$, $A \in X \cap R$.

Випадок 5. $F = F_1 \otimes_{R_1, R_2} F_2$. Нехай $\{x(R_1) | P(x)\}$ і $\{y(R_2) | Q(y)\}$ – безпечні вирази узагальненого числення рядків, еквівалентні F_1 та F_2 відповідно. Покладемо E рівним $\{z(R_1 \cup R_2) | \exists x(R_1) \exists y(R_2)(P(x) \wedge Q(y) \wedge \bigwedge_{A \in R_1} z(A) = x(A) \wedge \bigwedge_{A \in R_2} z(A) = y(A))\}$. Даний вираз є безпечним, оскільки $z(A)$ обмежується значеннями, які може приймати $x(A)$, $A \in R_1$, і $y(A)$, $A \in R_2$.

Випадок 6. $F = Rt_{\xi, R}(F_1)$, де $\xi: A \xrightarrow{\sim} A$ – ін'єктивна функція, що здійснює перейменування атрибутів. Тоді існує безпечний вираз узагальненого числення рядків $\{x(R) | P(x)\}$, еквівалентний F_1 . Покладемо E рівним $\{y(R_2) | \exists x(R)(P(x) \wedge \bigwedge_{C \in R \setminus dom \xi} y(C) = x(C) \wedge \bigwedge_{A \in R \cap dom \xi} x(A) = y(\xi(A)))\}$, де $R_2 = R \setminus dom \xi \cup \xi[R]$ (по суті, це схема перейменованої таблиці). Даний вираз є безпечним, оскільки $y(C)$ обмежується значеннями, які може приймати $x(C)$, $C \in R \setminus dom \xi$, а $y(\xi(A))$ – тими значеннями, які може приймати $x(A)$, $A \in R \cap dom \xi$.

Розглянемо відображення $E \mapsto H$, яке кожному виразу узагальненого числення рядків ставить у відповідність еквівалентний вираз узагальненого числення на домені. Нехай

$E = \{y(R) \mid P(y)\}$ – безпечний вираз узагальненого числення рядків, змінна y – єдина змінна, яка входить у формулу P вільно, а $R = \{A_1, \dots, A_n\}$. Виконаємо потрібні заміни (див. [2]) та отримаємо вираз узагальненого числення зі змінними на домені $H = \{y_1, \dots, y_n \mid P(y_1, \dots, y_n)\}$. Кожна змінна z_i узагальненого числення на домені може приймати точно ті самі значення, що і $z(A_i)$. Таким чином, якщо вираз E безпечний, то безпечний і результуючий вираз числення на домені та значення виразу H співпадає зі значенням виразу E . Тому має місце наступна теорема.

Теорема 6. Якщо E – безпечний вираз узагальненого числення рядків, то можна ефективно (і рівномірно) побудувати еквівалентний йому безпечний вираз H узагальненого числення на домені.

Теорема 7. Для кожного безпечного виразу узагальненого числення на домені H можна ефективно (і рівномірно) побудувати еквівалентний йому вираз F табличної алгебри скінченних таблиць.

Доведення. Нехай $H = \{x_1, \dots, x_n \mid P(x_1, \dots, x_n)\}$ – безпечний вираз узагальненого числення на домені, значенням якого є таблиця схеми $R = \{A_1, \dots, A_n\}$. Хоча заданий вираз є безпечним, можуть існувати підформули формули $P(x_1, \dots, x_n)$, які не володіють цією властивістю. Доведемо індукцією по числу операторів у підформулі G з P , що якщо G містить вільні змінні на універсальному домені y_1, \dots, y_m , то для виразу $\bigcap_{A_i \in R_G} D_{A_i, P} \cap_{R_G} \{y_1, \dots, y_m \mid G(y_1, \dots, y_m)\}$ існує еквівалентний вираз табличної алгебри F_G . Тоді, якщо G є сама P , отримаємо алгебраїчний вираз вигляду $\bigcap_{A_i \in R} D_{A_i, P} \cap_R \{x_1, \dots, x_n \mid P(x_1, \dots, x_n)\}$. Припускається, що y_1, \dots, y_m – всі вільні змінні в G , і значенням виразу $\bigcap_{A_i \in R_G} D_{A_i, P} \cap_{R_G} \{y_1, \dots, y_m \mid G(y_1, \dots, y_m)\}$ є таблиця схеми $R_G = \{A_1, \dots, A_m\}$.

Замінімо змінні у формулі P таким чином, щоб жодна змінна не входила одночасно і вільно, і зв'язано у P та не була зв'язана квантором у двох різних місцях. Тепер кожна змінна асоційована з атрибутом, який або входить у квантор $\forall x(A)$ чи $\exists x(A)$, якщо змінна зв'язана у формулі P або, якщо змінна вільна в P , співставлений змінній x_i , що знаходиться у виразі H зліва від вертикальної лінії.

Будь-якому атрибуту A співставимо алгебраїчний вираз: значенням даного виразу є одноатрибутна таблиця $\langle t, \{A\} \rangle$, яка містить всі рядки вигляду $s = \langle \{A, d_i\} \rangle$, $d_i \in D_{A, P}$. Позначимо цей вираз через $[D]$. Розглянемо всі можливі випадки.

База індукції (немає операторів). Підформула G – атом вигляду $p(u_1, \dots, u_m)$ або $t(a_1, \dots, a_n)$.

1) Нехай G має вигляд $p(u_1, \dots, u_m)$, де u_i – терми узагальненого числення на домені, причому y_1, \dots, y_k – всі змінні цих термів. Покладемо F_G рівним $\sigma_{\tilde{p}}([D]_1 \otimes_{R_1, R_2} \dots \otimes_{R_1 \cup \dots \cup R_{k-1}, R_k} [D]_k)$, де R_i – одноатрибутні схеми таблиць, причому ці таблиці є значеннями алгебраїчних виразів $[D]_i$, $i = 1, \dots, k$. Предикат-параметр селекції заданий наступним чином $\tilde{p}(s) = true \Leftrightarrow p(s(A_1), \dots, s(A_m)) = true$, $s \in S(R)$, де p – m -арний сигнатурний предикатний символ. Вище вирази $[D]_i$ будуються по атрибуту, асоційованому зі змінною y_i , $i = 1, \dots, k$.

2) Нехай G має вигляд $t(a_1, \dots, a_k)$, де a_i – константа або змінна на універсальному домені D . Нехай $R = \{C_1, \dots, C_k\}$ – схема таблиці $\langle t, R \rangle$. Покладемо алгебраїчний вираз F_G рівним $\pi_x(\sigma_{\tilde{p}}(\langle t, R \rangle))$, де \tilde{p} – предикат-параметр селекції, який є кон'юнкцією порівнянь

$C_i = a_i$ по всіх i , для яких a_i – константа; X – множина атрибутів $\{C_j \mid a_j - \text{змінна}\}$. Якщо множина атрибутів X порожня, то у виразі F_G проекція відсутня.

Крок індукції. Припустимо, що підформула G містить принаймні один оператор і що гіпотеза індукції справедлива для всіх підформул формули P , що мають менше операторів, ніж G .

Випадок 1. $G = \neg Q$. Нехай F_Q – алгебраїчний вираз для формули Q вигляду $\bigcap_{A_i \in R_Q} D_{A_i, P} \cap_{R_Q} \{y_1, \dots, y_m \mid Q(y_1, \dots, y_m)\}$, а значенням виразу F_Q є таблиця схеми R_Q . Покладемо $F_G = \sim_{R_Q} F_Q$. Цей алгебраїчний вираз еквівалентний виразу $\bigcap_{A_i \in R_G} D_{A_i, P} \setminus_{R_Q} \{y_1, \dots, y_m \mid Q(y_1, \dots, y_m)\}$, який, в свою чергу, еквівалентний виразу $\bigcap_{A_i \in R_G} D_{A_i, P} \cap_{R_G} \{y_1, \dots, y_m \mid \neg Q(y_1, \dots, y_m)\}$.

Випадок 2. $G = Q \vee Q'$. Нехай вільні змінні з Q – це $z_1, \dots, z_k, v_1, \dots, v_p$, а з Q' – це $z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_q$, де змінні v_1, \dots, v_p та w_1, \dots, w_q попарно не співпадають. Нехай F_Q та $F_{Q'}$ – алгебраїчні вирази для формул Q та Q' відповідно вигляду $\bigcap_{A_i \in R_Q} D_{A_i, P} \cap_{R_Q} \{z_1, \dots, z_k, v_1, \dots, v_p \mid Q(z_1, \dots, z_k, v_1, \dots, v_p)\}$, і $\bigcap_{A_i \in R_{Q'}} D_{A_i, P} \cap_{R_{Q'}} \{z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_q \mid Q'(z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_q)\}$, де R_Q та $R_{Q'}$ – схеми таблиць, які є значеннями цих алгебраїчних виразів. Нехай C_i , $i = 1, \dots, p$ – атрибути, асоційовані зі змінними v_1, \dots, v_p , а K_j , $j = 1, \dots, q$ – атрибути, асоційовані із змінними w_1, \dots, w_q . Покладемо F_1 рівним $F_Q \otimes_{R_Q \cup \{K_1\}} [D]_1 \otimes_{R_Q \cup \{K_1, K_2\}} \dots \otimes_{R_Q \cup \{K_1, \dots, K_{q-1}, K_q\}} [D]_q$, а $F_2 = F_{Q'} \otimes_{R_{Q'} \cup \{C_1\}} [D]_1' \otimes_{R_{Q'} \cup \{C_1, C_2\}} \dots \otimes_{R_{Q'} \cup \{C_1, \dots, C_{p-1}, C_p\}} [D]_p'$. Вище вираз $[D]_i'$, $i = 1, \dots, p$, будувався за атрибутом C_i , а вираз $[D]_j$, $j = 1, \dots, q$, – за атрибутом K_j .

Позначимо через R_{F_1} та R_{F_2} – схеми таблиць, які є значеннями алгебраїчних виразів F_1 та F_2 відповідно. За побудовою $R_{F_1} = R_{F_2}$. Тому покладемо $F_G = F_1 \cup_{R_{F_1}} F_2$. Причому, оскільки вираз F_1 рівний виразу $\bigcap_{A_i \in R_G} D_{A_i, P} \cap_{R_G} \{y_1, \dots, y_m \mid Q(z_1, \dots, z_k, v_1, \dots, v_p)\}$, а вираз F_2 – виразу $\bigcap_{A_i \in R_G} D_{A_i, P} \cap_{R_G} \{y_1, \dots, y_m \mid Q'(z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_q)\}$, то вираз F_G рівний виразу $\bigcap_{A_i \in R_G} D_{A_i, P} \cap_{R_G} \{y_1, \dots, y_m \mid G(y_1, \dots, y_m)\}$, $i = 1, \dots, m$.

Випадок 3. $G = Q \wedge Q'$. Даний вираз узагальненого числення на домені можна виразити через операції заперечення та диз'юнкції: $G = \neg(\neg Q \vee \neg Q')$ (за законом де Морган).

Випадок 4. $G = \exists y_{m+1}(A)Q$. Нехай F_Q – алгебраїчний вираз для формули Q вигляду $\bigcap_{A_i \in R_Q} D_{A_i, P} \cap_{R_Q} \{y_1, \dots, y_{m+1} \mid Q(y_1, \dots, y_{m+1})\}$, де R_Q – схема таблиці, яка є значенням алгебраїчного виразу F_Q . Оскільки P – формула безпечного виразу узагальненого числення на домені, то формула $Q(y_1, \dots, y_{m+1})$ не може бути істинною, якщо $y_{m+1}(A)$ не належить множині $D_{A, Q}$, яка є підмножиною $D_{A, P}$. Покладемо F_G рівним $\pi_{X \setminus \{A\}, X}(F_Q)$, де X – схема таблиці, яка є значенням алгебраїчного виразу F_Q . Даний вираз рівний виразу $\bigcap_{A_i \in R_G} D_{A_i, P} \cap_{R_G} \{y_1, \dots, y_m \mid \exists y_{m+1}(A)Q(y_1, \dots, y_{m+1})\}$ узагальненого числення на домені.

Випадок 5. $G = \forall x(A)Q$. Даний вираз узагальненого числення на домені можна виразити через операцію заперечення та квантор існування $\forall x(A)Q = \neg(\exists x(A))(\neg Q)$.

Таким чином, враховуючи теореми 5, 6, 7 встановлено другий основний результат.

Теорема 8. Таблична алгебра скінченних таблиць, обмежене узагальнене числення рядків і обмежене узагальнене числення на домені еквівалентні.

Висновок

У статті представлено два результати: перший стосується еквівалентності табличної алгебри для нескінченних таблиць і відповідних реляційних числень, а другий – еквівалентності підалгебри даної алгебри для скінченних таблиць і відповідних реляційних числень, в яких розгляд обмежується лише так званими “безпечними” виразами. При цьому самі числення поповнені предикатними та функціональними сигнатурами.

Література

1. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В. Н. Редько, Ю. Й. Брона, Д. Б. Буй, С. А. Поляков. – Київ: Видавничий дім “Академперіодика”, 2001. – 198 с.
2. Буй Д. Б. Узагальнена таблична алгебра, узагальнене числення рядків, узагальнене числення на домені та їх еквівалентність / Д. Б. Буй, І. М. Глушко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – К., 2011. – Вип. 1. Сер.: фіз.-мат. науки – С. 86-95.
3. Мейер Д. Теория реляционных баз данных: [пер. с англ.] / Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.
4. Codd E. F. Relational Completeness of Data Base Sublanguages / Codd E. F. // Data Base Systems. – New York: Prentice-Hall. – 1972. – P. 65-93.
5. Lacroix M. Domain-oriented relational languages / M. Lacroix, A. Pirotte // Proc. 3rd Int. Conf on Very Large Data Bases. – Tokyo, October, 1977. – P. 370-378.
6. Ульман Дж. Основы систем баз данных: [пер. с англ.] / Дж. Ульман. – Москва: Финансы и статистика, 1983. – 334 с.
7. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных: [8-е изд.: пер. с англ.] / К. Дж. Дейт. – Москва: Издательский дом “Вильямс”, 2005. – 1328 с.

УДК 621.039.586:004.942+532

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСІВ ПЛАВЛЕННЯ-ЗАТВЕРДІННЯ В СИСТЕМАХ ПАСИВНОГО ЗАХИСТУ АЕС ВІД АВАРІЙ

Казачков І.В., Корсун А.М.

Вступ до проблеми. Потенційна небезпека атомних електростанцій (АЕС) в масштабованому енергетичному виробництві після аварій на “Трі Майл Айленд” (США, 1979) і Чорнобильській АЕС (1986) істотно підірвали довіру населення до атомної енергетики. У зв’язку з цим інтенсивний розвиток атомної енергетики в більшості країн світу помітно знизився, а в ряді країн навіть призупинився. Але, незважаючи на це, потреба створення високоефективних, екологічно чистих джерел енергії стимулює розвиток атомної енергетики в більшості промислово розвинених країн світу. І тому, оскільки альтернативні джерела енергії в нашій країні тільки починають розвиватися, величезне значення має атомна енергетика. Саме через це потрібно кардинально переглянути концепцію безпеки АЕС, для чого ведуться дослідження по створенню нових і вдосконаленню старих систем захисту від тяжких аварій. Особливе значення має дослідження і моделювання процесів взаємодії розплаву ядерного палива з охолоджувачем, які відбуваються в реакторі та контейменті після руйнування корпусу реактора під час аварії [1-7].

Враховуючи вищенаведене, важливе значення в цих дослідженнях посідають моделі пасивних систем захисту атомних реакторів. Одним з напрямів досліджень є ідея охолодження розплаву ядерного палива в підреакторному просторі за рахунок плавлення розміщених там блоків різних матеріалів: для видалення запасеної у розплаві палива великої кількості теплоти та підтримання радіоактивного палива у контрольованому стані.

В даній роботі розглянуто питання розробки математичних моделей процесів плавлення матеріалів у підреакторному просторі та застигання внаслідок цього охолодженого розплаву ядерного палива. Зокрема, розроблено моделі з використанням алюмінієвих та сталевих стержнів і блоків. Побудовані математичні моделі та розроблені програми для ПЕОМ і проведені на основі їх використання комп'ютерні експерименти дозволяють вивчити особливості процесів плавлення-затвердіння в басейні високотемпературного розплаву, який містить блоки низькотемпературного матеріалу. Хоча дані комп'ютерні моделі і не повністю відповідають масштабам аварії та всім складним процесам, що відбуваються, але вони досить точно моделюють важливі теплогідролічні процеси в пасивних системах захисту АЕС від тяжких аварій і тому є досить важливими.

Постановка задачі математичного моделювання. Побудова математичних моделей та комп'ютерних програм для їх реалізації дає можливість вивчати процеси, що відбуваються в пасивних системах захисту під час тяжких аварій. Створення математичних моделей досліджуваних процесів базується на основних законах збереження. Так, система рівнянь перехідного процесу плавлення-затвердіння матеріалу включає рівняння збереження маси, імпульсу та енергії. Для розрахунку сил плавлення можна застосувати наближення Буссінеска. Для описаної фізичної системи диференціальні рівняння теплогідролічних процесів у векторному вигляді записуються наступним чином [3-5]:

$$\begin{aligned} \rho_l \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \right) &= -\nabla p + \mu_l \Delta \vec{v} + \rho_l \vec{g} \beta_l (T_l - T_0), \operatorname{div} \vec{v} = 0, \\ \rho_l c_{pl} \left(\frac{\partial T_l}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T_l \right) &= \nabla \cdot (k_l \nabla T_l), \rho_s c_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T_s \right) = \nabla \cdot (k_s \nabla T_s), \end{aligned} \quad (1)$$

де ρ_l , μ_l – густина і динамічний коефіцієнт в'язкості рідкої фази, \vec{v} , p – її швидкість і тиск, відповідно, \vec{g} – вектор прискорення сили тяжіння, β_l – коефіцієнт теплового розширення, T_l – температура розплаву, T_0 – задана характерна температура системи, $\rho_l \cdot c_l$, k_l – густина, питома теплоємність і коефіцієнт теплопровідності розплаву, $\rho_s \cdot c_s$, k_s – відповідно, густина, питома теплоємність і коефіцієнт теплопровідності твердої фази, T_s – температура твердої фази [8, 9]. На границі фазового переходу кількість теплоти, яку отримує границя розділу фаз за одиницю часу, переміщує границю фазового переходу в залежності від виділеної теплоти фазового переходу матеріалу. Коли густина матеріалу в рідкому і твердому стані приблизно однакова і конвекція в розплаві мала, баланс енергії границі фазового переходу можна записати у вигляді:

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial n} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial n} = \rho_s \lambda_{sl} \frac{d\xi_n}{dt} \quad (2)$$

де ξ_n – координата положення границі фазового переходу (плавлення-затвердіння), n – нормаль до поверхні розділу фаз, λ_{sl} – прихована теплота плавлення. У випадку затвердіння на границі фазового переходу в рівнянні (2) поміняються місцями індекси і знак правої частини.

Якщо натуральна конвекція в розплаві значна, то рівняння (2) слід записати у вигляді:

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial n} + \alpha \Delta T_n = \rho_s \lambda_{sl} \frac{d\xi_n}{dt}, \quad (3)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі на границі фазового переходу і ΔT_n – різниця температур рідкої і твердої фаз на границі оплавлення (затвердіння – у випадку охолодження границі).

Система диференціальних рівнянь в частинних похідних (1) з умовами на границі фазового переходу (2), (3) складають основу математичних моделей процесів плавлення-затвердіння. Рівняння нелінійні і при цьому необхідно розв'язувати спряжені краєві задачі з

рухомою границею, тому аналітичне розв'язання можливе лише для найпростіших випадків, а чисельне в кожному окремому випадку проводиться з урахуванням індивідуальних особливостей системи. Для чисельного вирішення задачі найбільш часто використовуються метод ентальпії і метод ефективної теплоємності [9].

Фізичні властивості реальних середовищ залежать від температури. Особливо сильним може бути вплив залежності теплопровідності від температури, який при певних умовах може призвести до режимів з загостренням і до локалізації дисипативних процесів.

Постановка крайової задачі для моделювання процесів плавлення-затвердіння. Розглядаючи проблему охолодження розплаву ядерного палива або коріуму (розплаву з домішками зруйнованих конструкцій під час аварії) за рахунок плавлення більш легкоплавкого матеріалу, зануреного в басейн розплаву, можна ввести до розгляду початкову конфігурацію області із зануреним в неї блоком легкоплавкого матеріалу. А далі розглядати розв'язання задачі з урахуванням описаної вище математичної моделі. Виразувавши з розв'язку крайової задачі розподіл температури і її еволюцію в області, з урахуванням руху границі фазового переходу, отримаємо стан системи в кожний поточний момент часу. В найпростішому випадку, знехтувавши конвекцією розплаву, рівняння теплопровідності рідкої фази можна розглянути у вигляді:

$$\rho_l c_{pl} \frac{\partial T_l}{\partial t} = \nabla(k_l \nabla T_l) + q \quad (4)$$

де q – джерело теплоти від радіоактивного палива. Оскільки є приток теплоти від більш гарячої області розплаву до легкоплавких блоків, то їх температура буде підвищуватись, тоді як занурений в розплав більш холодного матеріалу, розплав коріуму буде охолоджуватись [8, 9].

Прихована теплота плавлення Q_m – це теплота, яка виділяється при зміні вмісту твердої фази в області з 1 до 0 (охолодження-застигання). Це можна записати у вигляді:

$$Q_m = \int_0^1 \frac{dH}{dS} ds, \text{ або } \frac{dH}{dS} = Q_m \text{ при } \frac{dH}{dS} = \text{const}.$$

Джерело теплоти при застиганні розплаву буде описуватись рівнянням:

$$\frac{dH}{dS} = \left(\frac{dH}{dT}\right) \left(\frac{dT}{dS}\right) = Q_m \left(\frac{dT}{dS}\right). \quad (5)$$

Припустимо, що вміст твердої фази описується функцією виду:

$$S = \frac{0,5 \operatorname{erfc}(T - T_m)}{T_0}. \quad (6)$$

де T_m – температура плавлення, T_0 – діапазон температур, в якому відбувається плавлення, erfc – відома функція помилок. Оскільки рівняння (6) не містить просторових похідних, можна ввести дифузійний член з малим коефіцієнтом, який діє як фільтр шуму [9].

Розробка алгоритму комп'ютерного моделювання системи. Спочатку розглянемо диск холодного матеріалу, зануреного в басейн розплаву. Початкові температури такі, що розплав поблизу диску швидко охолоджується і застигає, але теплота розплаву розподіляється по об'єму басейну і все розплавлюється, досягаючи рівноважної температури (більш низької, ніж на початку процесу). Зовнішню границю області будемо вважати теплоізолюваною. Якщо "холодних" блоків досить багато, розплав коріуму може застигнути в усій області, залишивши частину рідкого розплаву більш легкоплавкого матеріалу.

Використовуючи розроблену математичну модель, побудуємо програму для моделювання нестационарних процесів плавлення-застигання в описаній пасивній системі захисту від

тяжких аварій на АЕС у середовищі обчислювальної платформи Вольфрамівського дослідницького інституту FlexPDE [6]. Розглянемо кілька комп'ютерних моделей для вивчення особливостей теплогідролічних процесів при охолодженні розплаву ядерного палива легкоплавкими блоками під час тяжких аварій на АЕС:

- 1) комп'ютерні моделі з використанням алюмінієвих стержнів і блоків,
- 2) комп'ютерні моделі з використанням сталевих стержнів і блоків.

Кожен з випадків має свої особливості та відмінності, які суттєво впливають на перебіг тяжкої аварії та утримання розплаву палива у контрольованому стані. Мета роботи – виявити ці особливості та проаналізувати цікаві випадки для використання при побудові і функціонуванні пасивних систем захисту.

Для охолодження палива під час аварії використовують різні легкоплавкі матеріали, які, потрапляючи в агресивне високотемпературне середовище розплаву ядерного палива, плавляться і зменшують його температуру. До таких матеріалів можна віднести алюміній та його сплави з різними окислами, як запропоновано у деяких сучасних розробках систем пасивного захисту. Алюміній має густину 2700 кг/м^3 , його температура плавлення – 660°C , теплоємність – $880 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{K)}$.

Алюміній – евтектичний матеріал. Це означає, що різниця температур ліквідуса і солідуса невелика. У неевтектичних матеріалів ця різниця значна. Температурою солідуса називається температура, при якій починається плавлення матеріалу, температурою ліквідуса – температура, при якій воно закінчується. Тому неевтектичні матеріали мають складну поведінку, оскільки в широкому діапазоні температур між ліквідусом і солідусом вони знаходяться в проміжному стані (не рідина, але й не тверде тіло).

Аналіз першої моделі охолодження розплаву ядерного палива. Адаптивна розрахункова сітка моделі автоматично підстроюється в кожній точці області в поточний момент часу по градієнтам функцій, що дозволяє істотно знизити об'єм розрахунків і підвищити їх точність (рис. 1). Тому програма FlexPDE дозволяє вирішувати складні крайові задачі, в тому числі – нестационарні тривимірні, якщо дозволяють можливості комп'ютера.

Спочатку температура розплаву коріуму береться рівною 2000°C , температура плавлення стержня 660°C , а його початкова температура 200°C . Інтервал температур плавлення приймається рівним 20 градусам, оскільки алюміній – евтектичний матеріал. Коефіцієнт теплопровідності залежить від температури:

$$k_l = 30 + 4,5 \cdot 10^{-5} (T - 1350)^2,$$

що зумовлює складну нелінійну поведінку системи. Так, тепловий потік в сторону області з меншою температурою може бути меншим, ніж в сторону області з більшою температурою внаслідок того, що при більш високій температурі буде вищим коефіцієнт теплопровідності. Такі випадки називаються режимами з загостренням, або локальним аномальним розігрівом.

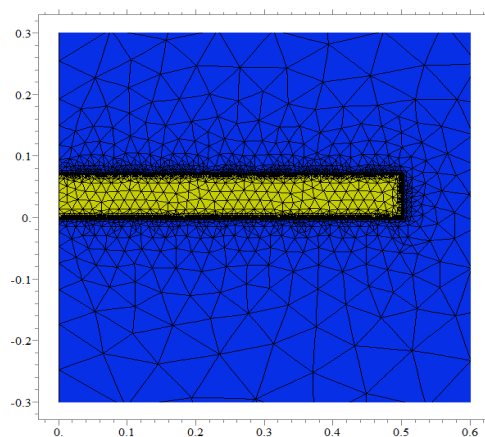


Рис. 1. Адаптивна розрахункова сітка чисельної моделі

Комп'ютерне моделювання системи. Деякі результати обчислювальних експериментів, проведених за допомогою розроблених математичних моделей та комп'ютерних програм, наведено на Рис. 2-4. Спочатку на Рис. 2 представлено початкове поле температури системи. А далі на Рис. 3, 4 показано еволюцію поля температур в басейні розплаву з холодним стержнем для різних моментів часу від початкового стану до 5 хвилин, коли практично увесь стержень розплавився. Цікаво, що приблизно до однієї секунди картина майже не змінюється, хоча на поверхні стержня температура майже миттєво збільшується з 200 градусів до 2000 градусів (температура розплаву).

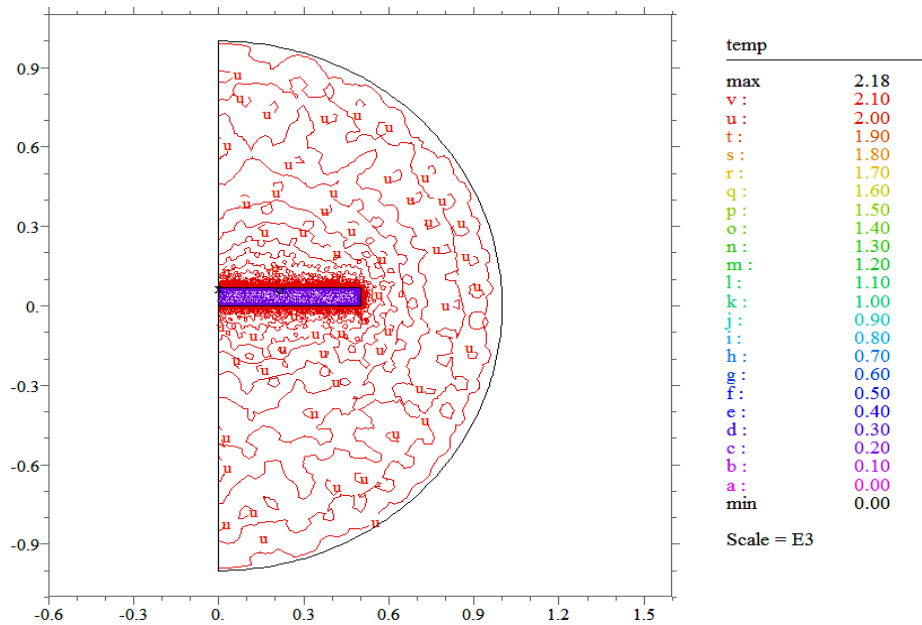


Рис. 2. Поле температур в басейні розплаву із стержнем в початковий момент

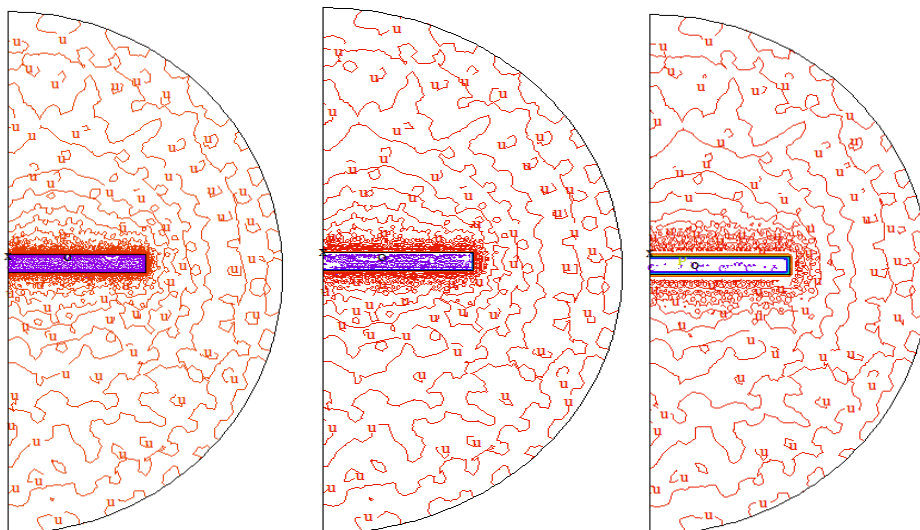


Рис. 3. Еволюція поля температур в басейні розплаву з холодним стержнем для моментів часу відповідно: 10^{-4} с, 0,1с та 1с

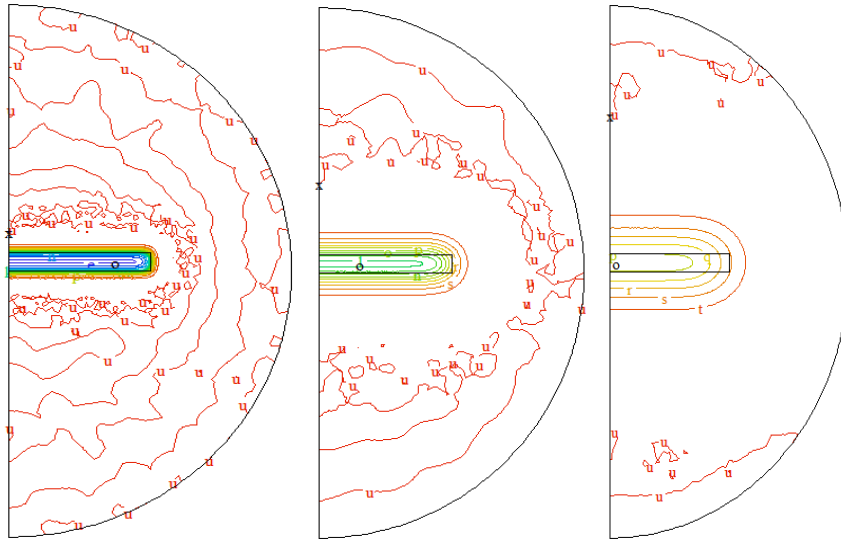


Рис. 4. Еволюція поля температур в басейні розплаву з холодним стержнем для моментів часу відповідно: 10с, 90с і 300с

Це добре видно також з детальної картини процесу, показаної на Рис. 5, 6. Потім протягом 10 секунд температура всередині стержня істотно зростає і далі в басейні розплаву повільно падає температура, а в стержні зростає.

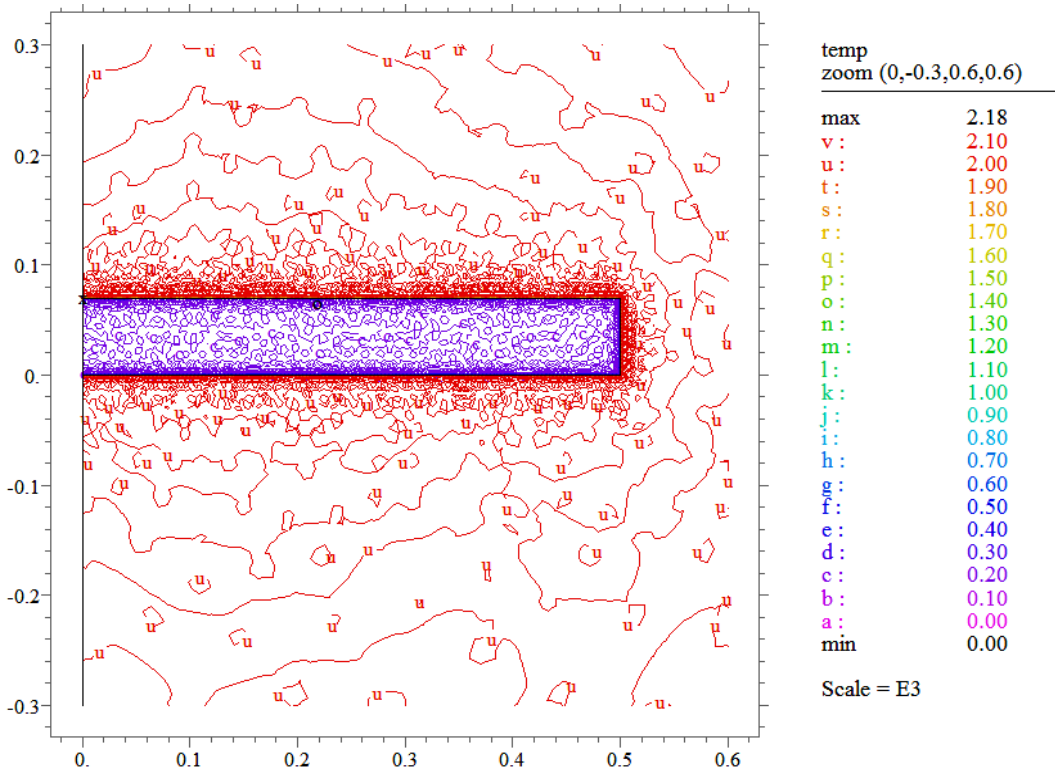
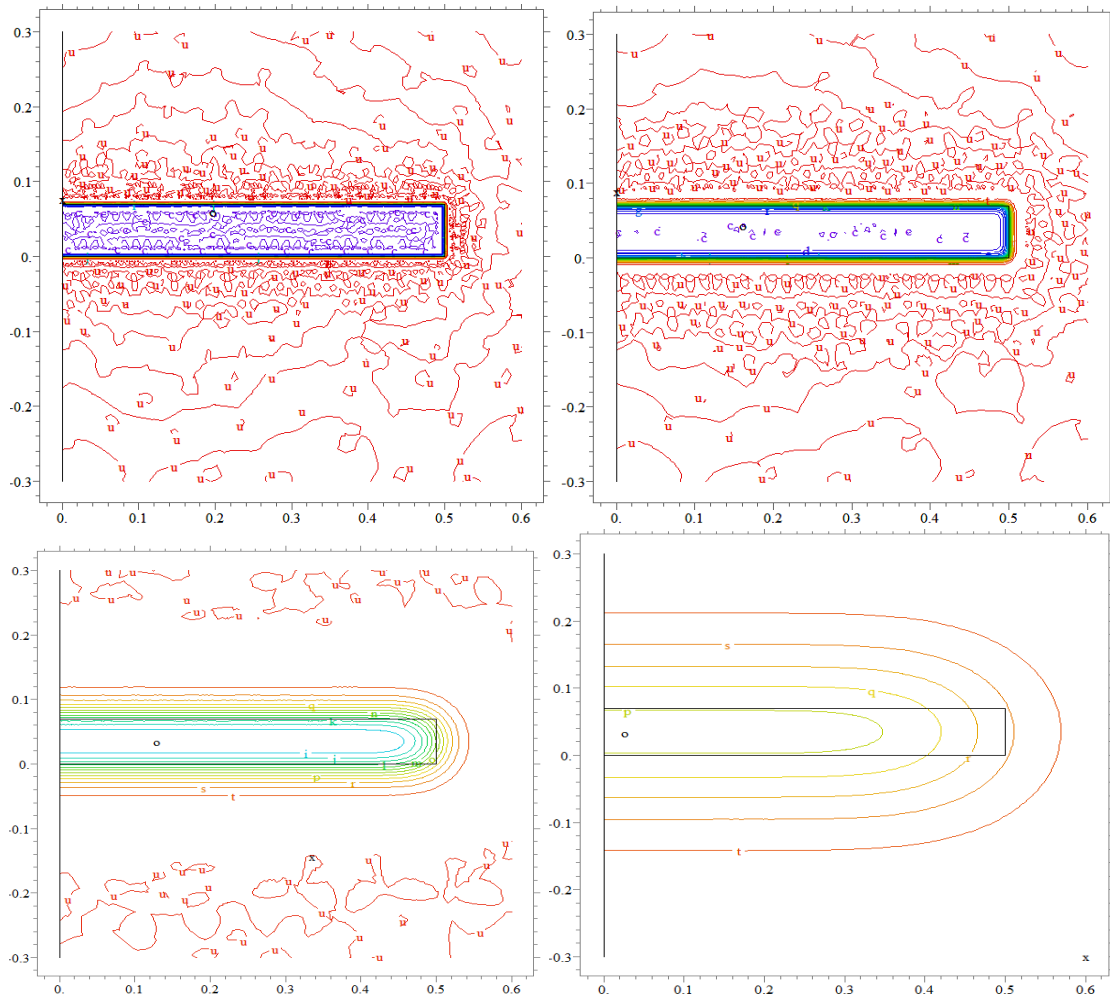


Рис. 5. Початкове поле температур в басейні розплаву



**Рис. 6. Детальна картина еволюції поля температур в басейні розливу:
після 0,1с, після 1с, 30с та 300с, відповідно**

При цьому спочатку навколо диска розплав застигає при більш високій температурі, ніж початкова температура стержня. А в кінці процесу увесь стержень розплавлюється, і температура в басейні вирівнюється. Динаміка зміни температури в розрізі стержня показана на Рис. 7, 8:

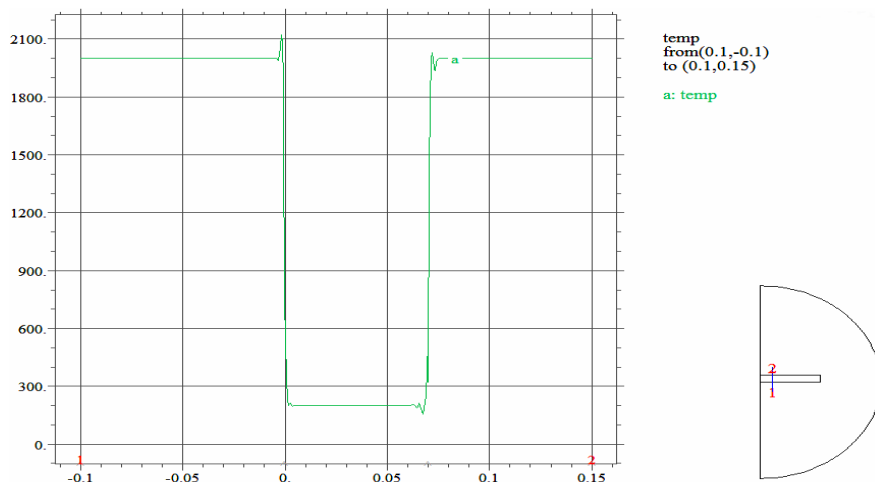


Рис. 7. Зміна температури в розрізі стержня в початковий момент часу

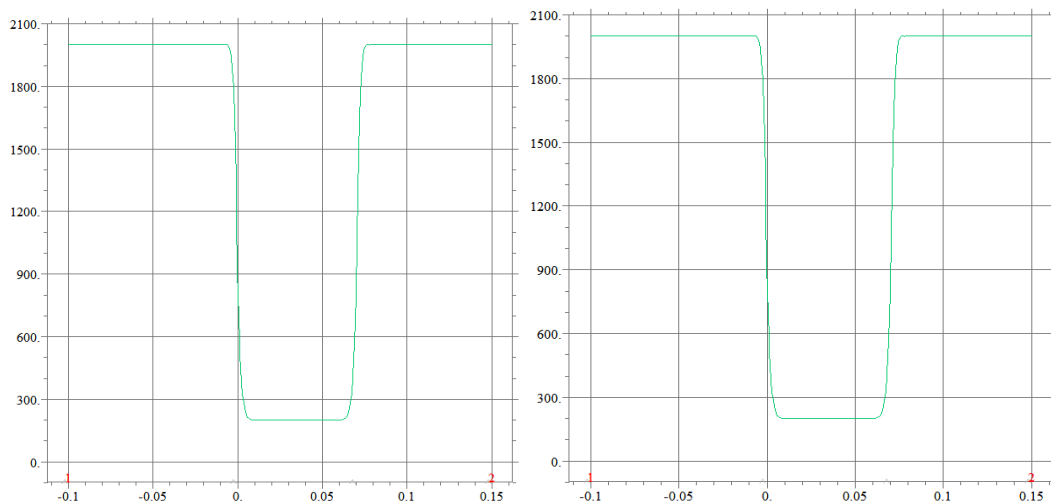


Рис. 8. Зміна температури в розрізі стержня в моменти часу $0,1\text{с}$ та 1с

З представлених Рис. 7, 8 видно, що за $0,1$ секунди температура поверхні стержня лише незначно піднімається, а температура поверхневого шару розплаву трохи падає. І потім до 1 секунди картина зберігається, тільки область трохи розширюється. За 30 секунд температура всередині стержня значно підвищується, так що мінімальна температура дорівнює 700°C .

Детальна картина еволюції температурних фронтів показала цікаву особливість поведінки системи, яку можна назвати новим явищем райдужного розплавлення диска в басейні високотемпературного розплаву з різким завершальним переходом твердого нагрітого стержня в розплавлений стан, змішуючись з басейном. Райдуга має з самого початку три чітких тонких зони, які охоплюють стержень, і чітко окреслені границі, а на завершальній стадії, перед розплавленням стержня, утворюється чотири зони, які візуально відповідають приблизно 20 , 40 , 60 , 80% твердої фази. Це явище можна пояснити аномалією фізичних властивостей фаз.

Література

1. Казачков И.В. Современное состояние и некоторые проблемы моделирования тяжелых аварий на зарубежных АЭС// Ядерная и радиационная безопасность. – 2003. – № 1. – С. 25-34.
2. Hasan Moghaddam Ali, Kazachkov I.V. Modelling of the corium melt interaction with water and vapour during severe accidents at NPP/ 3rd WSEAS Intern. Conferences, Univ. Of Cambridge, February, 23-25.- 2008.- P. 71-76.
3. Казачков И.В., Али Хасан Могаддам. Моделирование теплогидравлических процессов при тяжелых авариях на АЭС.- Монография. – Киев: НТУУ “КПИ”. – 2008.- 172 с.
4. Али Калванд, И. В. Казачков. Особенности процессов плавления-затвердевания при погружении блоков в расплав высокотемпературного кориума// Ядерная физика та енергетика.- 2009.- Т. 10.- № 2.- С. 178-184.
5. Kolev N.I. Verification of IVA5 computer code for melt-water interaction analysis/ Proc. NURETH-9.- 1999.- P. 90-99.
6. Дворецкий С.И., Ермаков А.А., Иванов О.О. Компьютерное моделирование процессов и аппаратов пищевой, био- и химической технологии в среде FlexPDE.
7. Математическое моделирование тепло-гидравлических процессов, тяжелых аварий на ядерных реакторах// Аналитический обзор РГП НЯЦ РК. – Инв. №83 от 26.10.04г.
8. Петухов С.М., Трахтенгерц М.С., Хасанов Р.Х., Нигматулин Б.И. Прогнозирование тепло-физических свойств расплава активной зоны ядерного реактора. – 1995. – (Препринт № Л11-20/ ЭНИЦ ВНИИАЭС).
9. Самарский А. А. , Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. Либроком. – 2009 г.

УДК 621.039.586:004.942+532

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОГІДРАВЛІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В СИСТЕМАХ ПАСИВНОГО ЗАХИСТУ АЕС ВІД ТЯЖКИХ АВАРІЙ

Корсун А.М., Казачков І.В.

Постановка задачі. Базуючись на розроблених математичних моделях та програмах для їх реалізації на платформі FlexPDE, що представлені у першій статті авторів у даному збірнику, в даній статті розглянуто результати комп'ютерного моделювання теплогідролічних процесів у системі пасивного захисту АЕС від тяжких аварій, яка базується на охолодженні розплаву ядерного палива легкоплавкими металами у під реакторному просторі АЕС. Представлено результати обчислювальних експериментів для пасивних систем з використанням алюмінієвих та сталевих стержнів і блоків.

Одержані результати можуть бути цікавими для вчених та інженерів відповідних галузей, а також для розробників пасивних систем захисту АЕС від тяжких аварій.

Модель з трьома алюмінієвими блоками. Спершу розглядається система з трьох алюмінієвих блоків, показана на Рис. 1-3:

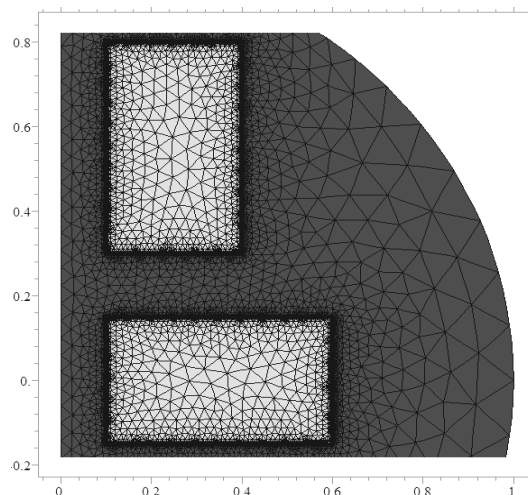
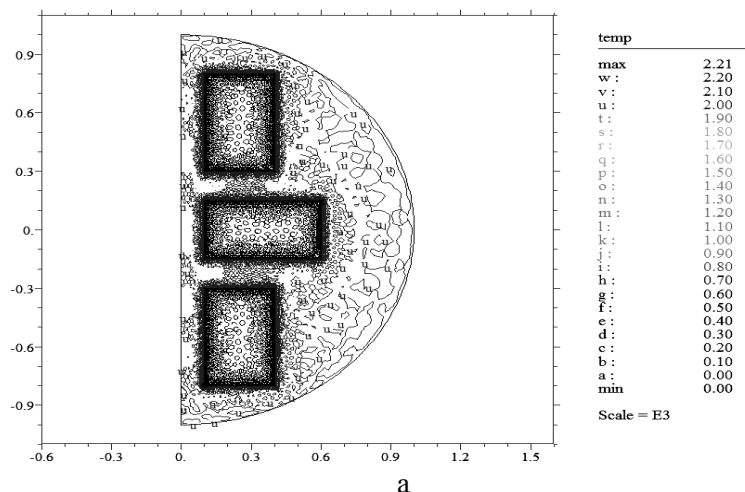


Рис. 1. Адаптивна розрахункова сітка для системи з 3 блоків



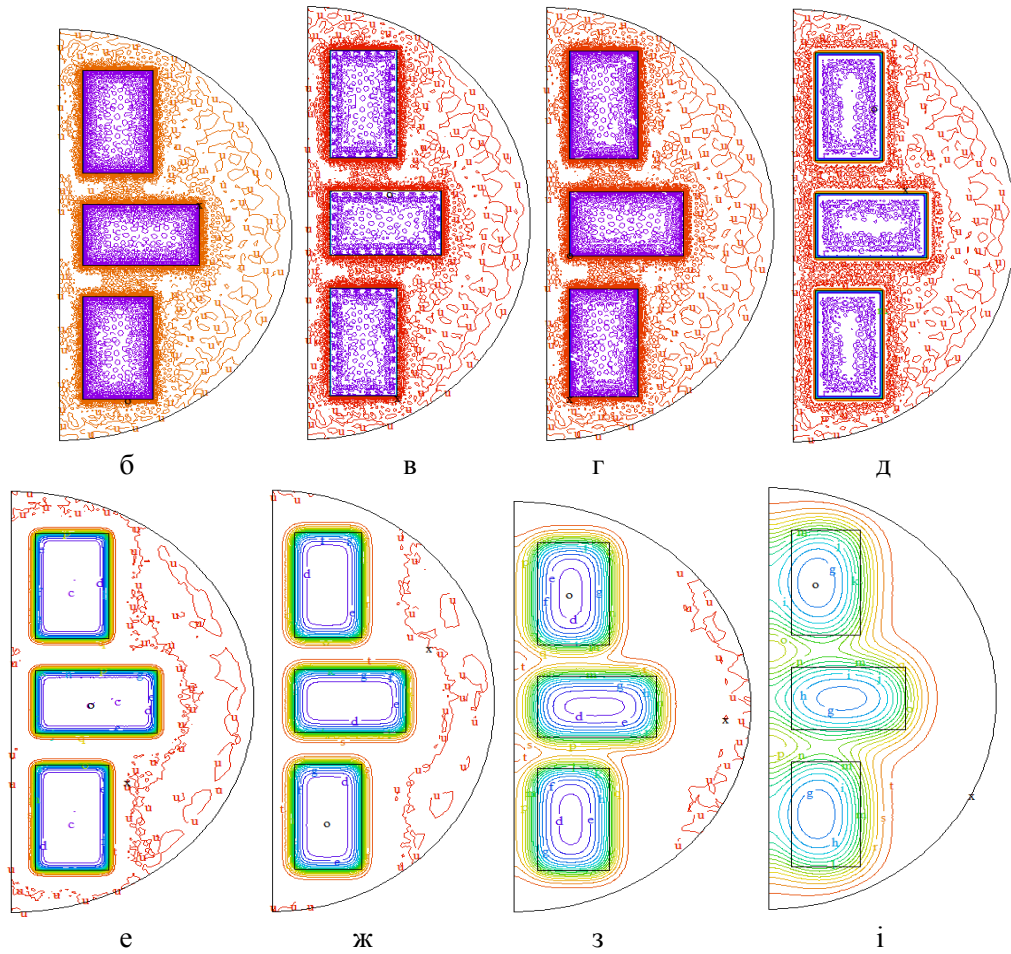
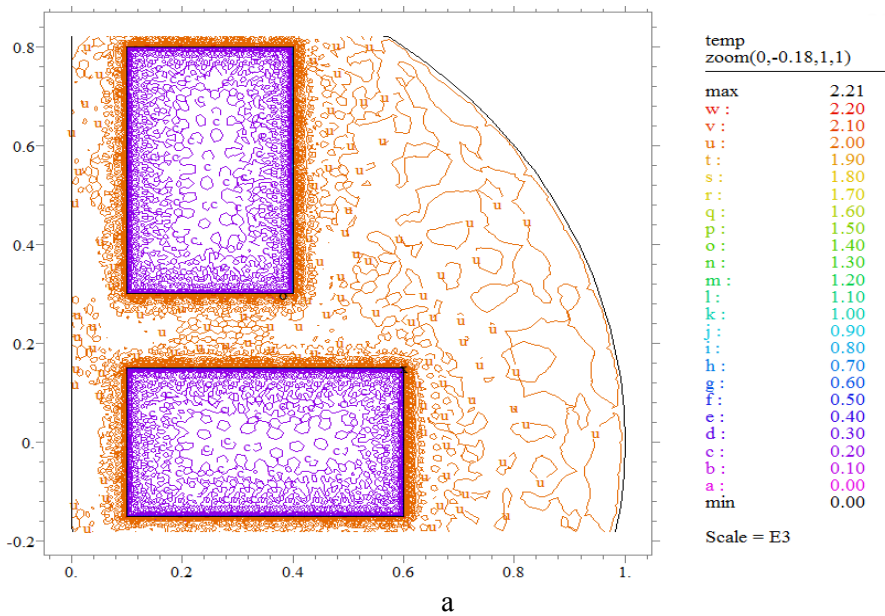


Рис. 2. Еволюція поля температур в басейні розплаву з холодними блоками: а – початковий, б – 10^{-4} с, в – 10^{-2} с, г – 0,1 с, д – 1 с, е – 10 с, ж – 30 с, з – 90 с, і – 300 с



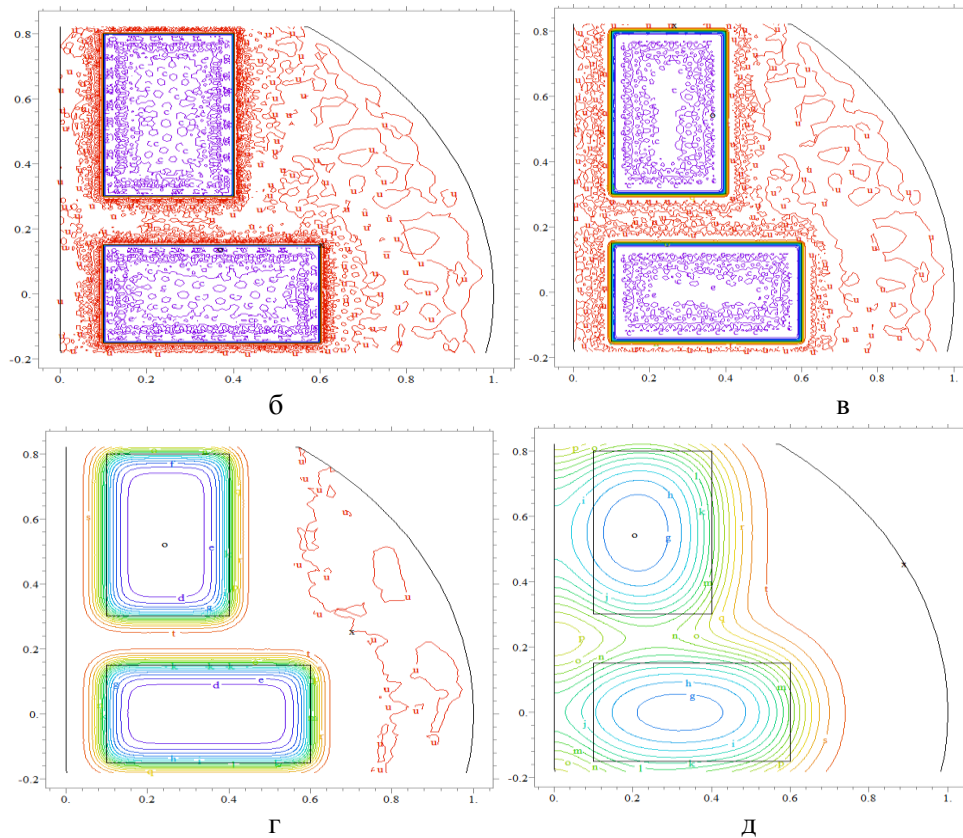


Рис. 3. Детальна картина еволюції поля температур в басейні розплаву: а – початкова картина, б – після 0,1с, в – після 1 с, г – після 30 с, д – після 300 с

Представлені результати демонструють особливості поведінки системи у часі. Приблизно за 5 хвилин область, зайнята легкоплавкими блоками, стає розплавленою з середньою температурою, близькою до температури топлення алюмінію, тоді як в області, де немає блоків, температура розплаву знижується приблизно на 10% від початкової.

Зміна температури в розрізі блоків в моменти часу 30с та 300с, представлена на Рис. 4., показує детальний характер теплових процесів в області. Звідси випливає висновок, що 3 легкоплавких блоки діють недостатньо ефективно на розглянутий порівняно малий проміжок часу щодо всієї області, але досить ефективно локально.

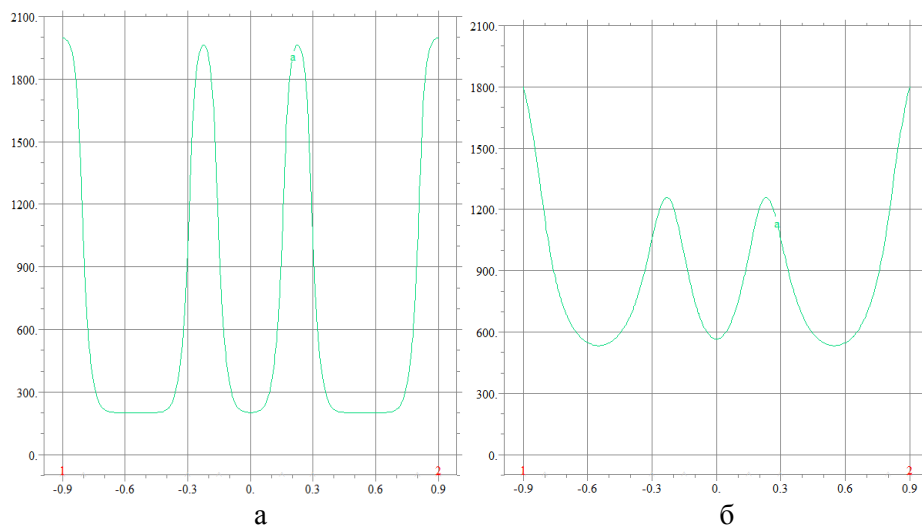


Рис. 4. Зміна температури в розрізі блоків в моменти часу: а – 30с, б – 300.

Також цікаво розглянути обчислені положення границі “тверде тіло – розплав” в різні моменти часу, представлені на Рис. 5-7, з яких видно, що приблизно декілька секунд картина в басейні майже не змінюється: границі переходу від рідкої до твердої фази тонкі і майже не деформовані. Картини для моментів часу 30 та 90 секунд відрізняються тим, що краї блоків округляються і фронт переходу від рідкої до твердої фази такий же тонкий, як і був спочатку, температура всередині та зовні блоків незмінна: всередині дорівнює початковій температурі блоків, зовні – початковій температурі розплаву.

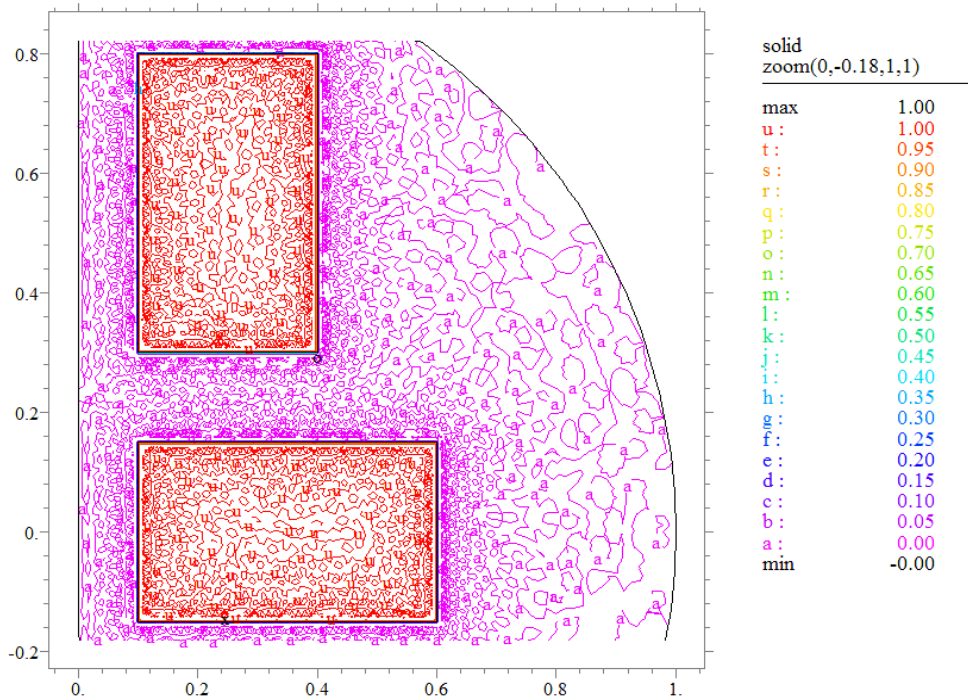


Рис. 5. Положення границі “тверде тіло – розплав” в момент часу 10^{-4} с

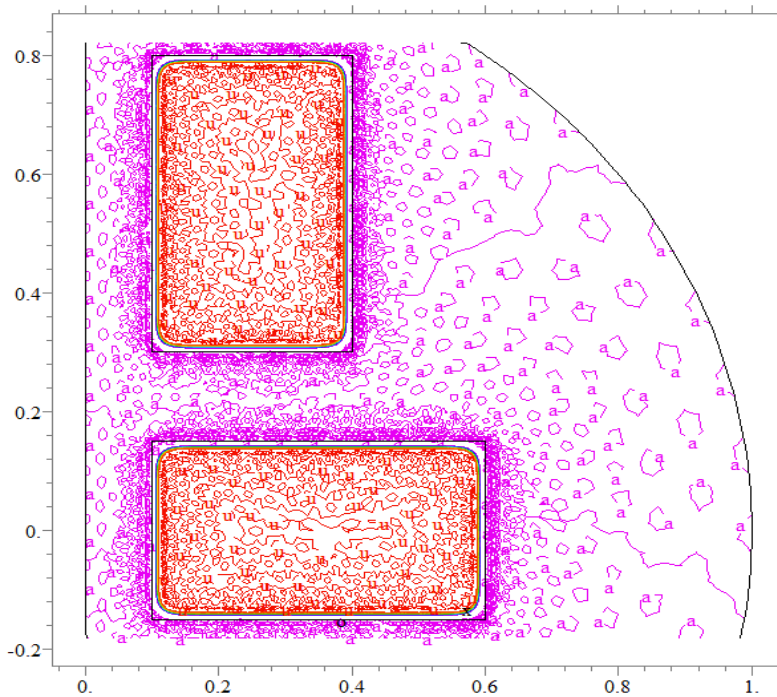


Рис. 6. Положення границі “тверде тіло – розплав” в момент часу 10 с

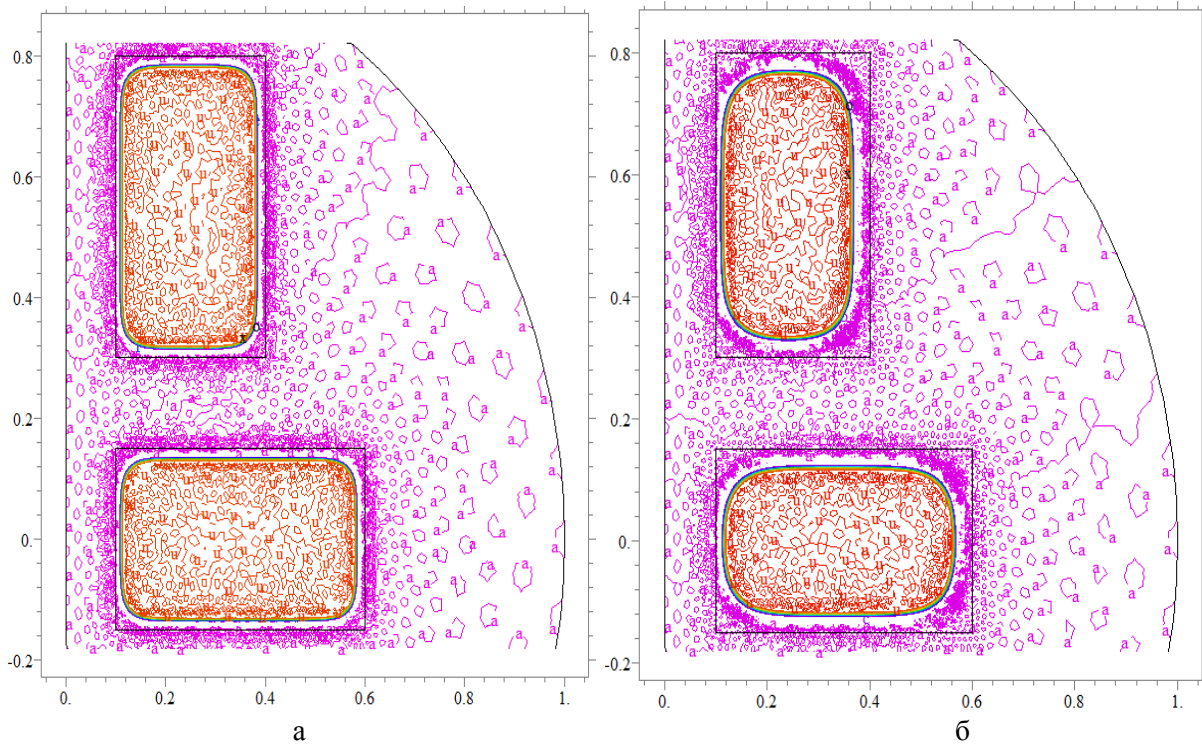


Рис. 7. Положення границі “тверде тіло – розплав” в моменти: а – 30 с, б – 90 с

Таким чином, взаємодія розплаву з блоками зосереджена в тонкому шарі на границі розділу фаз. Це підтверджується також даними на Рис. 8, 9, де показана детальна картина розплавлення алюмінієвих блоків в басейні розплаву з часом.

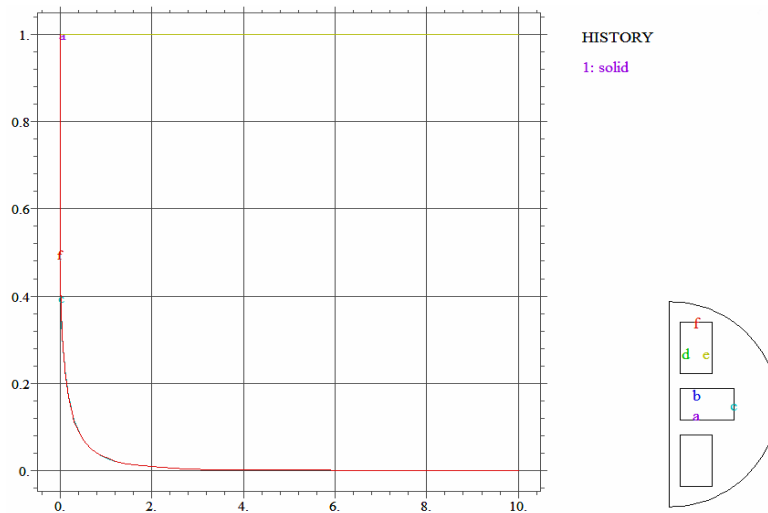


Рис. 8. Зміна вмісту твердої фази в шести точках двох блоків для моменту 10 с

Було детально розглянуто чотири комп'ютерні моделі, які демонструють процес охолодження ядерного палива в реакторі під час тяжкої аварії, за рахунок плавлення інших більш легкоплавких матеріалів. В моделях в якості легкоплавкого матеріалу було використано алюміній. Цей метал має всі необхідні властивості, а саме: невисоку температуру топлення, невелику теплоємність і він є евтектичним матеріалом, який має досить вузьку границю фазового переходу.

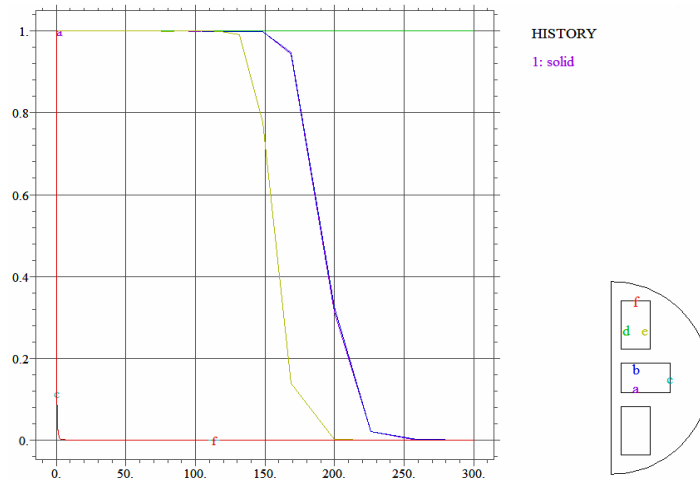


Рис. 9. Зміна вмісту твердої фази в шести точках блоків для моменту 300 с

З отриманих результатів можна зробити наступні важливі висновки:

- 1) алюміній досить швидко плавиться і змішується з розплавом басейну, що робить сам розплав більш стабільним;
- 2) незважаючи на невелику теплоємність, алюміній досить швидко і успішно зменшує загальну температуру системи;
- 3) збільшуючи кількість алюмінієвих стержнів або блоків в басейні з розплавом, можна не тільки істотно знизити температуру системи, але й на деякий час перетворити розплав ядерного палива на шар твердих частинок, які потрібно надалі охолоджувати [1-7].

Моделювання охолодження розплаву коріуму сталевими блоками. Далі дослідимо процес охолодження розплаву коріуму сталевими блоками, зануреними до басейну розплаву. Сталь – сплав заліза з вуглецем, який містить до 2,14 % вуглецю з різними домішками. Загальні характеристики: густина – 7900 кг/м^3 (майже втричі вища за густину алюмінію), температура плавлення – 1520°C (майже втричі вища за температуру плавлення алюмінію), теплоємність – $460 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$, що майже вдвічі нижче, ніж у алюмінію. Сталь – евтектичний матеріал. Це означає, що різниця температур ліквідуса і солідуса невелика і складної багатофазної перехідної зони зі змінними властивостями, характерної для евтектичних матеріалів, не буде.

Адаптивна розрахункова сітка для чисельного моделювання системи наведена на Рис. 10 для випадку 5 сталевих стержнів. Відповідні розрахунки поля температур в системі надано на Рис. 11, 12:

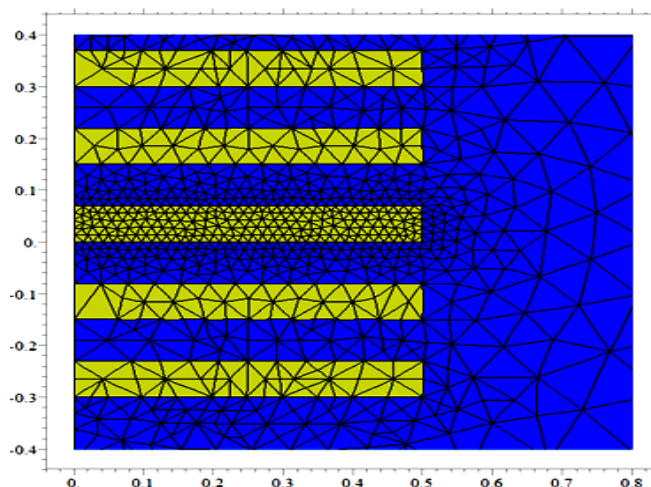


Рис. 10. Адаптивна розрахункова сітка

Відповідні розрахунки для моделі з трьома сталевими блоками представлено на Рис. 13-15. На рис. 13 наведено використану чисельну сітку, побудовану за методом триангуляції.

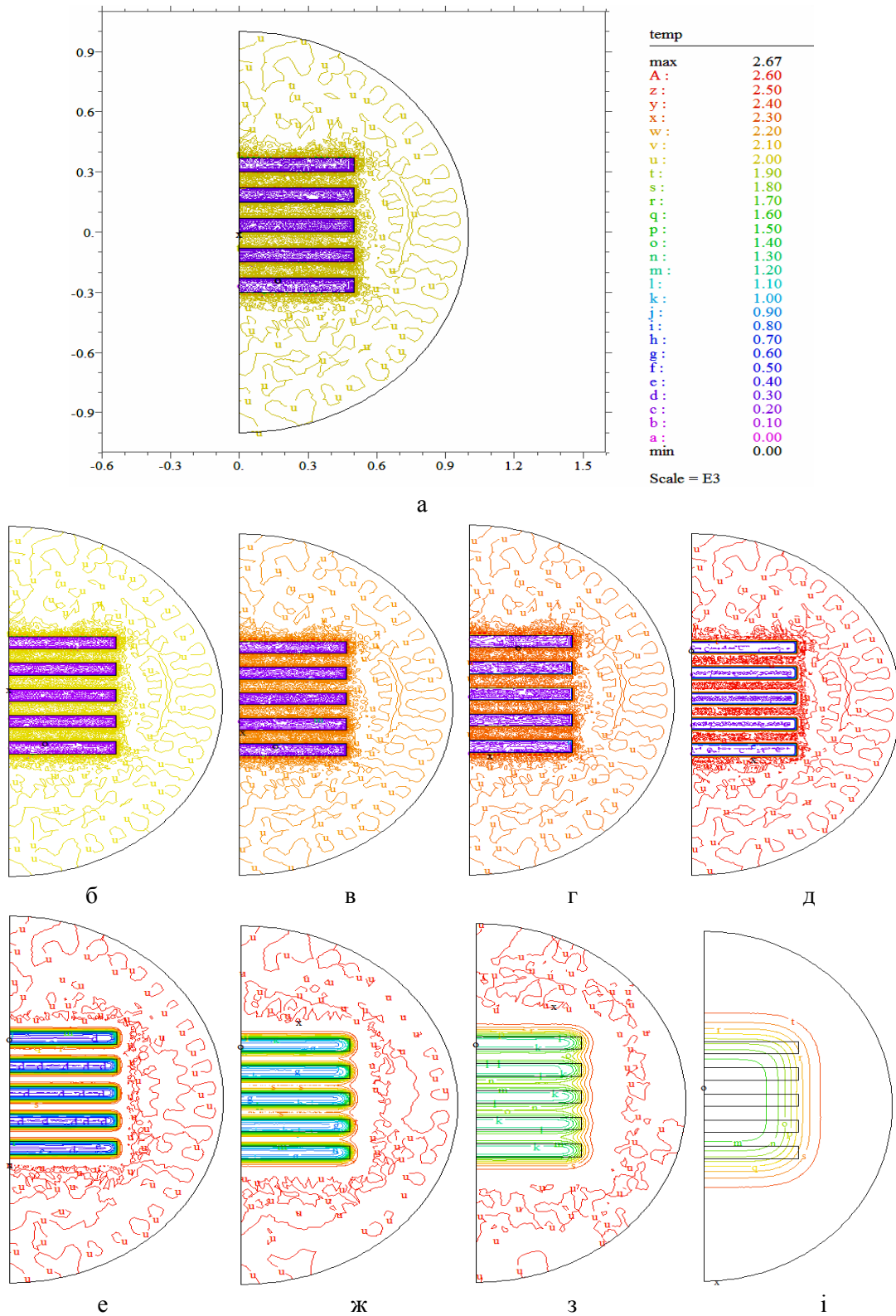


Рис. 11. Еволюція температур в басейні розплаву з холодними стержнями: а – початковий момент, б – 10^{-4} с, в – 10^{-2} с, г – 0,1 с, д – 1 с, е – 10 с, ж – 30 с, з – 90 с, і – 300 с

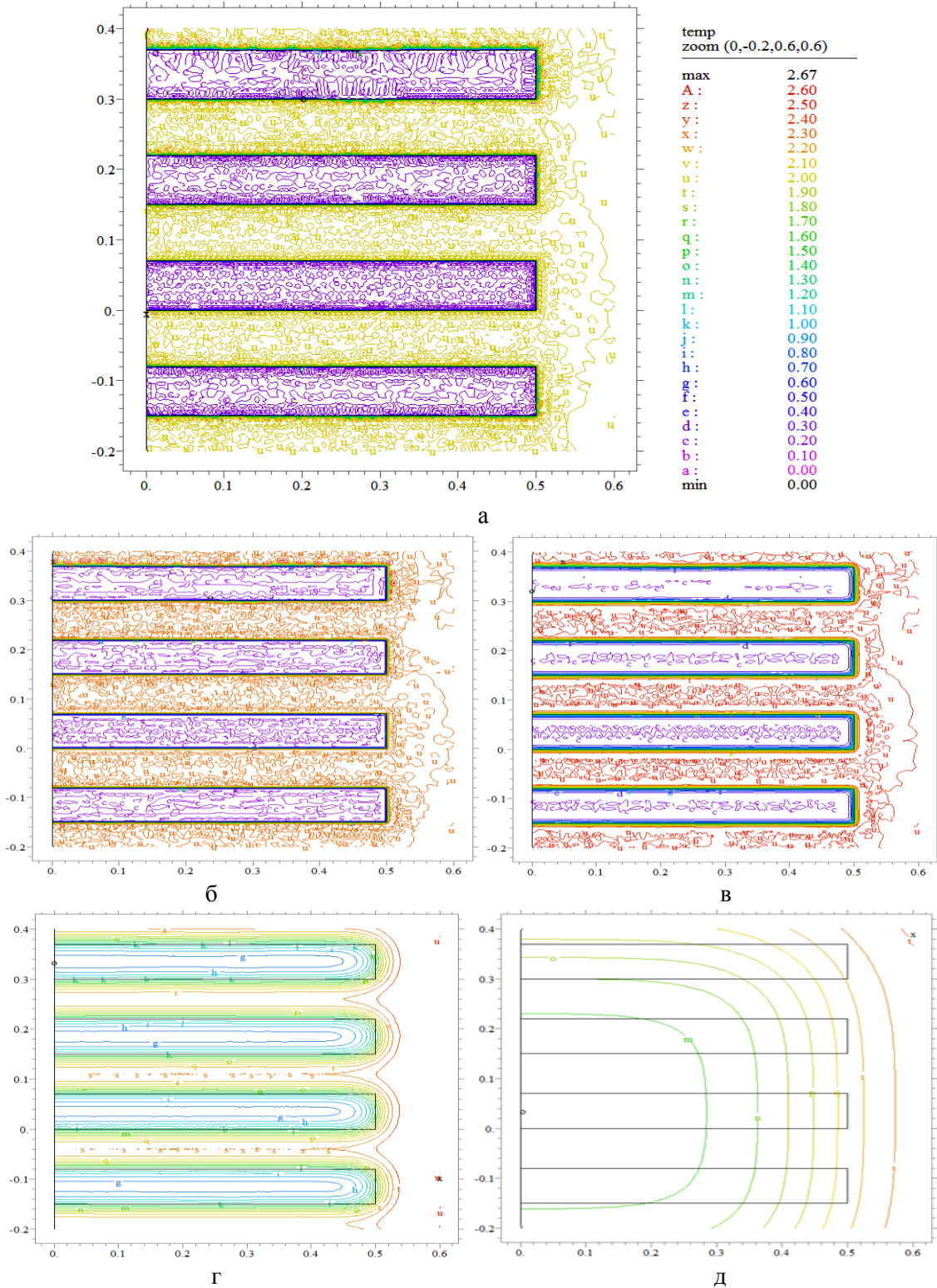


Рис. 12. Детальна картина еволюції поля температур в басейні розплаву:
а – початкова картина, б – після 0,1 с, в – після 1с, г – після 30 с, д – після 300 с

Відповідний розподіл температур в системі на початку процесу охолодження розплаву наведено на Рис. 14.

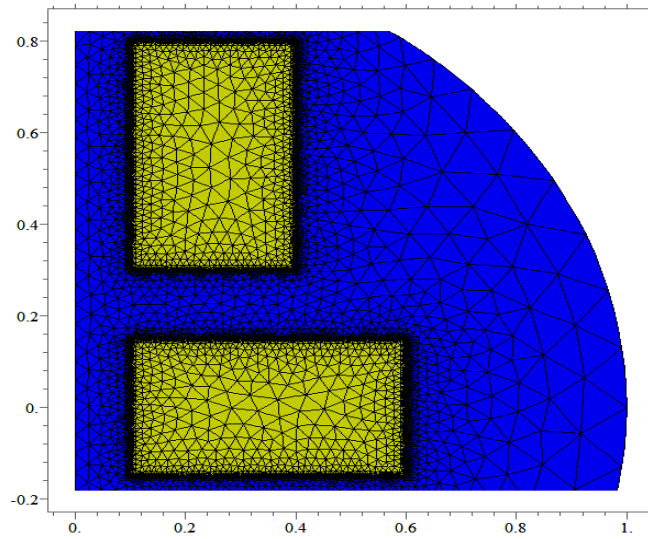


Рис. 13. Адаптивна розрахункова сітка для трьох сталевих блоків

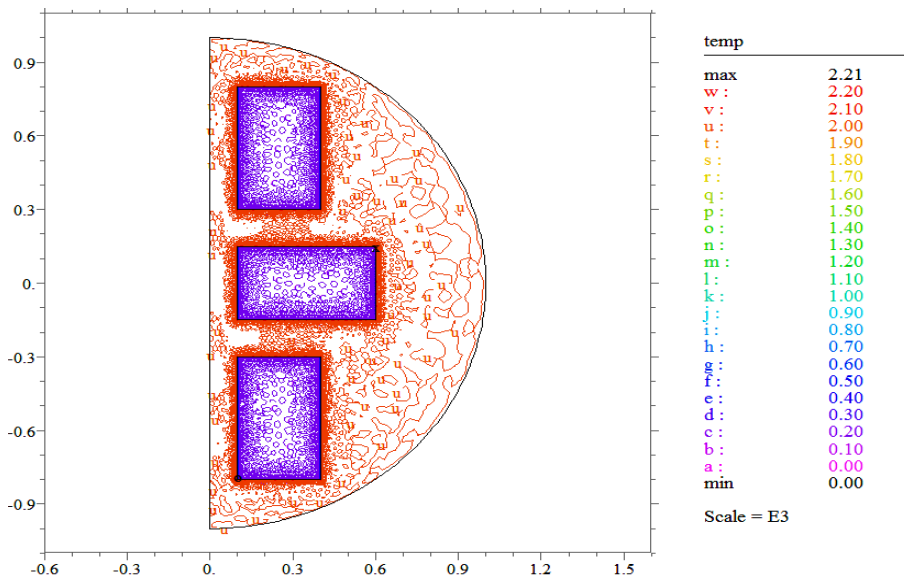
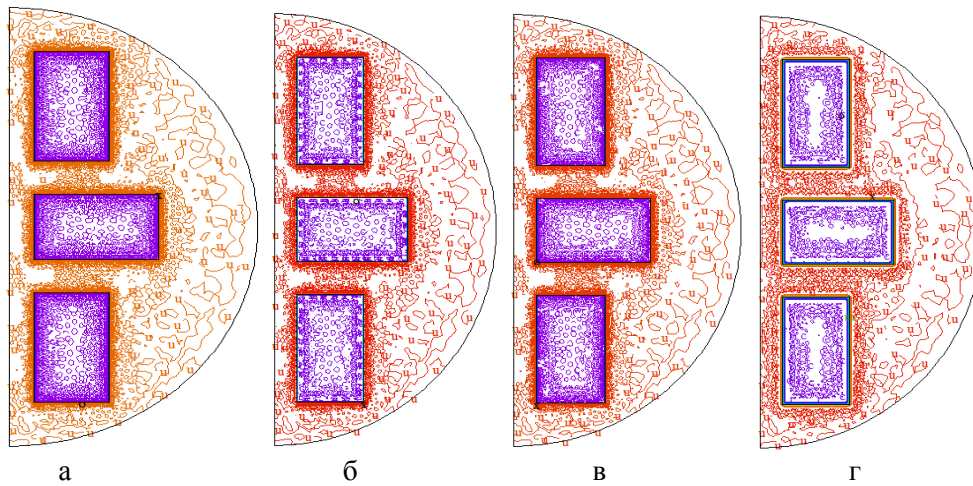


Рис. 14. Поле температур в басейні розплаву з холодними сталевими блоками в початковий момент часу



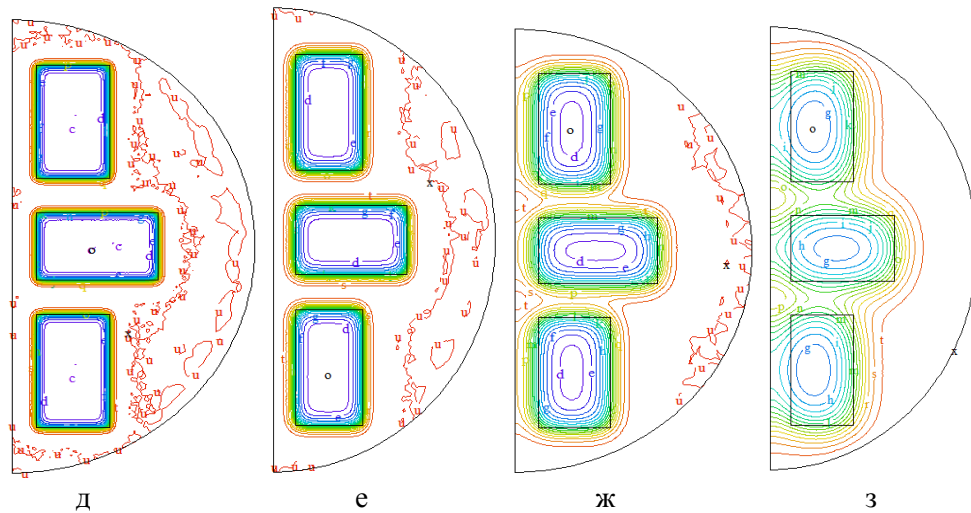


Рис. 15. Еволюція поля температур в басейні розплаву зі сталевими блоками:
 $a - 10^{-4}$ с, $b - 10^{-2}$ с, $v - 0,1$ с, $z - 1$ с, $d - 10$ с, $e - 30$ с, $ж - 90$ с, $з - 300$ с

Алюміній і його сплави мають велику теплопровідність, теплоємність і сховану теплоту плавлення. Теплопровідність алюмінію в три рази вище теплопровідності низьковуглецької сталі; при нагріванні від 20 до 600°C різниця в теплопровідності ще більш зростає. Тому співставлення одержаних результатів показує, що різниця сталі і алюмінію в розглянутих системах пасивного захисту незначна.

В даній роботі було розглянуто кілька типів комп'ютерних моделей, які демонструють процес охолодження ядерного палива під час тяжкої аварії за рахунок плавлення інших більш легкоплавких матеріалів. В якості легкоплавких матеріалів було обрано алюміній і сталь. Отримані результати моделювання дозволили вивчити процеси плавлення та застигання в басейні високотемпературного розплаву, встановити характерний час застигання та плавлення для двох різних матеріалів та дослідити явище радужного застигання та плавлення стержнів і блоків.

Література

1. Kazachkov I.V., Paladino D. and Sehgal B.R. Ex-vessel coolability of a molten pool by coolant injection from submerged nozzles/ 9th Int. Conf. Nucl. Energy Devel. April 8-12, 2001. Nice, France.- P. 43-49.
2. Kazachkov I.V. and Konovalikhin M.J. A Model of a Steam Flow through the Volumetrically Heated Particle Bed// Int. J. of Thermal Sciences.- 2002.- Vol.41.- P. 1077-1087.
3. Kazachkov I.V., Konovalikhin M.J. and Sehgal B.R. Dryout Location in a Low-porosity Volumetrically Heated Particle Bed// J. of Enhanced Heat Transfer. 2001.- Vol.8.- no.6.- P. 397-410.
4. Konovalikhin M.J., Kazachkov I.V. and Sehgal B.R. A model of the steam flow through the volumetrically heated saturated particle bed/ ICMF 2001: Fourth International Conference on Multiphase Flow, New Orleans, Louisiana, U.S.A., May 27 – June 1, 2001.- P. 37-43.
5. Paladino D., Theerthan A. and Sehgal B.R. Experimental Investigation on Debris Coolability by Bottom Injection, ANS, Annual Meeting, Boston, USA.- 1999.- A.88.
6. Kazachkov I.V., Paladino D. and Sehgal B.R. Ex-vessel coolability of a molten pool by coolant injection from submerged nozzles/ 9th Int. Conf. Nucl. Energy Devel. April 8-12, 2001. Nice, France.- P. 67-75.
7. Kazachkov I.V. Konovalikhin M.J. and Sehgal B.R. Coolability of melt pools and debris beds with bottom injection // 2nd Japanese-European Two-Phase Flow Group Meeting, Tsukuba, Japan, 2000.- P. 90-96.

УДК 681.3.068 519.67

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У МАТЕМАТИЧНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМАХ

Фетісов В.С.

Без диференційних рівнянь не може обійтись у своїй професійній діяльності жодний фахівець технічного або фізико-математичного профілю. Диференційні рівняння є основою для фізичних і хімічних розрахунків у науці та промисловості. За їх допомогою здійснюється аналіз систем у динаміці (у часі), обчислення полів тяжіння, електричних зарядів і т.ін.

У статті розглядається як саме здійснюється розв'язування диференційних рівнянь у різних математичних системах. При цьому процес розв'язування для усіх математичних систем демонструється на однакових приладах, що дозволяє порівняти їх можливості у цьому розділі математики.

Maple

Для розв'язування диференційних рівнянь у *Maple* використовується функція *dsolve*, синтаксис якої змінюється залежно від потреби і мети дослідження. У найпростішому вигляді вона має тільки один аргумент:

`dsolve(рівняння)`

де *рівняння* – одне диференційне рівняння *n*-го порядку або система рівнянь першого порядку розмірності *n*.

Інший синтаксис функції містить другий аргумент: невідому функцію:

`dsolve(рівняння, невідома функція)`

Для завдання похідної шуканої функції у диференційному рівнянні застосовують функцію *diff* або команду *D*.

Наведемо приклади розв'язування диференційних рівнянь першого порядку.

Знайти загальний розв'язок звичайного диференційного рівняння першого порядку $y' - ax = 0$.

`dsolve(diff(y(x), x) - a·x = 0)`

$$y(x) = \frac{1}{2} ax^2 + _C1 \quad (2)$$

Якщо значення правої частини рівняння дорівнює нулю, то її взагалі можна опускати. Звичайно, права частина рівняння може містити вираз. Наприклад, загальний розв'язок звичайного диференційного рівняння першого порядку $y' \cdot \sqrt{1-x^2} = 1 - y(x)^2$ буде мати вигляд:

`dsolve(diff(y(x), x) · sqrt(1 - x^2) = 1 - y(x)^2)`

$$y(x) = \tanh(\arcsin(x) + _C1) \quad (2)$$

Як бачимо з наведених прикладів, під час розв'язку диференційних рівнянь *Maple* використовує змінні середовища на зразок *_C1*. З точки зору математики такі змінні є довільними константами, які визначаються з додаткових умов. Для розв'язку диференціального рівняння, що має задовольняти початковій умові синтаксис функції *dsolve* модифікується:

`dsolve({рівняння, початкова умова для функції})`.

Наприклад, для знаходження розв'язування наведеного вище диференційного рівняння з початковою умовою $y(\pi) = 1$ *dsolve* буде мати вигляд:

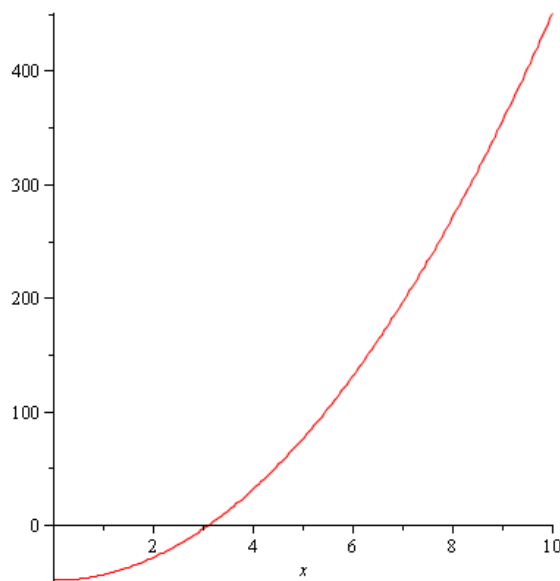
$$\begin{aligned} & \text{dsolve}(\{ \text{diff}(y(x), x) - a \cdot x = 0, y(\text{Pi}) = 1 \}) \\ & y(x) = \frac{1}{2} a x^2 + 1 - \frac{1}{2} a \pi^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Побудуємо графік для отриманого розв'язку при $a=10$.

$$yg := 5 \cdot x^2 + 1 - 5 \cdot \pi^2;$$

$$5x^2 + 1 - 5\pi^2 \quad (4)$$

`plot(yg, x = 0 ..10);`



Нагадаємо, що завдання пошуку рівняння або систем рівнянь, що задовольняє певним початковим умовам, називають *задачею Коші*.

Maple дозволяє розв'язувати диференційні рівняння n -го порядку. Для цього також застосовують функцію *diff*, порядок рівняння для якої задають у функції за допомогою символу "\$". Наприклад розв'язування звичайного диференційного рівняння другого порядку $a \cdot y'' + b \cdot y' = 0$ буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} & de := a \cdot \text{diff}(y(x), x\$2) + b \cdot \text{diff}(y(x), x); \\ & a \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + b \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

`dsolve(de);`

$$y(x) = _C1 + _C2 e^{-\frac{bx}{a}} \quad (5)$$

У цьому прикладі одночасно демонструється можливість запам'ятовування рівняння у змінній з наступним зверненням до нього у функції *dsolve* за іменем. Такий варіант є кращим з

точки зору візуального сприйняття математичних виразів, коли рівняння мають досить громіздкий вигляд.

Функцію *dsolve* можна застосувати і для розв'язування *крайової задачі*, коли диференціальне рівняння має граничні обмеження. Синтаксис функції у цьому разі аналогічний тому, що використовується під час знаходження розв'язування диференційного рівняння з початковою умовою. Для попереднього диференційного рівняння розв'язування може мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \text{cond} &:= y(0) = 0, y(1) = \pi; \\ &y(0) = 0, y(1) = \pi \end{aligned} \quad (6)$$

dsolve({*de*, *cond*});

$$y(x) = -\frac{\pi}{-1 + e^{-\frac{b}{a}}} + \frac{\pi e^{-\frac{bx}{a}}}{-1 + e^{-\frac{b}{a}}} \quad (7)$$

Maple здатний розв'язувати і системи диференційних рівнянь. Наведемо приклад розв'язування системи диференційних рівнянь

$$\begin{cases} y' = y(x) + 2 \cdot z(x) + e^x \\ z' = 2 \cdot y(x) + z(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{dsolve}(\{\text{diff}(y(x), x) = y(x) + 2 \cdot z(x) + \exp(x), \text{diff}(z(x), x) = 2 \cdot y(x) \\ &\quad + z(x)\}, \{y(x), z(x)\}); \\ &\left\{y(x) = -e^{-x} _C2 + e^{3x} _C1, z(x) = e^{-x} _C2 + e^{3x} _C1 - \frac{1}{2} e^x\right\} \end{aligned} \quad (9)$$

Як вище було зазначено, для завдання похідної шуканої функції у диференційному рівнянні може бути застосовано також команда *D*. Використання її дозволяє дещо скоротити вираз рівняння. Синтаксис команди:

(*D@@n*) (функція) (змінна);
де *n* – число, що визначає порядок похідної,
функція – ідентифікатор функції,
змінна – незалежна змінна функції.

Наприклад, похідну третього порядку функції *f(x)* записують так:

(*D@@3*) (*f*) (*x*);

Для наведеного вище прикладу розв'язування системи диференційних рівнянь при застосуванні команди *D* її запис буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} &\text{dsolve}(\{D(y)(x) = y(x) + 2 \cdot z(x) + \exp(x), D(z)(x) = 2 \cdot y(x) + z(x)\}, \\ &\quad \{y(x), z(x)\}); \\ &\left\{y(x) = -e^{-x} _C2 + e^{3x} _C1, z(x) = e^{-x} _C2 + e^{3x} _C1 - \frac{1}{2} e^x\right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Так саме, як і під час розв'язування одного диференційного рівняння, при розв'язуванні систем диференційних рівнянь до них можна застосовувати умови й обмеження:

$$\begin{aligned}
 & dsolve(\{D(y)(x) = y(x) + 2 \cdot z(x) + \exp(x), D(z)(x) = 2 \cdot y(x) + z(x), y(0) \\
 & = 0, z(0) = 1\}, \{y(x), z(x)\}); \\
 & \left\{ y(x) = -\frac{3}{4} e^{-x} + \frac{3}{4} e^{3x}, z(x) = \frac{3}{4} e^{-x} + \frac{3}{4} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x \right\} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Під час розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем *Maple* дозволяє визначати метод або тип розв'язування звичайного диференціального рівняння. Це здійснюється шляхом застосування у функції *dsolve* аргументу, що визначає метод розв'язування диференціальних рівнянь:

dsolve(рівняння або системи рівнянь, невідома функція, метод)

Система пропонує кілька методів розв'язування диференціальних рівнянь, зокрема:

- *exact* – аналітичне рішення (застосовується за замовчуванням);
- *explicit* – розв'язування в явному вигляді;
- *laplace* – розв'язування через перетворення Лапласа;
- *numeric* – розв'язування у чисельному виді.

Розглянемо наведений вище приклад розв'язування системи диференціальних рівнянь у чисельному вигляді.

$$\begin{aligned}
 Rez := & dsolve(\{D(y)(x) = y(x) + 2 \cdot z(x) + \exp(x), D(z)(x) = 2 \cdot y(x) \\
 & + z(x), y(0) = 0, z(0) = 1\}, \{y(x), z(x)\}, numeric);
 \end{aligned}$$

$$\text{proc}(x_rkf45) \dots \text{end proc} \quad (13)$$

Rez(2);

$$[x = 2., y(x) = 302.469830874031, z(x) = 298.978305751091] \quad (14)$$

При цьому розв'язування повертається у вигляді спеціальної процедури, яка за замовчуванням використовує відомий метод Рунге-Куты-Фельберга. Вона називається *x_rkf45* і з'являється у документі при спробі чисельного розв'язування диференціальних рівнянь. Як бачимо з наведеного фрагменту, слід надавати ім'я значенню, що повертає функція *dsolve*, тобто створювати користувацьку функцію. Надалі підстановка довільного числового значення змінної у цю функцію дозволяє одержати чисельні значення функції або функцій.

Maxima

За своїми можливостями в області розв'язування диференціальних рівнянь *Maxima* відчутно поступається *Maple*. Але *Maxima* все ж таки дозволяє розв'язувати звичайні диференціальні рівняння першого і другого порядків, а також їх системи. Для цього – залежно від мети – використовують дві функції. Для загального розв'язування звичайних диференціальних рівнянь використовується функція *ode2*, а для знаходження розв'язків рівнянь або систем рівнянь за початковими умовами – функція *desolve*.

Функція *ode2* має такий синтаксис:

ode2(рівняння, залежна змінна, незалежна змінна);



Для позначення похідних у диференціальних рівняннях використовується функція *diff*. Але у цьому випадку з метою відображення залежності функції від її аргументу вона записується у вигляді *'diff(f(x),x)*, а сама функція – *f(x)*.

Приклад. Знайти загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння першого порядку $y' - ax = 0$.

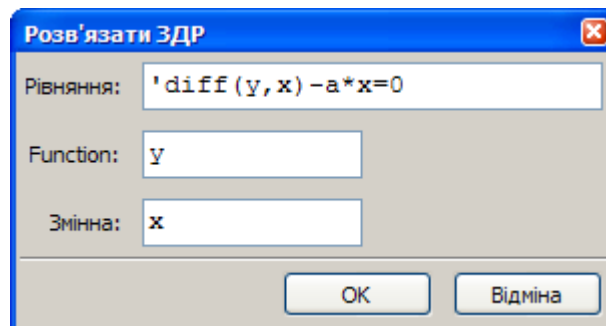

```
(%i1) 'diff(y,x)-a*x=0;
(%o1)  $\frac{d}{d x} y - a x = 0$ 

(%i2) ode2(%o1,y,x);
(%o2)  $y = \frac{a x^2}{2} + \%c$ 
```

Якщо значення правої частини рівняння дорівнює нулю, то її взагалі можна опускати. Звичайно, права частина рівняння може містити вираз.

Як бачимо, під час розв'язку диференціальних рівнянь *Maple* використовує системну змінну `%c`, яка з точки зору математики є довільною константою, що визначається з додаткових умов.

Здійснити розв'язок звичайного диференціального рівняння можна й іншим, більш простим для користувачеві, способом. Для цього слід виконати команду **Рівняння ► Solve ODE** (Розв'язати звичайне диференціальне рівняння) і вікні “Розв'язати ЗДР” ввести аргументи функції `ode2`.



Maxima дозволяє розв'язувати диференціальні рівняння другого порядку. Для цього також застосовують функцію `ode2`. Для позначення похідних у диференціальних рівняннях використовується функція `diff`, у який додають ще один аргумент – порядок рівняння: `'diff(f(x),x,2)`. Наприклад розв'язування звичайного диференціального рівняння другого порядку $a \cdot y'' + b \cdot y' = 0$ буде мати вигляд:

```
(%i28) 'diff(y(x),x,2)*a+'diff(y(x),x)*b=0;
(%o28)  $a \left( \frac{d^2}{d x^2} y(x) \right) + b \left( \frac{d}{d x} y(x) \right) = 0$ 

(%i29) ode2(%o28,y(x),x);
Is b zero or nonzero? nonzero;
(%o29)  $y(x) = \%k2 e^{-\frac{b x}{a}} + \%k1$ 
```

Спільно з функцією **ode2** може використовуватися три функції, застосування яких дозволяє знайти розв'язування для певних обмежень на підставі загального розв'язування диференціальних рівнянь, одержаного функцією **ode2**:

1. **ic1**(результат роботи функції **ode2**, початкове значення незалежної змінної у вигляді $x = x_0$, значення функції у точці x_0 у вигляді $y = y_0$). Призначена для оброблення розв'язування диференціального рівняння першого порядку з початковими умовами.

2. **ic2**(результат роботи функції **ode2**, початкове значення незалежної змінної у вигляді $x = x_0$, значення функції у точці x_0 у вигляді $y = y_0$, початкове значення для першої похідної залежної змінної відносно незалежної змінної у вигляді $(y, x) = dy_0$). Призначена для оброблення розв'язування диференціального рівняння другого порядку з початковими умовами.

3. **bc2**(результат роботи функції **ode2**, початкове значення незалежної змінної у вигляді $x = x_0$, значення функції у точці x_0 у вигляді $y = y_0$, кінцеве значення незалежної змінної у вигляді $x = x_n$, значення функції у точці x_n у вигляді $y = y_n$). Призначена для розв'язування крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку.

Докладно із синтаксисом цих функцій можна ознайомитися у документації до системи.

Здійсимо розв'язування задачі Коші для рівняння першого порядку $y' - ax = 0$ з початковою умовою $y(\pi) = 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{\color{red}(\%i43)} \text{'diff(y,x)-a*x=0;} \\ \text{\color{red}(\%o43)} \frac{d}{d x} y - a x = 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{\color{red}(\%i44)} \text{ode2(\%,y,x);} \\ \text{\color{red}(\%o44)} y = \frac{a x^2}{2} + \%c \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{\color{red}(\%i45)} \text{ic1(\%,x=\%pi,y=1);} \\ \text{\color{red}(\%o45)} y = \frac{a x^2 - \pi^2 a + 2}{2} \end{array} \right.$$

Наведемо приклад розв'язування крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку $y'' + y = x$ з початковими умовами $y(0) = 0; y(4) = 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{\color{red}(\%i38)} \text{'diff(y,x,2)+y=x;} \\ \text{\color{red}(\%o38)} \frac{d^2}{d x^2} y + y = x \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{\color{red}(\%i39)} \text{ode2(\%,y,x);} \\ \text{\color{red}(\%o39)} y = \%k1 \sin(x) + \%k2 \cos(x) + x \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{\color{red}(\%i40)} \text{bc2(\%,x=0,y=0,x=4,y=1);} \\ \text{\color{red}(\%o40)} y = x - \frac{3 \sin(x)}{\sin(4)} \end{array} \right.$$

Слід мати на увазі, що досить часто диференціальні рівняння система розв'язати не може. Наприклад при спробі знайти загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння першого порядку $y' \cdot \sqrt{1-x^2} = 1 - y(x)^2$ маємо таке:

```
(%i5) 'diff(y,x)*sqrt(1-x^2)=1-y(x)^2;
(%o5)  $\sqrt{1-x^2} \left( \frac{d}{dx} y \right) = 1 - y(x)^2$ 

(%i6) ode2(%y,x);
subst: cannot substitute  $xx$  for operator  $y_{new}$  in expression  $y_{new}(x)$ 
```

У таких випадках *Maxima* або видає повідомлення про помилку (як у цьому прикладі), або просто повертає значення *false*.

Інший варіант розв'язування звичайних диференціальних рівнянь першого і другого порядків призначений для пошуку рішень з початковими умовами. Він реалізується за допомогою функції *desolve*.

Синтаксис функції:

```
desolve(рівняння, змінна);
```

Якщо здійснюється розв'язування системи диференціальних рівнянь або змінних кілька, то рівняння та/або змінні подаються у вигляді списку:

```
desolve([список рівнянь], [змінна1, змінна2, ...]);
```

Так саме і як для попереднього варіанту для позначення похідних у диференціальних рівняннях використовується функція *diff*, яка має вигляд 'diff(f(x),x).

Початкові значення для змінної надаються функцією *atvalue*. Ця функція має такий синтаксис:

```
atvalue(функція, змінна=точка, значення у точці);
```



У даному випадку передбачається, що значення функцій та (або) їх похідних задаються для нуля, тому синтаксис функції *atvalue* має вигляд:

```
atvalue(функція, змінна=0, значення у точці "0");
```

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння першого порядку $y' = \sin(x)$ з початковою умовою $y(0) = 4$.

```
(%i33) 'diff(y(x),x)=sin(x);
(%o33)  $\frac{d}{dx} y(x) = \sin(x)$ 

(%i32) atvalue(y(x),x=0,4);
(%o32) 4

(%i34) desolve(%o33,y(x));
(%o34)  $y(x) = 5 - \cos(x)$ 
```

Зауважимо, що і за відсутності початкової умови функція *atvalue* також спрацює і видасть результат:

```
(%i10) desolve(%y(x));
(%o10)  $y(x) = -\cos(x) + y(0) + 1$ 
```

Це дозволяє здійснити перевірку розв'язування для конкретного початкового значення. Дійсно, підставляючи до одержаного результату значення $y(0) = 4$, як раз і отримуємо результат $y(x) = 5 - \cos(x)$.

Функція *desolve* дає змогу розв'язувати системи диференціальних рівнянь з початковими умовами.

Наведемо приклад розв'язування системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y' = y(x) + 2 \cdot z(x) + e^x \\ z' = 2 \cdot y(x) + z(x) \end{cases} \text{ з початковими умовами } y(0) = 0; z(0) = 1 .$$

```
(%i13) de1:'diff(y(x),x)=y(x)+2*z(x)+%e^x;
(%o13)  $\frac{d}{dx} y(x) = 2 z(x) + y(x) + e^x$ 

(%i14) de2:'diff(z(x),x)=2*y(x)+z(x);
(%o14)  $\frac{d}{dx} z(x) = z(x) + 2 y(x)$ 

(%i16) atvalue(y(x),x=0,0); atvalue(z(x),x=0,1);
(%o16) 0
(%o17) 1

(%i18) desolve([de1,de2],[y(x),z(x)]);
Is g34439-1 positive, negative, or zero? positive;
(%o18)  $[y(x) = \frac{3 e^{3x}}{4} - \frac{3 e^{-x}}{4}, z(x) = \frac{3 e^{3x}}{4} - \frac{e^x}{2} + \frac{3 e^{-x}}{4}]$ 
```

Mathcad

На відміну від символьних систем *Maple* і *Maxima*, де розв'язування диференціальних рівнянь може здійснюватися як символьному, так і у чисельному вигляді, в *Mathcad* така операція виконується тільки чисельно.

Методика розв'язування дещо нагадує розв'язування рівнянь з невідомими за допомогою функції *find*. Так саме рівняння записуються після ключового слова *given* (дано), а для введення знака рівності в рівняннях використовується комбінація <Ctrl>+<=>.

Розв'язування диференціальних рівнянь, які є *лінійними* відносно старшої похідної, здійснюється за допомогою функції *odesolve*. На відміну від інших функцій, призначених для розв'язування диференціальних рівнянь, ця функція дозволяє записувати ці рівняння у природному

вигляді.  Знак похідної вводиться комбінацією клавіш <Ctrl>+<F7>.

У найпростішому варіанті звернення до функції *odesolve* здійснюється за таким синтаксисом: *odesolve* (змінна, за якою відбувається інтегрування, межі початку і кінця інтервалу інтегрування)

Функція *odesolve* повертає множину чисельних значень розв'язку.

Приклад.

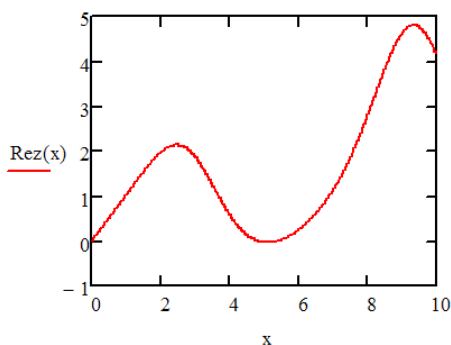
Given

$$y''(x) - \sin(x) \cdot y'(x) + y(x) = \frac{x}{2 \cdot \pi}$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

Rez := Odesolve(x, 4·π)



У такий спосіб розв'язують задачу Коші, крайову задачу тощо.

Для розв'язування *нормальних систем* звичайних диференціальних рівнянь у чисельному вигляді у *Mathcad* використовують функцію *rkfixed*. Ця функція застосовує для цього метод Рунге-Куты в його класичному вигляді. Обмеження, що накладаються функцією на рівняння, є тими самими обмеженнями, які на них накладає метод Рунге-Куты. Алгоритм Рунге-Куты є ітераційним, тобто для обчислення значення функції із заданою точністю треба виконати обчислення кілька разів, і для кожного наступного обчислення використовуються результати попереднього.

Синтаксис функції:

$F := \text{rkfixed}(Y, x_0, x_n, N, f)$,

де:

Y – вектор початкових умов,

x_0 – початкове значення аргументу,

x_n – кінцеве значення аргументу,

N – кількість точок, що розраховуються на інтервалі від x_0 до x_n ,

f – ім'я функції, що містить праву частину диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь.

Повертає функція матрицю розв'язків, принципи побудови якої буде розглянуте нижче.

Приклад. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = \sin(xy)$ на інтервалі $[0, \pi]$ з початковою умовою $y_0 = 1$. Кількість точок становить 20.

Розв'язування має такий вигляд.

 ORIGIN := 1

Початкова умова $y_1 := 1$

$D(x, y) := \sin(x \cdot y)$

$Y := \text{rkfixed}(y, 0, \pi, 20, D)$

	1	2
1	0	1
2	0.157	1.012
3	0.314	1.05
4	0.471	1.115
5	0.628	1.208
6	0.785	1.331

Розглянемо це розв'язування. Як вище було зазначено, функція *rkfixed* має п'ять обов'язкових аргументів.

Перший аргумент є вектором початкових умов. Оскільки маємо тільки одну таку умову ($y_0 = 1$), то шляхом надання значення "1" першому елементу вектора y , ми автоматично і створюємо цей вектор. Зауважимо, що нумерація елементів вектора має починатися саме з одиниці, тому змінюємо значення системної змінної ORIGIN на одиницю.

Наступні два аргументи є початковим і кінцевим значенням інтервалу $[0, \pi]$.

Четвертий елемент визначає кількість точок на інтервалі, яка згідно умов завдання становить "20".

Останній аргумент є функцією від незалежної змінної x і розв'язків y , яка є правою частиною рівняння.

Результати функції записуємо у довільну змінну Y . Така змінна завжди є таблицею, перший стовпчик якої містить значення незалежної змінної x , другий – відповідні значення розв'язування диференційного рівняння або їх системи. Наступні стовпчики містять значення похідних зростаючим порядком.

Отже для нашого прикладу функція *rkfixed* повернуло матрицю для 20 значень (рядків), кількість яких відповідає кількості точок на інтервалі і два стовпця, перший з яких містить значення змінної x , а другий – відповідні значення розв'язування.

Так за допомогою функції *rkfixed* розв'язуються завдання для рівнянь першого порядку. Для рівнянь вищих порядків потрібно привести їх до відповідного завдання для нормальних систем.

Приклад. Розв'язати задачу Коші для диференційного рівняння $y' = e^{-xy}$ на інтервалі $[0,3]$ з початковими умовами $y(0) = 1, y'(0) = 1$. Кількість точок становить 30.

Оскільки задача Коші для рівняння другого порядку зводиться до задачі Коші для системи з двох рівнянь, то виконаємо необхідні перетворення: $y_1 = y, y_2 = y'$. Звідси: $y_1' = y_2, y_2' = e^{-xy_1}, y_1(0) = 1, y_2(0) = 1$. Після цього розв'язування має такий вигляд.

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ e^{-x \cdot y_1} \end{pmatrix}$$

$$Y := \text{rkfixed}(y, 0, 3, 30, D)$$

	1	2	3
1	0	1	1
2	0.1	1.105	1.095
3	0.2	1.219	1.179
4	0.3	1.34	1.251
5	0.4	1.469	1.313

Scilab

Розв'язування диференційних рівнянь або систем диференційних рівнянь у *Scilab* може здійснюватися тільки у чисельному вигляді.

Для розв'язування застосовується функція *ode*, яка у найпростішому вигляді має такий синтаксис:

$$\text{ode}(Y_0, x_0, C, f)$$

де Y_0 – початкова умова: дійсне число для одного диференційного рівняння для або вектор для системи диференційних рівнянь,

x_0 – початкове значення інтервалу інтегрування: дійсне число для одного диференційного рівняння для або вектор для системи диференційних рівнянь,

C – координати осі x : початкова_координата:крок:кінцева_координата,
 f – функція користувача – права частина рівняння або системи рівнянь.

Результатом роботи функції є множина одержаних чисельних значень розв'язку.

Приклад. Знайти загальний розв'язок звичайного диференційного рівняння першого порядку $y' - 10x = 0$ на інтервалі $[2,10]$ з початковою умовою $y_0 = -1$.

Розв'язування буде складатися з такої послідовності команд:

```
-->function yd=f(x,y), yd=10*x, endfunction;
```

```
-->y0=0; x0=-1;
```

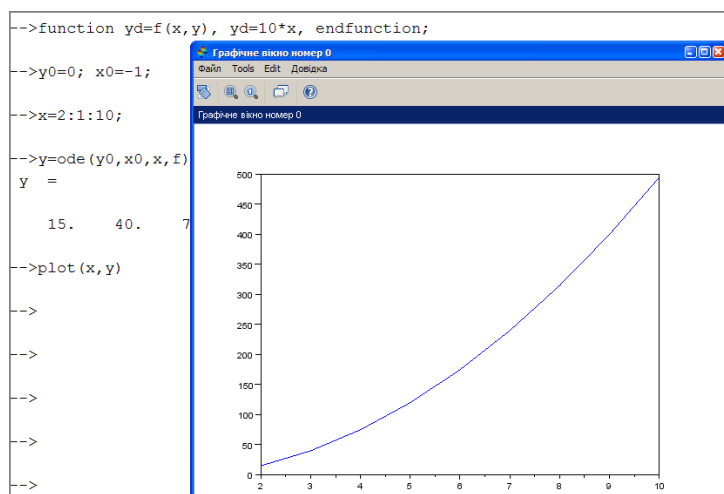
```
-->x=2:1:10;
```

```
-->y=ode(y0,x0,x,f)
```

У першому рядку формується користувацька функція, на яку у функції *ode* здійснюється посилання. Оскільки вона має являти собою праву частину диференційного рівняння, то початкове рівняння перетворюється у вигляд $y' = 10x$.

У другому рядку задається початкова умова $y_0 = -1$, а у третьому – інтервал зміни незалежної змінної $[2,10]$.

Одержимо графічний розв'язок диференційного рівняння. Для цього застосуємо функцію $\text{plot}(x,y)$.



Як неважко замітити, координатна сітка для осі x як раз і відбиває інтервал її зміни $[2,10]$.



Слід мати на увазі, що початкове значення x_0 має бути меншим за початкове значення координати осі x . У протилежному випадку система генерує помилку на зразок наведеної нижче:

```
-->y0=0; x0=3;
-->x=2:1:10;
-->y=ode(y0,x0,x,f)
intdy-- t (=r1) illegal
      where r1 is : 0.30000000000000D+01
      t n est pas entre tcur - hu (= r1) et tcur (=r2)
      where r1 is : 0.2648986971070D+01 and r2 : 0.1594894424187D+01
lsoda-- problems due to intdy. itask=i1,tout=r1
      where i1 is : 1
      where r1 is : 0.30000000000000D+01
      !--error 9999
illegal input
```

Як вище було зазначено, функція *ode* може бути використана для розв'язування систем диференціальних рівнянь.

Приклад. Розв'язати систему диференціальних рівнянь $\begin{cases} y' = \cos(y(x) \cdot z(x)) \\ z' = \sin(y(x) + z(x) \cdot x) \end{cases}$ на інтервалі $[0,10]$ з початковими умовами $y_0 = 0$ і $z_0 = 0$.

Розв'язування буде складатися з такої послідовності команд:

```
-->function difur=syst(x,y)
-->difur=zeros(2,1);
-->difur(1)=cos(y(1)*y(2));
-->difur(2)=sin(y(1)+y(2)*x);
-->endfunction
```

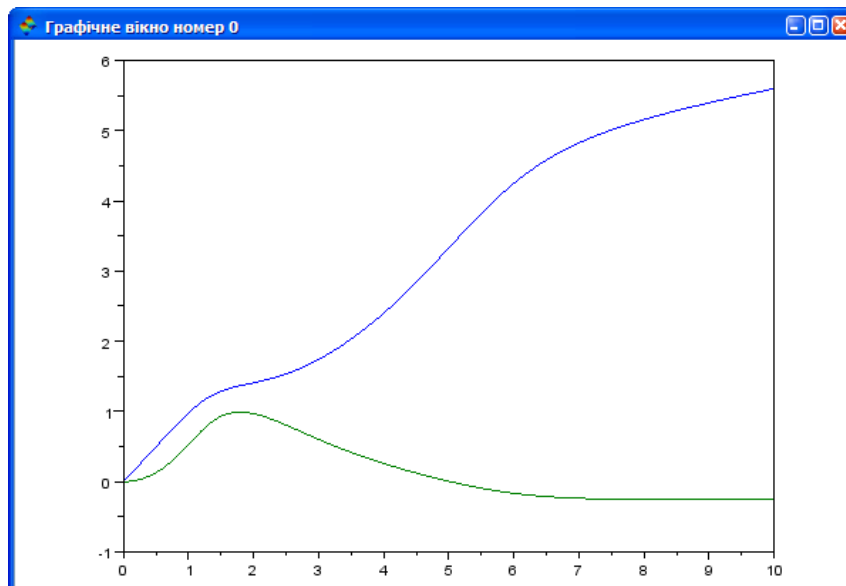
```
-->y0=[0;0]; x0=0;
```

```
-->x=0:0.1:10;
```


```
-->y=ode(y0,t0,x,syst);
```

Як бачимо з наведеного фрагменту, єдиною відмінністю під час розв'язування систем диференціальних рівнянь у порівнянні з розв'язуванням окремих диференціальних рівнянь є створення двох векторів: правих частин рівнянь (*difur*) і початкових умов (*y0*).

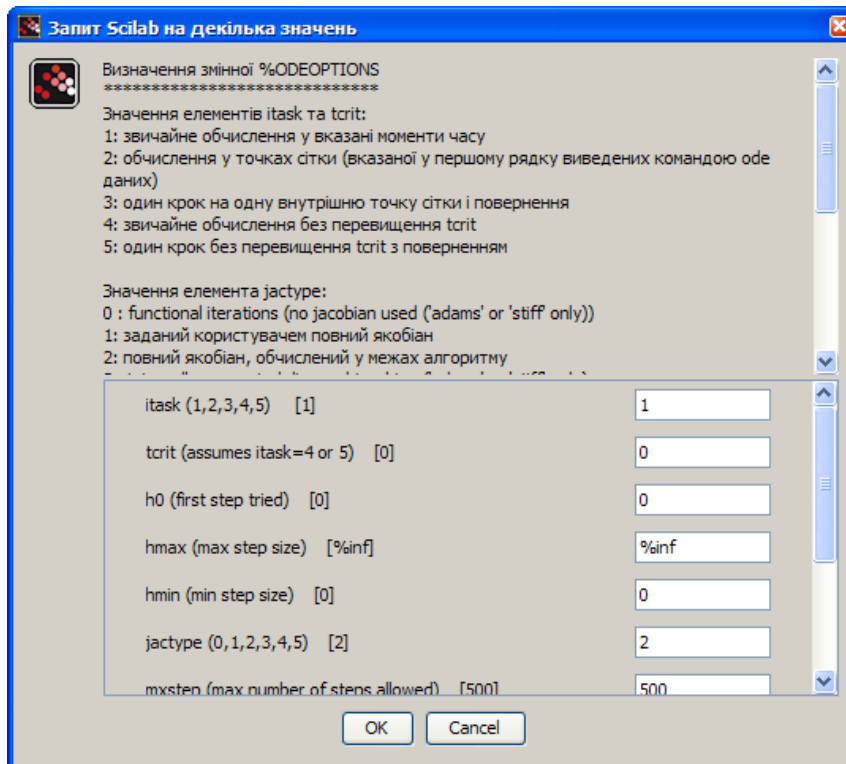
Графічне розв'язування диференціального рівняння за допомогою функції *plot(x,y)* має такий вигляд.



Scilab дозволяє налаштувати “під себе” параметри обчислення для розв'язування диференціальних рівнянь. Для цього він має спеціальний засіб, звернення до якого здійснюється

за функцією *odeoptions()*.  Назва функції вводиться саме маленькими літерами. Після звернення до функції з'явиться діалогове вікно, у якому користувач і задає відповідні параметри обчислення для розв'язування диференціальних рівнянь. Інформація у верхній частині

вікна надає користувачу інформацію відносно призначення і значень за замовчуванням, що використовує система під час розв'язування.



Вище було розглянуто застосування функції *ode* у найпростішому вигляді. Але вона має досить велику кількість аргументів, що відчутно збільшують можливості користувача під час розв'язування диференціальних рівнянь.

Наприклад, автоматично у процесі розв'язування *Scilab* здійснює вибір між методом прогнозування і корекції (nonstiff predictor-corrector) для нежорсткої і методом BDF (Backward Differentiation Formula) Адамса-Мултона для жорстких задач. Але система дозволяє користувачеві і самостійно його визначати. Це здійснюється шляхом застосування у функції спеціального аргументу, що записується першим у списку аргументів і подається у символічному вигляді у подвійних лапках, наприклад “adams”.

Система пропонує кілька методів, зокрема:

- *rk4* – адаптивний метод Рунге-Кута 4-го порядку;
- *rkf* – побудовано на методі Рунге-Кута-Фельберга (Fehlberg's Runge-Kutta) 4-5-го порядку точності із автоматичним оцінюванням похибки;
- *fix* – метод Рунге-Кута з фіксованим кроком.

Висновки

Найкращим інструментом для розв'язування диференціальних рівнянь є *Maple*. Це й не дивно, оскільки із самого початку система створювалась як система символічних обчислень, тому природно, *Maple* “вміє” розв'язувати диференціальні рівняння як у символічному, так і чисельному вигляді, показуючи при цьому дуже непогані результати. Але слід зважувати на те, що *Maple* є комерційною системою, вартість якої є високою.

За своїми можливостями в області розв'язування диференціальних рівнянь *Maxima* відчутно поступається *Maple*. Не всі приклади, що розв'язує *Maple*, вдалося розв'язати за допомогою *Maxima*. Але *Maxima* все ж таки дозволяє розв'язувати звичайні диференціальні рівняння першого і другого порядків, а також їх системи. При цьому вона також “вміє” це

робити як у символьному, так і чисельному вигляді. А достоїнством системи є те, що вона є безкоштовною.

На відміну від символьних систем *Maple* і *Maxima*, де розв'язування диференційних рівнянь може здійснюватися як символьному, так і у чисельному вигляді, в *Mathcad* така операція виконується тільки чисельно. І, незважаючи на те, що за допомогою системи можна розв'язувати у чисельному вигляді складні рівняння, які не здатна розв'язати *Maxima*, слід констатувати, що *Maxima* порівняно з *Mathcad* має два суттєвих плюси: по-перше, вона здатна розв'язувати диференційні рівняння у символьному вигляді, а, по-друге, вона є безкоштовною, в той час як *Mathcad* є дорогою комерційною системою.

Найскромніші можливості розв'язування диференційних рівнянь і систем диференційних рівнянь має *Scilab*. Система також є чисельною, тому здатна здійснюватися це тільки у чисельному вигляді. Причому *Scilab* значно поступається у цьому *Mathcad*. З іншого боку це і не дивно, оскільки *Scilab* орієнтовано на використання в інших напрямках математичних обчислень. Одночасно слід зауважити, що ця система також є безкоштовною, і швидко розвивається, що заставляє сподіватися на появу в наступних версіях більших можливостей для розв'язування диференційних рівнянь.

І останнє. Серед цих математичних систем відсутня одна з провідних – *Mathematica*, яка за своїми можливостями має бути співставна з найкращою із розглянутих у статті систем – *Maple*.

Література

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В., Руденко Е.А. Scilab. Решение инженерных и математических задач. – М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 260 с.
2. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. – М.: ИТ Пресс, 2006. – 496 с.
3. Дьяконов В.П. Энциклопедия Mathcad 2001 и Mathcad 11. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004.
4. Кирьянов Д. Самоучитель Mathcad 12. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
5. Образовательный математический сайт Exponenta.ru. Режим доступа: <http://exponenta.ru/>

УДК 681.3.06

РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КОНТРОЛЮ ЗНАТЬ ЗІ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ТЕМИ “ДИНАМІЧНІ РЯДИ” НА ПЛАТФОРМІ 1С

Фетісов В.С., Гринівський О.В.

У навчальному процесі викладачі здійснюють постійний контроль знань студентів. З метою оперативної оцінки рівня знань студентів створюються різноманітні завдання. Якщо завдання вимагають великого обсягу математичних розрахунків, то для контролю знань викладачу буде потрібно витратити дуже багато часу. З іншого боку, досить часто студенти використовують вже готові роботи своїх “попередників” – студентів старших курсів, які вже розв'язували ці завдання. Тому актуальним є питання створення гнучкого програмного забезпечення за допомогою якого можна було б, по-перше, миттєво змінити варіанти завдань, а, по-друге, оперативно та автоматично отримати розв'язки виданих завдань, які викладач міг би звірити з розв'язками студентів.

З цією метою у межах дипломного проекту студента V-го курсу випуску 2011 р. спеціальності “Інформатика” О. Гринівського “Розробка програмного забезпечення контролю знань зі статистики для теми “Динамічні ряди” на платформі 1С” було створено програмне забезпечення контролю знань студентів для контролю знань зі статистики для теми “Динамічні ряди”.

Для побудови системи контролю знань була вибрана система *ІС: Підприємство*, яка є універсальною системою автоматизації економічної та організаційної діяльності підприємства, а для розробників є гнучким інструментарієм розробки прикладного програмного забезпечення.

Вибір системи був обумовлений також такими чинниками:

1. Інструментарій системи дозволяє швидко створювати стандартні об'єкти (константи, довідники) і містить вже готові засоби керування цими об'єктами, що дозволяє розробнику зосередитися на програмуванні безпосередньо прикладної задачі.

2. Здатність систем, побудованих на платформі *ІС: Підприємство*, зберігати дані.

3. Поширеність, популярність платформи на Україні.

ІС: Підприємство є універсальною системою автоматизації економічної та організаційної діяльності підприємства. Оскільки така діяльність може бути досить різноманітною, система *ІС: Підприємство* може "приспосовуватися" до особливостей конкретної галузі діяльності, в якій вона застосовується, в тому числі і для навчального процесу. Для позначення такої здатності використовується термін "конфігурується", тобто існує можливість налаштування системи на особливості конкретного підприємства і класу вирішуваних завдань. Це досягається завдяки тому, що *ІС: Підприємство* – це не просто програма, яка існує у вигляді певного набору файлів, а сукупність різних програмних інструментів, з якими працюють розробники і користувачі.

Логічно всю систему можна поділити на дві великі частини, які тісно взаємодіють одна з одною: *конфігурацію* і *платформу*, яка керує роботою конфігурації. Платформа є своєрідним "програвачем", а конфігурація – "компакт-диск". Платформа забезпечує роботу конфігурації і дозволяє вносити до неї зміни або створювати власну конфігурацію. Сама по собі платформа не може виконати жодних завдань автоматизації, так як вона створена для забезпечення роботи конфігурацій. Те ж саме з конфігурацією: щоб виконати ті завдання, для яких вона створена, необхідна наявність платформи, що управляє її роботою.

Відповідно до цього розрізняють два режими роботи з системою *ІС: Підприємство*. Режим *ІС: Підприємство* є основним і служить для роботи користувачів системи. У цьому режимі користувачі вносять дані, обробляють їх і отримують підсумкові результати. Режим *Конфігуратор* використовується розробниками та адміністраторами інформаційних баз. Саме цей режим і надає інструменти, необхідні для модифікації існуючої або створення нової конфігурації.

Під час роботи над дипломним проектом було розроблено програмне забезпечення для контролю знань із статистики для розрахунку динамічних рядів і тренду.

Для цього було створено спеціальні документи, в які викладач вводить номер варіанта та початкові дані та документи, в яких відбувається розрахунок і вивід результатів на екран. Слід відмітити, що за необхідністю викладач має можливість не тільки вивести результати розрахунку на екран, але й одержати їх друковану форму.

У документі розраховується усі основні показники рядів динаміки:

- *abs_pl* – Абсолютний приріст (ланцюговий);
- *abs_pb* – Абсолютний приріст (базисний);
- *koef_zl* – Коефіцієнт зростання (ланцюговий);
- *koef_zb* – Коефіцієнт зростання (базисний);
- *temp_pl* – Темп росту (ланцюговий);
- *temp_pb* – Темп росту (базисний);
- *abs1* – Абсолютне значення 1% приросту.

Окремий документ дозволяє розрахувати лінію тренду.

За допомогою створеної конфігурації викладач зможе – практично не витрачаючи зусилля і час – створити необмежену кількість варіантів завдань. При цьому він має змогу в будь-який момент змінити дані, що взагалі виключає можливість використання робіт студентів старших курсів, які вже розв'язували завдання за аналогічними початковими даними.

Нижче демонструються приклади роботи з конфігурацією, що була створена у дипломному проекті.

Рівень	Абсол. приріст (ланц)	Абсол. приріст (базис)	Коеф. зростання (ланц)	Коеф. зростання (базис)	Темп росту (ланц)	Темп росту (базисний)	Абсол. знач. 1% приросту
540.00							
520.00	-20.00	-20.00	0.96	0.96	-3.70	-3.70	5.40
560.00	40.00	20.00	1.08	1.04	7.69	3.70	5.20
640.00	80.00	100.00	1.14	1.19	14.29	18.52	5.60
1 040.00	400.00	500.00	1.63	1.93	62.50	92.59	6.40
1 140.00	100.00	600.00	1.10	2.11	9.62	111.11	10.40
1 140.00		600.00	1.00	2.11		111.11	11.40
1 040.00	-100.00	500.00	0.91	1.93	-8.77	92.59	11.40
740.00	-300.00	200.00	0.71	1.37	-28.85	37.04	10.40
740.00		200.00	1.00	1.37		37.04	7.40
640.00	-100.00	100.00	0.86	1.19	-13.51	18.52	7.40
440.00	-200.00	-100.00	0.69	0.81	-31.25	-18.52	6.40
765.00	-9.09		1.01		0.73		7.95

Рис. 1. Приклад розрахунку показників динамічних рядів в конфігурації для контролю знань із статистики

N	У - рівні ряду	t - час	t ²	y ¹	У1 - теоретичні рівні	
1	199.60	-5.50	30.25	-1 097.80	166.44	
2	185.80	-4.50	20.25	-836.10	168.82	
3	172.30	-3.50	12.25	-603.05	171.20	
4	166.30	-2.50	6.25	-415.75	173.58	
5	154.60	-1.50	2.25	-231.90	175.96	
6	146.80	-0.50	0.25	-73.40	178.34	
7	155.80	0.50	0.25	77.90	180.72	
8	172.00	1.50	2.25	258.00	183.10	
9	184.00	2.50	6.25	460.00	185.48	
10	193.00	3.50	12.25	675.50	187.86	
11	205.90	4.50	20.25	926.55	190.24	
12	218.20	5.50	30.25	1 200.10	192.62	
13						
14	2 154.30			143.00	340.05	2 154.36
15						
16	179.53					
17	2.38					

Рис. 2. Приклад розрахунку тренду в конфігурації для контролю знань із статистики

Література

1. Радченко М. Г. ІС: Підприємство 8.2. Коротко о главном. Новые возможности версии 8.2. – Москва: ООО “ІС-Паблишинг”, 2009. – 416 с.
2. Радченко М. Г. ІС: Підприємство 8.2. Практическое пособие разработчика. Примеры и типовые приемы / М. Г. Радченко, Е. Ю Хрусталева. – Москва: ООО “ІС-Паблишинг”, 2009. – 874с.
3. Ряди динаміки [Електронний ресурс] // Вільна енциклопедія Вікіпедія – Режим доступу до статті: http://uk.wikipedia.org/wiki/Ряди_динаміки.
4. Ряди динаміки [Електронний ресурс] // Енциклопедія економіки – Режим доступу до статті: www.economic.lviv.ua/gospodarstvo/ryadi-dinam-ki.
5. Фетісов В.С. Автоматизоване робоче місце менеджера / Фетісов В. С. – К.: Знання, 2008. – 390 с.

3 Фізика

УДК 535.3,539.2

ДОСЛІДЖЕННЯ СИНГУЛЯРНИХ ПОВЕРХНЕВИХ ПОЛЯРИТОНІВ У ОКСИДІ БЕРИЛІЮ

Венгер Є.Ф., Губерт М.С., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В.

Дослідження поверхневих електромагнітних збуджень (фононних, плазмонних, плазмон-фононних, екситонних, хвилевідних тощо) в оптично-ізотропних кристалах на сьогодні в літературі висвітлено достатньо добре [див., наприклад, 1, 2]. У значно меншій мірі описано властивості поляритонних збуджень в оптично-анізотропних кристалах, серед яких особливої уваги заслуговують так звані сингулярні поверхневі поляритони (СПП). Як показано в роботах [1, 3], СПП можуть існувати лише в оптично-анізотропних монокристалах при виконанні цілої низки додаткових умов, що нехарактерні для інших типів поверхневих збуджень. Можливість використання властивостей сингулярних поверхневих хвиль у різноманітних областях сучасного приладобудування потребує додаткових досліджень їх властивостей та властивостей оптично-анізотропних монокристалів, на поверхні яких збуджуються СПП [4–7].

У роботі вперше проведено дослідження умов, за яких можливе збудження сингулярних поверхневих поляритонів в оптично-анізотропних монокристалах BeO та досліджено їх властивості.

BeO – безколірний кристал, який кристалізується в структурі вюртциту з просторовою групою $S6mc$. Ширина забороненої зони BeO – 10,63 еВ. За температури, меншої 2100 °С, оксид берилію представляє собою стійку α -модифікацію з гексагональними ґратки ($a = 0,26979$ нм; $c = 0,43772$ нм; $z = 2$), а за температур, що перевищують 2100 °С, перетворюється в β -модифікацію з тетрагональними ґратки ($a = 0,475$ нм; $c = 0,274$ нм). Завдяки своїм унікальним фізико-хімічним властивостям (висока теплопровідність і твердість, радіаційна і хімічна стійкість) монокристали BeO останнім часом набувають широкого практичного використання, найбільш вагомими серед яких є виготовлення тиглів, високотемпературних ізоляторів, труб, чохлів для термодар, спеціальної кераміки [8 – 10]. Крім того, монокристали BeO широко використовують в якості каталізатора дегідрогенізації, сповільнювача і відбивача нейтронів у ядерних реакторах. BeO є перспективним матеріалом для матриць і компонент дисперсійного ядерного пального [9].

У попередніх роботах [10, 11] нами було проведено дослідження BeO методами ІЧ-спектроскопії зовнішнього відбивання. За допомогою дисперсійного аналізу спектрів зовнішнього відбивання від поверхні гексагональних монокристалів оксиду берилію отримано такі фундаментальні характеристики, як частота поперечного ν_T і поздовжнього ν_L оптичного фонуна, високочастотна ϵ_∞ і статична ϵ_0 діелектричні проникності за орієнтацій $E \perp C$ і $E \parallel C$. Венгером та ін. уперше виявлено області існування поверхневих фононних поляритонів у гексагональних монокристалах оксиду берилію [10]. За допомогою отриманих у [11] математичних виразів розраховано спектри порушеного повного внутрішнього відбивання (ППВВ) та їх напівширину. Показано, що при $I(\nu)/I_0(\nu) > 25$ % спостерігається вплив радіаційного випромінювання на спектри ППВВ.

Всі об'ємні параметри, що використовувалися при розрахунку діелектричної проникності при орієнтаціях E⊥C і E||C, для BeO отримано авторами в роботі [12] і представлено в табл. 1:

Таблиця 1

Об'ємні параметри монокристалу BeO при орієнтаціях E⊥C і E||C

BeO	ϵ_0	ϵ_∞	ν_T, cm^{-1}	ν_L, cm^{-1}
E⊥C	6,94	3,01	724	1098
E C	7,65	3,02	680	1083

У роботі [12] показано, що наведені в табл. 1 взаємоузгоджені параметри дозволяють моделювати спектри ІЧ-відбивання в області “залишкових променів” BeO при середній неузгодженості розрахункових і експериментальних спектрів ІЧ-відбивання 2 %.

Як відомо [1, 4], для монокристалів BeO характерні так звані сингулярні осі – напрямки, вздовж яких два значення довжини хвильового вектора співпадають (вироджуються), а поляризації хвиль є круговими. Хвилі вздовж сингулярних осей називаються хвилями Фойхта. Сингулярні осі відрізняються від звичайних оптичних осей, уздовж яких значення довжин хвильових векторів співпадають.

При виконанні умов $\epsilon_x < 0$, $\epsilon_z < 0$ (ϵ_x , ϵ_z – компоненти тензора діелектричної проникності поверхнево-активного середовища) збуджуються поверхневі поляритони 1-го типу, які існують за будь-яких значень хвильового вектора ПП K ($K^2 > \epsilon_1$) і досліджені в роботах [1, 2, 12]. При виконанні умови $\epsilon_x < 0$, $\epsilon_z > K^2$ існують ПП 2-го типу (ПП-2) [12].

Умови існування СПП в оптично-анізотропних кристалах LiNbO₃ і Al₂O₃ досить добре описані в роботі [4, 7], де показано, що за наявності двох середовищ із діелектричними проникностями $\epsilon_1 = \text{const}$ та $\epsilon_2(\nu)$ на межі поділу може розповсюджуватись поверхнева електромагнітна хвиля (вздовж осі x), коли хоча б одне із середовищ є поверхнево-активним, тобто діелектрична проникність у певному частотному діапазоні є від'ємною.

Розглянемо монокристал BeO із діелектричною проникністю $\epsilon_2(\nu)$ ($z < 0$ – оптично-анізотропний напрям), якому характерна оптично-анізотропія. Поверхня BeO межує з оптично-ізотропним середовищем із діелектричною проникністю $\epsilon_1 = \text{const}$. Оптична осі кристала напрямлена вздовж вісі y, так що $\epsilon_x = \epsilon_z = \epsilon_\perp$, $\epsilon_y = \epsilon_\parallel$.

У роботах [3, 5, 6] отримано розв'язок рівняння Максвелла при використанні умов неперервності тангенціальних компонент електричного і магнітного полів у площині поділу ($z = 0$). Прирівнявши до нуля визначник, авторами одержано дисперсійне рівняння відносно однієї із компонент $K_{x,y}$:

$$K_x = \frac{q}{2} \sqrt{\frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\perp)(\epsilon_\perp + \epsilon_\parallel)^2}{(\epsilon_0 + \epsilon_\perp)(\epsilon_\parallel - \epsilon_0)}}, \quad K_y = q\sqrt{\epsilon_\perp(\nu)}, \quad (1)$$

де $q = \frac{\omega}{c}$; c – швидкість світла у вакуумі, $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота; компонента K_y , як видно, є фіксованою.

Співвідношення (1) є дисперсійним рівнянням стосовно СПП в одновісних кристалах при вказаній вище геометрії. Частотний діапазон існування СПП, як показано в [3, 4], визначається двома умовами:

$$1) \quad 0 < \epsilon_\perp < \epsilon_0; \quad \epsilon_\parallel > \epsilon_\perp + 2\epsilon_0 \quad (2)$$

або

$$2) \quad \epsilon_\perp > \epsilon_0; \quad \epsilon_\parallel < -\epsilon_\perp, \quad (3)$$

де $\epsilon_\perp = \epsilon_\perp(\nu)$, $\epsilon_\parallel = \epsilon_\parallel(\nu)$.

Отже, порівнюючи умови, за яких відбувається збудження різного роду поверхневих поляритонів, можна перекопати, що умови існування СПП суттєво відрізняються від умов, описаних у роботах [1, 2, 12], за яких відбувається збудження поверхневих поляритонів 1- та 2-го типу. В оптично-анізотропних кристалах основними відмінностями є неможливість збудження та розповсюдження СПП при довільних напрямках орієнтації оптичної осі кристала C відносно його поверхні і хвильового вектора та можливість їх існування в тих діапазонах, в яких обидва головних значення тензора діелектричної проникності $\epsilon_{\perp}(\nu)$ і $\epsilon_{\parallel}(\nu)$ можуть мати в ІЧ-області спектра як від'ємні, так і додатні значення.

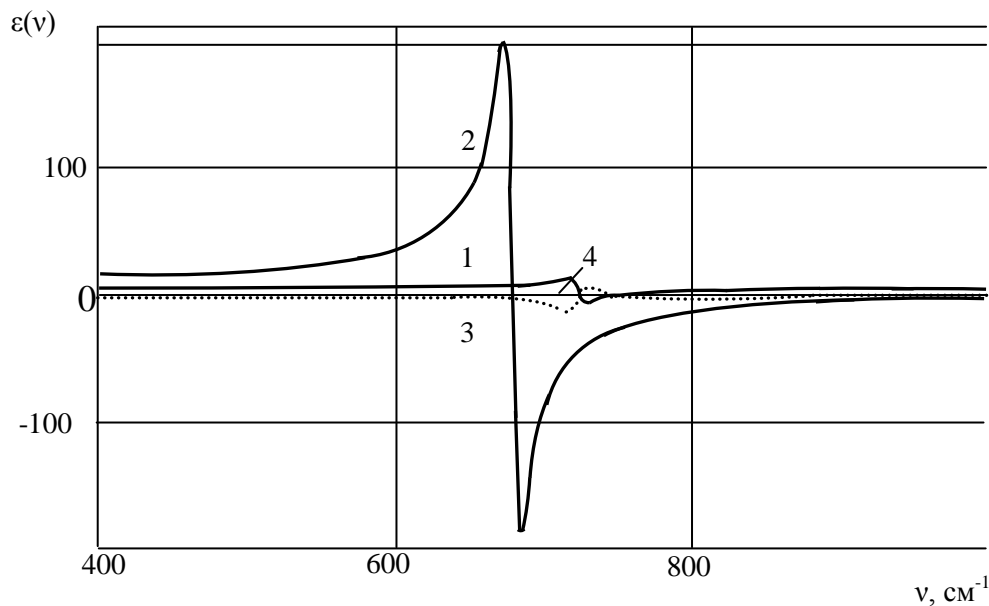


Рис. 1. Залежність дійсної частини діелектричної проникності від частоти ν монокристалах BeO: 1 – $\epsilon_{\perp}(\nu)$ при $E \perp C$; 2 – $\epsilon_{\parallel}(\nu)$ при $E \parallel C$; 3 – $\epsilon_{\perp}(\nu)$; 4 – $\epsilon_{0\perp}$

На рис. 1 показано залежність діелектричної проникності від частоти для монокристалів BeO в ІЧ-області спектра при орієнтаціях $E \perp C$ ($\epsilon_{\perp}(\nu)$) і $E \parallel C$ ($\epsilon_{\parallel}(\nu)$) відповідно крива 1 і 2. Розрахунок $\epsilon_{\perp}(\nu)$ і $\epsilon_{\parallel}(\nu)$ для BeO проведено в актуальній області частот 200 – 1400 cm^{-1} даного кристала. На рисунку висвітлено лише область “залишкових променів” монокристала BeO (400 – 1000 cm^{-1}).

Як видно з рис. 1, для монокристалів BeO характерні області (681 – 724 cm^{-1}), в яких виконується умова (3), тобто можливе збудження та розповсюдження СПП.

Розрахунки сингулярних поверхневих поляритонів проведено при використанні адитивної моделі діелектричної проникності стосовно монокристала BeO за методикою, описаною в монографії [12]. Крива 3 (рис. 1) характеризує собою функцію $-\epsilon_{\perp}(\nu)$. Проведений аналіз залежності тензора діелектричної проникності від частоти вказує на наявність (відсутність) існування областей можливого збудження поверхневих сингулярних поляритонів у монокристалах BeO. Умова (2) (див. рис. 1) не виконується в жодному з частотних діапазонів. Автори [6] показали, що збудження СПП можливо як при виконанні (2), так і (3). Перша умова рівняння (3) $\epsilon_{\perp}(\nu) > \epsilon_0$ виконується в широкому частотному діапазоні 0 – 725 cm^{-1} , друга ж частина умови рівняння (3) – в діапазоні 681 – 1188 cm^{-1} .

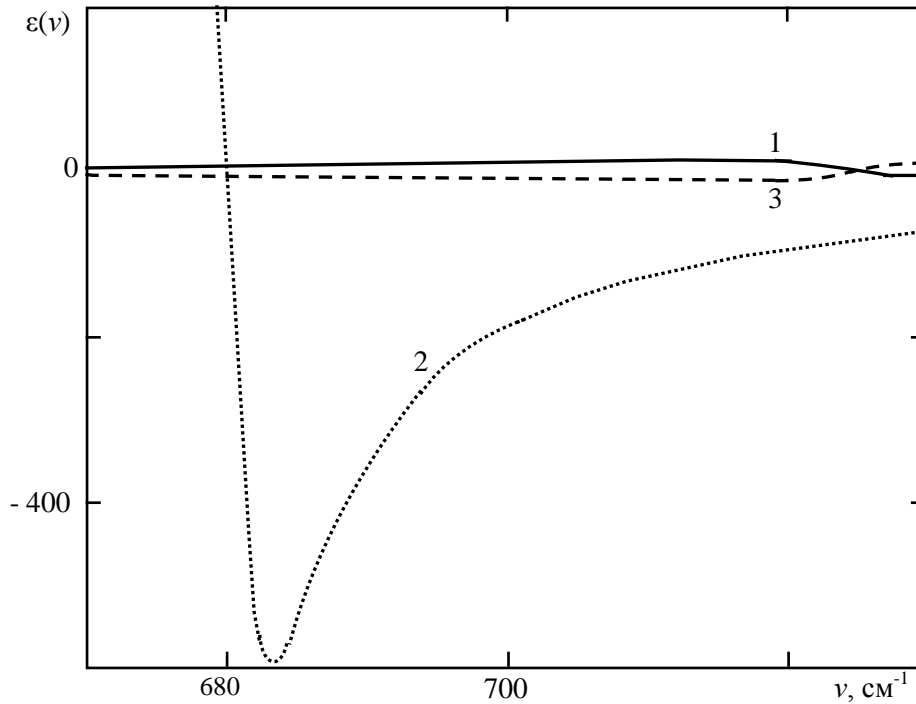


Рис. 2. Залежність дійсної частини діелектричної проникності від частоти BeO в проміжках існування СПП: 1 – $\epsilon_{\perp}(\nu)$ при $E \perp C$; 2 – $\epsilon_{\parallel}(\nu)$ при $E \parallel C$; 3 – $\epsilon_{\perp}(\nu)$

Отже, згідно рис. 2, в діапазоні $681 - 724 \text{ cm}^{-1}$ одночасно виконуються обидві умови рівняння (3). Таким чином, проведений математичний експеримент вказує, що в діапазоні від 681 до 724 cm^{-1} при орієнтації $C \parallel y$ ($\epsilon_x = \epsilon_z = \epsilon_{\perp}$, $\epsilon_y = \epsilon_{\parallel}$) в одновісних монокристалах BeO існують області, в яких можливе збудження та розповсюдження СПП.

На рис. 3 представлено залежність двомірного хвильового вектора $k(\nu) = K(\nu)/q$ від частоти ІЧ-випромінювання в діапазоні, де можливе збудження СПП.

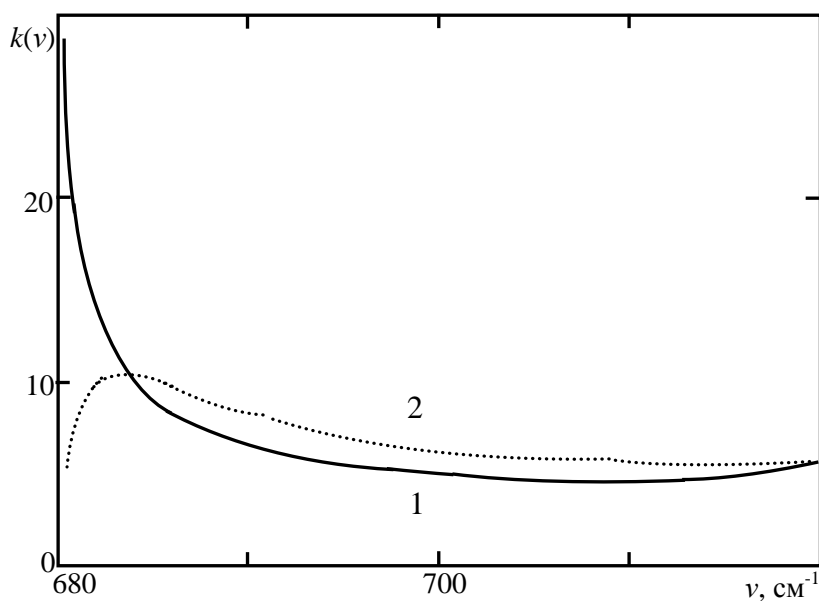


Рис. 3. Розрахункові залежності $k(\nu)$ від частоти СПП у BeO

Крива 1 розрахована без урахування затухання, крива 2 – з урахуванням затухання при орієнтаціях $E \perp C$ і $E \parallel C$. Розрахунок довжини двохмірного хвильового вектора $K = (K_x, K_y)$ проведено за допомогою рівняння (2) роботи [6]. Збільшення затухання осциляторів супроводжується зменшенням величини $k(\nu)$.

Аналіз рівняння (1) для $K_x(\nu)$, що пропорційно $|\varepsilon_{\perp}(\nu) + \varepsilon_{\parallel}(\nu)|$, вказує на прояв СПП при значеннях $k(\nu) \sim 10 - 20$. Для звичайних і незвичайних ПП фононного та плазмон-фононного типу ці значення не перевищували 2,5 – 3. Використання стандартних напівциліндрів, виготовлених із Si, Ge, KRS-5 тощо, в системі порушеного повного внутрішнього відбивання для забезпечення прозорості і малої дисперсії в актуальній області частот вказують на труднощі, які можуть виникнути при експериментальному дослідженні СПП методом ППВВ.

На рис. 4 проілюстровано залежність кута γ між хвильовим вектором K та віссю x від частоти без урахування (крива 1) та з урахуванням затухання СПП (крива 2) при орієнтаціях $E \perp C$ і $E \parallel C$.

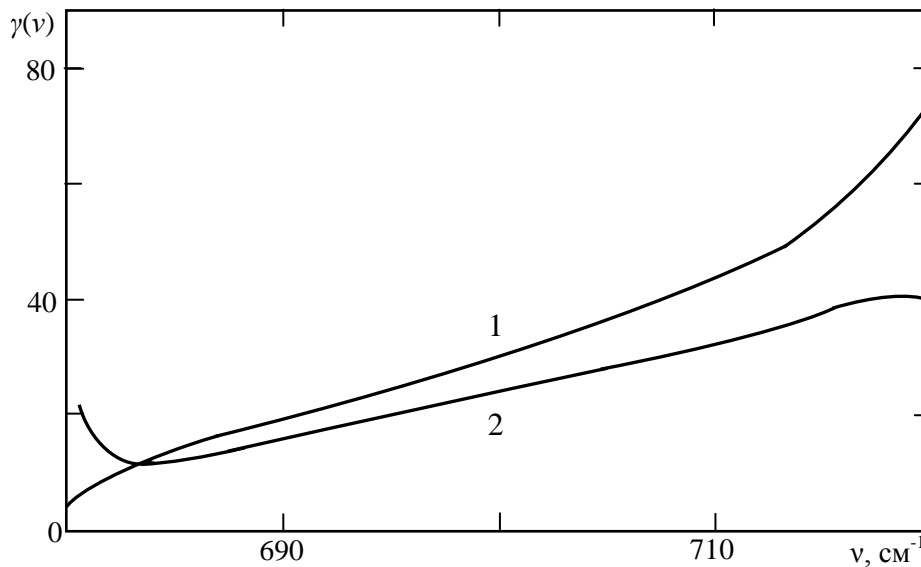


Рис. 4. Розрахункові залежності від частоти величини γ для СПП у BeO ($\gamma_{СПП} = 10 \text{ см}^{-1}$).

Таким чином, у роботі, використовуючи математичну модель із адитивним внеском об'ємних параметрів фононної підсистеми (див. табл. 1) монокристалу BeO, проведено аналіз залежності діелектричної проникності від частоти ІЧ-випромінювання. Вперше виявлено області існування сингулярних поверхневих поляритонів, які є поверхневими електромагнітними хвилями принципово нового типу. Показано, що для монокристалів BeO СПП збуджуються за орієнтації $C \parallel y$ ($\varepsilon_x = \varepsilon_z = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon_y = \varepsilon_{\parallel}$) в діапазоні $681 - 724 \text{ см}^{-1}$. Встановлено, що основною відмінністю СПП від досліджуваних раніше звичайних і незвичайних ПП є можливість їх збудження в частотних діапазонах, де обидва головних значення $\varepsilon_{\perp}(\nu)$ і $\varepsilon_{\parallel}(\nu)$ тензора діелектричної проникності позитивні.

Література

1. Дмитрук Н. Л. Поверхностные поляритоны в полупроводниках и диэлектриках / Дмитрук Н.Л., Литовченко В.Г., Стрижевский В.Л. – К.: Наук. думка, 1989. – 375 с.
2. Поверхностные поляритоны / Под ред. В.М. Аграновича и Д.Л. Миллса. – М: Наука, 1985. – 525 с.

3. Марчевський Ф.Н. Сингулярные электромагнитные волны в органических анизотропных средах // ФТТ / Ф.Н. Марчевський, В.Л. Стрижевський, С.В. Стрижевський. – 1984. – Т. 26, № 5. – С. 1501 – 1503.
4. Макаренко С.П. Сингулярные поляритоны в органических анизотропных кристаллах / С.П. Макаренко, Ф.Н. Марчевський, В.Л. Стрижевський, С.В. Стрижевський. – Киев, 1983. – 32 с. (Препринт №18. Ин-т физики АН УССР).
5. К. Шпортько. Фононні поляритони $ZnSiP_2$ / Вісник Львів. ун-ту. Серія фізична / К. Шпортько, Ю. Пасічник, Н. Богуславська, Є. Венгер. – 2003. – Вип. 36. – С. 77 – 85.
6. Венгер Є.Ф. Сингулярні фононні поляритони в оптично-анізотропних одновісних кристалах / Є.Ф. Венгер, Л.Ю. Мельничук, О.В. Мельничук, О.М. Сергієнко // Фізико-математичний збірник: Збірник наук. праць – Ніжин: НДПУ ім. М. Гоголя, 2001. – С. 55–62.
7. Венгер Є.Ф. Сингулярні поверхневі поляритони в оптично анізотропних кристалах Al_2O_3 / Укр. фіз. журн. / Є.Ф. Венгер, М.Л. Дмитрук, Л.Ю. Мельничук, О.В. Мельничук. – 2001. – Т. 46, № 11. – С. 1191 – 1195.
8. Беляев Р.А. Окись бериллия. – М.: Атомиздат, 1980. – 204 с.
9. Коленкова Р.М., Блистанова Т.Д., Бакашева Р.М., Закирова А.В. Изучение физико-химических свойств гидроокиси бериллия // Изв. вузов. Цветная металлургия. –1973. – № 4. – С. 82 – 85.
10. Венгер Є.Ф., Макуха О.В., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В. Спектри ІЧ-відбивання монокристалів BeO в області залишкових променів // Фізико-математичний збірник: Збірник наук. праць. – Ніжин: Видавництво НДУ ім. М. Гоголя, 2006. – С. 18 – 24.
11. Venger E.F., Makukha O.V., Melnichuk L.Yu., Melnichuk A.V. IR spectroscopy investigation of optically – anisotropic BeO single crystals in the residual rays region // Book of Abstracts of the “7-th International Young Scientists Conference” (October 26 – 29, 2006, Kyiv, Ukraine). – Kyiv, 2006. – P. 131.
12. Венгер Є.Ф., Мельничук О.В., Пасічник Ю.А. Спектроскопія залишкових променів. – К.: Наук. думка, 2001. – 191 с.

УДК 621.315.592

ЗАСТОСУВАННЯ ЄМНІСНОЇ СПЕКТРОСКОПІЇ ДО РЕКОНСТРУКЦІЇ РОЗПОДІЛІВ ГЛИБОКИХ СТАНІВ НАПІВПРОВІДНИКОВИХ ГЕТЕРОСТРУКТУР

Шевчук О.Г.

Для дослідження глибоких центрів в напівпровідниках в даний час широко використовується метод ємнісної спектроскопії, розроблений Лангом [4]. Основні параметри центрів (енергію активації E_a й переріз захоплення $\sigma_{n,p}$) при цьому традиційно визначають із спектрів нестационарної ємнісної спектроскопії глибоких рівнів (НЄСГР), знятих для декількох значень вікна швидкісної емісії. Останнім часом запропоновано ряд способів обробки спектрів НЄСГР, які дозволяють отримувати необхідну інформацію про параметри глибоких центрів, використовуючи одноразове сканування спектра [2 – 3, 5]. Проте ці методи або не володіють необхідною точністю, або залишаються досить трудомісткими з точки зору обробки експериментальних даних.

У даній роботі пропонується метод обробки результатів, який дозволяє за допомогою нескладних графічних побудов оперативно визначати параметри глибоких рівнів в різних напівпровідниках з одиничного спектру НЄСГР.

Якщо процес емісії носіїв заряду з глибокого центру носить експоненціальний характер, то нормалізований сигнал НЄСГР має вигляд [4]

$$\Delta S = (C(t_1) - C(t_2)) / \Delta C = \exp(-t_1/\tau) - \exp(-t_2/\tau), \quad (1)$$

де ΔC – значення нестационарної ємності в момент часу $t = 0$ (відлік часу ведеться з моменту перемикавання напруги); $C(t_1)$, $C(t_2)$ – значення ємності в моменти t_1 і t_2 відповідно; τ – постійна в часі емісія носіїв з центру, дорівнює [1]:

$$T = (\sigma N v_t)^{-1} \exp(-E_a/kt) \quad (2)$$

де N – густина станів у зоні; v_t – теплова швидкість носіїв заряду. Передбачається, що переріз захоплення не залежить від температури.

Залежність $\Delta S = f(T)$, як відомо, є кривою з максимумом в точці T_{\max} , а форма лінії близька до гауссової [3] і визначається як величиною відношення t_2/t_1 так і параметрами матеріалу глибокого центру (m^* , E_a , σ). Для аналізу впливу згаданих вище чинників на $\Delta S(T)$ було проведено математичне моделювання спектрів НЕСГР для різних значень t_2/t_1 , m^* , E_a і σ .

Встановлено, що в загальному випадку крива $\Delta S(T)$ є асиметричною щодо температури максимумів, а форма лінії для кожного конкретного центру залежить від величини відношення t_2/t_1 . Разом із тим, за результатами [6], за наявності кількох центрів з близькими значеннями швидкостей емісії, окремі лінії краще розділяються при малих значеннях t_2/t_1 , оскільки в цих випадках лінії НЕСГР є більш вузькими. Однак при значеннях t_2/t_1 , близьких до одиниці, погіршується співвідношення сигнал – шум. З цих позицій найбільш оптимальними, мабуть, є значення $t_2/t_1 \sim (3 - 5)$.

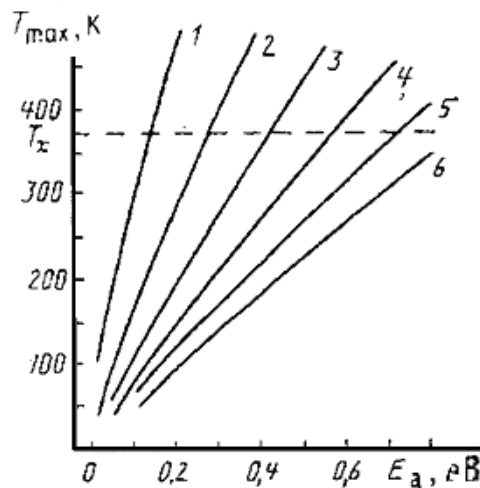


Рис. 1

Залежність температури максимуму піка (T_{\max}) спектру НЕСГР від енергії активації глибокого рівня (E_a) для різних значень відношення $(m^*/m_0)\sigma$ ($1 \cdot 10^{-22}$, $2 \cdot 10^{-20}$, $3 \cdot 10^{-18}$, $4 \cdot 10^{-16}$, $5 \cdot 10^{-14}$, $6 \cdot 10^{-12}$ cm^2). $t_1 = 10^{-3}$ с, $t_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ с.

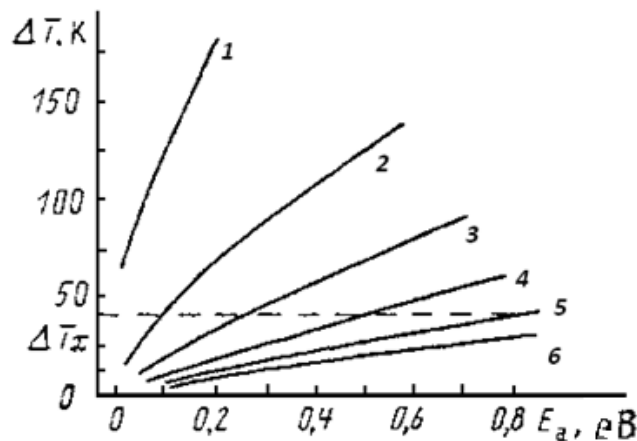


Рис. 2

Залежність напівширини лінії спектра НССГР (ΔT) від енергії активації глибокого рівня (E_a) для різних значень відношення $(m^*/m_0)\sigma$ (криві 1 – 6 відповідають значенням 1 – 6 на рис. 2.). $t_1 = 10^{-3}$ с, $t_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ с.

Точка перерізу кривих $E_a' = f((m^*/m_0)\sigma)$ і $E_a'' = f((m^*/m_0)\sigma)$ (рис. 3) і дає шукані значення E_a і $(m^*/m_0)\sigma$. Знаючи величину m^* , можна легко визначити величину σ . Для експресної оцінки значень E_a і $(m^*/m_0)\sigma$ можуть бути використані дані номограми, наведеної на рис. 4.

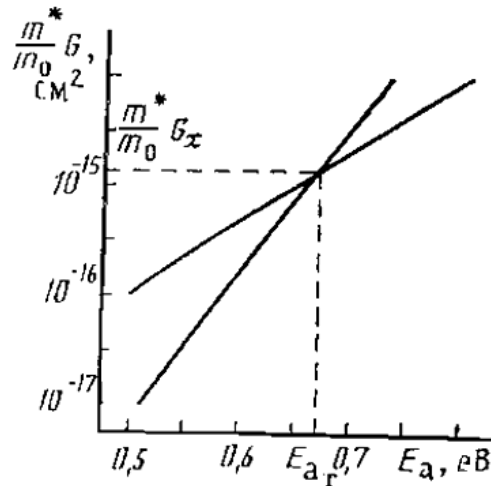


Рис. 3. Залежність $(m^*/m_0)\sigma = f(E_a)$ ($T_{max} = 373$ К, $\Delta T = 41,5$ К).

У випадку, коли переріз захоплення залежить від температури ($\sigma = \sigma_\infty \exp(-E_b/kt)$), визначається з рис. 3 значення σ , яке представляє собою значення σ_∞ , а величина енергії активації емісії включає і енергію активації процесу захоплення E_b .

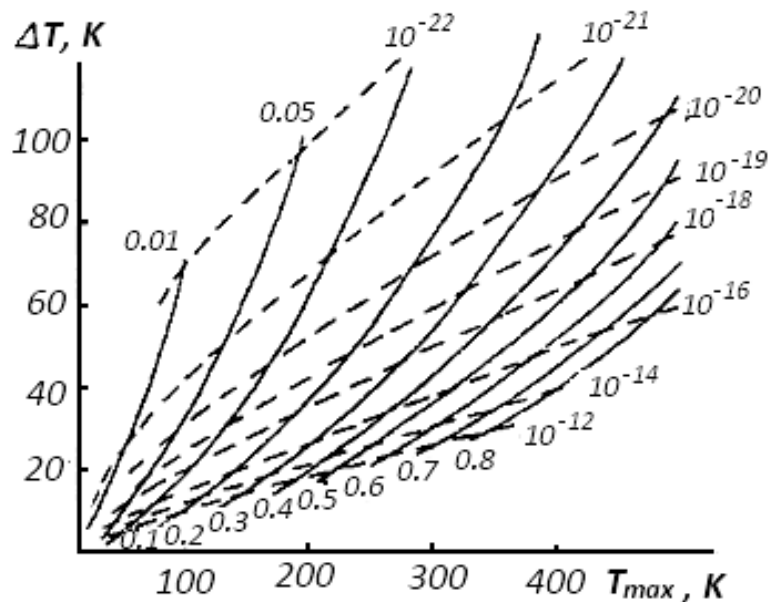


Рис. 4

Номограма для визначення параметрів глибокого центру (E_a , $(m^*/m_0)\sigma$) за величинами T_{max} і ΔT . Штрихові лінії відповідають постійним значенням перерізу захоплення, суцільні – постійним значенням енергії активації.

Висновки

1. Коли у 33 матеріалу присутні локалізовані стани, які розподілені за енергією рівномірно ($h(E) = AN_t = \text{const}$), легко одержати, що $n_t = h(E)$. Звідси слідує, що подібні розподіли цим методом реконструюються точно. Похибка, яка отримується при відтворенні довільного розподілу пасток, знаходиться між цими двома граничними випадками і не перевищує $2kT$. Результати моделювання для глибоких рівнів, що мають гауссовий розподіл або описуються експонентою, підтверджують цей висновок.

2. Показано, що для глибоких акцепторів в германії має місце ефект Пула-Френкеля, який при дослідженні методами смісної спектроскопії може істотно впливати на визначення параметрів. Врахування цього ефекту і використання енергії термічної іонізації, знятої за допомогою ефекту Холла, дають можливість з кривих $\tau(T)$ оцінити температурну залежність перерізу захоплення, безпосереднє вимірювання якої у разі великих перерізів не завжди можливе.

3. При використанні отриманих вагових функцій високого розділення постає питання про зниження рівня шуму в релаксацийних сигналах, чутливість якого зростає при зростанні ступеня розділення. Тому перспективним є використання цифроаналогового корелометра з програмуванням вагової функції від комп'ютера, який володіє оптимальними шумовими характеристиками.

4. В незалежності від типу спектрів пасткових центрів у забороненій зоні напівпровідникових гетероструктур розглянуті вище теоретичні положення дозволяють однозначно розрахувати параметри забороненої зони цих структур з аналізу їх вольтамперних характеристик.

Література

1. Берман Л. С. Емкостная спектроскопия глубоких центров в полупроводниках / Берман Л. С., Лебедев А. А. – Л.: Наука, 1981. – 176 с.
2. Васильев А.Б. К вопросу о методике обработки спектров DLTS / Васильев А.Б., Смагулова С.А., Шаймеев С.С. // ФТП. – 1983. – Т. 17, № 3.
3. Goto H. How to Determine Parameters of Deep Levels by DLTS Single Temperature Scanning / Hiroshige Goto, Yoshio Adachi and Toshiaki Ikoma // Japanese Journal of Applied Physics. – 1979. – Vol. 18, № 10. – P. 1979 – 1982. – С. 162 – 164.
4. Lang D.V. Deep-level transient spectroscopy: A new method to characterise traps in semiconductors / Lang D.V. // J. Appl. Phys. – 1974. – Vol. 45, № 7. – P. 3023 – 3032.
5. Le Bloa A. DLTS method using a single temperature scanning / Le Bloa A., Favennes P. N., Collin Y. // Phys. St. Sol. A. – 1981. – V. 64, № 1. – P. 85 – 93.
6. Yoshie O. Express methods of determining the parameters of deep centers in semiconductors from the data of nonsteady capacitive spectroscopy / Yoshie O., Kamihara M. // Journal of Applied Spectroscopy. – 1983. – № 54. – P. 168 – 179.

УДК 621.315.592

ОСОБЛИВОСТІ РОЗСПОВАННЯ НОСІВ ЗАРЯДУ В ГЕТЕРОВАЛЕНТНИХ ТВЕРДИХ РОЗЧИНАХ GaAs-ZnSe

Аніщенко В.О., Скрипка Я.М.

Ще в 1955 р. Н.О. Горюнова передбачила існування неперервних твердих розчинів (ТР) у системі GaAs-ZnSe [1]. У зв'язку із значним інтересом до сполук A^3B^5 та можливих варіацій їх фізичних властивостей інтенсивне і системне дослідження гетеровалентних ТР типу $A^3B^5-A^2B^6$ продовжується вже кілька десятиліть. Широка заборонена зона і висока динаміка в

компонентах A^3B^5 і A^2B^6 зробили можливим їх використання в приладах з високими робочими температурами, лазерних кристалах, генераторах світла, сонячних батареях, датчиках рентгенівського випромінювання і т.д.

Серед величезної кількості систем типу $A^3B^5-A^2B^6$, система GaAs-ZnSe є однією з найбільш досліджених [2-10]. Але це стосується оптичних властивостей сплавів. Їх електричні властивості майже не досліджені. Це пов'язано з високим питомим опором сплавів, збагачених ZnSe [3,4]. Натомість сплави з малою концентрацією селеніду цинку (~10 мол. %) мають відносно малий питомий опір [4,9]. Вивчення області малих концентрацій компонента A^2B^6 в твердих розчинах $A^3B^5-A^2B^6$ викликає значний інтерес науковців у зв'язку з тим, що дозволяє прослідкувати характер зміни взаємодії компонентів при переході від легування до власних твердих розчинів.

У роботі [9] наведені результати досліджень в області температур 296...750 К електричних властивостей (питомої електропровідності σ , коефіцієнта Холла R та термоЕРС α) гетеровалентних ТР $(GaAs)_x(ZnSe)_{1-x}$ ($0,9 \leq x < 1$), одержаних методом напрямленої кристалазації з розплаву (таблиця 1).

Таблиця 1

Хімічний склад, концентрація дірок p , питома електропровідність σ , холлівська рухливість u_x та диференціальна термоЕРС α у зразках ТР $(GaAs)_x(ZnSe)_{1-x}$ для $T = 296$ К

Система	№ зразка	$1-x$	p , cm^{-3}	u_x , $\frac{cm^2}{V \cdot s}$	σ , $Om^{-1} \cdot cm^{-1}$	α , $\frac{mKB}{K}$
$(GaAs)_x(ZnSe)_{1-x}$	1	0,01	$2,3 \cdot 10^{19}$	16,0	59	270
	2	0,02	$1,7 \cdot 10^{19}$	16,0	41	250
	3	0,03	$1,9 \cdot 10^{19}$	10,0	29	230
	4	0,05	$1,7 \cdot 10^{19}$	9,0	25	220

– похибка визначення p – 4%; σ – (3-4)%; α – 5%.

Величина коефіцієнта Хола в ТР різного складу в температурному інтервалі 296...750 К не міняється, що обумовлено виродженням діркового газу. Питома електропровідність та рухливість ТР монотонно зменшується із збільшенням температури до $T \approx 400$ К, після чого падіння σ та u_x стає більш помітним. Аналізуючи температурну залежність рухливості дірок в сплавах автори [9] зробили висновок про розсіювання дірок в сплавах на іонах домішки при $T < 400$ К і про зростання ролі розсіювання на оптичних коливаннях ґратки при $T > 400$ К та комплексах $(Zn^+Se^-)^0$.

У легованих сполуках A^3B^5 існування взаємодії між донорами й акцепторами, яка обумовлює утворення донорно-акцепторних пар, показано в [11-14].

За умови

$$k_0^2 R_0^2 \ll 8 \text{ або } \frac{k_0^2 R_0^2}{8} \ll 1, \quad (1)$$

де k_0 – хвильовий вектор носія заряду, R_0 – середня відстань між сусідніми домішками протилежних знаків, пару сусідніх різнойменних центрів можна розглядати як диполь [15]. Це відбувається тому, що при виконанні умови (1) довжина хвилі розсіюваного заряду зрівняна або більша за середню відстань R_0 між сусідніми різнойменними центрами і хвилі, розсіяні цими центрами, інтерферують. Тому пара найближчих різнойменних центрів поводить себе як один центр, а систему різнойменних центрів розсіювання можна розглядати як систему хаотично розподілених диполів. Отже, у гетеровалентних твердих розчинах $A^3B^5-A^2B^6$ за певних умов може проявлятися розсіювання носіїв заряду на диполях типу $(A^-D^+)^0$ [16-18]. В цьому випадку рухливість визначається за формулою [15]:

$$U_d = \frac{\sqrt{2}\hbar^2 \varepsilon^2 (kT)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \pi^2 e^3 R_0^2 m^{*\frac{3}{2}} N_k} \quad (2)$$

де \hbar – зведена стала Планка, ε – відносна діелектрична провідність напівпровідника, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура, e – заряд електрона, m^* – ефективна маса носіїв заряду, $N_k = (N_d + N_a - N_i)$ – концентрація різнойменних центрів розсіювання (N_d – концентрація донорів, N_a – концентрація акцепторів, N_i – концентрація іонізованих домішок), $\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)$ – деяка функція, яка дорівнює 0,9.

Середня відстань між різнойменними домішками визначається із співвідношення [15]

$$\frac{4}{3} \pi R_0^3 = (2N_k)^{-1} \quad (3)$$

Тверді розчини $A^3B^5-A^2B^6$ на основі A^3B^5 є сильнолегованими напівпровідниками, у зв'язку з чим [19]

$$k_0(\mu) = \frac{\sqrt{2m^* \mu}}{\hbar} \quad (4)$$

де μ – енергія рівня Фермі.

Підкреслимо, що дипольне розсіювання починатиме помітно зменшувати рухливість дірок при $T=300$ К і вище [18].

Для перевірки висловлених у [9] припущень в цій роботі зроблена спроба провести теоретичний аналіз рухливості дірок в ТР $(GaAs)_x (ZnSe)_{1-x}$ в температурному інтервалі 296...750 К з урахуванням розсіювання на диполях, іонах домішки та коливаннях ґратки.

Необхідний для розрахунків приведений рівень Фермі μ^* для різних параметрів розсіювання r визначався за даними термоЕРС, після чого за відомою формулою для концентрації p носіїв заряду в параболічній зоні

$$p = 4\pi \left(\frac{2m^* kT}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\mu^*) \quad (5)$$

де $F_{1/2}(\mu^*)$ – інтеграл Фермі індекса “1/2”, розраховувалися ефективні маси густини станів дірок m^* (таблиця 2).

Таблиця 2

Приведений рівень Фермі μ^* та ефективна маси дірок m^*/m в сплавах $(GaAs)_x (ZnSe)_{1-x}$ для $T=296$ К

Система	№ зразка	1-x	r=0		r=1 (T>T ₀)		r=1/2 (T<T ₀)		r=2	
			μ^*	m^*/m	μ^*	m^*/m	μ^*	m^*/m	μ^*	m^*/m
$(GaAs)_x (ZnSe)_{1-x}$	1	0,01	-0,8	1,77	0,1	1,07	-0,2	1,26	1,4	0,59
	2	0,02	-0,7	1,36	0,5	0,72	0	0,92	1,9	0,40
	3	0,03	-0,4	1,24	0,8	0,67	0,3	0,85	2,4	0,36
	4	0,05	-0,2	1,03	1,1	0,55	0,5	0,72	2,8	0,32

– похибка визначення m^* – 16%; μ^* – 5%.

З таблиці 2 видно, що лише для параметра розсіювання $r=2$ ефективні маси дірок в межах похибки близькі до загальноприйнятого для p-GaAs значення $m^*/m=0,5$ [20], що вказує на участь іонів домішки у процесах розсіювання.

Теоретичні величини рухливості дірок u_i при розсіюванні на іонах домішки розраховувалися за формулою Брукса-Герінга для вироджених напівпровідників [20]:

$$u_i = \frac{\sqrt{2^7} \varepsilon^2 \varepsilon_0^2 (kT)^{\frac{3}{2}}}{N_i \sqrt{\pi^3} e^3 m^{*\frac{1}{2}} f(\gamma)}, \quad (6)$$

$$\text{де } f(\gamma) = \ln(\gamma+1) - \frac{\gamma}{\gamma+1}, \quad (7)$$

$$\text{а } \gamma = \frac{2\varepsilon^2 \varepsilon_0^2 kT}{e^2} \left(\frac{\pi}{3p} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (8)$$

У формулах (6-8) ε_0 – електрична стала, N_i – концентрація іонів домішки, p – концентрація дірок, e – заряд електрона. Розрахунок виконувався за умови $N_i = p$. Відносна діелектрична проникність приймалася рівною 12,5 [17].

З графіків температурної залежності електропровідності ТР $(\text{GaAs})_x(\text{ZnSe})_{1-x}$ [9] видно, що σ із зростанням температури починає спадати тим раніше (від нижчих температур), чим вища в зразках концентрація носіїв заряду, що свідчить про зростання, як і в p -GaAs [21], внеску розсіювання на акустичних коливаннях ґратки.

Рухливості дірок u_L при розсіюванні на акустичних коливаннях для будь-якого ступеня виродження розраховувалися за формулою [19]

$$u_L = \frac{\sqrt{2e\pi\hbar^4} C_l}{3E_1^2 m^{*\frac{5}{2}} (kT)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{F_0(\mu^*)}{F_{\frac{1}{2}}(\mu^*)}, \quad (9)$$

де C_l – середнє значення пружної постійної для повздовжніх хвиль в GaAs [20], E_1 – деформаційний потенціал для краю валентної зони p -GaAs [22], $F_0(\mu^*)$ – інтеграл Фермі індекса “0”, $F_{1/2}(\mu^*)$ – інтеграл Фермі індекса “1/2”.

Для перевірки умови (1), яка визначає можливість існування в ТР розсіювання на диполях $(\text{Zn}^- \text{Se}^+)^0$, за формулами (3), (4) обраховувалися хвильовий вектор носія заряду та середня відстань між сусідніми домішками протилежних знаків (таблиця 3).

Таблиця 3

Перевірка умови $k_0^2 R_0^2 / 8 \ll 1$ для сплавів $(\text{GaAs})_x (\text{ZnSe})_{1-x}$

Система	№ зразка	Склад, x	$k_0^2(\mu)$, м^{-2} ($r = 2$)	R_0^2 , м^2	$k_0^2 R_0^2 / 8$
$(\text{GaAs})_x(\text{ZnSe})_{1-x}$	1	0,99	$7,6 \cdot 10^{17}$	$4,2 \cdot 10^{-19}$	0,04
	2	0,98	$6,1 \cdot 10^{17}$	$2,6 \cdot 10^{-19}$	0,02
	3	0,97	$7,1 \cdot 10^{17}$	$1,9 \cdot 10^{-19}$	0,02
	4	0,95	$6,4 \cdot 10^{17}$	$1,4 \cdot 10^{-19}$	0,01

– похибка визначення $k_0^2 R_0^2 / 8$ – 39%.

Як видно з таблиці 3, умова (1) добре виконується для зразків 1-4, що свідчить на користь припущення про розсіювання дірок в ТР $(\text{GaAs})_x (\text{ZnSe})_{1-x}$ на диполях $(\text{Zn}^- \text{Se}^+)^0$.

Результати розрахунку u_0 , u_i , u_L за формулами 2, 6-8, 9 для $m^*/m = 0,5$ та температур 296 К і 600 К наведені в таблиці 4.

Таблиця 4

Експериментальні та розраховані величини рухливості дірок в сплавах $(GaAs)_x(ZnSe)_{1-x}$
для $T = 296 \text{ K}, 600 \text{ K}$

Система	№ зразка	Склад, x	296 К					600 К				
			$u_{\text{експ}}$	u_{δ}	u_i	u_L	$u_{iL\delta}$	$u_{\text{експ}}$ п	u_{δ}	u_i	u_L	$u_{iL\delta}$
$(GaAs)_x(ZnSe)_{1-x}$	1	0,99	16±1	17±2	150±15	95±20	13±5	12±1	24±3	434±40	33±7	13±5
	2	0,98	16±1	13±2	171±17	100±20	11±4	–	19±2	492±50	35±7	12±5
	3	0,97	10±1	12±1	163±16	98±20	10±4	8±1	16±2	471±50	34±7	11±4
	4	0,95	9±1	24±3	169±17	100±20	17±7	8±1	34±4	489±50	35±7	17±7

–експериментальні і розраховані величини рухливості в $\text{см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$

Сумарна рухливість при розсіюванні дірок на диполях, іонах домішки та акустичних коливаннях визначалася за наближеною формулою:

$$\frac{1}{u_{iL\delta}} = \frac{1}{u_i} + \frac{1}{u_L} + \frac{1}{u_{\delta}}. \quad (10)$$

З таблиці видно, що при кімнатних і високих температурах найближчими до експериментальних значень рухливості є рухливості, розраховані для дипольного розсіювання. Зокрема при $T=296 \text{ K}$ рухливість дірок в зразках 1-3 можна пояснити виключно дипольним розсіюванням, що свідчить про його домінуючий вплив при цій температурі.

Отже, за умови одночасної дії розсіювання на іонах домішки, диполях та акустичних коливаннях ґратки експериментальні та розраховані величини рухливості дірок у сплавах $(GaAs)_x(ZnSe)_{1-x}$ ($x \geq 0,95$) добре узгоджуються для всіх зразків та різних температур.

Література

1. Горюнова Н.А. Химия алмазоподобных полупроводников / Нина Александровна Горюнова. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1963. – 367 с.
2. Yim W.M. Solid solutions in the pseudobinary (III-V)-(II-VI) Systems and their Optical energy gaps / W.M. Yim // J. Appl. Phys. – 1969. – V. 40. – № 6. – P. 2617-2623.
3. Ku S.M. Synthesis and some properties of ZnSe-GaAs solid solution / S.M. Ku, L.J. Bodi // J. Phys. Chem. Solids. – 1968. – V. 29. – № 12. – P. 2077-2082.
4. Yim W.M. Vapor growth of (II-VI)-(III-V) quaternary alloys and their properties / W.M. Yim, T.P. Dismukes, H. Kressel // RCA Rev. – 1970. – V.31. – P. 662-679.
5. Bloom S. Bandgap variation in quaternary alloys / S. Bloom // J. Appl. Phys. – 1970. – V. 41. – № 4. – P. 1864–1865.
6. Семиколенова Н.А. Зонная структура твердых растворов типа $A^{III}B^V-A^{II}B^{VI}$ / Н.А. Семиколенова, Э.Н. Хабаров // Известия ВУЗов. Физика. – 1973. – № 6. – С. 76-88.
7. Вялый Н.Г. Получение и исследование физических свойств монокристаллов полупроводниковых твердых растворов арсенида галлия с селенидом цинка: дисс.... канд. физ.-мат. наук: 01.04.10/Вялый Николай Григорьевич. – К., 1976. – 152 с.
8. Ткачук П.Н. Исследование энергетического спектра ZnSe и твердых растворов GaAs-ZnSe на его основе: дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.04.10 / Ткачук Петр Николаевич. – К., 1980. – 148 с.
9. Электрические свойства твердых растворов $(GaAs)_x(ZnSe)_{1-x}$ / А.В. Войцеховский, Н.Г. Вялый, А.Д. Пашун // Изв. АН СССР. Неорганические материалы. – 1980. – № 11. –С. 1910.

10. Файк Х.А. Катодолюминесцентные свойства псевдобинарных полупроводниковых структур на основе $A^{III}B^V-A^{II}B^{VI}$: дисс.... физ.-мат. наук: 01.04.04 / Файк Хаммад Антер. – М., 1986. – 190 с.
11. Экспериментальное исследование донорно-акцепторного взаимодействия в твердом растворе на основе InAs / В.М. Глазов, В.А. Негиев // Физика и техника полупроводников. – 1973. № 11. – С. 2212.
12. Экспериментальное исследование донорно-акцепторного взаимодействия в InP легированного Zn(Cd)-Te / В.М. Глазов, В.А. Негиев, Ф.Р. Рзаев // Физика и техника полупроводников. – 1973. № 4. – С. 753.
13. Термодинамика донорно-акцепторного взаимодействия в полупроводниках I. Растворимость и донорно-акцепторное взаимодействие при двойном легировании полупроводников / В.М. Глазов, Л.М. Павлова // Журнал физической химии. – 1986. № 2. – С. 273-285.
14. Термодинамика донорно-акцепторного взаимодействия в полупроводках II. Равновесие точечных дефектов при двойном легировании полупроводников и химическая связь в образующихся донорно-акцепторных комплексах / В.М. Глазов, Л.М. Павлова // Журнал физической химии. – 1986. № 3. – С. 529-539.
15. Церцвадзе А.А. рассеяние носителей заряда на примесях в сильнокомпенсированных полупроводниках / А.А. Церцвадзе // Физика и техника полупроводников. – 1969. – № 3. – С. 409-416.
16. Электрические свойства твердых растворов GaAs-CdSe / А.В. Войцеховский, А.Д. Пашун // Известия высших учебных заведений. Физика. – 1971. – № 7. – С. 110.
17. Анищенко В.А. Некоторые физические свойства гетеровалентных твердых растворов арсенида галлия с теллеридами кадмия и цинка: дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.04.10 // Анищенко Валерий Алексеевич. – К., 1974. – 148 с.
18. Electronic transport properties in the Semiconductor alloy $(GaP)_{0,95}(ZnSe)_{0,05}$ / M. Glicksman, D. Gutman, W.M. Yim / Applied Physics Letters. – 1970. – № 16. – P. 366.
19. Фистуль В.И. Сильно легированные полупроводники / Виктор Иванович Фистуль. – М.: Наука, 1967. – 416 с.
20. Маделунг О. Физика полупроводниковых соединений элементов III и V групп / О. Маделунг. – М.: Мир, 1967. – 477 с.
21. Арсенид галлия. Получение, свойства и применение [Бурдуков Ю.М., Гашимзаде Ф.М., Гольдберг Ю.А. и др.]: под ред. Ф.П. Кесаманлы и Д.Н. Наследова. – М.: Наука, 1973. – 471 с.
22. Deformation potentials of $k=0$ states of tetrahedral semiconductors / A. Blacha, H. Presting, M. Cardona // Phys. Stat. Solidi b. 1984. – V. 126. – P. 11-36.

УДК 621.315.592

РОЗСІЮВАННЯ НОСІЇВ ЗАРЯДУ В ЛЕГОВАНОМУ ЦИНКОМ АРСЕНІДІ ГАЛІЮ ПРИ КІМНАТНІЙ ТЕМПЕРАТУРІ

Аніщенко В.О., Шелемін А.М.

Метою цієї роботи є виявлення домінуючого механізму розсіювання дірок в легованому цинком арсеніді галію за результатами вимірювань коефіцієнта Холла (R_H), питомої електропровідності (σ) та диференціальної термоЕРС (α). Зразки для досліджень були отримані методом напрямленої кристалізації з розплаву. Вимірювання питомої електропровідності та коефіцієнта Холла виконували на постійному струмі в постійних магнітному і тепловому полях звичайним компенсаційним методом. ТермоЕРС вимірювали стаціонарним методом. Усі вимірювання проводили при кімнатній температурі [1]. Склад зразків, концентрація дірок p , рухливість u та термоЕРС наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Деякі електричні параметри (GaAs)_x(Zn)_{1-x} при T = 296 К

Система	№ зразка	Склад, 1-x	p , см ⁻³	u , см ² /В·с	α , мкВ/К
(GaAs) _x (Zn) _{1-x}	1	0,0001	$1,9 \cdot 10^{18}$	111	450
	2	0,001	$3,6 \cdot 10^{19}$	62	220
	3	0,005	$8,8 \cdot 10^{19}$	31	150

– похибка визначення p – 4%; u – (3-4%); α – 5%.

Виходячи з даних термоЕРС, за допомогою номограм визначався приведений рівень Фермі μ^* для різних параметрів розсіювання r , після чого за відомою формулою для концентрації носіїв заряду в параболічній зоні

$$p = 4\pi \left(\frac{2m^*kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} F_{1/2}(\mu^*), \quad (1)$$

де $F_{1/2}(\mu^*)$ – інтеграл Фермі індекса 1/2, розраховувалися ефективні маси густини станів дірок m^* для різних механізмів розсіювання (табл. 2). Переважаючий механізм розсіювання виділяли шляхом порівняння приведенного рівня Фермі, визначеного за даними термоЕРС, та обрахованого за формулою $\mu^* = \mu / kT$, де

$$\mu = 3,56 \cdot 10^{-15} p^{\frac{2}{3}} \frac{m}{m^*} \text{ (eВ)}, \quad (2)$$

а k і T – відповідно стала Больцмана та абсолютна температура ($T = 296$ К) [2].

Таблиця 2

Приведений рівень Фермі μ^ та ефективна маса густини станів m/m^* в легованому цинком арсеніді галію для різних значень параметра розсіювання r ($T = 296$ К)*

Система	№ зразка	Склад, 1-x	$r=0$		$r=\frac{1}{2}$		$r=2$	
			μ^*	m^*/m	μ^*	m^*/m	μ^*	m^*/m
(GaAs) _x (Zn) _{1-x}	1	0,0001	-3,2	1,53	-2,7	1,1	-1,2	0,42
	2	0,001	-0,3	1,79	0,3	1,3	2,4	0,56
	3	0,005	1,1	1,63	2,0	1,15	4,8	0,56

– похибка визначення m^*/m складає 16%; μ^* – 10%.

Приведений рівень Фермі μ^* , визначений за допомогою номограм для різних r , та приведений рівень Фермі, визначений за формулою (2), наведені в таблиці 3. Ефективні маси дірок m^*/m , необхідні для розрахунків μ^* за формулою (2), брали з таблиці 2, а також з монографій [3, с. 167; 4, с. 192].

Таблиця 3

Концентрація носіїв заряду p в зразках $(\text{GaAs})_x(\text{Zn})_{1-x}$ та приведений рівень Фермі μ^* , визначений за номограмами та формулою (2) для $T = 296\text{K}$

Система	№ зразка	Склад, $1-x$	$p, \text{см}^{-3}$	μ^*							
				номогр.	форм. 2	номогр.	форм. 2	номогр.	форм. 2	форм. 2	
				$r=0$	-	$r = \frac{1}{2}$	-	$r = 2$	-	$m^* = 0,5m$	$m^* = 1,0m$
										[3]	[4]
$(\text{GaAs})_x(\text{Zn})_{1-x}$	1	0,0001	$1,9 \cdot 10^{18}$	-3,2	0,1	-2,7	0,2	-1,2	0,5	0,4	0,2
	2	0,001	$3,6 \cdot 10^{19}$	-0,3	0,8	0,3	1,2	2,4	2,7	3,0	1,5
	3	0,005	$8,8 \cdot 10^{19}$	1,1	1,7	2,0	2,4	4,8	4,8	5,4	2,7

- похибка визначення μ^* за формулою (2) складає 19%.

Як видно з таблиці 3, найкраща кореляція приведенного рівня Фермі, визначеного за номограмою та формулою (2), має місце для параметра розсіювання $r=2$. У цьому випадку $m^*/m = (0,42-0,56)$, що близько до загальноприйнятої величини ефективної маси дірок в $p\text{-GaAs}$ $m^* = 0,5m$ [3, с. 167]. Тому можна припустити, що одним з імовірних механізмів розсіювання дірок в $(\text{GaAs})_x(\text{Zn})_{1-x}$ є розсіювання на іонах домішки. Це узгоджується з результатами, наведеними, наприклад, в монографії [4, с. 255].

Якщо ж прийняти, що ефективна маса дірок в $p\text{-GaAs}$ m^* близька до $1,0m$ [4, с. 192], то кореляція величини приведенного рівня Фермі погіршується і для параметра розсіювання $r=1/2$ (розсіювання на оптичних коливаннях ґратки при $T < T_0$, де T_0 для GaAs дорівнює 405 K [4, с. 248]), і для $r=0$ (розсіювання на акустичних коливаннях).

З метою співставлення експериментальних величин рухливості дірок в зразках $(\text{GaAs})_x(\text{Zn})_{1-x}$ з теорією домішкового розсіювання обраховувалася рухливість носіїв заряду, обмежена розсіюванням на іонах домішки, за формулою Брукса-Герінга [3, с. 131]

$$u_i = \frac{2^{\frac{7}{2}} \varepsilon^2 \varepsilon_0^2 (kT)^{\frac{3}{2}}}{N_i \pi^2 e^3 m^{*\frac{1}{2}} f(\gamma)}, \quad (3)$$

де

$$f(\gamma) = \ln(\gamma+1) - \frac{\gamma}{\gamma+1}, \quad (4)$$

а

$$\gamma = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 kT}{e^2} \left(\frac{\pi}{3p} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5)$$

У формулах (3-5) ε – відносна діелектрична проникність напівпровідника, ε_0 – електрична стала, N_i – концентрація іонів домішки, p – концентрація дірок, m^* – ефективна маса дірок, e – заряд електрона, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура. При розрахунках u_i відносна діелектрична проникність ε приймалася рівною 12,5 [5, с. 69], а концентрація іонів домішки $N_i = p$ (концентрації дірок). Ефективні маси дірок, які входять у формулу (3), брали з таблиці 2

для параметра розсіювання $r = 2$. Результати розрахунку рухливості дірок у $(\text{GaAs})_x(\text{Zn})_{1-x}$ за формулою Брукса-Герінга для $T = 296\text{K}$ наведені в таблиці 4.

З таблиці видно, що розрахункові величини рухливості дірок u_i у зразках 1-3 приблизно у (2-4) рази більші, ніж одержані з експерименту. Це свідчить про те, що у $(\text{GaAs})_x(\text{Zn})_{1-x}$ при $T = 296\text{K}$ розсіювання на іонах домішки не є переважаючим механізмом, хоча на його присутність вказують результати, одержані з аналізу таблиці 3.

Поряд із розсіюванням дірок на іонах домішки, у арсеніді галію, легованому цинком може мати місце і розсіювання носіїв заряду на акустичних коливаннях ґратки [4, с. 251].

Таблиця 4

Концентрація дірок p , експериментальні величини холлівської рухливості $u_{\text{експ}}$ теоретичні величини рухливості при розсіюванні на іонах домішки u_i та акустичних коливаннях u_L , а також для комбінованого розсіювання на іонах домішки та акустичних коливаннях u_{iL} ($T = 296\text{ K}$).

Система	№ зразка	$p, \text{ см}^{-3}$	$m^*/m_{r=2}$	$u_{\text{експ.}}, 296\text{ K}$	$u_i, \text{ Б-Г}$	$u_L, \text{ (I)}$	$u_L, \text{ (II)}$	$u_{iL}, \text{ (I)}$	$u_{iL}, \text{ (II)}$	$\frac{u_i}{u_{\text{експ.}}}$	$\frac{u_L(\text{I})}{u_{\text{експ.}}}$
$(\text{GaAs})_x(\text{Zn})_{1-x}$	1	$1,9 \cdot 10^{18}$	0,42	111 ± 8	457	184	167	131 ± 26	122 ± 23	4,1	1,7
	2	$3,6 \cdot 10^{19}$	0,56	62 ± 4	118	67	65	43 ± 9	42 ± 9	1,9	1,1
	3	$8,8 \cdot 10^{19}$	0,56	31 ± 2	85	54	54	33 ± 8	33 ± 8	2,7	1,7

- експериментальні та розраховані величини рухливості в $\text{см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$;
- похибка визначення m^* складає 16 %, $u_{\text{експ.}}$ – 7 %, u_i – 10 %, u_L – 44 %;
- $u_L(\text{I})$ – рухливість розрахована з використанням μ^* , визначеного за даними термоЕРС для $r = 2$;
- $u_L(\text{II})$ – рухливість розрахована з використанням μ^* , визначеного за формулою (2).

Рухливість дірок при розсіюванні на акустичних коливаннях ґратки u_L визначалася за формулою

$$u_L = \frac{\sqrt{2}e\pi\hbar^4 C_e}{3E_1^2 m^{*2} (kT)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{F_0(\mu^*)}{F_{\frac{1}{2}}(\mu^*)}, \quad (6)$$

яка справедлива для довільного ступеня виродження. У формулі (6) e – заряд електрона, \hbar – зведена стала Планка, C_e – середнє значення пружної постійної для повздовжніх хвиль, m^* – ефективна маса дірок, E_1 – деформаційний потенціал для краю валентної зони, $F_0(\mu^*)$ – інтеграл Фермі індекса 0, $F_{\frac{1}{2}}(\mu^*)$ – інтеграл Фермі індекса $\frac{1}{2}$, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура. Для розрахунку u_L величину деформаційного потенціалу E_1 та середнє значення пружної постійної для повздовжніх хвиль C_l брали з робіт [6, с. 11-36] та [3, с. 388]: $E_1 = 14,5\text{ eV}$; $C_l(296\text{ K}) = 7,7 \cdot 10^{11}\text{ дин/см}^2$.

Інтеграли Фермі $F_0(\mu^*)$ та $F_{\frac{1}{2}}(\mu^*)$ протабульовані в [7, с. 366-376]. Результати розрахунку рухливості дірок у зразках $(\text{GaAs})_x(\text{Zn})_{1-x}$ за формулою (6) для $T = 296\text{ K}$ наведені в таблиці 4.

З таблиці видно, що із зростанням температури рухливість дірок, пов'язана із розсіюванням на акустичних коливаннях ґратки, зменшується, як того вимагає теорія.

Більше того, експериментальні величини рухливості $u_{\text{експ.}}$ з урахуванням похибки розрахунку u_L попадають в інтервал $u_L - \Delta u_L \leq u_L \leq u_L + \Delta u_L$. Але робити однозначний висновок про те, що рухливість дірок в $(\text{GaAs})_x(\text{Zn})_{1-x}$ при $T = 296\text{ K}$ обмежена лише розсіюванням на

акустичних коливаннях ґратки, було б передчасним, бо похибка обрахунку u_L обумовлена невисокою точністю визначення ефективної маси методом термоЕРС. У разі зменшення похибки визначення m^* на $\sim 20\%$ роботи висновок про домінуючу роль розсіювання на акустичних коливаннях ґратки в зразках 1,3 вже не було б підстав. Разом з тим результати обрахунку рухливості u_L в $(\text{GaAs})_x(\text{Zn})_{1-x}$ переконливо свідчать про суттєву роль розсіювання на акустичних коливаннях ґратки в досліджуваних матеріалах.

Таким чином, в легованому цинком арсеніді галію дірки розсіюються, принаймні, на іонах домішки та акустичних коливаннях ґратки. Для комбінованого механізму розсіювання рухливість u_{iL} можна визначити за наближеною формулою

$$\frac{1}{u_{iL}} = \frac{1}{u_i} + \frac{1}{u_L}. \quad (7)$$

Результати розрахунку рухливості u_{iL} за формулою (7) наведені в таблиці 4. З таблиці видно, що теоретичні величини рухливості дірок u_{iL} в зразках 1 і 3 у межах похибки співпадають з експериментальними значеннями рухливості для $T = 296 \text{ K}$. В зразку 2 $u_{\text{експ}}$ і u_{iL} корелюють дещо гірше.

Отже, в арсеніді галію, легованому цинком, при кімнатній температурі діє змішаний механізм розсіювання – на іонах домішки та акустичних коливаннях ґратки, що узгоджується з результатами, отриманими раніше іншими авторами.

Література

1. Электрические свойства твердых растворов $(\text{GaAs})_x(\text{ZnSe})_{1-x}$ / А.В. Войцеховский, Н.Г. Вялый, А.Д. Пашун // Изв. АН СССР. Неорганические материалы. – 1980. – № 11. – С.1909 – 1911.
2. Рассеяние носителей тока в арсениде галлия при сильном вырождении/ О.В. Емельяненко, Т.С. Лагунов, Д.Н. Наследов // Физика и техника полупроводников. – 1960. – т. II, в.2. – с.192.
3. Маделунг О. Физика полупроводниковых соединений элементов III и V групп / О. Маделунг. – М.: Мир, 1967. – 477с.
4. Арсенид галлия. Получение, свойства и применение/ [Бурдуков Ю.М., Гашимзаде Ф.М., Гольдберг Ю.А. и др.]; под. ред. Ф.П. Кесаманлы и Д.Н. Наследова, – М.: Наука, 1973. – 471с.
5. Анищенко В.О. Некоторые физические свойства гетеровалентных твердых растворов арсенида галлия с теллуридами кадмия и цинка: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.10/ Анищенко Валерий Алексеевич. – К.: 1974. – 148 с.
6. Deformation potentials of $k = 0$ states of tetrahedral semiconductors / A. Blacha, H. Presting, M. Cardona// Phys. Stat. Solidi b – 1984. – V. 126. – P. 11-36.
7. Фистуль В.И. Сильно легированные полупроводники/ В.И. Фистуль. – М.: Наука, 1967. – 416 с.

УДК 537.226:624.133

ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ САТЕНГІПСУ ТА ІЗОГІПСУ В ПРОЦЕСІ ВИКОНАННЯ ОПОРЯДЖУВАЛЬНИХ РОБІТ

Шапка В.В., Шовкопляс В.С.

Будівельні суміші на основі мінералу гіпсу такі як сатенгіпс та ізогіпс в наш час дуже широко використовуються для оздоблювальних робіт в будівництві.

Механічні та теплофізичні характеристики цих матеріалів можна знайти в літературі. Наприклад, границя міцності на стиск для ізогіпсу та сатенгіпсу (через 7 діб після виготовлення зразків) становить не менше 3,5 Мпа, а теплопровідність $0,25 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$ [1].

Поверхні із цих матеріалів, в деяких випадках, можуть контактувати з провідниками електричної мережі або струмопровідними частинами електричних установок і становити загрозу для здоров'я і життя людей, що живуть або працюють у даному приміщенні.

Діелектричні властивості названих матеріалів необхідно також знати для того, щоб встановити клас приміщення по небезпеці ураження електричним струмом і відповідно до нього зробити вибір електрообладнання і конструкції електроустановок, що забезпечуватимуть високу ступінь безпеки при обслуговуванні, а також встановити умови їх експлуатації.

Незважаючи на це, даних про властивості сатенгіпсу та ізогіпсу, як діелектриків в процесі виконання будівельних робіт, практично немає.

Метою даної роботи є встановлення залежності питомого об'ємного опору (ρ_v) та питомого поверхневого опору (ρ_s) зразків із вказаних матеріалів від напруги та часу після їх виготовлення.

Зразки із сатенгіпсу та ізогіпсу для досліджень виготовлялися за технологією, яка використовується при проведенні тинькарських робіт. Тобто до порошкоподібної будівельної суміші добавлялася вода у співвідношенні: 6,5 л води на 10 кг порошку, потім все ретельно перемішувалося до утворення однорідної в'язкої пластичної маси. З цієї маси на плоскій поверхні за допомогою дерев'яного валика формувався шар товщиною приблизно 1 см, з якого за допомогою циліндричної посудини вирізалися дископодібні зразки діаметром приблизно 6 см.

Після тверднення зразки шліфувалися наждачним папером за допомогою спеціальної оправки, яка забезпечувала паралельність їх плоских поверхонь. Питомі опори зразків вимірювалися за допомогою системи її трьох електродів на постійному струмі (рис. 1) [2].

Електроди вирізалися із алюмінієвої конденсаторної фольги відповідно до розмірів масивних охоронного, вимірювального та високовольтного електродів, виготовлених із сталі і наклеювалися на зразок за допомогою технічного вазеліну.

Досліджуваний зразок вмикається в коло (рис. 1) послідовно із захисним резистором R порядку 1 МОм, що обмежує силу струму у випадку пробоя діелектрика. Для вимірювання сили струму в установці використовується автокомпенсаційний мікровольтнаоамперметр Р325

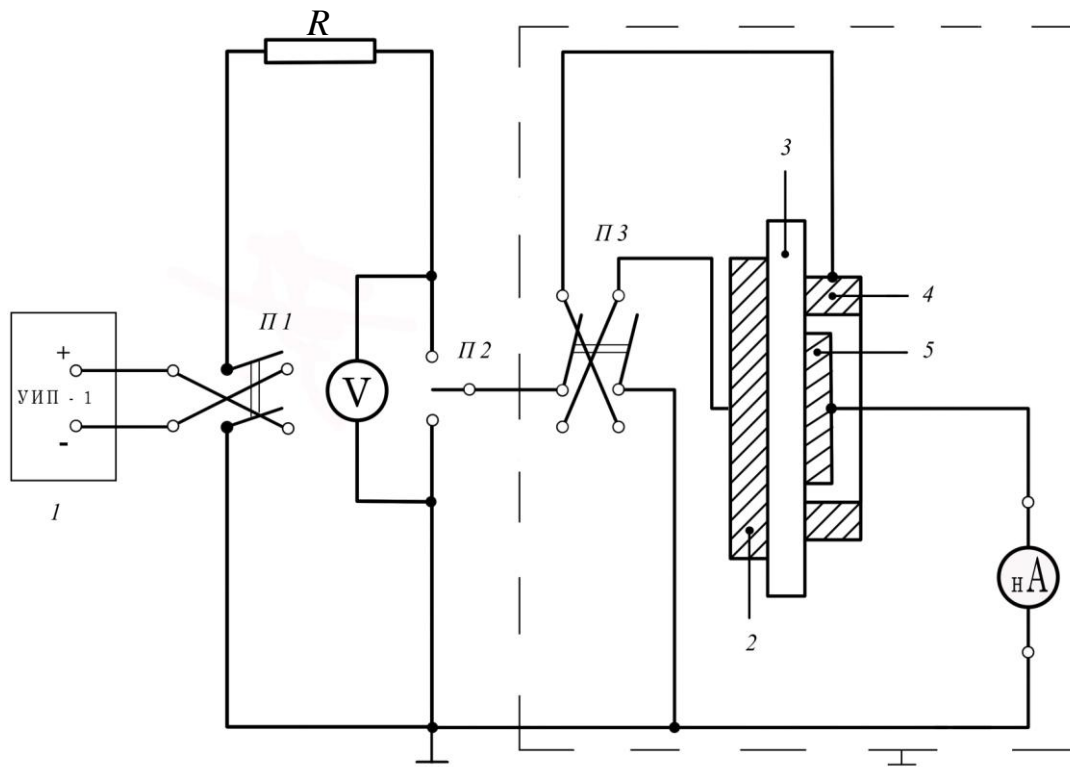


Рис. 1. Принципова схема установки для вимірювання питомого об'ємного та питомого поверхневого електричного опору діелектрика:

1 – джерело високої напруги; 2 – високовольтний електрод; 3 – зразок діелектрика;
4 – охоронний електрод; 5 – вимірювальний електрод.

(нА). Стабілізована постійна напруга (0...600 В) на зразок подається від джерела напруги УИП-1. Напруга вимірюється за допомогою вольтметра (комбінований цифровий прилад Щ 4300). Полярність напруги, що прикладається, можна змінювати за допомогою перемикача *П1*.

Дроти, що йдуть від амперметра до вимірювального електроду 5 екрановані, а екрани заземлюються. За допомогою перемикача *П2* напругу певної полярності можна подати на досліджуваний зразок (верхнє положення) або його розрядити (нижнє положення).

Перемикач *П3* змінює режим роботи установки:

- 1) вимірювання поверхневого опору R_S – верхнє положення;
- 2) вимірювання об'ємного опору R_V – нижнє.

Всі елементи схеми змонтовані на пластинці з полістиролу для забезпечення високого опору ізоляції. У свою чергу, пластинка полістиролу прикріплена до заземленої металевої пластинки, а всі елементи кола закриваються кожухом із гетинаксу, внутрішні поверхні якого покриті мідної фольгою, що заземлюється. Згідно з правилами техніки безпеки установка автоматично відключається від джерела живлення при знятті захисного кожуха, коли змінюється режим роботи установки чи замінюється зразок (на рис. 1 блокувальні вимикачі не показано).

Відлік по наноамперметру проводився через 60 с після того, як була прикладена напруга. Необхідність витримки пояснюється тим, що після увімкнення напруги струм, який протікає через зразок з плином часу, падає до деякого усталеного значення. Щоб одержати результати, які можна порівнювати, покази домовилися знімати через певний проміжок часу.

Відносна похибка визначення ρ_V і ρ_S не перевищувала 4%.

Результати вимірювань питомого опорів сатен- та ізогіпсу з часом після виготовлення зразків показані на рисунках 2 і 3.

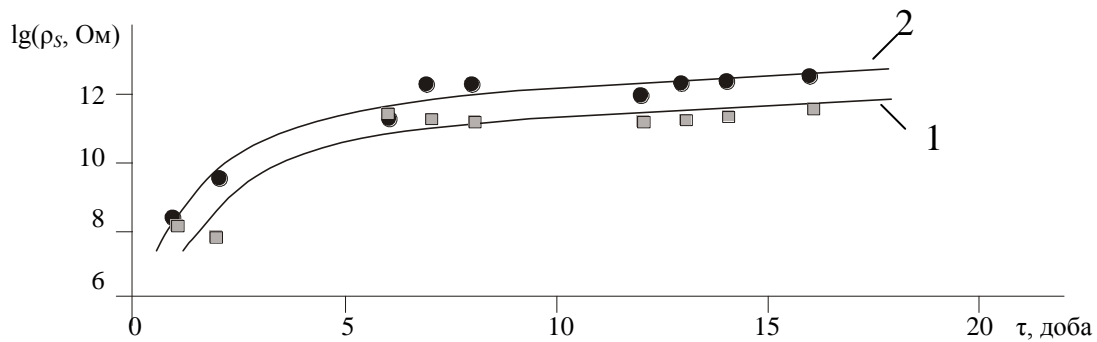


Рис. 2. Залежність питомого поверхневого опору ρ_S від часу
 $U = 600 \text{ В}$. 1 – ізогіпс, 2 – сатенгіпс

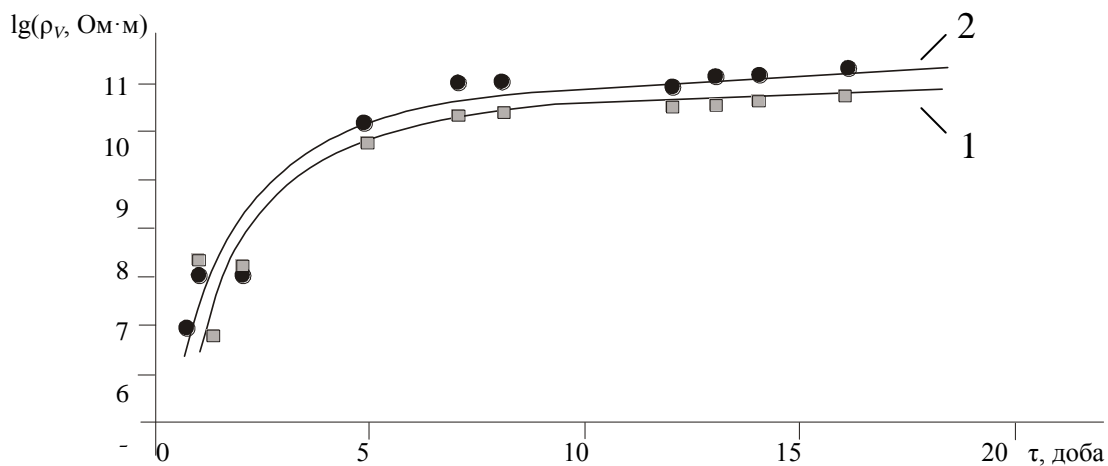


Рис. 3. Залежність питомого об'ємного опору ρ_V від часу
 $U = 600 \text{ В}$. 1 – ізогіпс, 2 – сатенгіпс

Числові значення питомих опорів ρ_V і ρ_S у вибрані моменти часу після виготовлення зразків подані в таблиці 1.

Таблиця 1

Питомий опір зразків з ізогіпсу та сатенгіпсу після виготовлення

Будівельні суміші	Час після виготовлення, доба	$\rho_V, \hat{\Gamma} \cdot \hat{\Gamma} \cdot \hat{\Gamma} ; U = 600V$	$\rho_S, \text{Ом}; U = 600V$
Ізогіпс	1	$2,4 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^8$
	8	$2,8 \cdot 10^8$	$1,6 \cdot 10^{11}$
	16	$5,6 \cdot 10^8$	$3,7 \cdot 10^{11}$
Сатенгіпс	1	$2,5 \cdot 10^5$	$1,7 \cdot 10^8$
	8	$9,2 \cdot 10^8$	$15 \cdot 10^{11}$
	16	$18,5 \cdot 10^8$	$28 \cdot 10^{11}$

Для зразків вказаних будівельних сумішей також було встановлено, що питомий об'ємний і питомий поверхневий опори із збільшенням прикладної напруги зменшуються.

Для прикладу приведено рис. 4. Крива 1 відноситься до лівої осі, криві 2,3 – до правої.

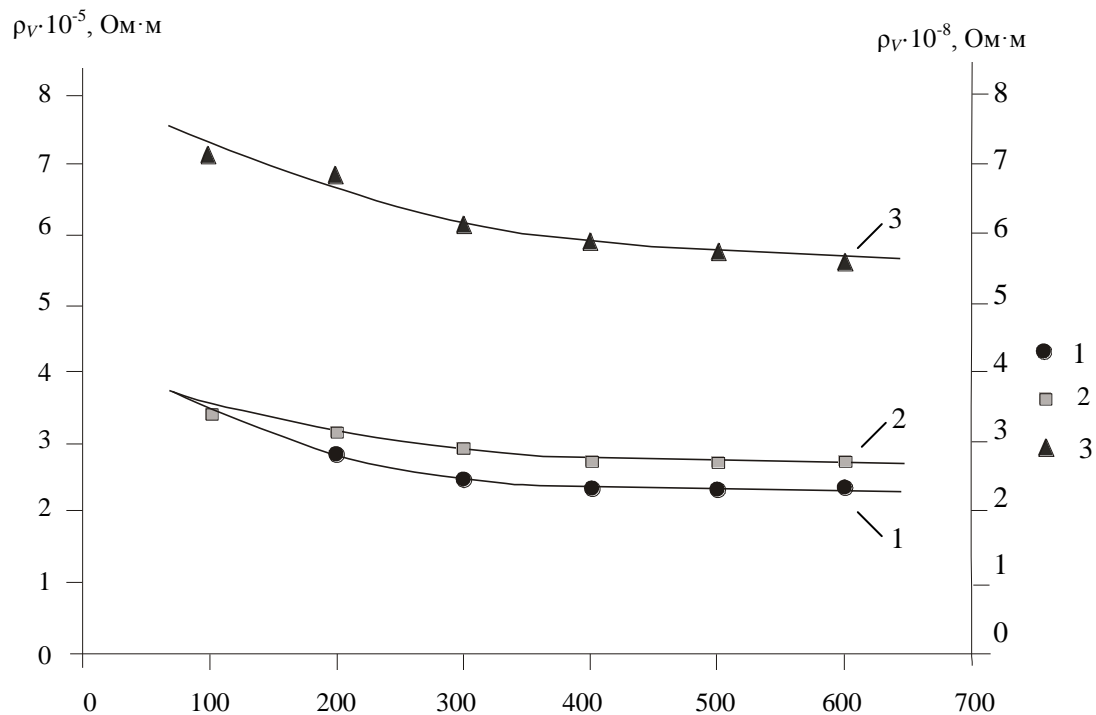


Рис. 4. Залежність питомого об'ємного опору ρ_V ізогіпсу від прикладеної напруги у різні моменти часу після виготовлення зразка

Зменшення питомого опору ізо- та сатенгіпсу із збільшенням напруги можна пояснити утворенням в них ланцюжків із молекул води, що орієнтується під дією електричного поля, а також іонізацією газів в бульбашках, які утворюються при виготовленні зразків.

З рис. 2, 3 і таблиці 1 видно, що через добу після виготовлення зразків за вказаною технологією питомий об'ємний опір ізогіпсу і сатенгіпсу $\rho_V \sim 10^5 \text{ Ом} \cdot \text{м}$, а питомий поверхневий

опір $\rho_s \sim 10^8$ Ом, що дозволяє їх віднести до матеріалів з досить низькими ізоляційними властивостями і небезпечними для працівників при контакті зі струмопровідними частинами електроустановок.

Встановлено, що питомий поверхневий та об'ємний опори досліджуваних матеріалів швидко зростали із плином часу в процесі природного висихання. Протягом кількох діб ρ_v та ρ_s збільшилися на три-чотири порядки, а потім стабілізувалися, через 7-8 діб, і досягли значень, характерних для діелектриків, що використовуються в електротехнічній промисловості, наприклад, гетинаксу, текстоліту та ін.

Питомі об'ємні та поверхневі опори ізогіпсу та сатенгіпсу на етапі стабілізації становлять відповідно $5,6 \cdot 10^8$ Ом · м, $3,7 \cdot 10^{11}$ Ом та $18,5 \cdot 10^8$ Ом · м, $28 \cdot 10^{11}$ Ом (сатенгіпс кращий ізолятор, ніж ізогіпс), а приміщення, де стіни та стеля оздоблені цими матеріалами можна віднести до приміщень без підвищеної електробезпеки при всіх інших необхідних умовах [4].

Література

1. Гипсовая штукатурка [Електронний ресурс]. – Режим доступу: 20.08.11: <[http://www. satengips.com.ua/products/izoeuro/](http://www.satengips.com.ua/products/izoeuro/)>. Загол. з екрану. – Мова рос.
2. Казарновский Д.М., Тареев Б.М. Испытание электроизоляционных материалов и изделий. – Ленинград.: Энергия. Ленингр. отд-ние, 1980. – С. 17-26, С. 31-34.
3. Тареев Б.М. Физика диэлектрических материалов. – М.: Энергия, 1973. 328 с.
4. Долин П.А. Основы техники безопасности в электроустановках. – М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 401-103.

УДК 621.375.1

РОЗРОБЛЕННЯ ШИРОКОСМУГОВОГО ПІДСИЛЮВАЧА ПОТУЖНОСТІ СИГНАЛІВ РЧ НА НЕСПЕЦІАЛІЗОВАНИХ ПОЛЬОВИХ ТРАНЗИСТОРАХ

Закалюжний В.М., Лозко В.І.

У радіотехніці відомо багато варіантів електричних схем та конструкцій підсилювачів потужності сигналів високої частоти, кожен з яких має свої переваги і недоліки.

У процесі проектування широкосмугових транзисторних підсилювачів, розрахованих на вихідну потужність 25-100 Вт, конструктори, як правило, зупиняються на двохтактних схемах вихідного каскаду на потужних спеціалізованих біполярних чи польових транзисторах, оскільки вони мають низку переваг перед однотактними. Переважна більшість радіостанцій, призначених для службового зв'язку мають саме такі вихідні каскади.

Практика експлуатації транзисторних радіостанцій, наприклад в МВС, МНС показала, що найчастіше виходять з ладу транзистори вихідного каскаду. Особливо чутливими до зовнішніх електричних полів та до перевантажень є польові транзистори з ізольованим затвором. Враховуючи високу вартість спеціалізованих потужних польових транзисторів з ізольованим затвором та їхній відносний дефіцит, ми поставили за мету знайти варіанти їхньої заміни на дешевші, неспеціалізовані транзистори без істотного погіршення основних характеристик радіостанції.

Одними з найпоширеніших польових ВЧ транзисторів з ізольованим затвором, які широко використовуються в техніці радіозв'язку є транзистори КП904Б та КП904А, тому саме ці транзистори привернули нашу увагу.

Розглянувши параметри відомих польових транзисторів, призначених для роботи в імпульсних схемах (зокрема, для роботи у вихідному каскаді рядкової розгортки телевізійних

приймачів), та порівнявши їх з *KП904А*, ми прийшли до висновку про принципову можливість використання неспеціалізованих транзисторів *IRF630*, *IRF640* тощо, у вихідних підсилювачах РЧ.

Виходячи з вищезазначеного припущення, ми поставили перед собою завдання, розробити широкопasmовий підсилювач потужності РЧ діапазону на транзисторах *IRF630*, взявши за основу схему на транзисторах *KП904А*, і, мінімально удосконаливши її, досягти прийнятних результатів.

Як вихідну для експерименту ми використали схему широкопasmового підсилювача на потужних польових транзисторах типу *KП904*, запропоновану В.В.Дроздовим [2].

Для того щоб упевнитись в тому, що транзистори *IRF630* придатні для підсилення потужності коливачів РЧ, було здійснено попередній розрахунок.

Ми виходили з того, що параметри підсилювача повинні бути не гіршими, ніж параметри підсилювача на потужних польових транзисторах типу *KП904*, зокрема: вихідна потужність підсилювача близько 80 Вт на опорі навантаження 50 Ом, робочий діапазон частот 3-20 МГц, напруга джерела живлення 40 В.

Як було зазначено вище, близькість основних параметрів обраних транзисторів давала надію на позитивний результат.

Розрахунок було зроблено за допомогою програми *MathCad*, за методикою описаною Буніним С.Г. та Шахгильдяном В.В. [1, 3]. Єдиним компромісом у розрахунку було припущення про працездатність транзисторів *IRF630* на частотах понад 150 МГц.

Отже, вихідні дані для розрахунку підсилювача такі: вихідна потужність становитиме 80 Вт на частоті 3 – 20 МГц в схемі із спільним истоком (СІ), напруга джерела живлення 40 В. Як активний елемент вибираємо транзистор типу *IRF630* із такими даними: максимально допустима стокова напруга $U_{k.dop} = 200 \text{ V}$; допустимий стоковий струм $I_{k.dop} = 9 \text{ A}$; індуктивність истокового виводу $L_e = 7.5 \cdot 10^{-9} \text{ H}$; ємність стоку $C_k = 500 \text{ pF}$; ємність истоку $C_e = 250 \text{ pF}$; мінімальний коефіцієнт підсилення струму затвора $\beta_{min} \geq 15$; опір насичення $r_{nas} = 0.4 \Omega$; опір стоку $r_k = 0.4 \Omega$; опір затвору $r_b = 0.2 \Omega$; тепловий опір перехід – корпус $R_{pk} = 1.67 \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}}$.

Підсилювач має бути придатним для підсилення як імпульсних сигналів, тобто, телеграфних, так і однопasmових, тобто, сигналів зі змінною амплітудою. Для цього було обрано режим роботи транзисторів – В.

Кут відсічення $\theta = 90^\circ$. Для нього $\alpha_0 = 0.318$ і $\alpha_1 = 0.5$. Амплітуда стокової напруги в критичному режимі:

$$U_k = E_k \left[0.5 + 0.5 \sqrt{1 - \frac{8r_{nas}P_1}{\alpha_1 E_k^2}} \right] = 38.330 \text{ V} \quad (1)$$

Максимальна стокова напруга:

$$U_{k.max} = E_k + U_k = 78.330 \text{ V}, U_{k.max} < U_{k.dop} \quad (2)$$

Амплітуда струму першої гармоніки:

$$I_{k1} = 2 \frac{P_1}{U_1} = 2.087 \text{ A} \quad (3)$$

Максимальне значення стокового струму:

$$I_{k.max} = \frac{I_{k1}}{\alpha_1} = 4.174 \text{ A}, I_{k.max} < I_{k.dop} \quad (4)$$

Стале значення стокового струму:

$$I_{k0} = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} I_{k1} = 1.327 \text{ A} \quad (5)$$

Потужність, що підводиться до каскаду:

$$P_0 = E_k I_{k0} = 53.096 \text{ W} \quad (6)$$

ККД стокового кола:

$$\eta = \frac{P_1}{P_0} = 0.753 \quad (7)$$

Розсіювана стокова потужність:

$$P_k = P_0 - P_1 = 13.096 \text{ W} \quad (8)$$

Опір стокового навантаження в двотактних схемах збільшується вдвічі:

$$R_k = \frac{U_k^2}{2P_1} = 18.365 \Omega \quad (9)$$

Активна складова вихідного опору транзистора при КЗ:

$$R_{2z} = \frac{1}{(2\pi f C_k)^2 r_k} = 70.362 \Omega \quad (10)$$

Потужність збудження:

$$P_b = \frac{2(r_b + 2\pi f_m L_e)}{\alpha_1^2} \left(\frac{f}{f_m}\right)^2 \left(\frac{P_1}{U_k}\right)^2 \left(1 + \frac{R_k}{R_{2z}}\right)^2 = 2.719 \text{ W} \quad (11)$$

Коефіцієнт підсилення по потужності:

$$K_p = \frac{P_1}{P_b} = 15 \quad (12)$$

Амплітуда вхідного струму:

$$I_{bx} = I_y + I(C_k) = \left(\frac{f}{f_m}\right) \left[\frac{(I)_{k1}}{\gamma_1} \right] + 2\pi f C_k U_k \quad (13)$$

$$\gamma_1 = \alpha_1(1 - \cos(\theta)) = 0.5 \quad (14)$$

$$I_{bx} = I_y + I(C_k) = \left(\frac{f}{f_m}\right) \left[\frac{(I)_{k1}}{\gamma_1} \right] + 2\pi f C_k U_k = 7.782 \text{ A}$$

Вхідний опір (має комплексний характер):

$$R_{bx1} = 2 \frac{P_b}{I_{bx}^2} = 0.09 \Omega \quad (15)$$

Додатковий опір між затвором і истоком для запобігання пробою при зворотній півхвилі:

$$R_d = \frac{\beta_{min}}{2\pi f C_k} = 63.662 \Omega \quad (16)$$

Перевірка вхідного опору із врахуванням R_d :

$$R_{bx2} = \frac{R_{bx1} R_d}{R_{bx1} + R_d} = 0.09 \Omega \quad (17)$$

Потужність яка розсіюється на транзисторі:

$$P_m = P_k + P_b = 15.815 \text{ W} \quad (18)$$

Перевищення температури переходу над температурою корпусу транзистора:

$$\Delta T = R_{pk} P_m = 29.85 \text{ }^\circ\text{C} \quad (19)$$

Отже, попередній розрахунок вихідного каскаду підтвердив наші припущення щодо можливості використання в підсилювачах потужності $PЧ$ діапазону транзисторів типу $IRF 630$, за умови, що максимально допустима робоча частота цих транзисторів не менша від 150 МГц .

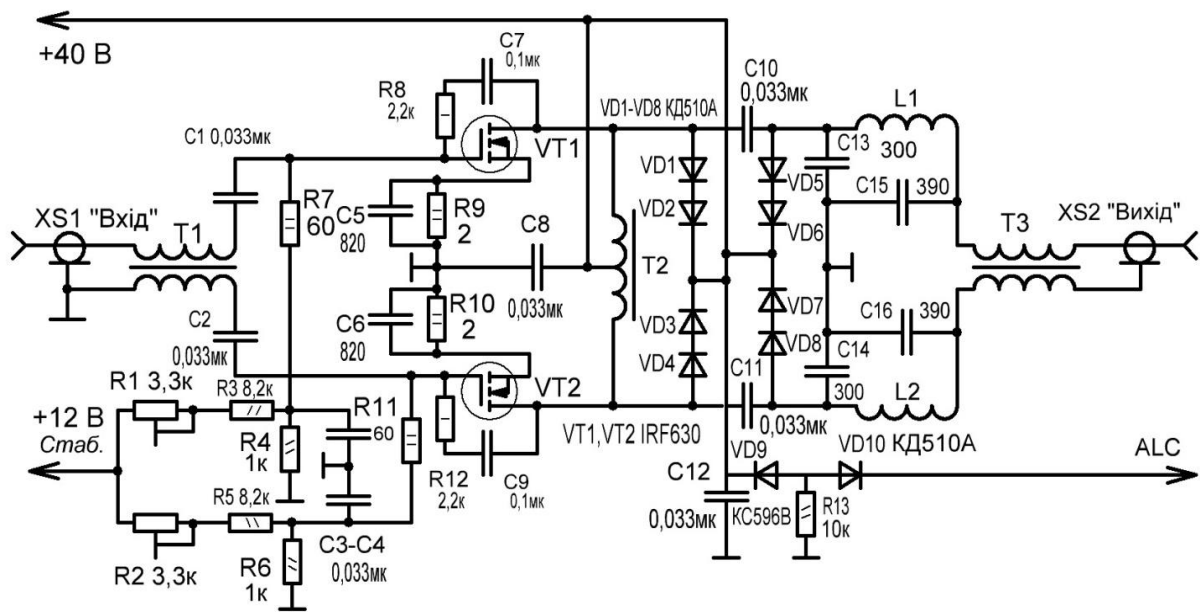


Рис. 1. Принципова схема широкосмугового підсилювача на польових транзисторах IRF630

Проаналізувавши схему ШСП потужності РЧ діапазону В.В. Дроздова та враховуючи дані розрахунку вихідного каскаду, ми прийшли до висновку про необхідність її удосконалення з метою спрощення налаштування та підвищення стабільності роботи підсилювача. В результаті була отримана схема, що має низку особливостей (рис. 1):

- для забезпечення стійкості підсилювача введено кола негативного зворотного зв'язку (НЗЗ) R_8C_7 та $R_{12}C_9$, які запобігають самозбудженню транзисторів VT_1 , VT_2 ;
- у истокові кола транзисторів введені кола НЗЗ C_5R_9 та C_6R_{10} , які дещо зменшують крутизну АЧХ, і тим самим захищають транзистори від перевантаження;
- оскільки транзистори, навіть однієї серії, можуть мати занадто різні параметри, для установлення початкового струму спокою кожного транзистора окремо введено кола $R_1R_3R_4$ та $R_2R_5R_6$, що дає змогу встановити транзистори з різними параметрами і досягти заданого режиму роботи підсилювача.

За наведеною вище схемою підсилювач потужності ВЧ на неспеціалізованих транзисторах був зібраний і випробуваний в лабораторних умовах. Його реальні параметри та надійність виявилися кращими, ніж у підсилювачів на транзисторах КП904, що дає підстави стверджувати про перспективність використання неспеціалізованих транзисторів типу IRF630 в радіотехнічних конструкціях.

Література

1. Бунин С. Г. Справочник радиолюбителя – коротковолновика / С. Г. Бунин, Л. П. Яйленко. – [3-е изд.]. – К.: Техніка, 1984. – 264 с. – (Библиогр. по главам).
2. Дроздов В. В. Любительские КВ трансиверы / Дроздов В.В. – М.: Радио и связь, 1988. – 176 с.
3. Шахгильдян В. В. Проектирование радиопередатчиков: [учеб. пособие для вузов] / В. В. Шахгильдян, М. С. Шумилин, В. Б. Козырев. – [4-е изд.]. – М.: Радио и связь, 2000. – 656 с.

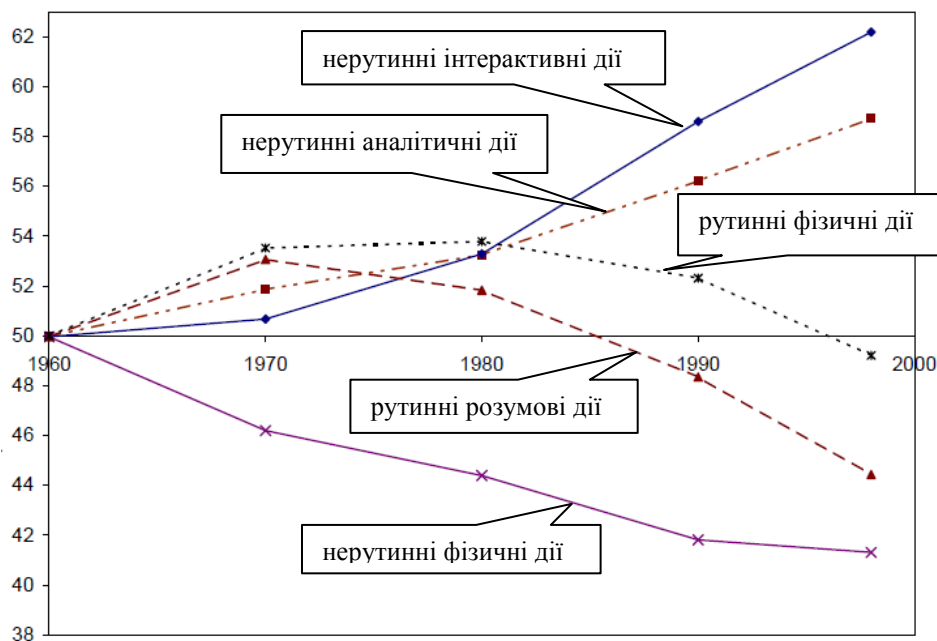
4 Методика та проблеми педагогіки

УДК 378.146

ДО ПИТАННЯ ПРО СИСТЕМУ ОЦІНЮВАННЯ ДИПЛОМНИХ РОБІТ

Ковальчук Ю.О.

Відтоді, коли Елвін Тоффлер проголосив знамените “Неграмотними будуть у 21 столітті не ті, хто не вміє читати або писати, а ті, хто не вміє учитися, переучуватися і розучуватися” [1], минуло 40 років. За цей час мало що змінилося як у вітчизняній освіті в цілому, так в методиці викладання. Зокрема, цілком традиційними є принципи, підходи, методи і технології оцінювання. Уведення до начального процесу оцінювання за 100-бальною накопичувальною шкалою стало швидше технічним, ніж якісним просуванням вперед, своєрідною зміною фасаду, за яким ховаються цілком застарілі підходи. Про застій свідчить хоча б уживана термінологія: “оцінювання знань”, “поточне оцінювання”, “підсумкове оцінювання”. Якщо вдається до поширеної аналогії із зважуванням поросяти, можна констатувати, що оцінювання у вітчизняній традиції – це таке зважування, яке не тільки не додає поросяті ваги, а й часто завдає йому шкоди. Порівняймо згадані терміни з прийнятими в розвинених країнах: замість оцінювання знань – achievement assessment (оцінювання досягнень, оцінювання рівня успішності), замість поточного оцінювання – formative assessment (формівне оцінювання), замість підсумкового оцінювання – summative assessment (сумативне оцінювання). Різниця в термінології є своєрідним ключем до розуміння того, що акценти в функціях і цілях навчання слід привести у відповідність з викликами 21 століття. У чому суть цих викликів? Сучасну молодь слід готувати до успішної діяльності в умовах неперервного навчання, часті зміни професії, роботи в багатонаціональних, мультикультурних, географічно розподілених колективах, в умовах надлишковості інформації. Все меншу роль у професійній діяльності відіграють рутинні фізичні та розумові дії, поступаючись нерутинним аналітичним та інтерактивним діям (мал. 1).



Мал. 1. Розподіл (у відсотках по вертикалі) характеристик робіт, виконуваних професіоналами в різні роки (по горизонталі) [2]

На зламі тисячоліть проводилося багато досліджень, метою яких було визначити, чому і як слід навчати молоде покоління 21 століття. Достатньо навести перелік характеристик, витребуваних суспільством 21 століття, запропонованих у 2009 році виконавцями проекту ACT21S, організаторами та спонсорами якого є корпорації Cisco, Intel та Microsoft (цитуються по презентації виконавчого директора цього проекту В. McGaw [3]):

Способи мислення (Ways of Thinking)

1. Креативність та інновації.
2. Критичне мислення, вирішення проблем, прийняття рішень.
3. Уміння навчатися, метамислення.

Способи діяльності (Ways of Working)

4. Комунікативність.
5. Співпраця в команді.

Засоби діяльності (Tools for Working)

6. Інформаційна грамотність.
7. Використання інформаційно-комунікаційних технологій.

Існування в світі (Living in the World)

8. Локальне і глобальне громадянство.
9. Життя і кар'єра.
10. Персональна і соціальна відповідальність.

У 90-х роках минулого століття корпорація Intel розробила так званий метод проектів, приділивши, зокрема, багато уваги проблемі оцінювання. Метод проектів популяризувався в багатьох країнах, в тому числі й в Україні, в рамках програми “Навчання для майбутнього”. Незважаючи на наявність серед викладачів нашого факультету сертифікованих інструкторів з цієї програми, вона не набула у нас належного поширення. Тим часом метод проектів може успішно використовуватися, передусім, керівниками курсових та дипломних робіт, виробничих практик. В плані оцінювання дипломних робіт ми можемо використати деякі з підходів та інструментів, запропонованих Intel для оцінювання учнівських проектів, підлаштувавши їх для потреб оцінювання випускних робіт студентів.

Метою цієї статті не є пропозиція завершеної системи оцінювання дипломних робіт студентів. Інструменти і методи, про які йдеться нижче, повинні запроваджуватися поступово, учні повинні звикати до них ще з молодших класів школи. Викладачам теж не легко опанувати їх повною мірою.

Передусім, оцінювання повинне складатися з двох частин – формівного та підсумкового. Формівне оцінювання повинне сприяти успішному виконанню студентами дипломних досліджень. Важливою є участь у процесі оцінювання як керівника, так і самого студента (бажана також участь інших студентів). Підсумкове оцінювання може виконуватися керівником, рецензентом, і державною екзаменаційною комісією. При цьому роль кожного з суб'єктів оцінювання має визначатися окремо. Інструменти оцінювання можна калібрувати таким чином, щоб у підсумку отримати накопичувальну 100-бальну шкалу.

На сайті корпорації Intel [4] снує спеціальна бібліотека інструментів оцінювання (загалом кілька сотень), налаштованих на різні вікові категорії учнів та різні аспекти оцінювання. Цією бібліотекою можна скористатися як базовою для створення власних інструментів.

Зауважимо, що інструменти оцінювання Intel є незвичними для наших викладачів та студентів. Для них характерна значна роль рефлексії, так званого метамислення – “мислення про мислення”. В основному це так звані рубрики і контрольні листи, які дозволяють переводити у бали якісні характеристики розумових дій та досягнень студентів, а також продуктів їх дослідницької та проектувальної діяльності – текстів, презентацій, графічних та мультимедійних документів. Всі інструменти бібліотеки згруповані за аспектами оцінювання у категорії, з яких для оцінюванні дипломних робіт можемо виділити наступні:

- навички вищих форм мислення (креативність, пошук рішень, критичне мислення);
- продукти (друковані та електронні публікації, відео, звіти та есе, діаграми та графіки);
- дії (мультимедійна презентація, усна доповідь);

- процеси (співпраця у команді, дослідницька діяльність, самостійність).

Не все з переліченого підходить для всіх випадків. Наприклад, якщо дипломна робота виконується студентом самостійно, можна не оцінювати навички його у команді, хоча мінімальна команда – студент та його керівник – існує завжди.

Ось який вигляд може мати рубрика для оцінки студентом власної креативності:

	4	3	2	1
Вільність	Я використовую всі свої знання та навички з фаху, а також різні стратегії для висунення значної кількості нових ідей	Я здатний висувати деякі нові ідеї	За допомогою керівника я можу обдумувати нові ідеї	Мені важко висувати нові ідеї
Сміливість	Я шукаю нового досвіду, не побоюючись того, що інші думають про мене або того, що я помиляюся	Я намагаюся набути нового досвіду, не дуже побоюючись помилок або ставлення інших до мене.	Часом я уникаю можливості набути нового досвіду через те, що у мене може нічого не вийти	Я уникаю можливості набути нового досвіду, якщо я підозрюю, що у мене нічого не вийде
Оцінка	Я впевнений, що володію необхідною інтуїцією та здібностями, щоб адекватно оцінити, чи є мої ідеї переконливими і якою є цінність моїх результатів	Зазвичай я знаю, чи варті мої ідеї схвалення і чи мають результати моєї роботи якусь цінність	Я потребую сторонньої допомоги, щоб визначити цінність моїх ідей і результатів	Я завжди вважаю свою роботу доброю, не зважаючи на те, що думають про неї інші. АБО Як би я не старався, мої результати не будуть добрими
Втілення	Я здатний втілити свої ідеї в життя, у вигляді успішних дій і результатів	Я здатний втілити ідею в конкретні дії та результати	Коли у мене з'являється якась ідея, я потребую сторонньої допомоги для її втілення	Я не можу придумати, як втілювати ідею в життя
Володіння мовою	Я використовую усю виразність мови, щоб просувати ідеї, надихати, зацікавлювати, роз'яснювати та переконувати інших	Я використовую мовні засоби для зацікавлення інших	За умови сторонньої допомоги, я можу використовувати мовні засоби для зацікавлення інших	Мова, якою я спілкуюся з іншими, є передбачуваною та невиразною
Гнучкість	Я здатний розглядати об'єкти, системи чи процеси з багатьох точок зору з метою відшукання способів зробити їх більш ефективними, красивими і привабливими	Я здатний поглянути на об'єкти, системи чи процеси з іншої точки зору, щоб покращити їх	Із сторонньою допомогою я можу розглядати на об'єкти, системи чи процеси з інших точок зору, щоб покращити їх	Я рідко розглядаю об'єкти, системи чи процеси з іншої точки зору, щоб зробити їх кращими

Цінність використання подібних рубрик полягає швидше не в отриманні конкретних балів, які потім увійдуть в підсумкову оцінку, а у тому, що дескриптори, які знаходяться у клітинках цієї рубрики, стимулюють студента, змушують його звертати увагу на різні аспекти творчого мислення. Результати багатьох досліджень свідчать, що самоспостереження підвищує ефективність праці. Наприклад, критерій “володіння мовою” може спонукати студента зробити усну презентацію своєї роботи цікавою і ефектною, над чим він раніше, можливо, просто не задумувався. В цьому й полягає основна ідея формівного оцінювання. З цього, між іншим, випливає, що подібні рубрики мають бути доведені до відома студентів ще на самому початку їх роботи над проектом.

А так на прикладі оцінюванні іншої форми розумової діяльності студента – вирішення проблем – може виглядати контрольний лист оцінювання студента з боку викладача – керівника проекту:

	Успішність	Дані спостереження	Коментарі
Студент ретельно аналізує проблеми з різних точок зору для відшукування ефективних практичних рішень			
Студент гнучко використовує різні засоби і методи навчання			
Студент при потребі винаходить нові стратегії вирішення проблеми			
Студент впевнено працює із неструктурованими проблемами, для яких не існує чіткого однозначного вирішення			
Студент усвідомлює процес вирішення проблеми та вносить зміни, необхідні для його покращення			
Студент використовує точну адекватну обраній предметній області термінологію для викладу своїх дій та результатів			
Студент аналізує складні проблеми та системи для того, щоб уникнути різноманітних проблем			
Студент ідентифікує інформацію, важливу для вирішення проблем			
Студент використовує різні методи для отримання при потребі додаткової інформації			

В графу “успішність” можуть проставлятися бали за визначеною шкалою. Два останні стовпці можуть для спрощення опускатися.

Подібним чином складаються рубрики самооцінювання та контрольні листи керівників для інших важливих показників успішності студентських проектів. Так, при оцінюванні рівня критичного мислення викладач може сконструювати контрольний лист на основі таких критеріїв, як здатність студента до вибору пріоритетів при аналізі складних систем та процесів; рівня використання студентом різноманітних ресурсів для отримання висновків з наявних даних; застосування студентом різних підходів до визначення правдоподібності інформації; рівня аргументації студента, міри використання студентом достатніх свідчень чи доведення правильності висловлених ним припущень.

Оцінювання дипломної роботи рецензентом відбувається після завершення роботи, тому рецензент повинен зосереджуватися на оцінюванні не так дій студента, як отриманих ним кінцевих результатів і їх належного оформлення. Державна ж екзаменаційна комісія, крім того, повинна оцінити вміння студента презентувати виконаний ним проект.

Література

1. Шок будущего: Пер. с англ. / Э. Тоффлер. — М.: ООО “Издательство АСТ”, 2002. —557 с. — ISBN 5-17-010706-4.
2. David H. Autor, Frank Levy, and Richard J. Murnane. The Skill Content of Recent Technological Change: An Empirical Exploration / Quarterly Journal of Economics, 118(4), November 2003.
3. http://www.cisco.com/web/about/citizenship/socio-economic/docs/ATC21S_Exec_Summary.pdf
4. <http://educate.intel.com/ASSESSING-DEMO>.

УДК 37.014

**ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕРТЯ КОВЗАННЯ
В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ФІЗИКИ****Руденко М.П.**

Одним із найважливіших завдань учителя фізики в навчальній роботі є формування фізичних понять – невід’ємної складової процесу формування і розвитку абстрактного і логічного мислення учнів. Рівень оволодіння учнями фізичними поняттями є свідченням їх успіхів у оволодінні знаннями і запорука їх подальшого руху в освоєнні навчального матеріалу. Як відомо, є різні джерела формування фізичних понять, але чільне місце серед них посідає навчальний матеріал, який подає вчитель на уроках фізики. Це джерело дає найкращий ефект у плані наукової достовірності. Найкращі умови для формування фізичних понять складаються тоді, коли передбачені умови різноманітності форм і методів навчальної роботи та дотримується єдність як при навчанні в класі, так і при виконанні домашніх завдань.

Одним із понять шкільного курсу фізики є поняття коефіцієнта тертя ковзання. Коефіцієнт тертя ковзання μ – це коефіцієнт пропорційності між модулем сили тертя F_T , яка виникає під час руху тіла по площині, та модулем сили нормального тиску цього тіла на дану площину N , тобто: $\mu = \frac{F_T}{N}$.

Як правило, при формуванні поняття коефіцієнта тертя ковзання детально розглядається відповідний теоретичний матеріал, розв’язується значна кількість розрахункових задач, але мало уваги приділяється фізичному експерименту як засобу формування цього важливого поняття механіки.

Програмою з фізики передбачається виконання лише однієї лабораторної роботи на визначення коефіцієнта тертя ковзання. При виконанні цієї роботи школярі експериментально визначають силу тертя під час руху бруска по горизонтально розташованій площині та силу нормального тиску бруска на цю площину. Потім, користуючись означенням коефіцієнта тертя ковзання, обчислюють його величину. Поряд із тим, існують і інші способи визначення коефіцієнта тертя ковзання, які здебільшого не використовуються в процесі вивчення цього поняття. Ми пропонуємо урізноманітнити цю роботу, доповнивши її ще кількома способами експериментального визначення коефіцієнта тертя ковзання.

Один із способів ґрунтується на тому, що на тіло, яке перебуває на похилій площині, діють сили тяжіння, сила реакції опори та сила тертя. Якщо дібрати кут нахилу площини таким чином, щоб тіло рухалось по ній рівномірно, то коефіцієнт тертя ковзання дорівнює тангенсу кута нахилу похилої площини, при якому тіло рухається по ній без прискорення.

Таким чином, для експериментального визначення коефіцієнта тертя ковзання необхідно дібрати відповідний кут нахилу похилої площини та виміряти її висоту та довжину основи,

після чого обчислити значення коефіцієнта тертя ковзання як частку від ділення висоти похилої площини на довжину її основи.

Інший спосіб полягає в тому, що на горизонтально розміщеній дошці закріплюють динамометр, до гачка якого за допомогою довгої нитки прикріплюють брусок масою m . Відтягують брусок та вимірюють при цьому видовження пружини динамометра x та його покази F . Відпускають брусок та вимірюють відстань l , яку він пройде до повної зупинки. Враховуючи, що в розтягнутому стані пружина динамометра мала потенціальну енергію

$E_p = \frac{kx^2}{2}$ і $k = \frac{F}{x}$, одержимо: $E_p = \frac{Fx}{2}$. Згідно з законом збереження енергії, потенціальна енергія пружини пішла на виконання роботи проти сил тертя під час руху бруска по дошці, тобто $\frac{Fx}{2} = \mu mgl$, звідки $\mu = \frac{Fx}{2mgl}$. Вимірявши відповідні величини, визначають коефіцієнт тертя ковзання бруска по дошці.

Роботу із формування поняття коефіцієнта тертя ковзання доцільно продовжити, запропонувавши учням для домашньої роботи наступну експериментальну задачу: "Гнучкий мотузок або шнур розтягніть на столі перпендикулярно до краю стола. Поступово звішуйте частину мотузка з стола доти, поки мотузок не почне рухатися. Вимірявши довжину цього мотузка і довжину звішеної частини, визначте коефіцієнт тертя ковзання мотузка по столу".

Як видно, запропоновані способи використання експерименту для формування поняття коефіцієнта тертя ковзання є доступними для учнів, ґрунтуються на використанні простого та доступного обладнання, урізноманітнюють роботу школярів та поглиблюють їх знання.

Література

1. Римкевич А.П. Збірник задач з фізики для 8 – 10 класів середньої школи / А.П. Римкевич, П.А. Римкевич – [6-е вид., перероб.]. – К.: Рад. шк., 1983. – 176 с.
2. Савченко В.Ф. Методика навчання фізики в середній школі (Загальні питання) Конспекти лекцій / В.Ф. Савченко, М.П. Бойко, М.М. Дідович, В.М. Закалюжний, М.П. Руденко / За ред. Савченка В.Ф. – Чернівці: Чернігівський державний педагогічний університет імені Т.Г.Шевченка, 2003. – 100 с.

УДК371.31

ПРО УВЕДЕННЯ ПОНЯТЬ МАСИ І СИЛИ В СУЧАСНИХ ПІДРУЧНИКАХ ФІЗИКИ ДЛЯ СЕРЕДНЬОЇ ЗАГАЛЬНООСВІТНЬОЇ ШКОЛИ

Бойко М.П., Бойко Л.М.

Формування понять займає одне з центральних місць у навчанні фізики, оскільки вони є важливими складовими системи наукових знань. Поняття – одна з форм мислення, за допомогою якої пізнається сутність явищ, процесів, узагальнюють їх істотні ознаки. Тому формування понять у процесі навчання фізики є важливою складовою вирішення загальної проблеми розвитку мислення учнів. Основна логічна функція поняття – виділення загального, яке досягається шляхом абстрагування від особливостей окремих предметів даного класу [1].

Одним з перших кроків у оволодінні системою наукових знань з фізики є визначення значного числа фізичних величин, за допомогою яких можна розкрити властивості фізичних об'єктів, явищ, процесів, виразити їх характеристики (властивості) і дати їм кількісну оцінку.

На сьогодні у більшості навчальних посібників і підручників в основу трактування поняття фізичної величини покладено означення прийняте в метрології (рекомендоване ISO – International Organization for Standardization і затверджене державним стандартом України).

Фізична величина, властивість, загальна в якісному відношенні багатьом фізичним об'єктам (фізичними системам, їхнім станам і процесам, що відбувається в них), але в кількісному відношенні індивідуальна для кожного об'єкта.

Процес формування поняття фізичної величини як і будь якого іншого поняття передбачає:

- 1) послідовне розкриття властивостей досліджуваних об'єктів і явищ, на основі виділення якісних і кількісних характеристик;
- 2) словесне визначення цього поняття;
- 3) усвідомлення можливостей його практичного застосування.

Визначення будь-якого поняття має відбивати в собі всі найбільш істотні зв'язки з іншими поняттями, що входять у загальну для них ієрархію. Разом із тим значна частина фізичних понять засвоюється учнями формально. Особливо це стосується формування понять про фізичні величини. Дуже часто учні не розуміють їх сутності, не усвідомлюють зв'язків між ними, що значною мірою впливає на успішність засвоєння основ фізичного знання.

Одним з перших кроків наукового пізнання є виділення властивостей фізичних об'єктів (явищ, тіл, процесів). За своєю функцією у процесі пізнання фізичні величини – це кількісні характеристики властивостей представлені у вигляді абстракцій як результату мислення. Для кожної фізичної величини має бути виділений носій певної властивості – об'єкт чи явище та визначена процедура знаходження її значення.

Найчастіше в шкільному курсі використовується дуже спрощений підхід до розкриття сутності фізичної величини. Визначення фізичних величин у шкільних підручниках часто не відбивають їх сутності, подаються через поняття, які неоднозначно сприймаються учнями. "Мірою інертності тіла є його маса [2], "сила – це фізична величина, яка є мірою взаємодії тіл" [3]. Інколи фізична величина сама виступає як носій властивостей або як певна субстанція: "кожну силу характеризують ... числовим значенням" [2], "енергія передалася від одного тіла до іншого".

Традиційно в підручниках і словниках для означення маси і сили використовується термін міра. Проте, що означає цей термін? "Міра" (рос. мера) як заміник латинського слова *mensura* використав у означеннях понять маси, сили, кількості руху (імпульсу) А.Н.Крилов у перекладі "Математичних начал натуральної філософії" І.Ньютона, які вперше вийшли російською мовою у 1936 р. У російській і українській мовах термін "міра" має багато значень (див. напр. Словник сучасної української мови) і використовується в різних словосполученнях (міра ризику, міра відповідальності, почуття міри). Міра – стара одиниця вимірювання об'ємів рідин і сипучих продуктів (зерна), що дорівнювала приблизно 26,24 літра. Тобто, це слово використовується в означеннях фізичних величин як кількість чогось. Проте, як правило, учні цього не знають. До того ж у сучасній метрології міра – це один з видів засобів вимірювання, який зберігає й відтворює одну або декілька одиниць певної фізичної величини (еталон кілограма, лінійка, гирия, мензурка та ін.)¹.

У 7-му класі на перших уроках фізики учнів знайомлять із поняттям фізичної величини як кількісною характеристикою певної властивості. Адже за означенням, фізична величина – це властивість фізичного об'єкта загальна в якісному відношенні багатьом фізичним об'єктам, але в кількісному відношенні індивідуальна. Отже маса, як фізична величина це властивість притаманна тілу, яка має розмір – кількісну визначеність фізичної величини притаманну конкретному матеріальному об'єкту, системі, явищу чи процесу. Інертність, за означенням, яке дається в підручниках, "це властивість тіл, яка полягає у тому, що "для зміни його швидкості

¹ У деяких підручниках з фізики використовують поняття "мірило". Проте в міжнародній і вітчизняній метрологічній практиці загальноприйнятим терміном є міра. Такий термін використовується і в назві Міжнародне бюро мір і ваг ([фр. Bureau international des poids et mesures](http://www.bipm.org)) – міжнародної організації із визначення стандартів.

під час взаємодії з будь-якими іншими тілами потрібен певний час" [3, с. 55] або "властивість тіла, що визначає як змінюється його швидкість" [2, с. 59]. "Маса тіла – це фізична величина, яка характеризує інертність тіла. Чим більша маса, тим більш воно інертне" [3, с. 55]. Мірою інертності тіла є його маса: що більша маса тіла, то важче змінити його швидкість на ту саму величину" [2, с. 59]. За логікою такого підходу маса як властивість тіла, що може бути виражена числовим значенням, це кількісна характеристика іншої властивості тіла – інертності, а не самого тіла.

Слід зазначити, що поняття інертності й інерції у шкільних підручниках і літературі трактуються неоднаково. У енциклопедичних та тлумачних словниках, багатьох навчальних посібниках для вузів і шкіл поняття "інерція" й "інертність" вважають синонімами і трактують як властивість тіл зберігати свою швидкість сталою за відсутності зовнішніх впливів [4, 5, 6, 7, 8]. Обидва ці терміни походять від одного латинського слова *inertia* – бездіяльність, нерухомість. Тобто, в латинській мові це слово відбиває певну властивість об'єкта спостереження. Як різні поняття (інерція – явище збереження тілом стану спокою або рівномірного руху; інертність – властивість тіла зберігати свою швидкість), вони були виділені в підручнику фізики для восьмого класу середніх шкіл (І.К.Кікоїна, А.К.Кікоїна)². Сформульоване у тому ж підручнику означення "маса тіла – це величина, що виражає його інертність", стало традиційним. Разом із тим поняття маси втратило свій зміст, як важливої динамічної характеристики тіла. Уведення додаткового поняття "інертність", у якому немає необхідності, лише ускладнює розуміння сутності поняття маси. Учні перестали розуміти, що інертна маса характеризує певну, притаманну усім тілам властивість, яка проявляється під час їх взаємодій з іншими тілами і є однією з характеристик руху.

У сучасній програмі з фізики і підручниках сила також визначається як міра взаємодії, тобто як кількісна характеристика явища взаємодії. Але сила фізична величина, яка за означенням фізичної величини характеризує цілком певну властивість явища, а не явище в усіх його проявах уцілому. Що таке сила як фізична величина, яку властивість взаємодії вона відбиває і кількісно характеризує? За означенням І.Ньютона: "Прикладена сила є дія, виконувана над тілом, щоб змінити його стан спокою або рівномірного прямолінійного руху. Сила проявляється тільки в дії і по припиненню дії в тілі не залишається. Тіло продовжує потім утримувати свій новий стан унаслідок однієї лише інерції. Походження прикладеної сили може бути різним: від удару, від тиску, від доцентрової сили" [10, с. 26]. Навіть найпростіша взаємодія двох тіл це двосторонній процес. Процесу взаємодії властиві: дія і протидія, внаслідок яких у кожного з взаємодіючих тіл змінюється швидкість (або швидкість їх частин). Сила кількісно характеризує лише одну сторону процесу взаємодії. Взаємодію ж як явище характеризують дві різні сили. Ці сили рівні за значенням, однієї природи, але протилежні за напрямком і мають різні точки прикладання. Тому говорити про силу як міру взаємодії або взагалі шукати якусь одну "міру" не коректно. Тому таке означення не може характеризувати силу.

Література

1. Філософський словник. Головна редакція УРЕ, 1973. – 600 с.
2. Генденштейн Л.Е. Фізика, 8 кл.: Підручник для середніх загальноосвітніх шкіл. – Х.: Гімназія, 2008. – 256 с.

² Пояснення щодо необхідності розрізнення понять "інерція" та "інертність" було зроблено одним з авторів у 1985 р. в журналі *Квант на замовлення його редакції* (див.: Кікоїна А.К. *Інерція і інертність* // *Квант*. – 1985. – № 11. – С. 20-21.) Аргументація авторів була така: "Слова-синоніми можна замінювати одно другим (наприклад, "спешить" і "торопиться"), если не говорить о некоторых стилистических оттенках. Но как раз этим свойством взаимозаменяемости слова и понятия "інерція" и "інертність" не обладают. Первый закон Ньютона называют законом інерции, но никто не называет его законом інертности. Существует термин "інерціальная система отсчета", но никто не скажет "інертная система отсчета". Можно сказать "движение по інерции", но нельзя — "движение по інертности". Число таких примеров можно и увеличить". Навряд чи таке пояснення можна вважати достатньо аргументованим.

3. Сиротюк В.Д. Фізика: підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. / В.Д.Сиротюк. – К.: Зодіак-ЕКО, 2008. – 240 с.
4. Советский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1989.
5. Физический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1984.
6. Элементарный учебник физики / Под ред. Г.С.Ландсберга. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
7. Хайкін С.Е. Фізичні основи механіки. – К.: Радянська школа, 1966. – 743 с.
8. Буховцев Б.Б., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика. Механика. – М.: Просвещение, 1971. – 253 с.
9. Кікоїн І.К., Кікоїн А.К. Фізика. Підручник для 8 класу. – К.: Радянська школа, 1978. – 221 с.
10. Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии. – М.: Наука, 1989. – 711 с.

УДК 371.32:512

МЕТОДИКА СТВОРЕННЯ ТА ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ ЕВРИСТИЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Варущик Н.П., Клименко І.М.

Досліджуючи різновиди людської діяльності, варто відмітити, що мають місце ситуації, в яких виникає суперечність між умовами та вимогами певної діяльності. Єдиний вихід з такої ситуації є створення нової стратегії діяльності, тобто прояв творчості.

Психічний процес розв'язання проблемної ситуації носить назву продуктивного мислення або евристичної діяльності.

Проблемі реалізації евристичних ідей у навчанні математики приділяли увагу такі математики і методисти, як Ж.Адамар, Г.Д.Балк, Г.П.Бевз, М.І.Бурда, Б.О.Вікол, І.І.Зільберберг, Ю.М.Кулюткін, Л.Ларсон, Ю.О.Палант, Д.Пойа, Г.І.Саранцев, О.І.Скафа, З.І.Слепкань, Н.А.Тарасенкова, С.І.Шапіро, М.І.Шкіль та ін. У своїх роботах дослідники вказують на необхідність використання евристичних прийомів, методів, схем, розглядають питання методики формування прийомів евристичної діяльності на уроках геометрії, алгебри, на факультативних заняттях з математики.

Питання формування евристичної діяльності старшокласників у курсі алгебри і початків аналізу потребує детального дослідження та обґрунтування.

У даній роботі розглядається і аналізується питання створення та використання засобів організації і управління евристичною діяльністю учнів у процесі навчання алгебри і початків аналізу (зокрема, ЕДК – евристико-дидактичних конструкцій) в процесі формування понять, вивчення теорем, розв'язування задач курсу алгебри і початків аналізу. Під ЕДК будемо розуміти систему логічно пов'язаних навчальних проблем (евристичні задачі або навчальні комп'ютерні програми), які в сукупності з евристичними питаннями, вказівками та мінімумом навчальної інформації дають змогу учням (переважно без допомоги ззовні) відкрити нові знання про об'єкт дослідження, спосіб чи засіб евристичної діяльності [1].

Наведемо приклади програм актуалізації.

Приклад 1. Задача-софізм:

Розглянемо “Задачу-софізм” з теми “Тригонометричні нерівності” плюс корекція.

Вкажіть на якому кроці при розв'язанні допущена помилка.

Розв'яжіть нерівність $\sin^2 x > \frac{1}{2}$

1) добудемо корінь з попереднього виразу і отримаємо $\sin x > \frac{1}{2}$;

2) тоді $x > (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Корекція до програми “Софізм”

Не правильно добутий корінь з виразу, оскільки

$$\sin^2 x > \frac{1}{2}; |\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\begin{cases} \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

Будуємо тригонометричне коло (рисунок 1):

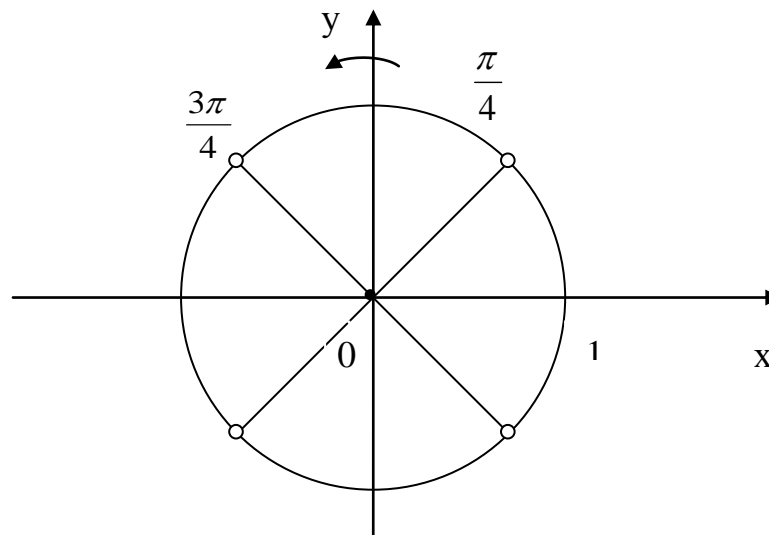


Рис. 1

Отже, $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2. Знайти помилку в розв'язанні:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -1 - 1 = -2$$

Корекція: Враховуючи геометричний зміст визначеного інтеграла, робимо висновок, що визначений інтеграл від невід'ємної функції не повинен бути від'ємним. Помилка допущена тому, що не врахована необхідна умова теореми Ньютона – Лейбніца: визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ існує, якщо функція $f(x)$ – неперервна при будь-якому $x \in [a; b]$. Функція

$$y = \frac{1}{\sin^2 x} \text{ невизначена в точці } x = 0, \text{ а } 0 \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right].$$

Приклад 3. Знайти множину значень функції:

$$y = 3 \sin x + 4 \cos x$$

Розв'язання

Оскільки $-1 \leq \sin x \leq 1$, то $-3 \leq 3 \sin x \leq 3$ і $-1 \leq \cos x \leq 1$, то $-4 \leq 4 \cos x \leq 4$.

Нерівності однакового смислу можна почленно додавати, тому

$$-7 \leq 3 \sin x + 4 \cos x \leq 7$$

Відповідь. $E(y) = [-7; 7]$.

Корекція: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, тому якщо $\sin x = -1$, то $\cos x = 0$, тому нерівності $-1 \leq \sin x \leq 1$ та $-1 \leq \cos x \leq 1$ одночасно не виконуються, тобто запропоноване розв'язання неправильне.

Щоб знайти множину значень функції, доцільно домножити її і поділити на

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \text{ тоді } y = 5 \left(\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x \right) = 5 \sin(x + 4),$$

$$-1 \leq \sin(x + 4) \leq 1, \text{ тоді } -5 \leq 5 \sin(x + 4) \leq 5$$

Отже, $E(y) = [-5; 5]$.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \cos(x + y) = 0, \\ \cos(x - y) = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} \cos(x + y) = 0, \\ \cos(x - y) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x - y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Корекція: Ввівши спільну цілочисельну змінну n , втратили розв'язки.

Легко бачити, що, наприклад, $x = -\frac{3\pi}{4}$, $y = \frac{5\pi}{4}$ є розв'язком системи, проте, при жодному значенні n з отриманих формул вони не одержуються. Правильно, слід було б записати

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x - y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} (n + 2k), k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} (n - 2k), n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} (n + 2k); \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} (n - 2k) \right), k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

Приказка стверджує, що на помилках вчать. Справді, помилка має навчальну функцію. Для того, щоб ситуація помилки вчила не лише не повторювати її, а й давала змогу по-новому поглянути на те, що здається давно зрозумілим, відкривала нові нюанси, потрібно спеціально підбирати завдання та організувати роботу по їх розв'язанню у відповідності до закономірностей.

Зокрема, закономірність Шевєрьова передбачає, що якщо в процесі діяльності дотримуються три умови:

- учень виконує завдання одного типу;
 - у цих завданнях незмінно повторюється деяка особливість;
 - усвідомлення цієї особливості не обов'язкове для отримання правильного результату, то ступінь усвідомлення цієї особливості, що повторюється, знижується, тобто в учня утворюється помилкова асоціація [2].

Пропонуємо серію завдань, що руйнують помилкові асоціації, сприяють розвитку навичок самоконтролю на основі усвідомленого теоретичного матеріалу.

Приклад 5. Записати рівняння дотичної до кривої у заданій точці:

а) $y = x^2$, $x_0 = -2$,

б) $y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$,

в) $y = \sqrt{2x - x^2}$, $x_0 = 2$.

У третьому завданні немає потреби використовувати рівняння дотичної. Достатньо уявити, що графік даної функції є коло з центром у точці $O(0;1)$ і радіусом 1, тому дотичною буде пряма $x = 2$.

Приклад 6. Побудувати графік функції:

а) $y = x^3$,

б) $y = (\sqrt[4]{x^3})^4$,

в) $y = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2$.

Учні, як правило, в третьому випадку також будують кубічну параболу, проте, графіком третьої функції буде лише частина кубічної параболы, оскільки $D\left(\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2\right) = [0; \infty)$.

Якщо запропонувати аналогічне завдання на побудову графіків функцій

а) $y = 5^{\log_5 3}$,

б) $y = \left(\frac{1}{8}\right)^{\log_{\frac{1}{8}} 3}$,

в) $y = x^{\log_x 3}$,

то більш імовірно, що перш, ніж будувати графіки функцій, учні попередньо знайдуть їх область визначення і в третьому випадку побудують графік, зображений на рисунку 2:

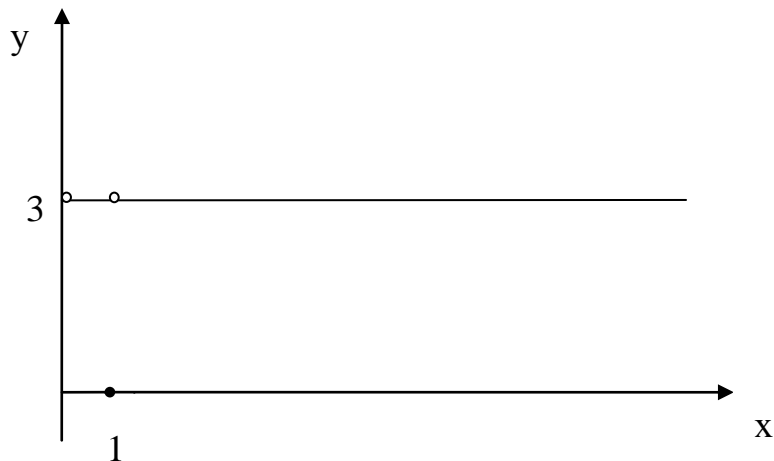


Рис. 2

Приклад 7. Розв'язати рівняння:

$$1) \sqrt{3} \sin x = \cos x,$$

$$2) 2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0,$$

$$3) 2 \cos^2 x - \sin x \cos x = 0.$$

Знаючи теорему про рівносильність рівнянь, учень вибере правильне розв'язання третього рівняння: оскільки $\cos x = 0$, то потрібно розкласти на множники, або поділити на $\sin x$.

Приклад 8. Обчислити:

$$а) \arccos\left(\cos \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$б) \arccos\left(\cos \frac{\pi}{6}\right),$$

$$в) \arccos\left(\cos \frac{17}{5} \pi\right).$$

Виконуючи приклади а) і б) учні помічають, що $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$, проте, в цих зведеннях повторюється одна і та ж особливість, а саме $0 < \alpha < \pi$, тобто $\alpha \in E(\arccos \alpha)$, тому, можливо, і в третьому зведенні, міркуючи аналогічно, одержать

$$\arccos\left(\cos \frac{17}{5} \pi\right) = \frac{17\pi}{5}.$$

Відповідь неправильна, оскільки $\frac{17\pi}{5} > \pi$.

Працюючи з коректуючою програмою, учні зможуть засвоїти спосіб розв'язування задач такого виду.

Логіка мислення учня може бути такою:

$$\begin{aligned} \arccos\left(\cos \frac{17}{5} \pi\right) &= \arccos\left(\cos\left(4\pi - \frac{3\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)\right) \\ &= \arccos\left(\cos \frac{3\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}. \end{aligned}$$

Завдання такого виду руйнують помилкові асоціації, сприяють розвитку навичок самоконтролю на основі усвідомленого теоретичного матеріалу.

Один із принципів евристичного розвивального навчання провідну роль відводить теоретичному матеріалу, тому потрібна система евристико-зорієнтованих завдань, у змісті яких спрацювала б "шкідлива" аналогія, що спонукало б учня до самоконтролю за допомогою відповідного теоретичного матеріалу.

Таким чином, програмоване навчання передбачає підвищення активності і самостійності учнів при максимально диференційованій допомозі з боку педагогів, і тим самим вибрано в якості психолого-педагогічної основи розробки і використання в навчанні математики ЕДК.

Відмітимо, що евристико-дидактичні конструкції, розроблені нами, при формуванні та засвоєнні понять алгебри та початків аналізу можуть використовуватись у таких напрямках:

- для діагностики рівня засвоєння тих понять, на яких базується нове поняття, для актуалізації знань у вигляді "перед програм", акцентованих програм);

- для утворення нових понять (програми актуалізації знань у вигляді “задачі-методу”, “задачі-софізму”, програми з наступною корекцією);
- для засвоєння понять (програма “задача-метод”, тестові задачі у вигляді евристичного тренажера);
- для закріплення понять, їх застосування (програми зчеплення, програми “задача-метод”, тестові задачі у вигляді евристичного тренажера);
- для виявлення рівня сформованості поняття, усунення прогалин та недоліків у знаннях (тестові завдання у вигляді евристичних тренажерів).

Література

1. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 439с.
2. Груденов Я.И. Совершенствования работы учителя математики / Груденов Я.И. – М.: Просвещение, 1990. – 223с.

УДК 51:37:016

ДО ПИТАННЯ ТЕОРЕТИЧНИХ ОСНОВ СТВОРЕННЯ ЕЛЕКТРОНОГО КУРСУ З ШКІЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

Харченко В.М., Ваврикович Л.В.

В Україні відбувається розвиток суспільства в умовах активного використання інформаційних технологій в усіх сферах діяльності людини. Тому держава відчуває потребу у випускниках навчальних закладів, які здатні до швидкого самонавчання і перепідготовки. В умовах досить швидких змін у програмах шкільних предметів учителю доводиться використовувати не тільки традиційні підручники, а й створені ним електронні курси. Найважливішими факторами, що забезпечують їх ефективність, стають їхня висока доступність, простота і можливість колективної роботи з учнями. Крім того, в державі існує значна група учнів, яка не може навчатися у школах протягом значних часових відрізків, а тому для них електронні курси – можливість не відстати від своїх ровесників у навчанні. Враховуючи результати ЗНО за попередні роки [7], можна стверджувати, що доцільним є використання таких курсів і для підготовки учнів до такого оцінювання. Використання електронних курсів сприятиме більш швидкому та ефективному повторенню необхідного навчального матеріалу.

Дидактичні та методичні основи електронних навчальних курсів розглянуто в [2, 4, 5]. Технології створення електронних курсів присвячено роботи [1, 3, 5, 6]. У дослідженнях було показано, що використання електронних курсів в навчальному процесі сприяє зростанню якості навчання, перерозподілу навантаження вчителів з рутинної на творчу діяльність. Проблеми використання електронних навчальних курсів в шкільній математиці на Україні вивчені недостатньо.

Надалі під електронним навчальним курсом (ЕНК) будемо розуміти структурований матеріал з певної тематики, що сприяє розв’язанню заздалегідь визначених завдань навчання.

Головними перевагами електронних навчальних курсів в порівнянні з традиційними друкованими виданнями є:

- можливість включення мультимедійних фрагментів та анімацій;
- можливість підключення комп’ютерних тестових систем;
- легкість тиражування; відносна простота оновлення матеріалу та його адаптації до потреб окремих категорій користувачів;
- зручність гіпертекстової навігації.

При створенні ЕНК слід забезпечувати і враховувати наступне [1]:

1. Діяльнісний підхід (“прочитав” – “зробив”).
2. Інтерактивність в процесі навчання.
3. Психофізичні особливості учнів.
4. Ергономіку інтерфейсу при поданні учням змісту частини курсу.
5. Забезпечувати відкритість і гнучкість електронного курсу.
6. Орієнтацію на можливість використання курсу як учнями, так і вчителем.
7. Модульність побудови курсу.
8. Стартові знання учнів, які можна виявляти, наприклад, попереднім тестуванням.
9. Дотримання авторських прав.

Згідно з [1-3, 6], будь-який електронний навчальний курс, в тому числі й математики, повинен містити загальну інформацію про матеріали та навчально-методичні матеріали.

До загальної інформації відносять робочу програму, критерії оцінювання, друківані та Інтернет-джерела, глосарій, новини, за потреби блоги, форуми, чати. Наприклад, при створенні повторювального курсу з шкільної математики робочою програмою повинна бути програма зовнішнього незалежного оцінювання [8]. У переліку друківаних джерел повинні бути вказані всі підручники з математики, алгебри та геометрії за 5–11 класи. Звичайно, переглянути всі підручники учневі напевно не вдасться, а повторити теоретичний матеріал електронного курсу буде до снаги. Глосарій повинен містити набір термінів і скорочень, що зустрічаються в змісті курсу, а також гіпертекстові посилання на їх означення. Ключові поняття повинні бути сформульовані коротко і однозначно – для того, щоб по них можна було посилатися на матеріали.

Навчально-методичні матеріали ЕНК повинні бути розбиті на окремі модулі. Наприклад, для курсу елементарної математики можуть бути такі модулі: “Числа”, “Тотожні перетворення”, “Рівняння”, “Нерівності” тощо. Кожен із вказаних модулів повинен містити теоретичний матеріал, завдання практичних робіт, завдання для самостійної роботи, контрольні завдання. Оскільки очевидним є вміст теоретичного матеріалу, то зупинимося на описі інших матеріалів курсу.

Завдання практичних робіт такого повторювального курсу повинні містити розв’язки типових задач з кожного розділу математики. Це необхідно насамперед для тих учнів, які з певних причин недостатньо засвоїли відповідні методи розв’язування при їх вивченні. Доречно розглянути й розв’язання задач у тестовій формі. Завдання для самостійної роботи повинні бути аналогічні до розв’язаних, можливо, з певними особливостями. Це дозволить учню краще усвідомити матеріал, що він повторював. У випадку, коли в учнів виникають проблеми щодо розв’язання певних типів задач, доречним буде обговорення їх у форумі.

Враховуючи направленість курсу на підготовку до ЗНО, контрольні завдання з кожної тематики повинні бути оформлені у вигляді тестів, що містять завдання з вибором однієї правильної відповіді, на встановлення відповідності та відкритої форми з короткою відповіддю.

Перш ніж створювати такий електронний навчальний курс, учитель повинен вибрати середовище для його розробки. Досить популярними є такі вільно поширювані середовища: Claroline, Moodle.

Claroline LMS – це платформа для електронного навчання та електронної діяльності, яка дозволяє вчителям створювати ефективні онлайн-курси та керувати процесом навчання і спільними діями через веб службу мережі Інтернет. Її набір інструментів дозволяє розв’язувати такі завдання [9]:

- здійснити опис курсу;
- опублікувати документи в будь-якому форматі;
- адмініструвати публічні та приватні форуми;
- розробляти навчальні плани;
- об’єднувати студентів у групи;
- готувати для студентів тести;
- керувати календарем із завданнями та термінами виконання;
- робити оголошення (з можливим дублюванням по електронній пошті);
- створювати індивідуальні та групові завдання;

- використовувати Вікі для спільного написання документів;
- переглядати статистику активності користувачів.

Moodle LMS (модульне об'єктно-орієнтоване середовище дистанційного навчання) – це відкрита система дистанційного навчання, яка орієнтована на організацію взаємодії між викладачем та учнями. Вона також підходить і для організації традиційних дистанційних курсів, а також підтримки очного навчання. Переваги Moodle [10]:

- дозволяє організувати навчання в активній формі, в процесі спільного розв'язання навчальних завдань, взаємообміну знаннями;
- широкі можливості для комунікації: обмін файлами будь-яких форматів, розсилка, форум, чат, можливість рецензувати роботи учнів, внутрішня пошта та інше;
- можливість використовувати будь-яку систему оцінювання (бальну, словесну);
- повна інформація про роботу учнів (активність, час і зміст навчальної роботи, портфоліо).

Оскільки Moodle можна використати й в умовах локальної мережі, то доречніше використовувати при створенні курсу математики саме її.

Література

1. Андреев А.А. Учебно-методический комплекс для e-Learning: проблемы структуры и проектирования. // <http://math.elitno.net/books/Andreev.doc>
2. Башмаков А.И., Башмаков И.А. Разработка компьютерных учебников и обучающих систем. – М.: Информационно-издательский дом “Филинь”, 2003.- 613 с.
3. Гафурова А., Иванов В., Хацринова О. Структурирование содержания электронного учебника. // Высшее образование в России. – 2007. – № 8. – С. 125-127.
4. Ермаков Д.С. Электронные курсы для профильного обучения. // Педагогика. – 2005. – №2. – С. 36-41.
5. Калинин И. А. Принципы создания и методика использования электронного учебного пособия как открытой информационной системы. Дис. ... канд. пед. наук –М., 2003. – 152 с.
6. Краснова Г.А., Беляев М.И., Соловол А.В. Технологии создания электронных обучающих средств. – М.: МГИУ, 2002. – 304 с.
7. Лікарчук І.Л. Офіційний звіт про проведення зовнішнього незалежного оцінювання знань випускників загальноосвітніх навчальних закладів України в 2010 році. – К.:Український центр оцінювання якості освіти, 2010. – 352 с.
8. Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики // <http://datatp.com.ua/2011/progmat.zip>
9. Яремчук С. Система управления обучением Claroline. // Системный администратор.– 2008. – №7.– С.82–85
10. Переваги використання Moodle. // <http://moodle.co.ua>

УДК 378: 512.62

ПРОБЛЕМНА ГРУПА ЯК ФОРМА ОРГАНІЗАЦІЇ НАУКОВОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Курниш А.В.

Проблемні методи навчання сприяють розвитку творчого мислення у студентів розвивають у них самостійність, пошукову діяльність.

Проблемна творча група створена на II курсі з метою поглибленого вивчення теорії многочленів. Група сформована із студентів, які бажають зробити свої перші кроки в наукових дослідженнях.

Зміст роботи створеної групи спрямований на ознайомлення з нестандартними творчими завданнями, задачами на доведення та олімпіадними задачами. В окремих випадках такі завдання на дослідження можуть стати темами курсових робіт. Для їх розв'язання студент повинен добре володіти теоретичним матеріалом, проявити творче мислення, винахідливість, логічну строгість в математичних доведеннях і перетвореннях.

За участь у роботі творчої групи студентам нараховуються бали в залежності від складності завдання і правильності та оригінальності його розв'язання. Бали впливають на підсумковий бал модульного контролю.

Наведемо приклади деяких завдань з плану роботи проблемної групи:

1. Довести, що многочлен $f(x) = x^{3k} + 1$ при будь-якому непарному натуральному k ділиться на многочлен $g(x) = x^2 - x + 1$.

$$\bullet f(x) = x^{3(2n-1)} + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Застосуємо метод математичної індукції.

$$\underline{n=1.} \quad x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \div (x^2 - x + 1).$$

$$\underline{n=m.} \quad (x^{3(2m-1)} + 1) \div (x^2 - x + 1) \quad (\text{припущення}).$$

$$\underline{n=m+1.} \quad (x^{3(2m+1)} + 1) \div (x^2 - x + 1). \quad \text{Довести це.}$$

Справді,

$$\begin{aligned} x^{3(2m+1)} + 1 &= x^{3(2m-1+2)} + 1 = x^{3(2m-1)} \cdot x^6 + 1 = x^6(x^{3(2m-1)} + 1) - x^6 + 1 = x^6(x^{3(2m-1)} + 1) + (1 - x^6) \\ &\cdot (1 + x^3) = x^6(x^{3(2m-1)} + 1) + (1 - x^3)(1 + x)(x^2 - x + 1) \div (x^2 - x + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{і непарному натуральному} \\ &k = 2n - 1. \quad \bullet \end{aligned}$$

2. Сума коефіцієнтів многочлена $f(x)$ дорівнює 2. Многочлен має однакові суми коефіцієнтів членів парного і непарного степенів. Знайти остачу від ділення многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x) = x^2 - 1$.

• Значення многочлена при $x=1$ дорівнює сумі всіх коефіцієнтів, а при $x=-1$ дорівнює різниці між сумами коефіцієнтів парного і непарного степенів.

$$f(1) = 2, \quad f(-1) = 0. \quad f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

$$\deg r(x) < \deg g(x), \quad \text{тому } r(x) = ax + b. \quad f(x) = (x^2 - 1)q(x) + ax + b.$$

$$\begin{aligned} x=1 \quad & \begin{cases} 2 = a + b \\ 0 = -a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \\ x=-1 \quad & \end{aligned} \quad r(x) = x + 1. \quad \bullet$$

3. Розв'язати рівняння $\sqrt{17 - x^2} = (3 - \sqrt{x})^2$.

$$\bullet \text{ Введемо позначення: } \sqrt{x} = u, \quad 3 - \sqrt{x} = v. \quad \text{Отримаємо } \begin{cases} u + v = 3 \\ u^4 + v^4 = 17. \end{cases}$$

Виразимо степеневі суми через елементарні симетричні многочлени: $\sigma_1 = u + v$, $\sigma_2 = uv$.

$$\text{Дістанемо систему } \begin{cases} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2, \sigma_2 = 16.$$

$$\text{Отже, } \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 16 \end{cases} \quad \emptyset \quad \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = 1 & u = 2 \\ v = 2, & v = 1 \end{matrix} \Rightarrow x = 1, \quad x = 4. \quad \bullet$$

4. Довести, що многочлен $f(x) = \frac{1}{2002!} x(x-1)\cdots(x-2001)$ набуває цілих значень при будь-яких цілих значеннях змінної x .

• При $x = 0, 1, 2, \dots, 2001$ $f(x) = 0$. $C_x^{2002} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-2001)}{2002!}$. Тому $f(x) = C_x^{2002}$ набуває цілих значень при будь-якому натуральному $x \geq 2002$.

Нехай x – ціле від'ємне число. Вважатимемо, що $x = -m$ (m – натуральне число). Тоді

$$\text{матимемо } f(-m) = \frac{m(m+1)(m+2)\cdots(m+2001)}{2002!}.$$

Доведемо, що число $f(-m)$ є цілим. Якщо $m=1$, то $f(-m)=1$.

Припустимо, що $f(-m)$ число ціле при $m=k$, тобто $k(k+1)(k+2)\cdots(k+2001)=2002!q$, $q \in \mathbb{N}$. Доведемо, що воно ціле і при $m=k+1$, тобто, що

$$(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+2001)(k+2002) : 2002!$$

Справді,

$$(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+2001)(k+2002) = \frac{2002!q}{k}(k+2002) : 2002!$$

За принципом математичної індукції $f(-m)$ є числом цілим для будь-якого натурального m .

Отже, многочлен $f(x)$ набуває цілих значень при будь-яких цілих значеннях змінної x . •

5. Довести, що коли корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ утворюють геометричну прогресію, то один з коренів рівний $-\sqrt[3]{c}$.

• Нехай $x_1, x_2 = x_1q, x_3 = x_1q^2$ – корені рівняння.

Тоді

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_1q + x_1q^2 = -a \\ x_1^2q + x_1^2q^2 + x_1^2q^3 = b \\ x_1^3q^3 = -c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1(1+q+q^2) = -a \\ x_1^2(q+q^2+q^3) = b \\ x_1^3q^3 = -c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1q = -\frac{b}{a} \\ x_1^3q^3 = -c \end{array} \right\} \Rightarrow c = \frac{b^3}{a^3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt[3]{c}$$

Оскільки $x_1q = x_2$, то $x_2 = -\frac{b}{a}$. Тобто $x_2 = -\sqrt[3]{c}$. •

6. Нехай $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ – корені кубічні з одиниці і значення многочлена $f(x)$ для цих чисел відповідно дорівнюють y_1, y_2, y_3 . Знайти $f(0)$.

7. Вивчити, як змінюється кратність незвідного множника даного многочлена $f(x)$ з кільця $Z_p[x]$ при переході до його похідної.

8. Для заданих многочленів $h(x), f(x)$ і $g(x)$ з кільця $P[x]$ над полем P описати можливість існування многочленів $u(x)$ та $v(x)$ таких, що $h(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$ та знайти всі такі многочлени.

Та інші завдання.

З досвіду роботи створеної мною проблемної творчої групи, якою керую вже кілька років, можу сказати, що участь у ній викликає у студентів зацікавленість, бажання закріпити і випробувати свої знання з теорії многочленів. І, нарешті, заохочує їх до отримання більшої кількості балів.

Аналогічні творчі групи можна організувати для поглибленого вивчення будь-якої дисципліни.

Література

1. Завало С.Т. Курс алгебри. – К.: Вища школа, 1985. – 503 с.
2. Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.И. Алгебра и теория чисел: в 2 ч. – К.: Вища школа, 1980. – ч. II. – 408 с.
3. Винберг Э.Д. Алгебра многочленов. – М.: Просвещение, 1980. – 174 с.
4. Збірник задач з теорії многочленів. За редакцією І.О Рокіцького. – Вінниця: ВДПУ, 2004. – 139 с.
5. Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. – М.: Факториал, 1995. – 454 с.

УДК 697.43

ПРО ПИТАННЯ ПРО ДЕАЕРАЦІЮ ВОДИ ТА ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МІСЬКИХ ТЕПЛОМАГІСТРАЛЕЙ

Ігнатенко В.А., Ільченко С.Г., Кнорзок Л.М.

Однією із найважливіших проблем теплоенергетики є захист обладнання і трубопроводів теплових електростанцій, котельних та теплових мереж від внутрішньої корозії. Одним з факторів, що спричиняють внутрішню корозію, є наявність у воді корозійно-активних газів: кисню та діоксиду карбону [1, с. 35]. При незадовільній якості обробки води значно зменшується термін експлуатації обладнання теплових джерел та теплових мереж.

У першій половині минулого століття корозія знищувала до 40% від загального об'єму вироблюваної сталі. Вже більше 100 років зусилля багатьох учених у всьому світі спрямовані на створення способів і технологій захисту конструкцій від корозії. Проте навіть нині втрати від корозії складають близько 20% від загального виробництва основного конструкційного матеріалу – вуглецевої сталі.

Захист від корозії енергетичного устаткування і трубопроводів – один з пріоритетних напрямів в розробці способів антикорозійного захисту. Важливість цього напрямку пояснюється підвищеною значущістю енергопостачання для будь-якого промислового підприємства і населеного пункту. Аварії на джерелі теплоенергоресурсів або магістралях при транспортуванні цих ресурсів призводять до великих економічних і технологічних втрат кінцевого промислового споживача, підвищують соціальну напругу, уповільнюють темпи економічного росту.

Економічні втрати навіть від незначних аварій на устаткуванні і теплових мережах котельних, ТЕЦ і інших енергоджерел в результаті корозії, як правило, перевищують витрати на профілактику цих аварій в 5-20 разів.

Непрямі економічні втрати від наслідків аварій середньої тяжкості перевищують витрати на профілактичні заходи в 20-100 разів.

Сукупні втрати від можливої аварії можуть значно перевищити балансову вартість енергетичного підприємства, призвести до банкрутства кінцевих споживачів теплоенергоресурсів і соціального вибуху. Основним профілактичним заходом, що запобігає корозії енергетичного устаткування і трубопроводів, являється деаерація – завершальна стадія комплексного технологічного процесу підготовки води, призначена для видалення з води котлів і тепломереж розчинених корозійно-активних газів. У вітчизняній та закордонній теплоенергетиці основним методом протикорозійної обробки води для живлення котлів є системи деаерації води [2, с. 72].

Загальні принципи деаерації води. На сьогодні в промисловості використовується хімічний, акустичний, термічний (дифузійна десорбція) і гідродинамічний (примусова десорбція) способи видалення з води розчинених газів.

Хімічний спосіб використовується, в основному, для видалення розчиненого кисню в системі з невисокою витратою оброблюваної води. До нього відносяться обробка води гідрозин-гідратом (левоксином), залізом і сульфитування.

Основними обмеженнями хімічного способу деаерації є висока вартість і токсичність реагентів, додаткові витрати на контроль за їх концентрацією в системі, видалення продуктів реакції з системи, а також великі витрати на експлуатацію хімічних установок. Окрім цього, хімічний спосіб вимагає постійного контролю і переналадки установки при зміні початкового

складу оброблюваної води, наприклад, при сезонних змінах поверхневих вод, включення в систему водопостачання додаткових джерел, свердловин і таке інше.

Акустичний спосіб деаерації зводиться до впливу на попередньо дисперговану воду ультразвуковими хвилями.

При опроміненні води ультразвуком інтенсивністю близько 1 Вт/см² відбувається зниження рівноважної розчинності газів на 30-50%, рухливість газових включень зростає приблизно в 1000 разів, що призводить до коагуляції бульбашок з подальшим виходом з води під дією Архімедової сили.

В результаті акустичної дії з води видаляється не лише кисень, але і інші розчинені гази, проте невисока глибина деаерації, великі витрати енергії (у середньому 10 кВт·год на кубометр оброблюваної води) і неможливість видалення хімічно зв'язаних форм CO₂ обмежують застосування ультразвукових деаераторів локальними установками невеликою продуктивності в харчовій і фармацевтичній промисловості.

Традиційним способом видалення з води усіх розчинених в ній газів, що знайшло широке поширення в енергетиці, являється термічна або дифузійна десорбція.

Суть десорбції полягає в процесі встановлення рівноваги між рідкою і парогазовою фазами відповідно до закону Генрі [3, с. 28], згідно з яким концентрація розчиненого газу пропорційна парціальному тиску цього газу над поверхнею рідини.

Концентрація розчиненого у воді газу виражається рівнянням:

$$C_G = K_G P_G = K_G (P_{заг} - P_{H_2O} - \sum P), \quad (1)$$

де C_G – концентрація розчиненого газу;

K_G – коефіцієнт адсорбції газу водою;

P_G – парціальний тиск газу;

$P_{заг}$ – загальний тиск парогазового середовища;

P_{H_2O} – парціальний тиск водяної пари;

$\sum P$ – сумарний парціальний тиск інших газів в парогазовому середовищі.

Таким чином, основною умовою видалення газу з води шляхом десорбції являється зниження його парціального тиску над водою. Досягти цього можна як зниженням загального тиску парогазової суміші над водою (при $P_{заг} \rightarrow 0$, також $P_G \rightarrow 0$), так і зменшенням парціального тиску цього газу. На практиці в останньому випадку зниження P_G досягається збільшенням парціального тиску водяної пари ($P_{H_2O} \rightarrow P_{заг}$) над поверхнею води і постійним відведенням газу з робочого об'єму деаераторного апарату з випаром.

Теоретично вміст газу у воді відповідає закону Генрі тільки в рівноважних умовах. Рушійною силою процесу десорбції є різниця між фактичною концентрацією газу у воді і його рівноважною концентрацією, що відповідає парціальному тиску в парогазовому середовищі. Швидкість десорбції газу з води в загальному вигляді виражається рівнянням:

$$-\frac{dC_G}{d\tau} = (C_G - C_G^P) F \cdot k \quad (2)$$

де C_{Γ} – концентрація газу, що видаляється, в даний момент часу;

τ – час;

C_{Γ}^P – рівноважна концентрація, що відповідає парціальному тиску цього газу над водою;

F – питома поверхня розділу фаз;

k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від характерного дифузійного шляху (відстані

для виходу газу з рідини в парогазовий простір). Очевидно, що парціальному тиску $P_{\Gamma=0}$

відповідає концентрація $C_{\Gamma}^P=0$. Вважаючи, що в рівнянні (2) $C_{\Gamma}^P=0$, розділивши змінні і

проінтегрувавши для концентрації газу в межах від C_{Γ} до 0, а для часу від 0 до T , отримаємо:

$$-\int_{C_{\Gamma}}^0 \frac{dC_{\Gamma}}{C_{\Gamma}} = F \cdot k \int_0^T dt \quad \text{або} \quad F \cdot k \cdot T = \infty \quad (3)$$

Оскільки $F \cdot k$ – величина скінченна і додатня, то $T \rightarrow \infty$. Звідси випливає, що навіть при $P_{\Gamma} = 0$ неможливе повне видалення газу, тому на практиці доводиться обмежуватися залишковим вмістом газу в тій воді, що деаерується.

Окрім цього, дифузійний процес видалення газів з води істотно сповільнюється при низьких залишкових концентраціях. Тому в киплячій воді у відкритій посудині при атмосферному тиску концентрація кисню через 5 хвилин після початку кипіння складає 100 мкг/л, тобто приблизно в 120 разів менше початкового значення, а через 20 хвилин – 17 мкг/л. Неважко підрахувати, що у міру збільшення газовидалення його швидкість за 25 хвилин сповільнилася в 82 рази.

Проблема підвищення ефективності таких систем є актуальною, зокрема, і для підприємства “НіжинТеплоМережі”.

У 2010-2011 рр. над проблемою підвищення ефективності використання і котлів і трубопроводів на підприємстві “НіжинТеплоМережі” працювала група, до якої входили, в тому числі, студенти спеціальності “Прикладна фізика”. Перед групою були поставлені завдання:

1. Розглянути механічні та хімічні методи очищення живильних вод для теплових магістралей.

2. Розглянути загальні принципи деаерації води.

3. Зробити порівняльну характеристику методів деаерації води, що застосовуються у світовій практиці. З’ясувати переваги та недоліки деаeratorів різних видів.

4. Вивчити досвід використання деаeratorів різного типу на підприємстві “НіжинТеплоМережі” та їх сучасний стан.

5. Вивчити можливість удосконалення конструкцій термічних деаeratorів, які застосовуються на підприємстві “НіжинТеплоМережі”.

За результатами дослідження розроблено рекомендації щодо покращення якості деаерації води термічними деаeratorами, з цією метою запропоновано:

- доповнити термічні деаераційні установки регуляторами температури, які дозволяють підвищити ефективність насосів;

- установити охолоджувачі випарів з метою зниження енерговитрат.

Одержані результати мають практичне значення для покращення рівня деаерації води в системах теплопостачання підприємств, в тому числі підприємства “НіжинТеплоМережі”.

Література

1. Вергазов В.С. Устройство и эксплуатация котлов: вопросы и ответы, справочник / Вергазов В.С. – [4-е изд.]. – М.: Стройиздат, 1991. – 272 с.
2. Павлов И.И. Котельные установки и тепловые сети / Павлов И.И., Федоров М.Н. – М.: Стройиздат, 1987. – 217 с.
3. Черкасский В.М. Насосы, вентиляторы, компрессоры: учебник для теплоэнергетических специальностей вузов / Черкасский В.М. – [2-е изд.]. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 416с.
4. Шарапов В.И., Цюра Д.В. Термические деаэратеры / Шарапов В.И., Цюра Д.В. – Ульяновск: УЛГТУ, 2004. – 560 с.

УДК 372.851:372.853

МАТЕМАТИКА В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ФІЗИКИ

Бойко Л.М.

Реалізація міжпредметних зв'язків математики і фізики через широке використання математичного апарату та математичних методів є відбиттям об'єктивних взаємозв'язків відповідних наук у шкільних дисциплінах. Адже математика є інструментом вивчення фізики, вона дозволяє кількісно описати характеристики фізичних явищ, за допомогою функціональних залежностей простежити їх динаміку, передбачити результати дослідів, оцінити їх точність тощо.

Разом з тим у шкільному викладанні спостерігається взаємне незадоволення вчителів математики і фізики. Вчителі фізики нарікають на рівень знань учнів з математики, які, на їх думку, не є достатніми для оволодіння знаннями з фізики. Учителі з математики висловлюють претензії що до рівня та якості використання математичних знань на уроках фізики. Ця проблема має чи не вікову історію. Так, на Другому з'їзді вчителів математики в Москві 3 січня 1914 року О.Й.Бачинським (1877–1944, відкривач закону в'язкості рідини (1912–1913), що носить його ім'я) була зроблена доповідь на тему "Запросы преподавателей физики в области математики" [1], де він відмічав недоліки шкільної програми з математики, та перелічив ряд питань, на які доцільно звернути увагу в шкільному викладанні математики для реалізації її узгодження з курсом шкільної фізики.

З того часу відбулося багато реформ в освітній галузі, докорінно змінилися програми, методи навчання. Проведено ряд наукових досліджень з проблеми реалізації міжпредметних зв'язків математики і фізики. Проте проблеми залишаються.

Із 2005 року в школах України вже навчаються за новими програмами з фізики та математики, які зазнали значних змін в порівнянні із затвердженими в 2001 році.

Так, у чинних програмах з алгебри поняття функції, графік та властивості лінійної функції розглядається у 7 класі, інші види функцій розглядаються разом із вивченням відповідних виразів та рівнянь. У 8 класі під час вивчення тем "Раціональні вирази" та "Квадратні корені" учні ознайомлюються з відповідними функціями та їх властивостями. У 9 класі розглядається квадратична функція, вивчення її властивостей пов'язується з розв'язуванням квадратних нерівностей. У програмах з геометрії у 8 клас перенесено вивчення теми "Многокутники. Площі многокутників", яка раніше вивчалася у 9 класі, натомість у 9 клас перенесено вивчення декартових координат, геометричних перетворень (рухи та перетворення подібності), поняття вектора на площині та його властивостей. Проте подібність трикутників, ознаки подібності трикутників розглядаються у 8 класі, тема "Подібність трикутників"

Такі зміни програми з математики відповідають частині зауважень щодо узгодженості з програмою фізики, чинною з 2001 року, що були висловлені в ряді статей [2, 3]. Наприклад, вивчення у 8 класі тем "Подібність трикутників", "Розв'язування прямокутних трикутників" та "Раціональні вирази" дає можливість сформувати практично повністю необхідний учням математичний апарат вивчення теми "Світлові явища" (таблиця 1), яка вивчалася в курсі фізики наприкінці 8 класу. Питання, які не передбачені програмами, але необхідні учням в процесі вивчення фізики, намагаються вирішити автори підручників. Так, під час вивчення теми "Цілі вирази" (7 клас), учні розглядають поняття степеня з натуральним показником. Формування вміння записувати числа у стандартному вигляді не передбачені на цьому етапі вивчення математики, воно розглядається у 8 класі під час вивчення теми "Раціональні вирази". Проте у підручнику з алгебри для 7 класу, під рубрикою "Хочете знати більше?" є детальні пояснення з яскравими прикладами про те як правильно записувати і "дуже великі", і "дуже малі" числа у стандартному вигляді [4].

Таким чином, шкільний курс математики може повністю задовольнити потреби шкільного курсу фізики у формуванні математичного апарату. Проте програма з фізики теж зазнала значних змін, якими в значній мірі відмовилась від використання математичних знань учнів. Тому метою даної статті є виробити методичні рекомендації для вчителів фізики, як зорієнтуватися в математичних знаннях учнів та максимально використати їх на користь формування знань з фізики.

Розглянемо математичний апарат вивчення теми "Світлові явища". За новою програмою це остання тема з фізики у 7 класі. У таблиці 1 ми виписали питання, що вивчаються в даній темі, її математичний апарат, час його вивчення (Γ – в курсі геометрії, A – алгебри, M – математики, відповідного класу), конкретизували фізичні об'єкти, які описуються відповідним математичним апаратом.

Зупинимось на математичних знаннях учнів детальніше.

Поняття, що вивчалися в курсах математики 5–6 класів, та в курсі геометрії 7 класу, на час їх застосування в цій темі сформовані на достатньому рівні. Однак вони потребують актуалізації для вдалого застосування.



Мал. 1

Розглянемо приклад задачі. Кут між дзеркалом та падаючим на нього променем дорівнює 25° (див. мал. 1). Чому дорівнює сума кутів падіння та відбивання?

Для розв'язання даної задачі потрібно актуалізувати:

1) знання з фізики: закони відбивання світла 2) знання з математики: означення рівних кутів, розгорнутого кута, прямого кута, суміжних кутів, що вивчаються в курсі геометрії 7 класу.

Тут, кути падіння та відбивання – рівні кути. Сума даного кута та кута падіння становить 90° . Кут суміжний до прямого – прямий. Тоді, легко встановити, що шукана сума кутів падіння та відбивання – це подвоєний кут падіння, який знаходимо як різницю прямого кута і даного: . Отже, шукана сума падаючого і відбитого кутів становить 130° .

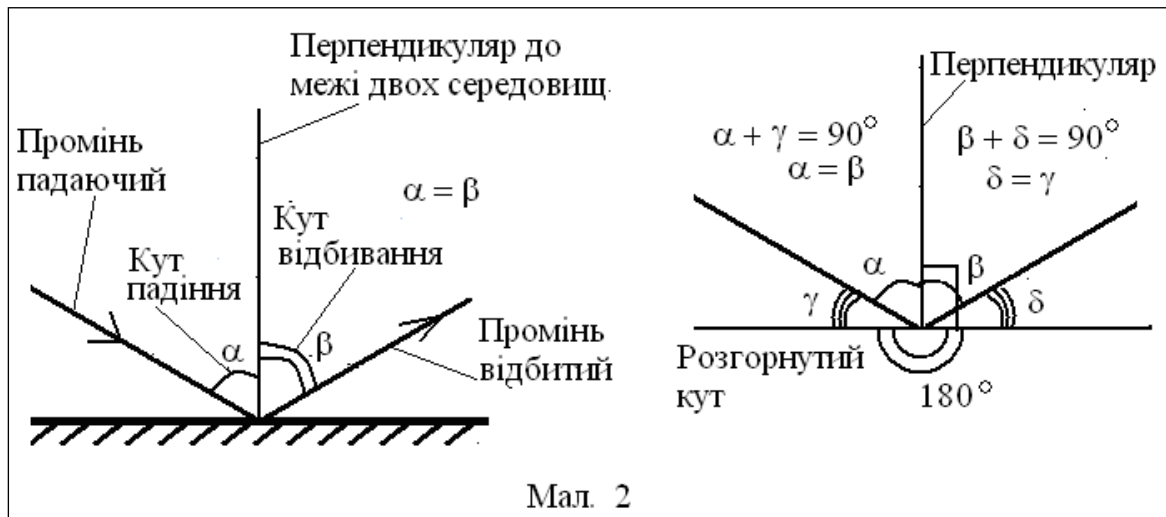
Закони відбивання та заломлення потребують уявлень учнів про взаємне розміщення прямих і площин у просторі. Звичайно, на час вивчення цих законів в 7 класі їх не можна вважати сформованими. Ці уявлення починають формуватися в курсі математики 5–6 класів, продовжуються у 9 класі в курсі геометрії і завершуються в старшій школі в процесі вивчення стереометрії. Однак, для розв'язування задач на закони відбивання та заломлення достатньо знань учнів з планіметрії. Дійсно, наприклад, перший закон відбивання говорить про те, що промінь падаючий, промінь відбитий та перпендикуляр до поверхні відбивання встановлений в точці падіння лежать в одній площині, отже, надалі взаємне розміщення відповідних півпрямих та співвідношення кутів між ними визначається аксіомами та теоремами планіметрії.

Таблиця 1

Світлові явища 7 клас				
№ з/п	Тема	Математичний апарат	Вивчається	Фізичний зміст
1	Оптичні явища в природі. Світловий промінь. Прямо-лінійне поширення світла.	Пряма, точка, промінь	Г – 7	точкове джерело світла, світловий промінь
2	Відбивання світла. Закони відбивання. Плоске дзеркало.	перпендикуляр до площини, взаємне розміщення прямих і площин в просторі	Г – 9 Г – 10	1-й закон відбивання та заломлення світла
		симетрія відносно площини	Г – 10	зображення у плоскому дзеркалі, побудова зображень у плоскому дзеркалі
		симетрія відносно прямої	Г – 9	
3	Поширення світла в різних середовищах. Заломлення світла на межі двох середовищ.	кут, градусна міра кута, прямий кут, рівні кути, суміжні кути, кут між прямими.	М – 5 Г – 7.	кути падіння, відбивання, перпендикуляр до межі середовищ
		синус кута	Г – 8	2-й закон заломлення світла (не формулюється)
		пропорція	М – 6	
		паралельні прямі	Г – 7	побудова зображень у лінзі
4	Лінзи. Оптична сила і фокусна відстань лінзи. Побудова зображень, що дає тонка лінза.	Взаємно обернені величини	М – 6	фокусна відстань і оптична сила лінзи
		раціональний вираз, раціональне рівняння	А – 8	знаходження невідомої величини з формули тонкої лінзи
		подібні трикутники	Г – 8	виведення формули тонкої лінзи
5	Фотометрія. Сила світла і освітленість.	пряма пропорційна залежність	М – 6	залежність освітленості від сили світла
		обернена пропорційна залежність	А – 8 М – 6	залежність освітленості від площі та квадрату відстані
		площа	М – 5 Г – 8	
		косинус кута, співвідношення між сторонами і кутами в прямокутному трикутнику	Г – 8	залежність освітленості від кута падіння світла (не встановлюється)
6	Дисперсія. Спектральний склад світла. Око. Вади зору. Окуляри. Оптичні прилади.	Питання висвітлюються описовим матеріалом		

Розглянути суть першого закону відбивання з точки зору математики можна на уроках геометрії в 9 класі в процесі вивчення теми "Основи стереометрії". За аксіомою стереометрії, через дві прямі, що перетинаються проходить площина і до того ж тільки одна. Оскільки промінь відбитий утворюється в наслідок процесу відбивання, а початковими даними є промінь падаючий і перпендикуляр до поверхні відбивання, то площину в якій лежать промені доцільно визначити променем падаючим і перпендикуляром, в площині цих двох променів, за першим законом відбивання, і лежить відбитий промінь. Точка падіння – спільна точка двох площин – площина падіння та площина, яка визначається поверхнею відбивання. За аксіомою стереометрії, якщо площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій. Оскільки площина проходить через перпендикуляр до поверхні відбивання, то за ознакою перпендикулярності площин, вона є перпендикулярною до поверхні відбивання. Аналогічні міркування можна провести і стосовно першого закону заломлення.

У підручниках, збірниках задач, зошитах, Для актуалізації знань учнів про кути та встановлення відповідності між математичними та фізичними термінами доцільно запропонувати такий плакат з малюнками (мал. 2)

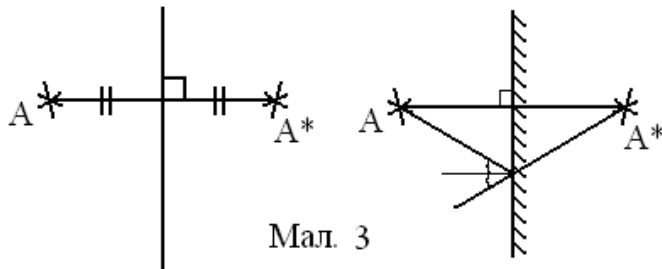


Певної уваги слід приділити й актуалізації знань про відношення, пропорцію та пропорційні величини, оскільки традиційними є нарікання вчителів фізики на те, що учням важко знаходити невідомі величини з формул типу $E = \frac{I}{R^2}$, $E = \frac{\Phi}{S}$ та ін. Знання про пропорцію, взаємно обернені величини та прямо пропорційне відношення учні дістають на уроках математики у 6 класі. Поняття про обернено пропорційну залежність в програмі 5–7 класів відсутнє, проте, наприклад, у підручнику [5, с.] під рубрикою "дізнайтеся більше", є пояснення і цього поняття. Тому вчителю фізики доцільно звернутись до підручників з математики або до вчителів математики і розібратися, які знання дістали учні про ці поняття, яким чином вони ними користувалися і як поновити їх у пам'яті учнів. На наш погляд, доцільним є використання таблиць та карток-консультантів. Такі картки та таблиці можливо наповнити правилами виконання дій над дробами та прикладами їхнього застосування до перетворення фізичних формул.

Розв'язування задач на знаходження невідомої величини з формули тонкої лінзи передбачає наявність у школярів знань умінь та навичок виконувати тотожні перетворення раціональних виразів та розв'язування раціональних рівнянь, які формуються під час вивчення теми "Раціональні вирази" в курсі алгебри 8 класу (перша тема). За їх відсутності, слід

актуалізувати знання учнів про дії над дробами з різними знаменниками та знаходження невідомого члена пропорції.

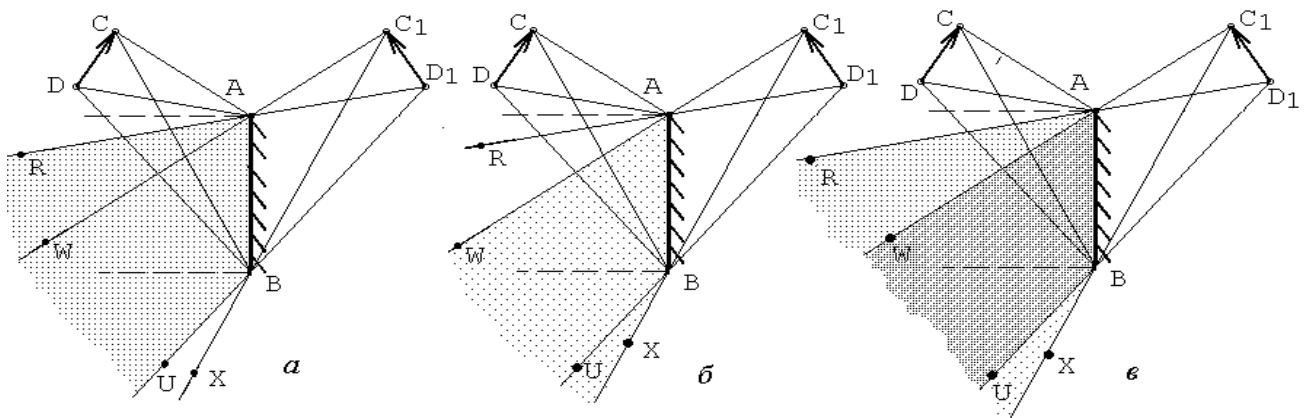
Поняттям симетрії та її властивості учні теж не розглядали до початку вивчення світлових явищ. Проте, на наш погляд, це не потрібно і навіть шкідливо. Інакше задачі на зображення об'єктів у плоскому дзеркалі втратили б зміст, бо учні не будували б хід світлових променів, а малювали симетричні об'єкти відносно прямої, що зображає дзеркальну поверхню, не вникаючи в суть явища повного відбивання.



Мал. 3

На малюнку 3 показано різницю між побудовою симетричних точок та зображення світної точки в плоскому дзеркалі. Симетричну точку одержують на продовженні перпендикуляра до прямої на таку саму відстань, як від точки до прямої (площини), а зображення точки одержують на перетині продовжень відбитих променів.

Заслугує окремої уваги клас задач на дзеркальне відбивання, де вимагається визначити положення з якого буде чи не буде видно зображення об'єкта у дзеркалі. З точки зору математики – це задачі на знаходження перерізу двох множин.



Мал. 4

На малюнку 4а виділено область, з якої видно зображення в дзеркалі крайньої точки D об'єкта CD. На малюнку 4б – область, з якої видно зображення крайньої точки C. Отже, зображення обох крайніх точок об'єкта одночасно, тобто зображення всього об'єкта, буде видно з тих точок простору, що належать одночасно обом областям, тобто перерізу множин точок простору (мал. 4в).

Для пояснення побудови та встановлення положення і розмірів зображень, одержаних за допомогою лінз на уроках фізики можна використати педагогічний програмний засіб (ППЗ) GRAN-2D. Цей ППЗ дозволяє створити динамічний малюнок, за допомогою якого можна простежити зміну виду зображення об'єкта залежно від того, де розташований сам об'єкт відносно лінзи. Для цього достатньо зобразити в активному вікні лінзу, її головну оптичну вісь, фокуси. Об'єкт можна зобразити, як звичайно, у вигляді стрілки, перпендикулярної до головної оптичної осі з початком на ній. Через кінець стрілки (об'єкта) побудувати "зручні промені": пряму, яка проходить через кінець стрілки і оптичний центр лінзи, та пряму, що паралельна головній оптичній осі й проходить через кінець об'єкта, яка перетне площину лінзи, та пряму, що проходить через одержану точку перетину і фокус лінзи. Для побудови цих прямих зручно скористатися вбудованими функціями. З точки перетину "зручних променів" опускаємо перпендикуляр до перетину з головною оптичною віссю і одержуємо зображення об'єкта.

Тепер, пересуваючи вздовж головної оптичної осі сам об'єкт, побудовані прямі будуть змінювати своє положення автоматично, що дозволить простежити зміну положення та розмірів зображення. Крім того ППЗ GRAN-2D має функцію вимірювання довжин відрізків, якою можна скористатися для порівняння розмірів об'єкта та зображення, а також для експериментального підтвердження формули тонкої лінзи, оскільки виведення її за відсутності знань учнів означення та властивостей подібних трикутників неможливе. Ми пропонуємо це зробити на уроках математики в якості прикладної задачі для ілюстрації застосування означення подібних трикутників.

Підсумовуючи вище сказане, зазначимо, що успішне оволодіння учнями фізичними знаннями залежить в певній мірі й від їх знань математичного апарату відповідної фізичної теми. Тому плануючи роботу над темою, вчитель фізики повинен передбачити і спланувати роботу по реалізації зв'язків фізики і математики, спрямованої перш за все на актуалізацію опорних математичних знань або повідомлення учням необхідних математичних знань.

Література

1. Бачинській А.І. Запрсы преподавателя физики въ области математики // Математическое образование: журнал Московського Математического кружка. – М., 1914. – № 2. – С. 83 – 89.
2. Швець В., Бойко Л. Між предметні зв'язки математики і фізики: стан, проблеми перспективи // Фізика та астрономія в школі. – 2002. – № 6. – С. 21 – 26.
3. Возна М., Гром'як М., Співпраця та інтеграція у природничо-математичному циклі // Фізика та астрономія в школі. – 2003. – № 2. – С.16 – 19.
4. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. – К.: Зодіак-ЕКО, 2007. – 304 с.
5. Математика: 6 кл.: Підруч. для загальноосвіт. навч. закл./Г.П. Бевз, В.Г Бевз. – К.: Генеза, 2006. – 304 с.

УДК 371.32:514.115

ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМІВ РОЗУМОВОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ В ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ

Барило Н.А.

Відомо, що зміст навчання – один із найважливіших факторів, який впливає на ефективність математичних знань. Але не менш важливим фактором є і методи навчання. Одним із таких методів є діяльнісний (активний) підхід у навчанні.

У питанні навчання учнів розв'язуванню задач діяльнісний підхід передбачає розкриття пошуку розв'язання, роз'яснення різних способів і методів пошуку.

На основі математичного змісту в учнів формуються такі види умінь і навичок: математичні, загальноінтелектуальні, уміння і навички навчальної діяльності. В їх формуванні основну роль відіграють прийоми розумової діяльності: аналіз і синтез, індукція і дедукція, абстрагування, аналогія і порівняння, конкретизація, узагальнення, класифікація.

Одне із основних завдань в навчанні математики полягає в тому, щоб розвивати мислення учнів, вдосконалювати уміння мислити, робити висновки, цебто формування розумової культури. А це в свою чергу характеризується певним рівнем розвитку мислення, володіння узагальненими прийомами міркувань, прагненнями у набутті знань і уміннями застосовувати їх в нестандартних ситуаціях.

В даній статті розглянемо формування прийомів аналізу і пошуку способу розв'язання задачі в рамках однієї змістово-методичної лінії шкільного курсу геометрії – геометричні побудови.

Повне розв'язання задачі на побудову проводять за таким планом: 1) аналіз задачі; 2) побудова шуканої фігури; 3) доведення правильності побудови; 4) дослідження можливості і неможливості розв'язання задачі.

Історична практика, починаючи з IV–III ст. до н.е. (грецький період) стверджує, що такий план характерний для всіх задач на побудову, а тому його вважають загальним.

Дидактична ціль аналізу – знайти розв'язок задачі. В педагогічній психології встановлено, що навчання учнів розв'язанню задач найбільш ефективно в процесі пошуку їх розв'язання. Оскільки навчання в пошуку способу розв'язання не тільки розкриває механізм розумової і практичної діяльності учнів, але і розкриває їх творче мислення, формує культуру розумової діяльності.

Пошук способу розв'язання здійснюється в основному аналітично-синтетичним методом, який включає три етапи міркувань: 1) допускаємо, що задача розв'язана; 2) шукаємо, які звідси можна отримати наслідки; 3) співставляємо отримані висновки (синтез), прагнемо отримати спосіб розв'язання задачі.

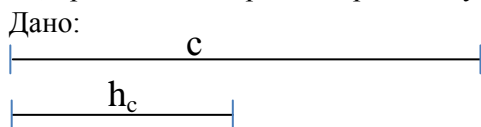
Конкретизуємо прийом аналізу для розв'язання задачі на побудову: 1) допускаємо, що задача розв'язана і виконуємо малюнок-ескіз; 2) за малюнком-ескізом виділяємо дані і шукані елементи, встановлюємо залежність між ними, а якщо необхідно, то виконуємо додаткові побудови (ДП); 3) встановлюємо(вказуємо), які і в якому порядку необхідно виконати простіші геометричні побудови, щоб за даними елементами побудувати шукану геометричну фігуру.

З логічної точки зору в процесі аналізу встановлюються необхідні умови існування фігури. Введення необхідних умов продовжується до тих пір, доки не будуть отримані такі умови, які і дозволяють побудувати шукану фігуру. Іншими словами знайдено шлях переходу від шуканої фігури до тієї, яку можна безпосередньо побудувати за даними задачі. Мета аналізу – встановлення зв'язків шуканих елементів з даними. Результат аналізу – план виконання побудови, спосіб розв'язання задачі.

Більшість задач на побудову зводиться до побудови такої геометричної фігури, як трикутник. Методична схема проведення аналізу при розв'язанні задачі на побудову саме трикутника така: 1) виконати малюнок-ескіз шуканого трикутника; 2) встановити, якими властивостями володіє кожна із його вершин; 3) вказати, яким чином за встановленою властивістю можна скористатися для побудови трикутника.

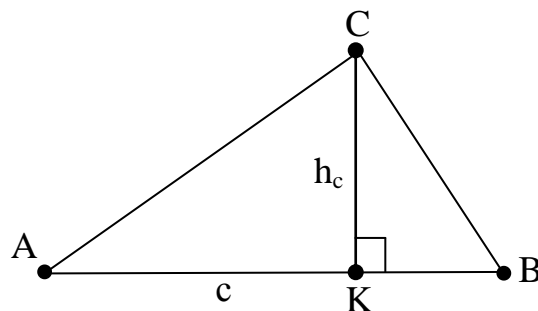
Проілюструємо вище сказане на прикладі задачі:

Задача 1. (№634) [1, с. 165]. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та висотою, проведеної з вершини прямого кута.



Побудувати: $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$).

Аналіз (Метод проведення – евристична бесіда: вчитель (В.), учень (У.))



Мал. 1

Нехай задача побудована, $\triangle ABC$ побудовано, в якому $AB = c$, $CK = hc$, $\angle C = 90^\circ$ (див мал. 1).

В. Чи є на даному малюнку фігури, які можна побудувати?

У. Так, відрізок AB .

В. Як можна побудувати відрізок AB ?

У. На промені з початком в точці A відкладаємо відрізок $AB=c$.

В. Після побудови відрізка AB скільки вершин шуканого трикутника ABC буде відомо?

У. Після побудови AB буде відомо дві вершини $\triangle ABC$ – вершина у точці A , і вершина у точці B .

В. А як можна знайти третю вершину? (Якщо необхідно поставити ряд додаткових запитань).

В. Скільки необхідно даних для знаходження третьої вершини C трикутника ABC ?

У. Для знаходження вершини C необхідно дві умови.

В. Які умови (дані умови задачі) ви не використали?

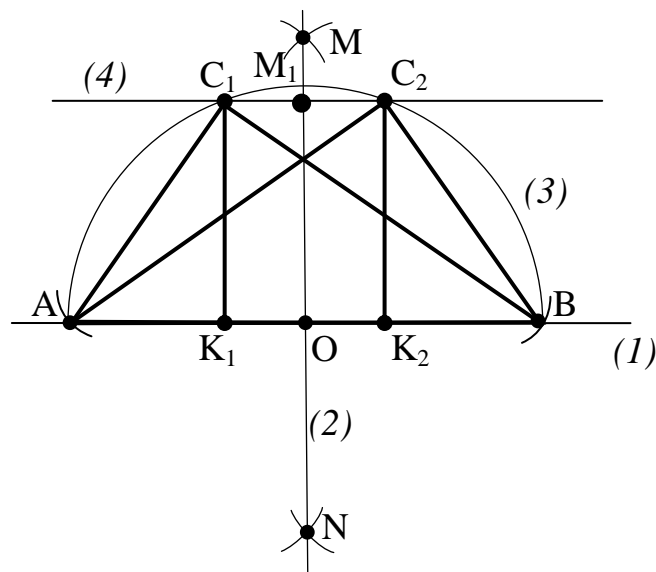
У. Ми не використали дві умови задачі: 1) прямий кут C ; 2) висоту hc .

В. Де повинна знаходитися вершина кута C ?

У. Прямий кут повинен спиратися на півколо, побудоване на відрізку AB як на діаметрі, а також знаходитися на відстані hc від нього.

Таким чином отримано план побудови вказаної вище задачі.

Побудова. Взагалі побудова шуканої фігури розуміється як послідовний перелік всіх операцій, які потрібно виконати заданими інструментами (циркулем та односторонньою лінійкою) для розв'язання задачі.



Мал. 2

1. на промені з початком в точці A побудуємо відрізок $AB = c$;

2. будуємо серединний перпендикуляр MN до AB ;

3. будуємо на AB півколо;

4. відкладаємо $OM_1 = hc$;

5. проводимо пряму, паралельну AB , яка перетинає півколо в точках C_1 і C_2 .

Сполучаємо C_1, C_2 послідовно з A, B , одержимо: $\triangle AC_1B$ і $\triangle AC_2B$ (див. мал. 2).

Доведення правильності побудови становить частину розв'язування задачі, яка за логічним змістом обернена аналізу і має на меті показати, що побудована фігура задовольняє вимогам задачі.

Доведення.

$AB = c$ (за побудовою);

$\angle C = 90^\circ$, як кут, що спирається на діаметр;

Опустимо перпендикуляри C_1K_1 і C_2K_2 на відрізок AB , ясно, що $C_1K_1 = C_2K_2 = h_c$.

Дослідження умов можливості побудови шуканої фігури є заключним етапом розв'язання задачі на побудову. Мета – дати відповідь на такі запитання: а) Які умови повинні задовольняти дані задачі, щоб задача мала або не мала розв'язків? б) При яких умовах задача має один або кілька розв'язків?

Дослідження. Задача має два розв'язки при $h_c < \frac{1}{2}C$. Якщо $h_c = \frac{1}{2}C$, то $\triangle ABC$ – рівнобедрений. В цьому випадку задача має один розв'язок.

На сучасному етапі розвитку педагогічної науки і школи особливого значення набула проблема формування в учнів таких прийомів навчальної діяльності як найбільш раціональний спосіб роботи, узагальнення, спеціалізація, конкретизація, аналіз, синтез тощо. До складу того чи іншого прийому може входити не тільки певна система дій, але і словесно сформульоване судження про те які дії та їх варіації необхідно виконати в залежності від вимоги задачі. А для цього необхідне логічне мислення, інтуїція, винахідливість тощо.

Пошук способу розв'язання – один із основних компонентів у розв'язанні задач. Навчити учнів умінню розв'язувати самостійно задачі означає навчити їх свідомому пошуку розв'язання.

Навчання мислення сприяють уміння самостійно, свідомо знаходити той чи інший метод, спосіб її розв'язання.

На прикладі задачі 1 можна розкрити суть методу геометричних місць точок (ГМТ), як одного із основних методів розв'язання задач на побудову.

Прийоми розв'язання задач на побудову методом геометричних місць точок ґрунтуються на понятті геометричного місця точок.

Геометричним місцем точок (ГМТ) називається фігура, яка складається із всіх точок площини, що володіють певною властивістю.

Якщо фігура є те чи інше ГМТ, то: 1) будь-яка точка цієї фігури володіє вказаною властивістю; 2) всі точки із вказаною властивістю належать цій фігурі.

Пошук розв'язання задачі спрощується, якщо учні вміють застосовувати ті чи інші алгоритмічні вказівки, складуючи які витримуємо такі етапи: 1) виділення операцій, які становлять зміст даного методу; 2) закріплення кожної операції спеціально дібраними вправами; 3) оформлення цих операцій у вигляді алгоритмічних вказівок.

Сформулюємо алгоритм розв'язання задачі методом ГМТ:

- з'ясувати, до знаходження якої точки зводиться побудова точки;
- на основі аналізу задачі сформулювати дві умови, яким задовольняє шукана точка;
- назвати і побудувати ГМТ, що задовольняє першій умові, не беручи до уваги другу умову;
- і навпаки, відкинути першу умову, назвати і побудувати ГМТ, що задовольняє другій умові;
- знайти шукану точку (точки) перетину побудованих геометричних місць.

Тоді, за вказаним вище алгоритмом наведемо інший варіант прикладу аналізу задачі 1, який здебільшого варто проводити усно:

Нехай $\triangle ABC$ – шуканий (див. мал. 1). У ньому $\angle C$ – прямий, $AB = c$ – гіпотенуза, $CK = h_c$ – висота. Положення двох вершин A і B визначається заданням відрізка AB . Задача зводиться до відшукування третьої вершини трикутника – точки C . Оскільки, вершина має бути віддаленою від гіпотенузи на відстань h_c , то вона повинна належати прямій, паралельній

основі АВ і віддаленій від неї на відстань h_c . З іншого боку, з вершини С сторону АВ видно під прямим кутом, тому точка С повинна належати колу з центром у середині відрізка АВ і радіусом, що дорівнює його половині. Таким чином, точка С – перетин двох геометричних місць, а саме, прямої і кола зазначених вище. Кожне з цих місць було знайдено виходячи з двох вимог, яким ця точка повинна була задовольняти [6, с. 16].

Для самостійного опрацювання учням доцільно запропонувати такі задачі.

Задача 2. (№599) [4, с. 164]. Побудуйте прямокутний трикутник: 1) за гострим кутом і бісектрисою цього кута; 2) за катетом і висотою, проведеної до гіпотенузи.

Задача 3. (№644) [4, с. 170]. Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеної до цієї сторони, і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?

Задача 4. [2]. Побудувати трикутник АВС за такими даними:

- а) $\angle A, \angle B, a + b = s$; г) $\angle B, h_c, a - b = l$;
 б) $\angle C, h_a, a - b = l$; д) $a, h_b, b + c = s$;
 в) $B, a, a + b + c = s$; е) $\angle A, \angle B, a + b + c = s$.

Задача 5. Побудувати прямокутний трикутник за гострим кутом α і різницею гіпотенузи і протилежного кута α катета.

Задача 6. Побудувати прямокутний трикутник за гострим кутом α і різницею гіпотенузи і прилеглого до кута α катета.

Задача 7. (№645) [4, с. 171]. Побудуйте рівносторонній трикутник за радіусом описаного кола.

Задача 8. Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник за даною основою і сумою (різницею) однієї з рівних сторін та висоти, проведеної до гіпотенузи.

Ознайомлення учнів з методами розв'язання задач на побудову – один із основних елементів навчання учнів розв'язання цих задач. Оскільки кожна геометрична задача на побудову не є стандартною, ми не ставили за мету класифікувати їх по типам і методам розв'язання, по належності до того чи іншого розділу геометрії (змісту навчального матеріалу).

Наведена вище схема процесу розв'язання задачі, що складається із чотирьох основних етапів, є зразковою. Часто пошук розв'язання обмежується лише знаходженням головної ідеї розв'язання, яку одержуємо в результаті аналізу. Отже, етап аналізу є обов'язковим і проводиться (письмово або усно) в процесі розв'язання будь-якої, навіть, найпростішої задачі.

Відмітимо також, що в процесі розв'язання задач на побудову послідовно і систематично формуються в учнів культура розумової праці, а також загально-трудова вміння (планування роботи, раціональність виконання, ініціатива, дисциплінованість, працелюбність).

В процесі розв'язання задач на побудову учитель може ефективно формувати елементи алгоритмічної культури школярів, систематично вимагаючи від них чіткої послідовності основних побудов. Задачі на побудову розвивають навички пошуку розв'язання практичних проблем, що важливо у формуванні умінь і навичок розумової праці. В процесі розв'язання задач на побудову більш глибоко засвоюються теоретичні відомості про основні геометричні фігури та їх властивості.

Література

1. Бевз Г. П. та ін. Геометрія: Підручник для 7 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Вежа, 2007. – 208 с.
2. Бурда М. І. Розв'язування задач на побудову в 6-8 класах: Метод. посібник. – К.: Рад. шк., 1986. – 112 с.
3. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математики: Формирование приемов учеб. деятельности: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 128с.
4. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Х.: Гімназія, 2009. – 208с.

5. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Х.: Гімназія, 2009. – 208с.

6. Методичні рекомендації до практичних і лабораторних занять з методики викладання математики для студентів III курсу фізико-математичного факультету /загальна методика/ Укл. Баріло Н.А. – Ніжин: НДП, 1988. – 28с.

7. Осинская В.М. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике: Кн. для учителя. – К.: Рад. шк., 1989. – 192с.

8. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. психологии. – М.: Просвещение, 1983. – 160с.

УДК 51(07)

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ МЕТОДОМ ІНТЕРВАЛІВ

Опанасенко В.Г.

Найпростіші нерівності

$$\sin x - a \geq 0 \quad (1)$$

$$\cos x - a \geq 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x - a \geq 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} x - a \geq 0 \quad (4)$$

раціонально розв'язувати за єдиним алгоритмом з використанням методу інтервалів.

Для нерівності (1) та (2) знаходимо корені відповідних рівнянь $\sin x = a$ та $\cos x = a$:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Дані розв'язки зображуються скінченною кількістю точок на одиничному колі. Між цими точками функції у нерівностях (1) та (2) зберігають знак.

Для нерівності (3) на одиничному колі позначаємо розв'язки відповідного рівняння $\operatorname{tg} x = a$: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\text{і особливі точки функції } y = \operatorname{tg} x : x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Між позначеними точками функції $y = \operatorname{tg} x - a$ зберігає знак.

Для нерівності (4) на одиничному колі позначаємо корені рівняння $\operatorname{ctg} x = a$: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ і особливі точки функції $x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Між позначеними точками функції $y = \operatorname{ctg} x - a$ зберігає знак.

Розв'язати нерівність:

$$\text{Введемо нову змінну, тоді } \sin l \geq \frac{1}{2}.$$

Корені відповідного рівняння

$$l = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

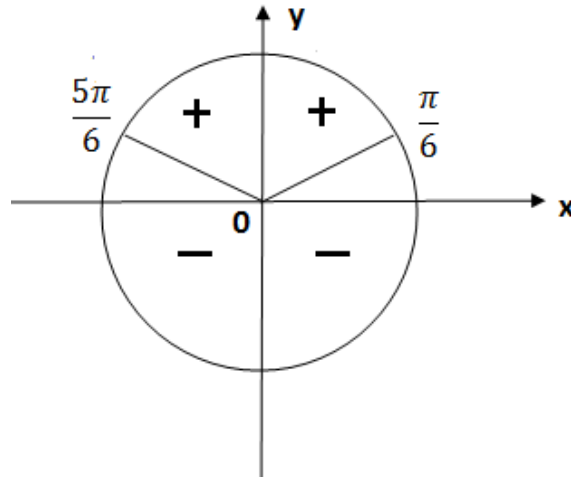
$$\text{Якщо } n = 0, \quad l = \frac{\pi}{6}; \text{ якщо } n = 1, \quad l = \frac{5\pi}{6}.$$

Множини точок, записані формулами

$$l = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ і } l = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

відповідають множині розв'язків x

Визначимо інтервали знакосталості функції $f(l) = \sin l - \frac{1}{2}$



Розв'язки нерівності $\sin l \geq \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq l \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Переходимо до змінної x :

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

тоді

$$\frac{\pi}{6} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Використовуючи малюнок, що ілюструє проміжки знакосталості функції $f(l) = \sin l - \frac{1}{2}$,

можна записати розв'язки нерівності $\sin l \leq \frac{1}{2}$

Переходимо до змінної x :

$$\frac{\pi}{2} + \pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

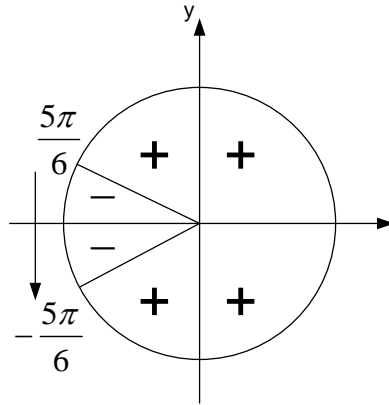
Розв'язати нерівність:

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Вводимо заміну $l = 3x - \frac{\pi}{6}$ або $\cos l \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos l + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0$.

Корені відповідного рівняння $l = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Позначимо їх на тригонометричному колі:



Визначимо знаки функції $f(l) = \cos l + \frac{\sqrt{3}}{2}$ на утворених проміжках.

Розв'яжемо нерівність $\cos l \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Перейдемо до змінної x :

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Використовуючи малюнок можна записати розв'язання нерівності

$$\cos l \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ або } \cos l + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0,$$

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq l \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Переходимо до змінної x :

$$-\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Розв'язати нерівність

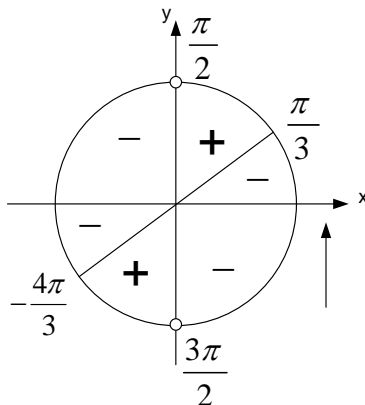
$$\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \leq 0.$$

$$\text{тоді } \operatorname{tg} l - \sqrt{3} \leq 0$$

$$\text{Корені відповідного рівняння } l = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Особливі точки функції } \operatorname{tg} l = 0, \quad l = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Позначимо множини точок (коренів рівняння) та особливі точки на одиничному колі.



Знаходимо інтервали знакосталості функції. Використовуючи малюнок можна записати розв'язки нерівності $\operatorname{tg} l - \sqrt{3} \leq 0$,

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < l \leq \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Переходимо до змінної x :

$$-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3} < x \leq \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Використовуючи малюнок, можна записати розв'язок нерівності

$$\operatorname{tg} l \geq \sqrt{3}, \text{ або } \operatorname{tg} l - \sqrt{3} \geq 0$$

$$\frac{\pi}{3} + \pi n \leq l < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

переходимо до змінної x :

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \leq x < \frac{2\pi}{9} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

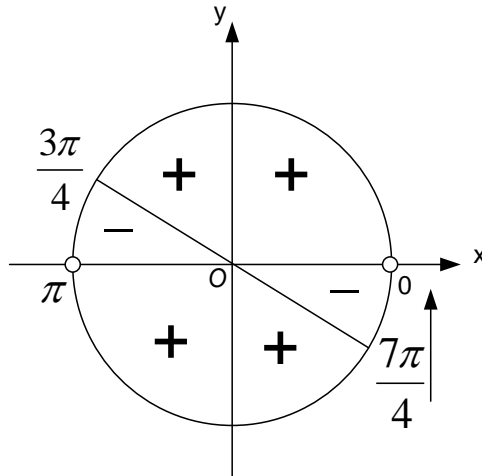
Розв'язати нерівність $\operatorname{ctg} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \leq -1$.

Позначимо тоді $\operatorname{ctg} l \leq -1$, тоді $\operatorname{ctg} l + 1 \leq 0$.

Корені даного рівняння $l = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Особливі точки функції $\operatorname{ctg} l: l = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Позначимо множини точок, що зображають корені рівняння та особливих точок на тригонометричному колі.



Визначимо інтервали знакосталості функції.

Розв'язки нерівності $\operatorname{ctg} l \leq -1$.

Переходимо до змінної x :

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2} \leq x < \frac{5\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Не викликає труднощів і розв'язання нерівності $\operatorname{ctg} l \geq -1$.

Методом інтервалів доцільно розв'язувати системи сукупностей або сукупності систем найпростіших тригонометричних нерівностей.

Література

1. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. – М.: Просвещение, 1991.
2. Слепкань З.І. Методика викладання алгебри і початків аналізу. – К.: Рад. шк., 1987.
3. Бородуля И.Т. Тригонометрические уравнения и неравенства. – Л.: Просвещение, 1989.
4. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика. – М.: Просвещение, 1988.

УДК 371.27

**МЕТОДОЛОГІЯ КОНТРОЛЮ ТА ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ
НАВЧАННЯ СТУДЕНТІВ****Городецька М.А., Пахомова Т.М.**

Одним із напрямів реформування навчального процесу вищої школи є істотна перебудова психолого-педагогічних, методичних засад діагностування навчальних досягнень студентів. У цьому є необхідність, оскільки в традиційній технології підготовки фахівців, утворилася ціла низка недоліків:

- контролю часто бракує системного характеру, коли методи і форми оцінювання навчальних досягнень студентів застосовуються без урахування педагогічних цілей, розраховані виключно на пам'ять студента і вимагають репродуктивної діяльності за зразком чи алгоритмом;

- усне опитування нерідко перетворюється на діалог між тим, хто відповідає і викладачем при пасивному спогляданні інших студентів; при письмовому контролі несправедливо слабо реалізується його навчальна функція, коли студент так і лишається зі своїми помилками в знаннях без вчасної їх корекції та вдосконалення;

- контрольні заходи часто зводяться до реєстрації незнання студентом навчального матеріалу, а не до оцінювання його навчальних досягнень як результату старанності в пізнавальній діяльності;

- при оцінюванні переважно реєструються нижчі рівні заволодіння знань (впізнавання, репродуктивний, розуміння), лишаючи поза увагою реконструктивний та творчий (перенесення) рівні володіння знаннями;

- контроль більше зводиться до накопичення позитивних оцінок, перетворюючи це в мету студента, а не орієнтує тих, хто навчається, на ґрунтовні знання;

- інноваційні методики контролю навчальних досягнень студентів (рейтингова, тестова тощо) у своєму прикладному застосуванні не мають достатньої психолого-педагогічної підтримки, оскільки не враховують пізнавальних можливостей студентів, розробляються викладачами без перевірки на валідність, надійність тощо.

Контроль у дидактиці розуміють як перевірку, оцінювання й облік успішності студентів. Він є необхідною ланкою управління навчально-пізнавальною діяльністю тих, хто навчається, засобом одержання зворотньої інформації. Крім того, контрольні заходи дають можливість викладачу отримати дані про результати своєї праці, вчасно внести корективи в методику викладання, а студентам – обізнаність з вимогами до рівня знань, умінь та навичок, про їх якість тощо.

Нормативними державними документами про організацію навчального процесу у вищих навчальних закладах передбачені контрольні заходи, які включають поточний та підсумковий контроль. Поточний контроль здійснюється під час проведення практичних, лабораторних та семінарських занять і має на меті перевірку рівня підготовленості студента до виконання конкретної роботи. Підсумковий контроль проводиться з метою оцінки результатів навчання на певному освітньому (кваліфікаційному) рівні або на окремих його завершених етапах. Він включає семестровий контроль та державну атестацію студента. Вищий навчальний заклад може використовувати модульну та інші форми підсумкового контролю після закінчення логічно завершеної частини лекційних та практичних занять з певної навчальної дисципліни.

Контрольні заходи щодо перевірки та оцінювання знань, умінь та навичок студентів здійснюються різними методами, основними з яких є: спостереження за навчальною діяльністю

студентів, усне опитування, письмовий контроль, графічна перевірка, практичний контроль, тестовий контроль.

Результати спостереження за навчальною діяльністю студентів не фіксуються в офіційних документах, однак вони надзвичайно важливі для своєчасної корекції навчання студентів, здійснення його індивідуалізації та диференціації. Спостерігаючи за роботою студентів на лекціях, лабораторних та семінарських заняттях, викладач складає уявлення про те, наскільки плідно проходить їх самостійна підготовка, якою мірою в них розвинуті пізнавальні здібності, самостійність в оволодінні знаннями, мотивація учіння. Значну роль при цьому відіграють індивідуальні консультації, на яких у довірливій бесіді педагог не тільки виявляє негативні фактори, а й здійснює профілактичні заходи щодо попередження неуспішності.

Усне опитування – найпоширеніший метод контролю знань студентів. Сутність цього методу полягає в постановці перед студентами запитань за змістом навчального матеріалу, що виносяться для контролю, та оцінюванні їх відповідей. За своїм характером усне опитування може бути індивідуальним і фронтальним, простим і складним.

Запитання слід формулювати чітко і зрозуміло, поступово ускладнюючи їх. У цьому аспекті К.Д.Ушинський зазначав: “Добре зрозуміле запитання є вже половиною відповіді”. Інша важлива дидактична умова правильного усного опитування – надання можливості студенту повністю відповісти на запитання. Якщо він під час відповіді допускає помилки чи неточності, викладач дає можливість виправити їх, інколи для цього задає додаткові запитання. Важливо пам’ятати про спосіб звертання педагога до студентів, який завжди повинен бути доброзичливим, тактовним.

Застосування усного опитування сприяє повторенню, систематизації та узагальненню вивченого раніше матеріалу. Цей метод можна використовувати для перевірки знань із будь-якої навчальної дисципліни, він найбільш повно реалізує всі функції контролю навчальних досягнень студентів.

Найчастіше до недоліків усної перевірки знань учені відносять: а) значну витрату навчального часу; б) необ’єктивність оцінки через вплив таких факторів, як попередня інформація про успішність студента, темп відповіді, її контрастність на фоні відповідей одногрупників тощо; в) під час опитування більша частина групи пасивно спостерігає за ходом заняття.

У процесі письмового контролю є можливість одночасно перевірити знання, уміння та навички студентів однієї чи декількох груп. Його можна застосовувати для перевірки знань з усіх навчальних предметів.

Цей метод відрізняється простотою застосування, дозволяє більш економно використовувати навчальний час. При цьому значно легше добитися єдності вимог, індивідуалізувати їх. Крім того, письмові роботи дають можливість виявити уміння логічно, послідовно висловлювати свої думки на папері. Варто також вказати, що письмові контрольні роботи студентів можна з вищою об’єктивністю оцінити, ніж результати усного опитування, оскільки в даному випадку викладач не обмежений часом.

Але письмовий контроль має також і свої недоліки. Це, в першу чергу, відсутність живого контакту викладача зі студентами, його цілеспрямованих впливів на зміст їх навчальної праці, що в цілому знижує виховну функцію контролю. По-друге, успіхи та помилки чи неточності студента, зафіксовані в контрольній роботі, ніби “віддаляються” від нього на час до повідомлення результатів, що не так мобільно сприяє корекції знань, як під час усного опитування. Зокрема, корективи в знання студентів викладач вносить опосередковано, відзначаючи в письмових роботах позитивні надбання, помилки чи неточності, які не завжди усвідомлюються студентами при самостійному аналізі. По-третє, письмовий контроль трудомісткий, він вимагає кропіткої роботи викладача як з підготовки індивідуальних завдань, так і з забезпечення самостійного їх виконання студентами. Крім того, потрібно старанно їх перевірити, поставити об’єктивні оцінки та своєчасно (чим скоріше, тим вище педагогічний ефект!) проаналізувати результати контролю перед групою.

Для перевірки практичної підготовки студентів застосовують метод практичного контролю. Перевірка практичних умінь та навичок здійснюється через контрольні завдання, які

вимагають виконання студентами певних дій, операцій, процесів. У практичні завдання інколи вводять запитання, які вимагають теоретичного обґрунтування робіт, які виконуються.

Практичний контроль знань дозволяє перевірити уміння і навички студентів виконувати певні трудові операції, здійснювати вимірювання за допомогою приладів, наладку і регулювання механізмів, улаштування тощо.

Контрольні практичні завдання виконуються двома способами – індивідуальним та фронтальним. Одночасне виконання практичного завдання студентською групою (фронтальний спосіб) здійснюється тоді, коли при індивідуальній роботі неможливо отримати кінцевий результат.

Тестовий контроль знань студентів все більше застосовується для діагностування освітньо-професійної підготовки студентів.

Література

1. Громлунд Н.Е. Оцінювання студентської успішності: Практ. пос. – К.: Вища школа, 2005. – 311 с.
2. Кузьмінський А.І. Тест навчальних досягнень особистості як засіб педагогічного вимірювання / А.І.Кузьмінський, В.І.Єфіменко. – Черкаси: Видавничий відділ Черкаського державного ун-ту ім.Б.Хмельницького, 2002. – 64 с.
3. Методика розробки тестів об'єктивного контролю рівня освітньо-професійної підготовки студентів: навч.-метод. пос. / В.І.Подшивалкіна (укл.). – О., 2005. – 28 с.
4. Пташний О.Д. Теорія і практика контролю результатів навчально-пізнавальної діяльності студентів вищих навчальних закладів України у другій половині XIX ст.: автореферат дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01. – Х., 2003. – 24 с.
5. Система комплексної діагностики знань студентів: Навч.-метод. пос. / Р.В.Вернидуб – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2002. – 15 с.
6. Тестові технології у навчальному закладі: Методичний посібник / Л.І.Парашенко, В.Д.Леонський, Г.І.Леонська. – К.: ТОВ “Майстерня книги”, 2006. – 217 с.

ЗМІСТ

1. МАТЕМАТИКА

<i>Старун І.І.</i> Асимптотика розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь	3
<i>Старун І.І., Шеремет О.А.</i> Про критерій сумісності лінійних систем	7
<i>Тарасенко О.В.</i> Умови спостережуваності вироджених лінійних процесів	9
<i>Циганок Л.В., Юрова Ю.В.</i> Координатно-графічне зображення невироджених ліній другого порядку у паралельній проекції.....	12
<i>Чорненька О.В., Майдан І.М.</i> Лінійні однорідні сингулярно збуджені системи диференціальних рівнянь з особливою точкою	18

2. ІНФОРМАТИКА

<i>Глушко І.М.</i> Узагальнення класичного результату Кодда-Лакруа-Піротте про еквівалентність реляційної (табличної) алгебри та відповідних реляційних числень	28
<i>Казачков І.В., Корсун А.М.</i> Розробка математичних моделей процесів плавлення-затверднення в системах пасивного захисту АЕС від аварій.....	35
<i>Корсун А.М., Казачков І.В.</i> Комп'ютерне моделювання теплогідравлічних процесів в системах пасивного захисту АЕС від тяжких аварій	43
<i>Фетісов В.С.</i> Розв'язування диференційних рівнянь у математичних комп'ютерних системах	53
<i>Фетісов В.С., Гринівський О.В.</i> Розробка програмного забезпечення контролю знань зі статистики для теми "Динамічні ряди" на платформі 1С	66

3. ФІЗИКА

<i>Венгер Є.Ф., Губерт М.В., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В.</i> Дослідження сингулярних поверхневих поляритонів у оксиді берилію	69
<i>Шевчук О.Г.</i> Застосування ємнісної спектроскопії до реконструкції розподілів глибоких станів напівпровідникових гетероструктур	74
<i>Аніщенко В.О., Скрипка Я.М.</i> Особливості розсіювання носіїв заряду в гетеровалентних твердих розчинах GaAs-ZnSe	77
<i>Аніщенко В.О., Шелемін А.М.</i> Розсіювання носіїв заряду в легованому цинком арсеніді галію при кімнатній температурі	82
<i>Шапка В.В., Шовкопляс А.М.</i> Електропровідність сатенгіпсу та ізогіпсу в процесі виконання опоряджувальних робіт.....	86
<i>Закалюжний В.М., Лозко В.І.</i> Розроблення ширококутового підсилювача потужності сигналів РЧ на неспеціалізованих польових транзисторах	90

4. МЕТОДИКА ТА ПРОБЛЕМИ ПЕДАГОГІКИ

<i>Ковальчук Ю.О.</i> До питання про систему оцінювання дипломних робіт.....	94
<i>Руденко М.П.</i> Формування поняття коефіцієнта тертя ковзання в шкільному курсі фізики.....	98
<i>Бойко М.П., Бойко Л.М.</i> Про уведення понять маси і сили в сучасних підручниках фізики для середньої загальноосвітньої школи.....	99
<i>Варущик Н.П., Клименко І.М.</i> Методика створення та використання засобів евристичної діяльності.....	102
<i>Харченко В.М., Ваврикович Л.В.</i> До питання теоретичних основ створення електронного курсу з шкільної математики	107
<i>Курниш А.В.</i> Проблемна група як форма організації наукової роботи студентів	109

<i>Ігнатенко В.А., Ільченко С.Г., Кнорозок Л.М.</i> До питання про деаерацію води та підвищення ефективності міських тепломагістралей	112
<i>Бойко Л.М.</i> Математика в шкільному курсі фізики	115
<i>Барило Н.А.</i> Формування прийомів розумової діяльності учнів у процесі розв'язання геометричних задач	120
<i>Опанасенко В.Г.</i> Розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів.....	125
<i>Городецька М.О., Пахомова Т.М.</i> Методологія контролю та оцінювання результатів навчання студентів	129

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

Збірник наукових праць

Відповідальний редактор – Аніщенко В.О.
Технічний редактор – Сливко В.П.
Верстка, макетування – Борщ О.В.

Книга друкується за авторським редагуванням

Підписано до друку 26.10.11 р.
Гарнітура Computer Modern.
Замовлення №

Формат 60x84/8.
Ум. друк. арк. 6,3

Папір офсетний.
Тираж 50 прим.



Видавництво
Ніжинського державного університету
імені Миколи Гоголя.
м. Ніжин, вул. Воздвиженська, 3/4.
(04631) 7-19-72
E-mail: vidavn_ndu@mail.ru

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єкта видавничої справи серія ДК №2137 від 29.03.05 р.