Міністерство освіти і науки України
Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя
Навчально-науковий інститут точних наук і економіки
Кафедра математики, фізики та економіки

014Середня освіта (Математика)
01 Освіта

# КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступня магістр

# ЗАСТОСУВАННЯ НЕРІВНОСТІ ЄНСЕНА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

студентки Мартиненко Тетяни Вячеславівни

Науковий керівник:
Тарасенко Оксана Володимирівна
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Рецензензент:
Барило Ніна Андріївна
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Віра Марина Борисівна
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Допущено до захисту
В.о. завідувача кафедри
______________ О.В. Тарасенко

Ніжин – 2019

## АНОТОЦІЯ

до магістерської роботи «Нерівність Єнсена та її застосування до розв'язування систем рівнянь»

Магістрант: Мартиненко Тетяна Вячеславівна

Керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент Тарасенко Оксана Володимирівна

Дипломна робота викладена на 46 сторінках, що включає три розділи, висновок та 11 найменувань літератури та три додатки.

Об'єктом даного дослідження є системи рівнянь, предмет опуклі вгору або вниз на деякому проміжку функції.

Метою нашого дослідження є виявлення загальних критеріїв до розв'язування систем рівнянь із застосування властивості опуклості функції.

Перша частина роботи являє собою огляд теоретичних матеріалів, їх аналіз та систематизація. У другій частині розглянуто безпосереднє застосування нерівностей Єнсена, представлені нестандартні методи розв'язування нерівностей. Фрагмент проектної діяльності продемонстровано у третьому розділі, де розглянуто особливості роботи з навчальними проектами.

**Ключові слова:** нерівність Єнсена, опуклість функції.

## ANNOTATION

The thesis is spread over 46 pages, including three chapters, a conclusion and 11 titles of literature.

The object of this study is systems of equations, the object is convex up or down at some interval of a function.

The purpose of our study is to identify general criteria for solving systems of equations using the convex property of a function.

The first part of the paper is an overview of theoretical materials, their analysis and systematization. The second part deals with the direct application of Jensen inequalities and presents non-standard methods for solving inequalities. A frag-

ment of the project activity is demonstrated in the third section, which discusses the peculiarities of working with educational projects.

Keywords: Jensen inequality, convexity of function.

Зміст

## ВСТУП

«Математичні відомості можуть застосовуватися вміло і корисно тільки втому разі, якщо вони засвоєні творчо, так, що учень бачить сам, як можна було б прийти до них самостійно»

О.М.Колмогоров

**Актуальність теми.** Основною метою вивчення шкільного курсу математики є розвиток логічного мислення і розвиток загальних прийомів розумової діяльності (аналіз, синтез, порівняння, узагальнення, систематизація, класифікація). Високий рівень їх розвитку є передумовою для формування стійких навичок та умінь, які можуть бути використані в майбутньому при дослідженні реальних явищ і процесів, а також є необхідними для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, її соціалізації.

У процесі розв'язування систем рівнянь застосовується значна кількість евристичних прийомів, які є цінними не тільки для математичного розвитку особистості. Хоча, безумовно, на матеріалі таких завдань перевіряються знання курсу математики і відшліфовуються уміння розв'язувати математичні задачі.

При вивченні алгебри та початків аналізу в класах математичного профілю та в класах з поглибленим вивченням математики учням пропонується значна кількість систем рівнянь, які розв’язуються за допомогою властивостей функцій (аналіз області визначення функцій, які входять в рівняння системи; застосування властивості монотонності та обмеженості функції до розв’язування рівнянь системи). Завдання різняться як постановкою задачі, так і технічним та ідейним змістом. Проте способи їх розв'язання не передбачають застосування властивості опуклості функцій. Аналіз підручників і посібників для підготовки до математичних олімпіад дозволяє зробити висновок, що доцільно доповнити систему нестандартних задач такими видами систем рівнянь, розв’язання яких передбачає застосування властивості опуклості функцій. Зрозуміло, що це обмежений клас систем рівнянь, але їх доцільно пропонувати учням при підготовці до математичних олімпіад, оскільки це дасть можливість показати практичне застосування властивості опуклості функцій до розв'язування математичних задач. Проведене нами дослідження показало, що доцільно при розв'язуванні систем рівнянь застосовувати нерівності для опуклої вгору або вниз на деякому проміжку функції – нерівність Єнсена.

Отже, розглянуте вище обумовило вибір нами теми дослідження «Нерівність Єнсена та її застосування до розв'язування систем рівнянь».

Вибір даної теми зумовлено її актуальністю, бо тема «Доведення нерівностей» не розглядається у загальноосвітній школі, де математику вивчають на  стандартному та академічному рівнях. Тема «Нерівності» передбачена для вивчення у класах з поглибленим вивченням математики для учнів 8-го класу та тема «Доведення нерівностей» у 9-му. Навчаючись у середній школі, учні втрачають можливість набути знання та навички доводити нерівності. Тому доречною є розробка курсу за вибором на тему «Доведення нерівностей», бо завдання на доведення нерівностей досить часто зустрічаються на математичних олімпіадах, ЗНО та при вступі у ВНЗ.

Перш, ніж перейти до розгляду основного змісту роботи, проведемо невелику екскурсію в історію математики.

Такі поняття, як рівность, «більше» та «менше», почали виниклим, коли з'явилась необхідністю у людей порівнювати певні величини. Перелічені поняття почали використовувати древні греки. Зокрема видатний математик Архімед (III ст. до н. е.) при обчисленні довжини кола, встановив, що «периметр всякого круга дорівнює потроєному діаметру з надлишком, який менше сьомої частини діаметра, але більше десяти сімдесят перших». Іншими словами, Архімед встановив границі числа π.

У відомих «Началах» Евкліда, давньогрецького математика, розглянуті добре всім відомі перші нерівності геометричного змісту: «перпендикуляр менший похилої, проведеної із одної і тієї ж точки до даної прямої», «сторона трикутника менша суми двох інших сторін», «проти більшого кута трикутника лежить більша сторона».

Розглянемо два типи задач, які пов'язують з нерівностями:

1) розв'язування нерівності або інакше кажучи, потрібно знайти такі умови, за якими нерівність перетвориться в істинне висловлення;

2) доведення нерівностей, за певних наперед заданих умов, коли запропонована нерівність перетворюється в істинне висловлення.

Задачі, які базуються на доведення нерівностей дають можливість закріпити коло теоретичних питань, які вивчаються у шкільному курсі математики, по-новому висвітлити відомі факти.

За допомогою нерівностей можна продемонструвати роль апарату математичної логіки в дедуктивних міркуваннях, у розумінні самого процесу доведення.

На сьогоднішній день за допомогою мови нерівностей формулюються задачі в багатьох сферах застосування математики. Прикладом може слугувати економіка, де майже всі задачі зводять до дослідження систем нерівностей з певним числом змінних. У багатьох випадках, нерівності можуть слугувати важливим допоміжним засобом, основною лемою, що дозволяє довести або заперечити існування якихось об'єктів, оцінити їх кількість, провести класифікацію.

Нерівності та їх системи знайшли своє застосування як в теоретичних дослідженнях, так і при розв'язуванні практичних задач. В будь-якій області математики , наприклад, алгебрі, геометрії і топології, теорії ймовірності, математичній фізиці, у вигляді нерівностей сформульовані фундаментальні результати, а без них не може обійтися й інша наука. Але є такі розділи математики, прикладом може слугувати математичний аналіз, в прикладна математика, нерівності зустрічаються значно частіше. Оскільки, не завжди розв'язки важливих рівнянь можна обрахувати точно, частіше з'являється наближений розв'язок, для якого завжди потрібно вказувати оцінку похибки, а отже довести деяку нерівність.

На математичних олімпіадах трапляється клас задач, де без використання нерівностей не обійтись, бо розв’язок без їх застосування досить об’ємний та складний. Тип даних задач, а точніше кажучи, їх розв’язок, являє собою послідовність простих логічних міркувань.

**Мета** дослідження полягає у виявленні загальних критеріїв до розв’язування систем рівнянь із застосуванням властивості опуклості функції.

**Гіпотеза** дослідження полягає в тому, якщо одним із рівнянь системи є рівняння, яке можна подати як складову нестрогої нерівності для опуклої вгору або вниз на деякому проміжку функції (нерівності Єнсена), то використовуючи вказане правило-орієнтир на підставі виділеної теорії, можна розв’язати задану систему рівнянь, ураховуючи, що рівність має зміст тоді і тільки тоді, коли рівні всі значення змінних з даного проміжку, які входять в неї.

**Завдання дослідження:**

1. Розглянути теоретичні основи теми «Застосування опуклості функцій. Нерівність Єнсена».
2. Скласти відповідне правило-орієнтир для розв'язування систем рівнянь, в умову яких входить рівняння як складова нестрогої нерівності для опуклої вгору або вниз на деякому проміжку функції (нерівності Єнсена).
3. Ввести до розгляду клас систем рівнянь, які розв'язуються за складеним правилом-орієнтиром.
4. Скласти системи рівнянь, які розв’язуються із застосуванням виділеної теорії.
5. Розв’язати поставлені задачі.

**Об’єкт дослідження** – системи рівнянь.

**Предмет дослідження** – опуклі вгору або вниз на деякому проміжку функції.

**Методи дослідження** – аналіз, синтез, узагальнення, систематизація, класифікація.

**Наукова новизна** дослідження полягає у складанні систем рівнянь, які доцільно розв'язувати застосовуючи нерівності для опуклої вгору або вниз на деякому проміжку функції – нерівність Єнсена.

**Особистий внесок –** на основі аналізу нерівностей для опуклих вгору або вниз на деякому проміжку елементарних функцій запропоновано системи рівнянь, при розв'язуванні яких доцільно застосовувати виділену теорію. Складено відповідне правило-орієнтир. Проілюстровано практичну реалізацію розглянутої теорії на прикладі навчального проекту.

**Практичне значення дослідження.** Складене правило-орієнтир і запропоновані системи рівнянь доцільно використовувати на факультативних заняттях і при підготовці до математичних олімпіад.

**Апробація результатів дослідження** здійснювалося шляхом їх обговорення на XIV Всеукраїнській студентській науковій конференції «Перспективи розвитку точних наук та методики їх викладання» (м. Ніжин, 5-6 грудня 2018 року), XV Всеукраїнській студентській науковій конференції «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання» (м. Ніжин, 5-6 грудня 2019 року).

**Структура роботи.** Наукова робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додакків.

# РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

## *1.1. Опуклі функції та їх застосування до доведення нерівностей. Нерівність Єнсена*

Дослідження будь-якої функції супроводжується визначенням таких інтервалів, як інтервали опуклості та вгнутості та точок перегину.

Означимо ці поняття.

Крива $y = f(x)$ називається опуклою (вгнутою) на інтервалі $x \in \Omega$ , якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче (вище) довільної її дотичної на цьому інтервалі [2]. Рис.1.1.

Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.

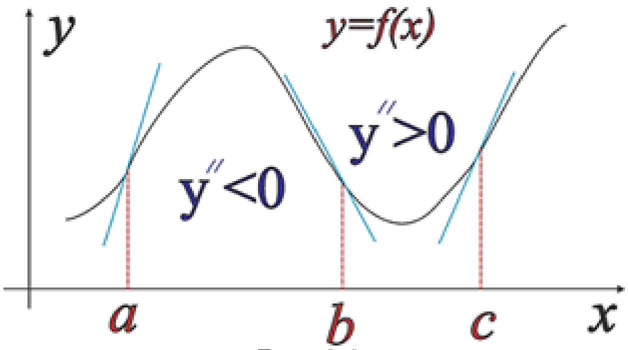


Рис. 1.1

Проаналізуємо рис.1.1:

1. Опуклість – інтервал $(a; b)$;
2. Вгнутість – інтервал $(b; c)$;
3. Перегин – в точці $x = b$ .

Опуклість та вгнутість функцій характеризується знаком другої похідної.

<u>Теорема 1.</u> Якщо в деякому інтервалі $x \in \Omega$, друга похідна більша нуля $f''(x)>0$ то крива опукла вниз на цьому інтервалі [2].

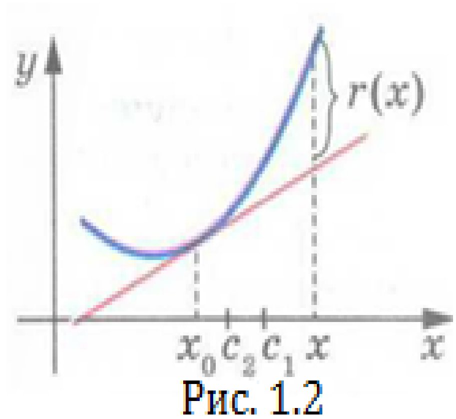


Рис. 1.2

<u>Теорема 2.</u> Якщо в деякому інтервалі $x \in \Omega$, друга похідна менша нуля $f''(x) < 0$ то крива опукла вгору на цьому інтервалі[2].

Доведемо теорему 1.

Спочатку проведемо дотичну до графіка функції, у точці з абсцисою $x_0$ зображену на рис.1.2. Запишемо рівняння дотичної: $y =$

$f\,'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Розглянемо функцію $r(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$, значення якої показують, наскільки відрізняється ордината точки графіка функції від ординати відповідної точки, яка лежить на проведеній дотичній (рис.1.2). Для доведення теореми необхідно показати що $r(x) \geq 0, \forall x \,\epsilon\, \Omega$. Нехай $x \,\epsilon\, \Omega$ і $x > x_0$. Маємо $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

Застосуємо теорему Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(x - x_0)$, де $c_1 \in (x_0; x)$ для функції $f$ і відрізка $[x_0; x]$.

Отримаємо: $r(x) = f(c_1)(x - x_0) - f(x_0)(x - x_0)$; $r(x) = \big(f(c_1) - f(x_0)\big)(x - x_0)$.

Оскільки функція $y = f'(x)$ є диференційованою на відрізку$[x_0; c_1]$, то можна застосувати теорему Лагранжа $f(c_1) - f'(x_0) = f''(c_2)(c_1 - x_0)$, де $c_2 \in (x_0; c_1)$..

Отримаємо: $r(x) = f'(c_2)(c_1 - x_0)(x - x_0)$.

З нерівностей $x_0 < c_2 < c_i < x$ випливає, що $(c_1 - x_0)(x - x_0) > 0$. Оскільки $c_2 \in \Omega$, то, враховуючи умови теореми, маємо: $f''(c_2) \geq 0$. Звідси $\forall x \in \Omega$ виконується рівність $r(x) \geq 0$. Тому, можемо зробити висновок, що функція $f$ є опуклою вниз на даному проміжку $\Omega$.

Інтервали опуклості та вгнутості відділяються такими точками, де друга похідна або дорівнює нулю, або не існує. Такі точки в математиці називаються критичними точками II роду. Графік функції має точку перегину $\big((x_0), f(x_0)\big)$, якщо при переході через таку точку друга похідна *f''(x)* змінює знак.

У посібнику [2] сформульовано наступні твердження.

Функція *f(x)* – опукла вгору (рис.1.3) на проміжку $[a; b]$, що належать області визначення $D(f)$, якщо для довільних значень $x_1; x_2$, таких, що $x_1 \neq x_2$ і $x_1; x_2 \in [a; b]$, виконується нерівність $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$. Якщо при тих же умовах виконується нерівність $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, то функція називається опуклою вниз рис.1.4.

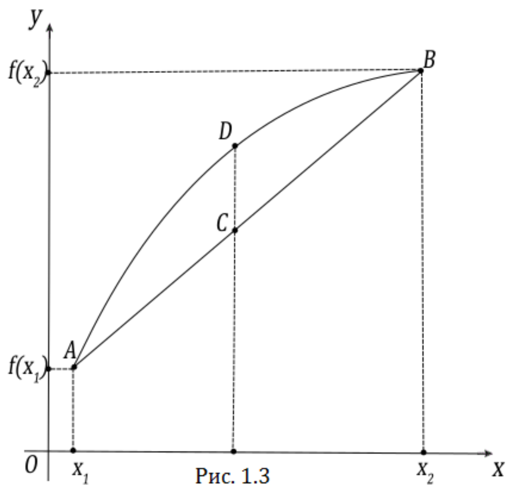


Рис. 1.3

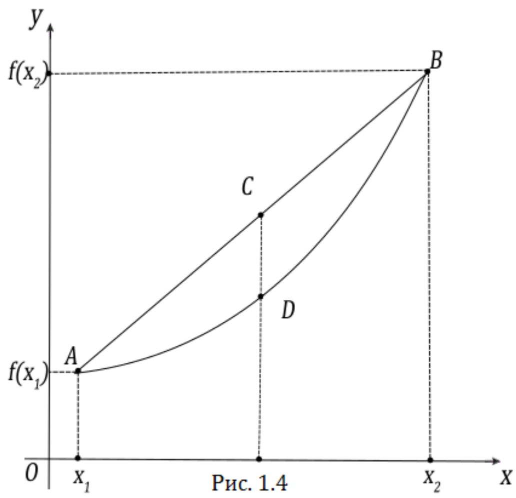


Рис. 1.4

Ці умови мають просте геометричне тлумачення. Розглянемо на графіку функції $y = f(x)$ точки рис.1.3: $A\big(x_1; f(x_1)\big)$, $B(x_2; f(x_2))$ $D\left(\frac{x_1+x_2}{2}; f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$,та точку $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$, яка є серединою відрізка $AB$.

У випадку опуклої вгору функції графік на заданому проміжку лежить вище відрізка *AB* (ордината точки *D* більша від ординати точки *C*) рис.1.3, а у випадку опуклої вниз функції нижче цього відрізка, тобто ордината точки *D* менша від ординати точки *C* рис.1.4.

Розглянемо теореми, що дають нерівності для опуклої вгору та вниз функцій.

<u>Теорема 3</u>. Якщо $f(x)$ – функція, опукла вгору на $(a; b)$, то для довільних значень аргументу $x_1, x_2, \ldots x_n$, що належать $(a; b)$ виконується нерівність $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$, причому знак рівності має місце тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

<u>Теорема 4</u>. Якщо $f(x)$– функція, опукла вниз на $(a; b)$, то для довільних значень аргументу $x_1, x_2, \ldots x_n$, що належать $(a; b)$ виконується

нерівність $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$, причому знак рівності має місце тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Доведемо теорему 3 [11]. Якщо функція $f(x)$ опукла вгору на деякому інтервалі, то для будь-яких значень $x_1, x_2, \dots\ x_n$, із цього інтервалу.

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}. \qquad \text{(a)}$$

Якщо функція $f(x)$ опукла у вузькому значенні, то рівність досягається лише при $x_1 = \cdots = x_n$.

Для опуклої вниз функції має місце така нерівність, де знак $\geq$ замінено на $\leq$.

Розглянуті в теоремах 3, 4 нерівності називають нерівностями Єнсена.

Доведемо нерівність $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$. Спочатку доведемо для $n = 4$:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4} = \frac{\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\frac{f(x_3)+f(x_4)}{2}}{2} \leq \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}{2} \leq$$
$$f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right) = f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)$$

За допомогою цієї нерівності і означення опуклості вгору виводиться подібна нерівність для $n = 8$, а потім аналогічно для $n = 16{,}32$ ...

Покажемо тепер, що із справедливості цієї нерівності для певного значення $n$ випливає її справедливість для $n - 1$. Справді, поклавши, $x_n = \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$ ми отримаємо $\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n} = x_n$.Таким чином із (а) випливає, що $f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) \geq nf(x_n) - f(x_n) = (n-1)f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)$

Отже, $\frac{f(x_1)+f(x_{n-1})}{n-1} \geq f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)$.

Цим уже повністю доведено узагальнену нерівність. Випадок рівності тут очевидний. Теорема 4 доводиться аналогічно.

## 1.2. Ймовірнісний зміст нерівності Єнсена

Нагадаємо, що нерівністю Єнсена називають нерівність:

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}, \qquad (1)$$

де $f$ - опукла на проміжку $(a;b)$ функція, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ - довільні числа з цього проміжку. Представлена нерівність перетвориться в рівність у двох наступних випадках:

1. $x_1 = \cdots = x_n$;
2. $f$ - лінійна функція.

Якщо ж функція угнута на цьому проміжку, то нерівність Йєнсена матиме наступний вигляд:

$$f(\overline{x}) \leq \overline{f(x)}, \qquad (2)$$

де $\overline{x}$ - середнє арифметичне чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$; $\overline{f}$ - середнє арифметичне чисел $f(x_i)$ $i = 1, \dots, n$. У загальноприйнятий вигляд нерівності Єнсена входять середні зважені, а не середні арифметичні чисел. Тобто

$$\overline{x} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \qquad (3)$$

$$\overline{f(x)} = \alpha_1(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n), \qquad (4)$$

де $\alpha_i \geq 0$ і $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ (5)

Зауважимо, що в дискретній формі нерівність була встановлена О.Гельдером (Hölder, 1889), а інтегральна нерівність – Й.Єнсеном (Jensen, 1906).

Інтегральну нерівність для угнутої функції записують так:

$$f(\int_a^b x\varphi(x)dx) \leq \int_a^b \varphi(x) \cdot f(x)dx\ , \qquad (6)$$

де $\varphi(x) \geq 0$ на $[a, b]$ і $\int_a^b \varphi(x)dx = 1.$ (7)

Опуклість (вгнутість) функції $f$ на інтервалі $(a;b)$ досягається, коли

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \qquad (8)$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (9)$$

для довільних чисел $x_1, x_2$, що належать інтервалу $(a, b)$, а рівність досягається у випадках коли $x_1 = x_2$ та $f$ - лінійна функція.

Зауважимо, що існує безліч різних способів доведення нерівності Єнсена. Аналізуючи підручники та посібники дану нерівність вчені доводять використовуючи метод Коші, за допомогою фізичного поняття центра мас системи матеріальних точок, формули Тейлора, за умови, що функція $f$ має в $(a, b)$ другу похідну.

З'ясуємо, в чому полягає ймовірнісний зміст нерівності Єнсена. Починаючи з означень вгнутості та опуклості, стає зрозуміло, що нам доведеться мати справу з випадковими величинами. Розглянемо, що саме зумовило фактор випадковості. Довільний вибір точок $x_1, x_2$, на проміжку $(a, b)$ зумовило цей фактор. Отже, ми можна вважати, що $X$ - це випадкова величина, а $Y = f(X)$ - функція випадкового аргумента. Дискретний розподіл з об'ємом $n = 2$ для вибірки без повторень має вигляд:

| | | |
|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ |
| $Y$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ |
| $p_i$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

(10)

В означеннях (8) і (9), з точки зору теорії ймовірності, порівнюють математичне сподівання (вибіркове середнє) функції і значення функції від математичного сподівання аргумента (рис.1).

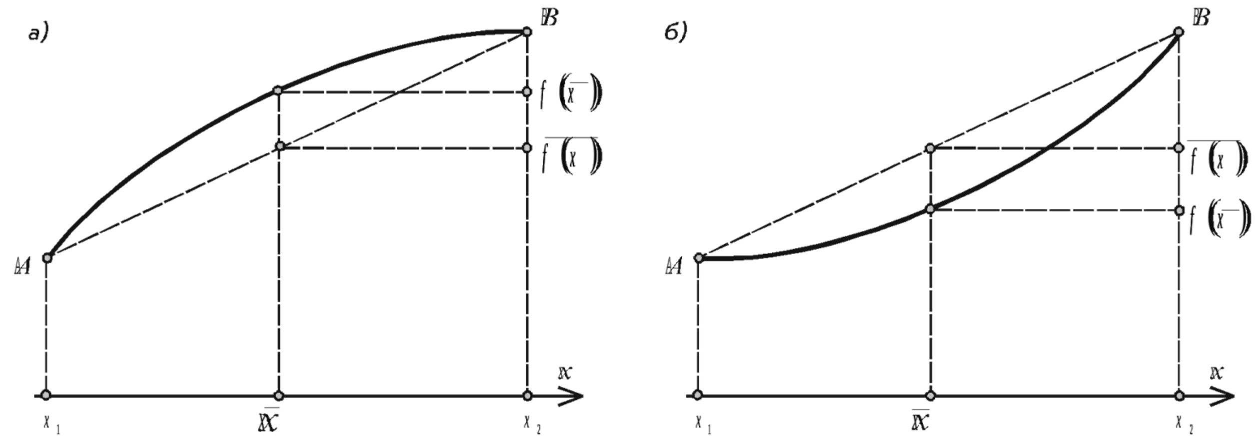



Рис.1. Опуклість (а) та угнутість (б) функцій.

Якщо функція опукла, то будь-яка вибрана точка дуги $AB$ розташована вище відповідної точки хорди $AB$, а для угнутої – навпаки. Коли функція $f$ є лінійною, то математичне сподівання функції співпадає із функцією математичного сподівання випадкового аргумента, а точка $\left(\overline{x}; f(\overline{x})\right)$ відповідає середині відрізка $AB$ . Можемо зробити висновок, що рівність у співвідношеннях (8) і (9) можлива лише у двох випадках, коли $x_1 = x_2$ та $f(x)$ - лінійна функція. Якщо ж функція не лінійна, то порушується пропорційна залежність між $X$ і $Y$. Так, для функції $f$, яка є опуклою збільшується множина значень, які перевищують $\overline{f(x)}$, а якщо функція угнута – навпаки, зменшується. Фізика це трактує так: "Для опуклої дуги $AB$ центр ваги матеріальних точок $A$ і $B$ завжди лежить під дугою". Згадана властивість виконується для довільного числа $n$ матеріальних точок, що належать опуклій кривій $AB$. В даному випадку крива $AB$ апроксимується сукупністю прямолінійних відрізків, і ми одержуємо шукане узагальнення.

Розглянемо дискретний розподіл для вибірки без повторень з об'ємом $n$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | … | $f(x_n)$ |
| $p_i$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | … | $\frac{1}{n}$ |

Математичне сподівання аргументу можна визначити наступним чином:

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Математичне сподівання функції:

$\overline{f(x)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

У даному випадку доцільно використати процедуру групування вибірки і, врахувавши попередній результат, довести нерівність Йєнсена для опуклої (1) та угнутої (2) функцій.

Розглянемо вибірку з повторенням. Нехай значення аргументу $x_1$ повторюється $k_1$ разів, а $x_2 - k_2$ разів, тоді маємо такий об'єм вибірки $k_1 + k_2 = K$. Продемонструємо дискретний розподіл:

| | | |
|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ |
| $Y$ | $f(x_2)$ | $f(x_2)$ |
| $p_i$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |

Де $\alpha_1$ і $\alpha_2$ - відносні частоти значень $x_1$ і $x_2$.

Розглянемо нерівність Єнсена для цього випадку:

для опуклої функції: $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, (11)

для вгнутої функції: $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, (12)

де $\alpha_i \geq 0$ і $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Як було зазначено вище, що рівність досягається у випадках коли $x_1 = x_2$ та коли $f$ - лінійна функція. З'ясуємо, що ж зміненться у ймовірнісній схемі доведення даних нерівностей, якщо $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Розглянемо нерівності

(11) і (12), а точніше кажучи, їх ліві частинах, де під знаком функції стоїть математичне сподівання випадкового аргумента:

$$\overline{x} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

тепер розглянемо праві частинив в яких маємо математичне сподівання функції випадкового аргумента:

$$\overline{f(x)} = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Порівнявши математичне сподівання функції випадкового аргумента зі значенням функції від математичного сподівання аргумента, можна помітити, що (11) і (12) – це означення опуклої і угнутої функції (рис.2).

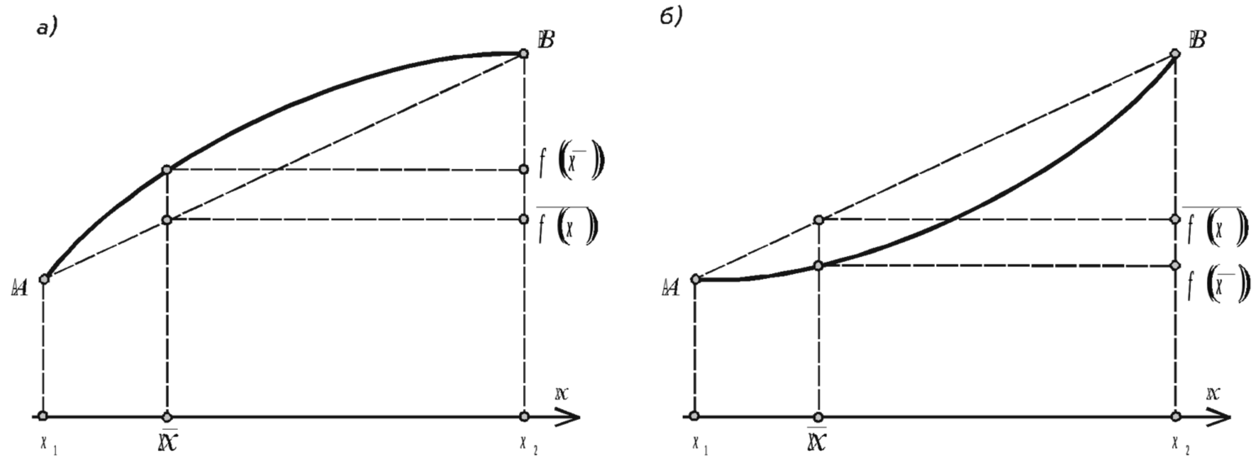



Рис.2.

Розглянуті вище випадки різняться лише точкою $\overline{x}$ яка не співпадає із серединою відрізка , томущо математичне сподівання аргумента – це зважене середнє. При цьому приріст аргументу та лінійна функція зберігає пропорцію:

$$\frac{x_2-\overline{x}}{\overline{x}-x_1} = \frac{f(x_2)-\overline{f(x)}}{\overline{f(x)}-f(x_1)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Математичне сподівання аргумента $\overline{x}$ відповідає значенню функції $f(\overline{x}) \neq \overline{f(x)}$, і якщо функція $f$ опукла, то $f(\overline{x}) \geq \overline{f(x)}$ , а якщо угнута – навпаки $f(\overline{x}) \leq \overline{f(x)}$. З точки зору фізики випадок, який ми розглянули, говорить нам про маси матеріальних точок $A$ і $B$, які є неоднакові. Наведена ситуація використовується при визначенні координат центра ваги неоднорідного стержня. Далі, беручи за основу узагальнені означення опуклої (11) і угнутої (12) функцій, легко довести нерівність Єнсена з математичним сподіванням (3) і (4). Покажемо даний дискретний розподіл:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | … | $f(x_n)$ |
| $p_i$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | … | $\alpha_n$ |

Відносні частоти $\alpha_1 \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $a \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b$, де не всі $x_1, \dots, x_n$ рівні між собою. Вибірку доречно розділити на групи, далі, для кожної з них визначити середні зважені значень абсцис і ординат вузлових точок. Якщо функція опукла (угнута), то нерівності Єнсена на проміжках мають однаковий зміст. Об'єднавши відрізки і виконавши усереднення групових середніх, отримаємо кінцевий результат, який полягає у тому, що точка з координатами лежить нижче дуги кривої (якщо функція опукла) або вище дуги (якщо функція угнута). Інтегральна нерівність Єнсена (6) доводиться за допомогою граничного переходу в дискретній нерівності або узагальненої теореми про середнє в інтегральному численні. Дречно звернути увагу, що в формулах (6) і (7) функція $\varphi(x)$ має властивості щільності розподілу випадкової величини $X$. В лівій частині (6) під знаком $f$ записано математичне сподівання випадкової величини $X$, що розглядається на проміжку :

$$M(X) = \int_a^b x\varphi(x)dx = \overline{x}.$$

У правій частині – математичне сподівання функції $f$ випадкового аргумента $X$:

$$M(f(x)) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)dx = \overline{f(x)}.$$

У математичному аналізі до аналогічних результатів приводить узагальнена теорема про середнє в інтегральному численні. Важливо зазначити, що при будь-якому законі розподілу ймовірностей $\varphi(x)$ точка належить хорді, що з'єднує кінці дуги і саме тому для опуклої(угнутої ) функції в теорії ймовірностей така розбіжність функції середнього і середнього функції називають "парадоксом оцінювання" [6].

*1.3. Правило-орієнтир розв'язування систем рівнянь засобами виділеної теорії*

Правило-орієнтир

1. Здійснити аналіз рівнянь системи.

2. Виділити рівняння системи, яке можна подати у вигляді $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

3. Дослідити функцію f(x) на опуклість вгору (вниз) на заданому проміжку.

4. Записати нерівність Єнсена для функції f(x) .

5. Переписати виділене рівняння системи, враховуючи умову, що рівність

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

виконується тільки тоді, коли

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

6. Розв'язати отриману систему рівнянь.

*1.4 ВИСНОВОК ДО РОЗДІЛУ І.*

Отже, в першому розділі ми розглянули теоретичні основи досліджуваного питання, а саме: означення кривої опуклої вгору (вниз), нерівність Єнсена та її ймовірнісний зміст . Під час аналізу літературних джерел систематизували та узагальнили деякі поняття. Сформулювали правило-орієнтир для розв'язування систем рівнянь.

## РОЗДІЛ ІІ. ЗАСТОСУВАННЯ НЕРІВНОСТІ ЄНСЕНА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

### *2.1. Розв'язування систем рівнянь засобами основних елементарних функцій, опуклих вгору (вниз)*

**Приклад №1**

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} = \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}; & (a) \\ x^3 + y^3 + 1 = 3. & (b) \end{cases}$$

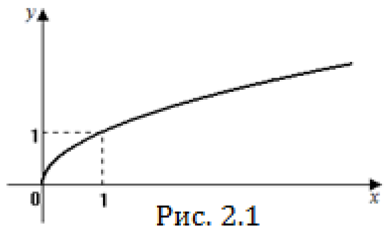


Рис. 2.1

Розв'язання

Розглянемо рівняння (а) даної системи.

Оскільки функція $y = \sqrt{x}$, графік якої зображено на рис.2.1, опукла вгору при $x \in [0; +\infty)$, то за нерівністю Єнсена $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \leq \sqrt{\frac{x+y}{2}}$.

Відомо, що рівність $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} = \sqrt{\frac{x+y}{2}}$досягається за умови $x = y$. Отже, рівняння (а) даної системи виконується лише тоді, коли $x = y$.

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} x = y; \\ x^3 + y^3 + 1 = 3; \end{cases} \begin{cases} x = y; \\ x^3 = 2; \end{cases} \begin{cases} x = y \\ x = 1 \end{cases} \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

Отже, $x = 1, y = 1$,– розв'язки системи.

Відповідь: $x = 1, y = 1$.

**Приклад №2**

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x+y+z+m)^3 = 16(x^3+y^3+z^3+m^3); & (a) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{m} = 4; & (b) \\ \sqrt{x+y+z+m} = 4; & (c) \\ \dfrac{x^2+y^2+z^2+m^2}{4} = 1. & (d) \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases}(x+y+z+m)^3 = 16(x^3+y^3+z^3+m^3); & (a)\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{m} = 4; & (b)\\ \sqrt{x+y+z+m} = 4; & (c)\\ \dfrac{x^2+y^2+z^2+m^2}{4} = 1. & (d)\end{cases}$$

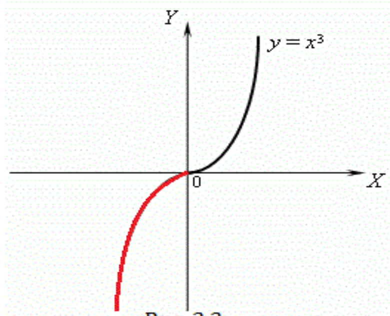



Рис. 2.2

Областю визначення даної системи є така множина чисел, що $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, m \geq 0$.

Перепишемо рівняння (а) у вигляді $\left(\frac{x+y+z+m}{4}\right)^3 = \frac{x^3+y^3+z^3+m^3}{4}$

Оскільки функція $y = t^3$, графік якої зображено на рис.2.2 опукла вниз при $t \in [0;+\infty)$ , то за нерівністю Єнсена $\left(\frac{x+y+z+m}{4}\right)^3 \leq \frac{x^3+y^3+z^3+m^3}{4}$;$x \in [0;+\infty), y \in [0;+\infty), z \in [0;+\infty), m \in [0;+\infty)$.

Відомо, що рівність $\left(\frac{x+y+z+m}{4}\right)^3 = \frac{x^3+y^3+z^3+m^3}{4}$ виконується лише при $x = y = z = m$.

Отже, рівняння (а) даної системи виконується тільки тоді, коли $x = y = z = m$

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}x = y = z = m, \quad x \in [0;+\infty), y \in [0;+\infty), z \in [0;+\infty), m \in [0;+\infty);\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{m} = 4\\ \sqrt{x+y+z+m} = 4\\ \dfrac{x^2+y^2+z^2+m^2}{4} = 1\end{cases}$$

Урахувавши умову $x = y = z = m$ маємо :$\begin{cases}\sqrt{x} = 4;\\ \sqrt{4x} = 2;\\ \frac{4x^2}{4}1;\end{cases}\begin{cases}x = 1;\\ x = 1;\\ \left[\begin{matrix}x=-1;\\ x=1.\end{matrix}\right.\end{cases}$

Оскільки $x \in [0;+\infty)$, то розв'язком системи є $x = 1$.

Отже, $x = 1, y = 1, z = 1, m = 1$.

Відповідь: $x = 1, y = 1, z = 1, m = 1$.

## Приклад №3

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3\cos\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) = cosx + cosy + cosz; \\ sin(x+y) = 1; \\ cos^2x + sin^2y = sin2z. \end{cases} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); z$$

$$\in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

Розв'язання

$$\begin{cases} 3\cos\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = cosx + cosy + cosz; & (a) \\ sin(x+y) = 1; & (b) \\ cos^2x + sin^2y = sin2z. & (c) \end{cases}$$

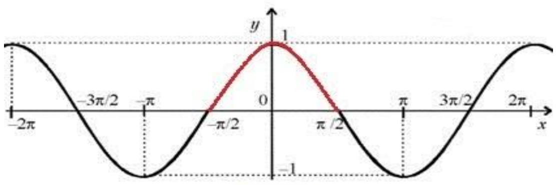


Рис. 2.3

Розглянемо рівняння (а) даної системи.

Оскільки функція $y = cost, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , графік якої зображено на рис.2.3, опукла вгору, то за нерівністю Єнсена.

$$cos\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{cosx+cosy+cosz}{3}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), z \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Відомо, що рівність $cos\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{cosx+cosy+cosz}{3}$ виконується лише при $x = y = z$. Отже, рівняння (а) даної системи виконується тільки тоді, коли $x = y = z$.

Маємо систему: $\begin{cases} x = y = z; \\ sin(x+y) = 1; \\ cos^2x + sin^2y = sin2z; \end{cases}$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), z \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Урахувавши умову $x = y = z$ маємо : $\begin{cases} sin2x = 1; \\ cos^2x + sin^2x = sin2x; \end{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$

$\begin{cases} sin2x = 1; \\ sin2x = 1; \end{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$ $sin2x = 1,$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$ $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \epsilon Z,$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \epsilon Z.$

Оскільки, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то розв’язком системи є $x = \frac{\pi}{4}$.

Отже, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$, $z = \frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4}$; $y = \frac{\pi}{4}$; $z = \frac{\pi}{4}$.

**Приклад №4**

Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{1}{3y^2} + \dfrac{1}{3z^2} = \dfrac{9}{(x+y+z)^2}; \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 3; \\ sin^2 x + cos^2 y - z^2 = 0. \end{cases} \quad x, y, z \in (0; +\infty)$$

Розв'язання

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{1}{3y^2} + \dfrac{1}{3z^2} = \dfrac{9}{(x+y+z)^2}; & (a) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 3; & (b) \\ sin^2 x + cos^2 y - z^2 = 0. & (c) \end{cases}$$

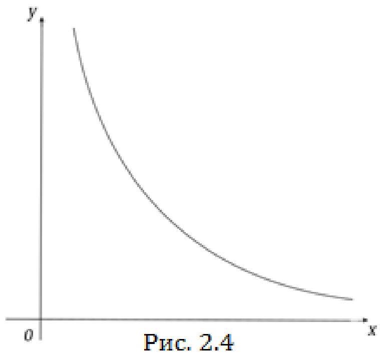


Рис. 2.4

Розглянемо рівняння (а) даної системи.

Оскільки функція $y = \frac{1}{t^2}$, $t \in (0; +\infty)$ графік якої зображено на рис. 2.4, опукла вниз, то за нерівністю Єнсена $\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}{3} \ge \frac{1}{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2}$ тобто $\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{3y^2} + \frac{1}{3z^2} \ge \frac{9}{(x+y+z)^2}$, $x \in (0; +\infty)$, $y \in (0; +\infty)$, $z \in (0; +\infty)$.

Відомо, що рівність $\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{3y^2} + \frac{1}{3z^2} = \frac{9}{(x+y+z)^2}$ виконується лише при $x = y = z$.

Отже, рівняння (а) даної системи виконується тільки тоді, коли $x = y = z$.

Маємо систему: $\begin{cases} x = y = z, x \in (0; +\infty), \ y \in (0; +\infty), z \in (0; +\infty); \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 3; \\ sin^2 x + cos^2 y - z^2 = 0; \end{cases}$

Урахувавши умову $x = y = z$ маємо

$$:\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 3; \\ sin^2x + cos^2y - z^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1; \\ x^2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 1; \\ \left[\begin{matrix} x=-1; \\ x=1. \end{matrix}\right. \end{cases}$$

Оскільки $x \in (0; +\infty)$, то розв'язком системи є $x = 1$.

Отже, $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$.

Відповідь: $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$.

**Вправа №5**

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} sinx + siny + sinz = 3\,sin\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right); \\ sinx + sin2y + sin3z = 0; \\ 6cos^2x + 6sin^2y + tg^2z = 0. \end{cases} \quad x, y, z$$

$\in (0; \pi)$

Розв'язання

$$\begin{cases} sinx + siny + sinz = 3\,sin\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) (a) \\ sinx + sin2y + sin3z = 0; \qquad (b) \\ 6cos^2x + 6sin^2y + tg^2z = 0. \qquad (c) \end{cases}$$

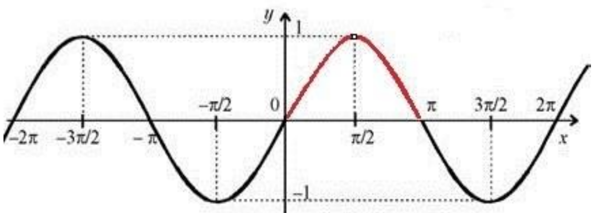


Рис. 2.5

Областю визначення даної системи є такі значення z, що $z \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Розглянемо рівняння (a) даної системи.

Оскільки функція $y = sint$, $t \in (0; \pi)$, графік якої зображено на рис.2.5, опукла вгору, то за нерівністю Єнсена $sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right) > \frac{sinx+siny+sinz}{3}$.

Відомо, що рівність $\frac{sinx+siny+sinz}{3} = sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$ виконується лише при $x = y = z$.

Отже, рівняння (a) даної системи виконується тільки тоді, коли $x = y = z$.

Маємо систему: $\begin{cases} x = y = z; \\ sinx + sin2y + sin3z = 0; \\ 6cos^2x + 6sin^2y + tg^2z = 0. \end{cases}$

$(b)$: $sinx + sin2x + sin3x = 0$; $(sinx + sin3x) + sin2x = 0$; $2sin2xcosx = 0$; $sin2x(2cosx + 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} sin2x = 0; \\ cosx = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z; \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k\epsilon Z; \end{array}\right.$$

Оскільки $x\epsilon(0;\pi)$, то $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}, \\ x = \frac{2\pi}{3}, \end{array}\right.$ а отже, $x = y = z = \frac{\pi}{2}$ не задовольняє область визначення системи.

Безпосередньою підстановкою переконуємося, що $x = y = z = \frac{2\pi}{3}$ задовольняє рівняння (3) системи. $6cos^2\frac{2\pi}{3} - 6sin^2\frac{2\pi}{3} + tg^2\frac{2\pi}{3} = 0;$ $6cos\frac{4\pi}{3} + tg^2\frac{2\pi}{3} = 0; 6\left(-\frac{1}{2}\right) + (\sqrt{3})^2 = 0;\ -3 + 3 = 0;\ 0 = 0.$

Отже, $x = \frac{2\pi}{3}; y = \frac{2\pi}{3}; z = \frac{2\pi}{3}$.

Відповідь: $x = \frac{2\pi}{3}; y = \frac{2\pi}{3}; z = \frac{2\pi}{3}$.

*2.2. Розв'язування систем рівнянь засобами диференціального числення (застосування похідної другого порядку)*

**Приклад №1**

Розв’язати систему рівнянь при $x \in (-\infty; 0);\ y \in (-\infty; 0)$:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{2}{x+y} = \frac{x^2}{2x} + \frac{y^2}{2y}; & (a) \\ \frac{x^2+y^2}{2} = 4. & (b) \end{cases}$$

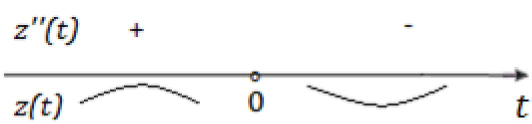
Розв’язання

Перетворимо рівняння (а) даної системи:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{2}{x+y} = \frac{\frac{x^2+1}{x} + \frac{y^2+1}{y}}{2};\ \frac{x+y}{2} + \frac{1}{\frac{x+y}{2}} = \frac{x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}}{2}$$

Розглянемо функцію $z = t + \frac{1}{t}$.

$D(z): t \in R\backslash\{0\};$




$$z'(t) = 1 - \frac{1}{t^2};$$

$$z'' = 2t^{-3} = \frac{2}{t^3};$$

$$z''(t) = 0, \emptyset$$

Дослідивши знак другої похідної, приходимо до висновку, що функція $z = 1 + \frac{1}{t}$ опукла вгору на проміжку $t \epsilon\, (-\infty; 0)$. Отже, можна застосувати нерівність Єнсена: $z = \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \geq \frac{z(t_1)+z(t_2)}{2}, t_1 = x, t_2 = y$. Отже, $\frac{x+y}{2} + \frac{1}{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}}{2}$.

Причому знак рівності досягається лише тоді, коли $x = y$.

Ураховуючи умову$x = y$, маємо: $\begin{cases} x = y; \\ \frac{x^2+y^2}{2} = 4; \end{cases}$

$$\begin{cases} x = y; \\ x^2 + x^2 = 8; \end{cases} \begin{cases} x = y; \\ x^2 = 4; \end{cases} \begin{cases} x = y; \\ \left[\begin{array}{l} x = -2; \\ x = 2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2; \\ \left[\begin{array}{l} x = -2; \\ x = 2 \;\notin (-\infty; 0); \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} x = -2; \\ y = -2; \end{cases}$$

Отже, $x = -2;\ y = -2$.

Відповідь:$x = -2;\ y = -2$.

**Приклад №2**

Розв'язати систему рівнянь при $x \in [0; +\infty);\ y \in [0; +\infty)$:

$$\begin{cases} 3\frac{(x+y)}{2} - \frac{(x+y)^3}{72} = \frac{27x - x^3 + 27y - y^3}{18}; \quad (a) \\ \sqrt{x} + \frac{\sqrt{y}}{2} = 6; \end{cases}$$

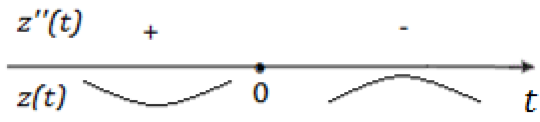
Розв'язання

Перетворимо рівняння (а) даної системи: $3\frac{(x+y)}{2} - \frac{(x+y)^3}{72} = \frac{27x-x^3+27y-y^3}{18}$;

$3\frac{(x+y)}{2} - \frac{(x+y)^3}{72} = \frac{27x-x^3}{18} + \frac{27y-y^3}{18}$; $3\frac{(x+y)}{2} - \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3}{9} = \frac{3x-\frac{x^3}{9}+3y-\frac{y^3}{9}}{2}$ ;

Розглянемо функцію $z(t) = 3t - \frac{t^3}{9}$.

$D(z): t \in R;$




$z'(t) = 3 - \frac{3t^2}{9} = 3 - \frac{t^2}{3};$

$z''(t) = -\frac{1}{3} \cdot 2t = -\frac{2t}{3} < 0, \forall t \in [0;+\infty);$

Дослідивши знак другої похідної $\forall t \in [0;+\infty)$, приходимо до висновку, що функція $z(t) = 3t - \frac{t^3}{9}$ опукла вгору $\forall t \in [0;+\infty)$ тому $z\left(\frac{t_{1+t_2}}{2}\right) \geq \frac{z(t_1)+z(t_2)}{2}$; $t_1 = x, t_2 = y$. Отже, можна застосувати нерівність Єнсена:

$$3\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3}{9} \geq \frac{3x - \frac{x^3}{9} + 3y - \frac{y^3}{9}}{2};\ \frac{3(x+y)}{2} - \frac{(x+y)^3}{72} \geq \frac{27x - x^3 + 27y - y^3}{18};$$

Причому знак рівності досягається лише тоді, коли $x = y$.

Ураховуючи умову$x = y$, маємо:

$$\begin{cases} x = y; \\ \sqrt{x} + \frac{\sqrt{y}}{2} = 6 \end{cases};\ \begin{cases} x = y; \\ \frac{3\sqrt{x}}{2} = 6; \end{cases} \begin{cases} x = y; \\ \sqrt{x} = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 16; \\ y = 16; \end{cases}$$

Отже, $x = 16,\ \ y = 16$.

Відповідь:$x = 16,\ \ y = 16$.

## Приклад №3

Розв'язати систему рівнянь при $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; $y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; $z \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$:

$$\begin{cases} \frac{9}{(x+y+z)^2+9} = \frac{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3}{3(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}; \quad (a) \\ 2x^2 - 5y + 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Перетворимо рівняння (а) даної системи:

$$\frac{9}{(x+y+z)^2+9} = \frac{x^2y^2+x^2+y^2+1+x^2z^2+x^2+z^2+1+y^2z^2+y^2+z^2+1}{3(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)};$$

$$\frac{9}{(x+y+z)^2+9} = \frac{x^2(y^2+1)+(y^2+1)+x^2(z^2+1)+(z^2+1)+y^2(z^2+1)+(z^2+1)}{3(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)};$$

$$\frac{9}{(x+y+z)^2+9} = \frac{(x^2+1)(y^2+1)+(x^2+1)(z^2+1)+(z^2+1)(y^2+1)}{3(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)};$$

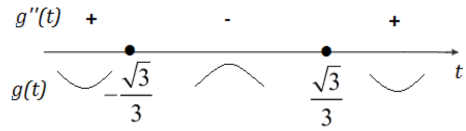
$$\frac{9}{(x+y+z)^2+9} = \frac{\frac{1}{(x^2+1)}+\frac{1}{(y^2+1)}+\frac{1}{(z^2+1)}}{3};$$

Розглянемо функцію $g(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

$D(g): t \in R; g'(t) = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}; g''(t) = \frac{2(3t^2-1)}{(t^2+1)^3};\ g''(t) = 0;\ 3t^2 - 1 = 0;$

$t^2 = \frac{1}{3};$

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ t = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$




Дослідивши знак другої похідної, приходимо до висновку, що функція $g(t) = \frac{1}{t^2+1}$, опукла вгору при $t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, тому вона буде опукла вгору і при $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$;,оскільки $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \subset \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. Отже, застосуємо нерівність Єнсена: $\frac{1}{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2+1} \geq \frac{\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}}{3};$

Причому знак рівності досягається лише тоді, коли $x = y = z$.

Враховуючи умову$x = y = z$, маємо:

$$\begin{cases} x = y = z; \\ x^2 - 5y + 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = y = z; \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \notin \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]; \\ x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2}; \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

Отже, $x = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{2};\ z = \frac{1}{2}$.

Відповідь:$x = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{2};\ z = \frac{1}{2}$.

### *2.3 Нестандартні методи розв'язування нерівностей*

**Приклад 1.** Довести, що для додатних дійсних чисел $a, b, c, d$, які задовольняють умову $a + b + c + d = 4$, справедлива нерівність

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leq \frac{4}{9}.$$

Очевидно, що функція $f(x) = \frac{x}{x^3+8}$ опукла вгору при $x \in (0; 4)$. Покладемо в нерівності Єнсена $\propto_i = \frac{1}{4}$, $i$=1:4, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = d$, отримаємо, що

$\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}\right) \le \frac{\frac{1}{4}(a+b+c+d)}{(\frac{1}{4})^3(a+b+c+d)^3}=\frac{1}{9}$, звідки і слідує ця нерівність.

Іноді зручним є метод дотичної для доведення нерівностей, який полягає у використанні властивостей опуклих функій: графік опуклої вгору (вниз) функції лежить не вище (не нижче), ніж графік будь-якої дотичної на проміжку опуклості.

Покажемо справедливість попередньої нерівності, використовуючи метод дотичної. Помітимо, що при $a=b=c=d=1$, маємо знак рівності. Розглядаючи функцію $f(x)=\frac{x}{x^3+8}$ на $x \epsilon (0;4)$, складемо рівняння дотичної в точці $x_0=1$. Маємо $y=\frac{2x+1}{27}$. Оскільки функція $f(x)$ є опуклою вгору, то справедлива нерівність $\frac{x}{x^3+8} \le \frac{2x+1}{27}$. Тоді

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \le \frac{2(a+b+c+d)+4}{27}=\frac{4}{9}$$

Теорія диференціального числення є потужним математичним апаратом для розв'язування різних класів задач. Зокрема, застосування основних теорем диференціального числення і похідної для дослідження властивостей функцій значно полегшує доведення нерівностей.

Нехай для всіх $x$ з відрізка $[a;\ b]$ нам потрібно довести таку нерівність f($x$)≥g($x$) з області визначення даних функцій, а саме f($x$) та g($x$). Розглянемо різницю цих функцій та знайдемо її похідну h(x)= f($x$)−g($x$). Нехай похідна $h'$(x) задовольняє умови:

1) має на цьому відрізку єдиний корінь $x_0$;

2) значення кореня є точкою мінімуму функції $h$(x);

3) виконується нерівність $h(\text{x0}) = f(\text{x0}) - g(\text{xx0}) \ge 0$ .

Після цього, можна зробити висновок, що на відрізку [a; $b$] виконується дана нерівність $f$(x) $\ge$ $g$(x).

**Приклад 2.** Довести, що для всіх $x > -1$ і для всіх натуральних n виконується нерівність $(1+x)^n \geq 1+nx$ (нерівність Бернуллі).

Розглянемо такі випадки, коли $n=1$ та $n>1$. Легко бачити, що при $n=1$ нерівність є очевидною. Нехай $n>1$, тоді розглянемо функцію $h(\mathrm{x})=(1+x)^n \geq 1+nx$. Обчисливши її похідну $h'(\mathrm{x}) = \mathrm{n}(1+\mathrm{x})^{\mathrm{n}-1}-\mathrm{n}$, з'ясували, що вона дорівнює нулю в єдиній точці $x$=0, яка є точкою мінімуму цієї функції. Тому для всіх $x>-1$ виконується нерівність $h(\mathrm{x}) \geq \mathrm{h}(0)$ або $(1+x)^n \geq 1+nx \geq 0$. З одержаного співвідношення маємо нерівність Бернуллі.

**Приклад 3.** Довести, що для $x>0$ справедлива нерівність $x-\frac{x^3}{3}<$ $arctg$.

Нехай $h(x)=arctgx-x-\frac{x^3}{3}$, тоді маємо $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}-1+x^2 = \frac{x^4}{1+x^2} \geq 0$.

Оскільки $h(0)$=0, то $h(x) \geq 0$ для всіх $x\epsilon R$, а отже і для $x>0$, що і потрібно було довести.

**Приклад 4.** Доведіть нерівність $|arctgb-arctga| \leq |b-a|$ для $\forall$ a, $b\epsilon R$.

Очевидно, що при $a=b$ маємо рівність. Розглянемо функцію f(x)=$arctg$x, яка на довільному відрізку $[\mathrm{a};b]$ задовольняє умовам теореми Лагранжа. Тому всередині відрізка $[\mathrm{a};b]$ існує точка c, для якої справедлива рівність

$arctgb-arctga=\frac{b-a}{1+c^2}$або $arctgb-arctga=\frac{|b-a|}{1+c^2}$. Оскільки 0< $\frac{1}{1+\mathrm{c}^2} \leq 1$ для $\forall$ c $\epsilon\, [\mathrm{a};b]$, то маємо, що $|arctgb-arctga| \leq |b-a|$ для $\forall$ $\mathrm{a},b\ \epsilon\ R$.

**Приклад 5.** Доведіть нерівність $f(\frac{x_{1+\cdots+x_n}}{n}) \geq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$, де $f(x)$ - опукла вгору і диференційовна на проміжку $(a;b)$ функція.

Доведення цієї нерівності базується на твердженні: якщо функція опукла вгору і диференційовна в інтервалі $(a;b)$, то в цьому інтервалі її похідна є спадною функцією.

За означенням опуклої вгору функції справедливою є нерівність$f\left(\frac{x_{1+}x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$для довільних $x_1, x_2 \epsilon (a, b)$ при цьому рівність виконується за умови $x_1 = x_2$.

Нехай нерівність є правильною при $n > 2$ і знак рівності має місце тоді і тільки тоді, коли $x_1 = \cdots = x_n$. Доведемо, що тоді справедлива нерівність $f\left(\frac{x_{1+\cdots+}x_{n+}x_{n+1}}{n+1} \geq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(x_{n+1})}{n+1}\right.$ для $x_{n+1} \epsilon (a, b)$.

Розглянемо функцію $h(\mathrm{x}) = f\left(\frac{x_{1+\cdots+}x_{n}+x}{n+1}\right) \geq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(x)}{n+1}$ і дослідимо її на екстремум. Маємо $h'(x) = \frac{1}{n+1} f'\left(\frac{x_{1+\cdots+}x_n+x}{n+1}\right) - \frac{f'(x)}{n+1}$. Похідна цієї функції дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $f'\left(\frac{x_{1+\cdots+}x_n+x}{n+1}\right) = f'(x)$. Оскільки за наведеним вище твердженням похідна $f'(x)$– строго монотонна функція, то $\frac{x_{1+\cdots+}x_n+x}{n+1} = x$. Звідси єдиним коренем похідної $h'(\mathrm{x})$ є точка $x_0 = \frac{x_{1+\cdots+}x_n}{n}$.

Не порушуючи загальності, можна вважати, що $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, тоді $x < x < x_n$ і знак похідної $h'(\mathrm{x})$ в інтервалах $(a{:}\, x_0)$ і $(x_0; b)$ співпадатиме зі знаками h'($x_1$) іh'($x_n$) відповідно. Оскільки $\frac{x_{1+\cdots+}x_n+x}{n+1} > \left(\frac{x_{1+\cdots+}x_1+x_1}{n+1} = x_1\right.$

і $f'(x)$ – монотонно спадна, то $f'\left(\frac{x_{1+\cdots+}x_n+x}{n+1}\right) < f'(x_1)$і $h'(\mathrm{x}) = \frac{1}{n+1}\left(f'\left(\frac{x_{1+\cdots+}x_n+x_1}{n+1}\right) - f'(x_1)\right) < 0$.Аналогічно встановлюємо, що

$h''(\mathrm{x_n}) > 0$. Отже, $x_0$- точка мінімуму і $h(x) \geq h(x_0)$.

Для доведення нерівності залишилось встановити знак $h(x_0)$.. Маємо $h(x_0)$.=$f\left(\frac{x_{1+\cdots+}x_n+x_0}{n+1}\right)$-$\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(x_0)}{n+1}$=f$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}{n+1}\right) - \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left((n+1)f\left(\frac{x_{1+\cdots+}x_n}{n}\right)\right.$-$\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\right)) = \frac{n}{n+1}\left(f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) - \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}\right) \geq 0$.

або $h(x_{n+1}) \geq 0$, що і доводить задану нерівність.

Очевидно, що нерівність перетворюється на рівність, якщо $x_1 = x =$

$\cdots = x_n$. Ця нерівність є частинним випадком нерівності Єнсена при $\propto_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, n,$ тому і саму нерівність Єнсена можна було б довести за наведеною схемою.

Доведення деяких нерівностей значно спрощується при застосуванні інтегрального числення, зокрема й такої властивості визначеного інтеграла: якщо функції $f(x)$і g$(x)$ неперервні на відрізку [a; b] і для всіх x з цього відрізка справджується нерівність $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

**Приклад 6.** Довести, що при довільному $x$ з проміжку $[1; \infty)$ виконується нерівність $2017x^{2018} + 1 \geq 2018x^{2017}$.

Нехай припустимо, що при $x \epsilon [1; \infty)$ справедлива нерівність $x^{2016} < x^{2017}$, тоді маємо $\int_1^x t^{2016} dt \leq \int_1^x t^{2017} dt$ або $\frac{x^{2017}-1}{2017} \leq \frac{x^{2018}-1}{2018}$. Виконавши елементарні математичні перетворення, отримаємо нерівності $2017x^{2018} + 1 \geq 2018x^{2017}$, що і треба було довести.

**Приклад 7**. Довести нерівність$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} < ln3 \ \ \forall \ n\epsilon N$.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x}$.Оскільки вона є монотонно спадною для $x < 0$, то на кожному з відрізків $[n + k - 1; n + k]$, де $k = 1,2, \ldots, n$, виконується нерівність $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{x}$, а отже $\int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{n+k} < \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{x}, k = 1,2n$. Звідси маємо, що

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} + \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{3n-1}^{3n} \frac{dx}{x} = \int_n^{3n} \frac{dx}{x}$$
$$= ln3.$$

**Приклад 8**. Довести, що $\forall \ n\epsilon N$ має місце нерівність $(\frac{n}{e})^n < n!$. Для доведення цієї нерівності досить показати справедливість рівносильної їй нерівності $nlnn - n < ln2 + \cdots + ln\, n,$ яку отримали логарифмуванням заданої.

Якщо порівняти площі прямокутника з основою $[k; k + 1]$ і висотою $ln(k + 1)$та криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = lnx$ з тією ж основою, то отримаємо, що $\ln k > \int_k^{k+1} \ln x dx, k \epsilon N$. Тоді для $k = 1$, $n - 1$.

$ln\,2 + \cdots + lnn > \int_1^2 ln\,xdx + \cdots + \int_{n-1}^{n} ln\,xdx = \int_1^n ln\,xdx = n\,ln\,n - n + 1 > n\,ln\,n - n.$

**Приклад 9**. Доведіть, що для будь-яких $x_1, x_2, \dots, x_n$, з відрізка $[0, \pi]$ виконується наступна нерівність

$$\sin(\frac{x_1, x_2, \dots, x_n}{n}) > \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n}{n}.$$

Для того, щоб довести дану нерівності достатньо у співвідношенні (а) використати функцію $sin$, а як відомо графік її на вказаному відрізку опуклий вгору.

**Приклад 10.** Порівняйте числа $\frac{\pi}{6} + arcsin\frac{1}{4}$ *та* $2arcsin\frac{29}{80}$.

Для того,щоб порівняти числа, розглянемо графік функції$f(x) = arcsinx$, який на проміжку $[0,1]$ опуклий вниз. Використавши нерівність Єнсена маємо:

$$arcsin\frac{3}{8} = \arcsin\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}\right) < \frac{arcsin\frac{1}{2} + arcsin\frac{1}{4}}{2}$$

Отже,

$$\frac{\pi}{6} + arcsin\frac{1}{4} > 2arcsin\frac{3}{8} > 2arcsin\frac{29}{80}.$$

## 2.4 ВИСНОВОК ДО РОЗДІЛУ II.

У даному розділі ми продемонстрували застосування нерівності Єнсена до розв’язування систем рівнянь та показали нестандартні методи розв’язування нерівностей. Розв’язування нерівності не потребує практично нічого, крім вміння учня звести його до розв’язування найпростіших нерівностей, не допустивши при цьому ні втрати розв’язків, ні набути зайвих розв’язків. Для цього потрібно знати властивості функцій, що вивчаються у школі, і володіти основними поняттями, пов’язаними з рівносильністю нерівностей.

# РОЗДІЛ ІІІ. МЕТОД ПРОЕКТІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

## *3.1 Проектна діяльність та її основні характеристики*

Серед інноваційних інтерактивних методик і технологій навчання метод проектів останнім часом посів чільне місце. Часто навчальний процес побудований так, що вчитель ставить мету, якої повинен досягти учень, а іноді ще й наводить способи, якими це можна зробити. У проектній діяльності важливо зацікавити учнів здобуттям знань, які обов'язково знадобляться у житті. Для цього необхідно зважати на проблеми реального життя, для розв'язання яких дітям потрібно застосовувати здобуті знання.

**Метод проектів** – це спеціально організований учителем і самостійно виконаний учнями комплекс дій, що завершуються створенням творчого проекту, Сам проект – це своєрідна тріада: задум – реалізація – продукт.

**Функції учителя при роботи над проектом:**

- допомагати учням у пошуку інформації, необхідної для роботи над проектом;
- виступати джерелом інформації;
- підтримувати і заохочувати учнів;
- підтримувати безупинний зв'язок, щоб допомогти учням просуватися в роботі над проектом.

**Головна мета проектної діяльності:**

- розвинути у школярів ініціативность, наполегливость, толерантность, уміння адаптуватись до навколишніх умов;
- сформувати навички самостійного досягнення цілей;
- сформувати вміння передбачати проблеми та вирішувати їх.
- сформувати вміння орієнтуватись в інформаційному просторі, навчити знаходити джерела інформації;
- отримати навички аналізу інформації;

- сформувати навички проведення дослідженя;
- сформувати навички роботи та конструктивного спілкування в групах;
- сформувати навички передавання та презентування набутих знань та вмінь.

**Переваги методу проектів:**

- орієнтовананість на особистість учня;
- опанування учнями основних розумових процесів;
- формування інтересу до вивчення математики;
- мотивація особистісного росту;
- заміна ролі вчителя;
- можливість організувати навчальну діяльність, дотримуючись баланс між теорією і практикою.

**Орієнтовні ролі учнів у групі, яка працює над проектом:**

- пошуковець;
- інженер;
- дизайнер;
- критик;
- секретар.

**Етапи роботи над проектом:**

- постановка проблеми;
- планування роботи;
- оцінювання;
- підведення підсумків.

### *3.2. Навчальний проект «Нерівності»*

*Мета*: Узагальнити та систематизувати знання, уміння та навички учнів з теми «Нерівності».

Проаналізувати виникнення нерівностей.

З’ясувати сфери застосування нерівностей.

Розширити теоретичні та практичні знання учнів про нерівності.

Сформувати практичні вміння використовувати відомі факти для розв’язання нових пізнавальних завдань та життєвих ситуацій.

Формувати розвиток логічного та критичного мислення.

Виховувати в учнів вміння бути старанними, наполегливими.

*Завдання проекту:*

Прищепити учням вміння користуватися дослідницькими прийомами збирання інформації, висування гіпотез, уміння робити висновки.

Залучити учнів до режиму самостійної роботи,опрацювання різних джерел інформації з метою оволодіння новими знаннями.

Формувати в учнів вміння використовувати нерівності і їх властивості під час розв`язування вправ і задач.

*Очікувані результати:*

Під час проекту учні зможуть закріпити й поглибити свої знання з теми “Нерівності”, і так підготуватись до ДПА (ЗНО).

Зможуть застосувати свої знання з математики на практиці.

Навчаться шукати, збирати, обробляти інформацію, планувати свою діяльність.

Удосконалять уміння презентувати результати досліджень різними способами.

Навчаться виступати перед аудиторією.

Навчаться коротко, стисло, чітко, зручно представляти результати своєї роботи.

Зможуть реалізувати свої дизайнерські вміння.

Удосконалять навички роботи в групі,уміння узгоджувати свою діяльність з іншими.

*<u>Тип проекту</u>*: груповий, пізнавальний,дослідницький.

*<u>Обладнання та наочність</u>:* презентація проектів, моделі.

ПОСЛІДОВНІСТЬ РОБОТИ НАД ПРОЕКТОМ

**І. Постановка проблеми.**

Основне завдання вчителя при викладанні курсу алгебри є сформувати в учнів уміння роз`вязувати нерівності та їх системи, застосовутати вивчену теорію до роз`вязування прикладних задач.

Саме тому мета даного проекту полягає в закріплені та розширенні набутих знань та підготовка до іспитів.

**ІІ. Планування роботи**

Першим етапом у плануванні виступає поділ учнів на групи. Вчитель пропонує учням наступні назви груп: «Дослідники», «Науковці» та «Практики». Далі учні порадившись обирають самостійно собі групу. Після вибору, оголошуються теми для проектної діяльності (додоток 1). Учні, сформувавши групи, вибірають керівника та розподіляють обов`язки між учасниками групи.

Учасники самостійно, протягом визначеного терміну, виконують пошук інформації з теми, формують матеріали для доповіді. Підсумовуючи пророблену роботу, учні створють презентацію свого проекту, у зручному для них вигляді.

Підсумком проробленої роботи є презинтування проекту, у вигляді відкритого уроку на якій доречно запросити учителів школи та учнів 9-11 класів.

**ІІІ. Оцінювання.**

Доцільно ознайомити учнів з критеріями оцінювання на початку виконання проекту. Для того, щоб оцінювання було об`єктивне, проведемо діагностування на початку та в кінці виконання проектів.(Додаток 3)

**IV Підведення підсумків.**

Беручи за основу оцінювання та самооцінювання, вчитель повідомляє команду-переможця

Для тошо, щоб дізнатися чи досягли очікувальних результатів пропоную кожному на своєму листку закінчити речення:

Сьогодні я дізнався…

Тепер я можу…

Було цікаво…

Я зрозумів, що…

Мене здивувало…

Урок дав мені для життя…

Мені хотілося б …

.

# ВИСНОВКИ

Після проведення ношого дослідження можемо зробити ряд висновків, а саме: нестандартні методи розв'язування рівнянь та нерівностей, підвищують можливість розвитку самостійного математичного мислення, уміння аналізувати та робити логічні висновки.

Дана робота демонструє важливість використання на уроках математики не лише елементарних завдань, а й значно складніших, які виходять за рамки шкільного курсу. Основною метою  - є демонстрування важливих понять доступно для учнів шляхом залучення їх до колективної роботи, наприклад проектна діяльність. Ознайомлення з даним матеріалом поглибить та розширить теоретичні знання та практичні навички учнів, сприяє підвищенню наукового рівня знань, умінь і навичок.

У представленій роботі виконано такі дії:

1) Систематизовано загальні відомості теорії опуклих вгору (вниз) на деякому проміжку функцій.
2) Здійснено аналіз нестандартних методів розв’язування систем рівнянь.
3) Виділено загальні ознаки класу систем рівнянь, для розв’язування яких доцільно застосовувати розглянуту теорію.
4) Складено правило-орієнтир розв’язування таких систем рівнянь.
5) Складено ряд систем рівнянь, при розв’язуванні яких доцільно застосовувати властивості опуклості функцій.

У процесі проведення наукового дослідження було підтверджено його гіпотезу. Всі завдання дослідження виконано.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Балан В. Г., Лавренюк В. І., Шарова Л. І. Числові нерівності на вступнихіспитах: Навч. посібник. К.: Альфа, 2007. 104 с.

2. Бевз Г.П. Методика розв'язування алгебраїчних задач. Київ, «Радянська школа», 1975.

3. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи поматематике. Начала анализа. М.: Наука, 1990. 732 с.

4. Вороний О. Нерівність Йєнсена // У світі математики. Т.6. Вип.2. К.: "ТВІМС", 2000. С.9-13.

5. Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Иенсена // Квант. №5. М.: Наука, 1990. С.57-62.

6. Коваленко В.Г., Кривошеєв В.Я., Старосєльцева О.В, Алгебра, 9. Експериментальний навчальний посібник для 9 класу шкіл з поглибленим вивченням математики і спеціалізованих шкіл фізико-математичного профілю. Допущено міністерством освіти України. 2-ге видання. Київ, «Освіта», 1996.

7. Кушнир И. А. Неравенства. Задачи и решения. К.: Астарта, 1996. 544с.

8. Сарана. О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. К.: А.С.К., 2004. 344 с.

9. Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах. М.: Наука, 1967. 304 с.

10. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир, 1990.

11. Соловьёв Ю. П. Неравенства. М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2005. 15 с.

12. Тот Л. Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.:Государственное издательство математической литературы, 1958. 363 с.

13.Харди Г.Г., Литлвуд Дж.Е., Пойа Г. Неравенства М.: Изд-во иностр.лит.,1948. 456 с.

14. Шарова Л. И. Уравнения и неравенства. К.: Вища школа. 1981. 280 с.

# ДОДАТКИ

*Додаток 1*

**Теми для дослідженя:**

**Група 1.** «Дослідники». Тема «Застосування нерівності»

Завдання:

- визначити сферу застосування нерівностей;
- підібрати конкретні приклади.

**Група 2.** «Науковці». Тема «Види нерівностей».

Завдання:

- розглянути види нерівностей;
- підібрати приклади

**Група 3.** «Практики» .Тема «Нерівності Єнсена. Розв`язування нерівностей».

Завдання:

- дослідити нерівність Єнсена
- запропонувати приклади розв`язання

*Додаток 2*

**Матеріали групи «Практики» на тему: Нерівності Єнсена. Розв`язування нерівностей**

**Нерівність Єнсена** — зв'язує визначений інтеграл опуклої функції та значення цієї функції від інтеграла та була доведена данським математиком Йоганом Єнсеном у 1906 році.

Нерівність Єнсена має вигляд:

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

де $f$ - опукла на проміжку $(a;b)$ функція, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ - довільні числа з цього проміжку, при цьому дана нерівність перетворюється в рівність у випадках, коли $x_1 = \cdots = x_n$ і коли $f$ - лінійна функція.

Існує клас нерівностей, при доведенні яких безпосередньо використовуються властивості функцій: області визначення та значень, монотонність, екстремуми, опуклість (без знаходження похідної) тощо.

**Приклад 1.** Довести нерівність $\sqrt[3]{x^2}$-4x-4y$< 1 + \sqrt[3]{(x-2)-4y-3}$

Немає потреби робити жодних перетворень при доведенні даної нерівності. Достатньо порівняти підкореневі вирази, щоб побачити, що при довільних значеннях змінних $x$ та $y$ справджується нерівність $x^2$ - 4x - 4y < (x - $2)^2$ - 4$y$ - 3 . Очевидно, що ліва частина набуває значень менших, ніж права.

**Приклад 2.** Довести нерівність $5\sqrt{x^2-3x+2-3}\sqrt[4]{-2x^2}+5x-$ 3+x+1$\leq |ln_a - log_a c|$

Проаналізуємо область визначення виразу. Для його лівої частини вона визначається системою нерівностей з єдиним розв`язком x = 1

$x^2$ - 3x + 2 $\geq 0$

- $2x^2$ + 5x - 3 $\geq$0

І набуває при цьому значення 2. Залишається зауважити, що в правій частині нерівності за властивістю логарифмів маємо суму двох обернених чисел, яка не менша 2. Знак рівності досягається при $a$ = $e$.

**Приклад 3.** Довести нерівність$\sqrt{x+2} + 9\sqrt[4]{x-7} + 2x - 15 \geq 6y$ $-y^2-7$

Насамперед зауважимо, що ліва частина нерівності визначена на проміжку $[7;+\infty)$ і, монотонно зростаючи на ньому, набуває свого найменшого значення 2 в точці x = 7. Запишемо праву частину даної нерівності у вигляді $2-(y-3)^2$. Очевидно, що значення цього виразу не перевищує 2, причому рівність досягається в єдиній точці $y$ = 3. Порівнюючи множини значень обох частин заданої нерівності, робимо висновок, що їх рівність можлива тільки при x = 7, $y$ = 3 . Для інших значень змінних нерівність є строгою.

**Приклад 4.** Розглянемо функцію $f_i$(x,y)=$a_i x + d_i y$, $i$=$1,n$ в області $D$=$\{(x;y): x^2 + y^2 = 1\}$. Очевидно, що екстремальне значень ці функції набувають на межі області $D$, тобто в точках кола $x^2$+$y^2$=$1$, і $minf_i(x;y) = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$, $i = 1,n,\ min\ F(x;y)$= $\sqrt{(a_1 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + \cdots + b_n)^2}$.

Підстановка цих значень призведе до такої нерівності:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + \cdots + b_n)^2}.$$

**Висновок**.Отримання та доведення низки нерівностей є можливим завдяки використанню відомої теореми Єнсена, яка описує особливості поведінки опуклої функції. При цьому під опуклою вниз (вгору) на деякому проміжку будемо розуміти таку функцію, графік якої лежить вище (нижче) дотичної, проведеної до нього в будь-якій точці цього проміжку.

*Додаток 3*

ВХІДНЕ ДІАГНОСТУВАННЯ

Прізвище та ім`я ______________________

Клас______

1. Чи знаєте ви, що таке лінійна нерівність?
   (a) так
   (b) ні
2. Чи знаєте ви що означає знак ≤ ?
   (a) так
   (b) ні
3. Чи вмієте ви розв`язувати лінійні нерівності?
   (a) так
   (b) ні
4. Порівняйте числа $5\frac{3}{11}$ та $5\frac{7}{11}$

(a) $5\frac{3}{11} > 5\frac{7}{11}$

(b) $5\frac{3}{11} < 5\frac{7}{11}$

(c) $5\frac{3}{11} \leq 5\frac{7}{11}$

(d) інша відповідь.

## ВИХІДНЕ ДІАГНОСТУВАННЯ

Прізвище та ім`я ______________________

Клас______

1. Чи є число 2 розв`язком нерівності $3x > 9$?

   a) так

   b) ні

2. Чи є число -1 розв`язком нерівності $3x \leq 7$?

   a) так

   b) ні

3. Чи є число -3 розв`язком нерівності $x + 7 > 9 - 3$?

   a) так

   b) ні

4. Чи існує ціле сисло на проміжку $[-7{,}8;\ -7{,}6]$

   a) так

   b) ні

5. Додайте почленно нерівності $a > 7$ та $b > 3$.

   ______________________________