

Ніжинський державний університет
імені Миколи Гоголя

Фізико-математичні записки

Збірник наукових праць

Ніжин
2016

Збірник друкується за рішенням Вченої ради
Ніжинського державного університету
імені Миколи Гоголя
Протокол № 5 від 15.12.2016 р.

Редакційна колегія:

канд. фіз.-мат. н. Ковальчук Ю. О. (відп. ред. і відп. секретар),
докт. техн. н. Казачков І.В., докт. фіз.-мат. н. Мельничук О. В.,
докт. фіз.-мат. н. Зінченко Н.М., канд. фіз.мат. н. Тарасенко О.В.

Рецензенти:

Авраменко О.В. – докт. фіз.-мат. н., професор;
Сергієнко В.П. – докт. пед. н., професор

До збірника включені наукові статті викладачів, наукових співробітників та студентів кафедр вищої математики, прикладної математики, інформатики та освітніх вимірювань, фізики Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя з актуальних питань вищої та прикладної математики, фізики, інформатики, методики викладання дисциплін фізико-математичного циклу, освітніх вимірювань.

Для фахівців у галузі математики, фізики, інформатики, забезпечення якості освіти, педагогіки вищої та середньої школи.

1

Математика та механіка

УДК 517.9

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

М.Б. Віра

Розглянемо крайову задачу

$$\varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon); \quad (1)$$

$$Mx(0, \varepsilon) + Nx(T, \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (2)$$

в якій $x(t, \varepsilon)$ – шуканий n -вимірний вектор, $t \in [0; T]$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малий дійсний параметр, $h \in N$; $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ – дійсні квадратні матриці n -го порядку, $d(\varepsilon)$, $f(t, \varepsilon)$ – відповідно l_1 - та n -вимірний вектори-стовпці; M, N – матриці зі сталими елементами розмірністю $l_1 \times n$.

Крім того, будемо передбачати, що виконуються умови:

1° матриці $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ і вектор $f(t, \varepsilon)$ допускають на відрізку $[0; T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε :

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t); B(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(t); f(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t); \quad (3)$$

2° коефіцієнти $A_k(t), B_k(t), f_k(t)$ розвинень (3) нескінченно диференційовані на відрізку $[0; T]$;

3° $\det B_0(t) = 0, \forall t \in [0; T]$;

4° в'язка граничних матриць

$$A_0(t) - \lambda B_0(t) \quad (4)$$

регулярна на даному відрізку $[0; T]$ і має сталу кронекерову структуру при всіх $t \in [0; T]$, тобто кратності всіх власних значень в'язки (4) і відповідних скінченних та нескінченних елементарних дільників є сталими на даному відрізку;

5° вектор $d(\varepsilon)$ зображується у вигляді асимптотичного розвинення

$$d(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k \quad (5)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$;

6° в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ має на заданому відрізку $[0; T]$ $n-1$ простих скінченних елементарних дільників $\lambda - \lambda_i(t), i = \overline{1, n-1}$, і один – нескінченний;

7° $(B_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0, \forall t \in [0; T]$, (6)

$\tilde{\varphi}(t)$ – власний вектор матриці $B_0(t)$, що відповідає її нульовому власному значенню; $\tilde{\psi}(t)$ – базисний вектор нуль-простору матриці $B_0^*(t)$. Як показано в [1], [2], ця умова забезпечує неособливість матриці $B(t, \varepsilon)$ при досить малих $\varepsilon > 0$.

За таких умов розглянемо питання про відшукування асимптотичного розв'язку $x(t, \varepsilon)$ задачі (1), (2) у вигляді розвинень за степенями малого параметра ε .

Крайова задача типу (1), (2) вже досліджувались у роботах [3], [4], [5] за умови, коли матриці крайових умов є квадратними n -го порядку. У цій статті узагальнимо цей результат на

випадок довільних прямокутних матриць і дослідимо питання існування розв'язків такої крайової задачі.

Дослідимо стійкий випадок, коли:

$$\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \operatorname{Re}(B_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) < 0, \quad \forall t \in [0; T]. \quad (7)$$

Розв'язок крайової задачі (1), (2) в даному випадку шукатимемо у вигляді

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) = & \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t, \varepsilon) c_i(\varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \\ & + v(t, \varepsilon) c_n(\varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h-1} \int_0^t \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \tilde{v}(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (8)$$

$u_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$; $v(t, \varepsilon)$, $\tilde{v}(t, \varepsilon)$ – n -вимірні вектор-функції, $\lambda_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\xi(t, \varepsilon)$ – скалярні функції, що зображуються формальними розвиненнями:

$$u_i(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(i)}(t), \quad \lambda_i(t, \varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (9)$$

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t), \quad \xi(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi_k(t), \quad (10)$$

$$\tilde{v}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_k(t), \quad (11)$$

коефіцієнти яких визначаються за рекурентними формулами, наведеними в [1, с.92], а $c_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$ – скалярні множники, які зображуються аналогічними розвиненнями за степенями ε :

$$c_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k c_k^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

коефіцієнти яких $c_k^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, \dots$ будуть визначатися із крайової умови. Перший доданок у (8) – це лінійна комбінація розв'язків першої групи відповідної однорідної системи, що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$, другий доданок – розв'язок другої групи, який відповідає нескінченному елементарному дільнику, а третій – частинний розв'язок неоднорідної системи.

Оскільки метод визначення коефіцієнтів розвинень (9) – (11) вже відомий [1, с.92], то перейдемо до відшукування коефіцієнтів $c_k^{(i)}$, $k = 0, 1, \dots$, $i = \overline{1, n}$ розвинень (12). Для цього підставимо вектор (8) у крайову умову (2). Дістанемо

$$\begin{aligned} & M \sum_{i=1}^{n-1} u_i(0, \varepsilon) c_i(\varepsilon) + Mv(0, \varepsilon) c_n(\varepsilon) + M\tilde{v}(0, \varepsilon) + \\ & + N \sum_{i=1}^{n-1} u_i(T, \varepsilon) c_i(\varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + Nv(T, \varepsilon) c_n(\varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h-1} \int_0^T \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \\ & + N\tilde{v}(T, \varepsilon) = d(\varepsilon). \end{aligned} \quad (13)$$

Згідно з (7), доданки, що містять експоненти, є експоненціально малими. Тому знехтуємо цими доданками і замість (13) розглядатимемо рівняння

$$M \sum_{i=1}^{n-1} u_i(0, \varepsilon) c_i(\varepsilon) + Mv(0, \varepsilon) c_n(\varepsilon) + M\tilde{v}(0, \varepsilon) + N\tilde{v}(T, \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (14)$$

із якого й будемо визначати сталі множники $c_k^{(i)}$, $k = 0, 1, \dots$, $i = \overline{1, n}$.

Прирівнюючи в (14) коефіцієнти при однакових степенях малого параметра і беручи до уваги розвинення (9) – (11), отримаємо систему рівнянь

$$M \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(0) c_{k-j}^{(i)} + M \sum_{j=0}^k v_j(0) c_{k-j}^{(n)} + M\tilde{v}_k(0) = d_k - N\tilde{v}_k(T), \quad k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Підставивши в цю систему вирази для відповідних вектор-функцій і ввівши позначення

$$\begin{aligned} c_k &= \text{col}(c_k^{(1)}, c_k^{(2)}, \dots, c_k^{(n)}), \quad k = 0, 1, \dots; \\ U_0(t) &= [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_{n-1}(t), \tilde{\varphi}(t)]; \\ U_k(t) &= [H_1(t)b_k^{(1)}(t), H_2(t)b_k^{(2)}(t), \dots, H_{n-1}(t)b_k^{(n-1)}(t), G(t)a_k(t)], \quad k = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} b_k^{(s)}(t) &= \lambda_k^{(s)}(t)B_0(t)\varphi_s(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i} \lambda_i^{(s)}(t)B_j(t)u_{k-i-j}^{(s)}(t) + \\ &+ \lambda_s(t) \sum_{j=1}^k B_j(t)u_{k-j}^{(s)}(t) - \sum_{i=1}^k A_i(t)u_{k-i}^{(s)}(t) + \sum_{i=0}^{k-h} B_i(t)(u_{k-h-i}^{(s)})', \\ a_k(t) &= \xi_{k-1}(t)A_0(t)\tilde{\varphi}(t) + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-1-i} \xi_i(t)A_j(t)v_{k-1-i-j}(t) - \\ &- \sum_{i=0}^{k-h-1} \sum_{j=0}^{k-h-1-i} \xi_i(t)B_j(t)v'_{k-h-1-i-j}(t) - \sum_{i=1}^k B_i(t)v_{k-i}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

запишемо рівняння (15) у векторно-матричному вигляді

$$MU_0(0)c_k + M \sum_{i=1}^k U_i(0)c_{k-i} + M\tilde{v}_k(0) = d_k - N\tilde{v}_k(T), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

де

$$\tilde{v}_k(t) = A_0^{-1}(t) \left[\sum_{i=0}^{k-h} B_i(t)(\tilde{v}_{k-h-i}(t))' - \sum_{i=1}^k A_i(t)\tilde{v}_{k-i}(t) - f_k(t) \right], \quad k = 1, 2, \dots$$

Проаналізуємо розв'язність рівняння (16), розглянувши окремі випадки, пов'язані зі структурою $(l_1 \times n)$ -матриць M, N і векторів d_k .

1. Нехай $l_1 = n$. Тоді матриці M і N – квадратні n -го порядку, а вектори d_k – n -вимірні.

Припустимо, що матриця M неособлива, тобто

$$\det M \neq 0. \quad (17)$$

Оскільки матриця $U_0(0)$ теж неособлива завдяки лінійній незалежності власних векторів $\varphi_i(t), i = \overline{1, n-1}, \tilde{\varphi}(t)$, то з рівняння (16) дістанемо такі рекурентні формули для визначення векторів c_k :

$$\begin{aligned} c_0 &= -U_0^{-1}(0)\tilde{v}_0(0) + U_0^{-1}(0)M^{-1}[d_0 - N\tilde{v}_0(T)], \\ c_k &= -U_0^{-1}(0) \sum_{i=1}^k U_i(0)c_{k-i} - U_0^{-1}(0)\tilde{v}_k(0) + U_0^{-1}M^{-1}[d_k - N\tilde{v}_k(T)], \\ & \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Визначення скалярів $c_k^{(i)}, k = 0, 1, \dots, i = \overline{1, n}$, завершує побудову формального розв'язку.

Методом, описаним в [1], [2] можна показати, що вираз(8), побудований у такий спосіб, є асимптотичним зображенням точного розв'язку крайової задачі (1), (2). Підсумком проведених досліджень є така теорема.

Теорема 1. Якщо M, N – квадратні матриці n -го порядку і виконуються умови $1^\circ - 7^\circ$, (7), (17), то при досить малих ε крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який виражається асимптотичною формулою

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \sum_{j=0}^k v_j(t) c_{k-j}^{(n)} \exp \left(\varepsilon^{-h-1} \int_0^t \xi_m(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \sum_{k=0}^m \varepsilon^k \tilde{v}_k(t) + O(\varepsilon^{m-h-1}), \end{aligned} \quad (19)$$

де $u_k^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $v_k(t)$, $\tilde{v}_k(t)$ – n -вимірні вектор-функції, $\lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\xi_m(t, \varepsilon)$ – скалярні функції, що визначаються рекурентними формулами через коефіцієнти системи (1), $c_k^{(i)}$, $k = \overline{0, m}$, $i = \overline{1, n}$ – сталі множники, які визначаються за формулами (18).

2. Нехай, як і в попередньому випадку, $l_1 = n$ (матриці M , N – квадратні n -го порядку, d_k – n -вимірні вектори-стовпці), але

$$\det M = 0. \quad (20)$$

Припустимо, що $\text{rank} M = r$ і позначимо g_i , \tilde{g}_i , $i = \overline{1, n-r}$, нулі матриць M та M^* відповідно ($Mg_i = 0$, $M^*\tilde{g}_i = 0$, $i = \overline{1, n-r}$). Побудуємо з цих векторів матриці

$$G = [g_1, \dots, g_{n-r}]; \quad \tilde{G} = [\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{n-r}]^*.$$

Припустимо, що виконуються умови

$$\tilde{G}d_k = 0, \quad k = \overline{0, 1, \dots}, \quad (21)$$

$$\tilde{G}N = 0. \quad (22)$$

Тоді рівняння (16) будуть розв'язними, і з них дістанемо

$$U_0(0)c_k + \sum_{i=1}^k U_i(0)c_{k-i} + \tilde{v}_k(0) = M^-(d_k - N\tilde{v}_k(T)) + G\alpha, \quad (23)$$

звідки

$$c_0 = U_0^{-1}(0)[M^-d_0 - M^-N\tilde{v}_0(T) - \tilde{v}_0(0) + G\alpha], \quad (24)$$

$$c_k = U_0^{-1}(0)[M^-d_k - M^-N\tilde{v}_k(T) - \sum_{i=1}^k U_i(0)c_{k-i} - \tilde{v}_k(0) + G\alpha], \quad (25)$$

де M^- – напівообернена матриця до матриці M , $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r})$ – довільний сталий $(n-r)$ -вимірний вектор.

Отже, в даному випадку будується $(n-r)$ -параметрична сім'я формальних розв'язків крайової задачі (1), (2).

Можна показати, що кожен із розв'язків цієї сім'ї має асимптотичний характер. Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 2. Якщо M, N – квадратні матриці n -го порядку і виконуються умови $1^\circ - 7^\circ$, (7), (20)-(22), то при досить малих ε існує $(n-r)$ -параметрична сім'я розв'язків крайової задачі (1), (2), які зображаються у вигляді (8). Коефіцієнти $u_k^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $v_k(t)$, $\tilde{v}_k(t)$, $\lambda_k^{(i)}(t)$ розвинень, які містяться в (8), визначаються за рекурентними формулами через коефіцієнти цієї системи, а сталі множники $c_k^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, – за формулами (24), (25).

У двох розглянутих вище випадках передбачалось, що $l_1 = n$, тобто матриці M, N – квадратні. Проаналізуємо тепер ситуацію, коли ці матриці будуть прямокутними.

3. Нехай $l_1 < n$. Якщо $r = \text{rank} M = l_1$, то нуль-простір матриці M^* містить тільки нульовий вектор, тому умови (21), (22) виконуються і, отже, рівняння (16) розв'язні. При цьому, як і у випадку 2, вектори c_k з них визначатимуться за рекурентними формулами (24), (25), де α – довільний сталий $(n-r)$ -вимірний вектор.

Якщо ж $r < l_1$, то базис нуль-простору матриці M^* міститиме $l_1 - r$ лінійно незалежних векторів $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{l_1-r}$, з яких утворимо матрицю $\tilde{G} = [\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{l_1-r}]^*$. Наклавши умови (21), (22), забезпечимо розв'язність рівнянь (16). Вектори c_k з них також визначатимуться за формулами (24), (25), де α – довільний $(n-r)$ -вимірний вектор сталих.

Таким чином, у даному випадку крайова задача (1), (2) має $(n-r)$ -параметричну сім'ю розв'язків, що виражаються асимптотичною формулою (19), у якій сталі множники $c_k^{(i)}$ визначаються за формулами (24), (25).

4. Припустимо, що $l_1 > n$. У цьому випадку $\tilde{G} = [\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{l_1-r}]^*$. Наклавши умови (21), (22), забезпечимо розв'язність рівнянь (16).

Якщо при цьому $r = n$, то при кожному k рівняння (16) матимуть єдиний розв'язок:

$$c_0 = U_0^{-1}(0)[M^- d_0 - M^- N \tilde{v}_0(T) - \tilde{v}_0(0)],$$

$$c_k = U_0^{-1}(0)[M^- d_k - M^- N \tilde{v}_k(T) - \sum_{i=1}^k U_i(0)c_{k-i} - \tilde{v}_k(0)], \quad k = 1, 2, \dots$$

Якщо ж $r < n$, то c_k виражатимуться за формулами (24), (25), в яких α – довільний сталий $(n-r)$ -вимірний вектор.

Отже, в даному випадку крайова задача (1), (2) матиме асимптотичний розв'язок вигляду (16) за виконання умов (21), (22).

При $r = n$ цей розв'язок буде єдиним, а при $r < n$ являтиме собою $(n-r)$ -параметричну сім'ю.

Література

1. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
2. Шкіль Н.И. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н.И. Шкіль, И.И. Старун, В.П. Яковець. – К.: Вища школа, 1991. – 207 с.
1. Віра М. Б. Асимптотичне розв'язання двоточкових крайових задач для лінійних вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь / М. Б. Віра // Фізико-математичні записки. – Ніжин: вид-во НДУ ім. М. Гоголя. – 2008. – С. 18-34.
2. Віра М. Б. Двоточкова крайова задача для вироджених сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь / М. Б. Віра // Науковий часопис НПП ім. М. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2008, №9. – С. 47-64.
3. Яковець В. П. Про побудову асимптотичних розв'язків двоточкових крайових задач для вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь / В. П. Яковець, М. Б. Віра // Нелінійні коливання. – 2010. – Т.13, №2. – С. 272-286.

УДК 532.59:537.84:534.1

СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ ПАРАМЕТРИЧНОГО ЗБУДЖЕННЯ І ПРИГНІЧЕННЯ КОЛИВАНЬ В СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

І.В. Казачков

Актуальність проблеми. Інтенсивний розвиток сучасної промисловості і техніки вимагає дослідження параметрично збуджуваних (обумовлених періодичною силою, що змушує) або просто параметричних коливань в суцільних середовищах: динамічна стійкість пружних систем, коливання пластин, оболонок, стержнів, коливання рідин у віброуючих посудинах, в трубопроводах, насосах і т.д. Нині відомі численні способи параметричного збудження і пригнічення коливань в суцільних середовищах, зокрема, в рідких: наприклад, фізика поверхневих явищ і тонких плівок [1-30]. Нові напрями в сучасному природознавстві з'явилися в зв'язку з дослідженням нелінійних процесів різної фізико-механічної і хімічної природи: термогідродинамічні і магнітогідродинамічні нестійкості, катастрофи, біфуркації, автоколивання і т.д. Встановлено, що ідеальним способом перенесення енергії в нелінійних системах є солітони [31-34], математичний опис яких для мілкої води дали Кортевег і де Вриз [35], а строгий доказ існування для рідини кінцевої глибини - М.А. Лаврент'єв [36]. Стійкі солітоноподібні хвилі утворюються в результаті взаємної компенсації нелінійності та дисперсії і поєднують дивовижним чином властивості частинки і хвилі [37,38].

Ряд нових цікавих явищ виявлено при вивченні теплових хвиль [39-41]. Нелінійність, обумовлена залежністю фізичних властивостей середовища від координат і часу, зокрема, коефіцієнта теплопровідності від температури, перетворенням його на нуль на фронті теплової хвилі, присутністю в середовищі джерел і стоків, призводить до інерційного уповільнення швидкості поширення збурень. Відкритий механізм об'ємного поглинання тепла, використаний в якості одного з можливих пояснень теплової самоізоляції кульової блискавки. Математичні моделі нелінійної теплопровідності з адаптацією на конкретні випадки дозволяють описувати широкий клас завдань дифузії, поширення теплових і електромагнітних полів і т.д. Завдання параметричного збудження і пригнічення коливань в суцільних середовищах, зокрема на межах розділу суцільних середовищ, пов'язані з дослідженням властивостей самих середовищ. Побудова адекватних фізико-математичних моделей середовищ і процесів, що відбуваються в них, пошук способів ефективного впливу на ці процеси, управління ними - одне з найбільш важливих завдань сучасної механіки суцільних середовищ.

Постановка задачі. Дана стаття присвячена аналізу особливостей параметрично збуджуваних коливань в суцільних середовищах та задачі побудови математичних моделей для різних способів збудження і пригнічення коливань. Основна увага приділена границям розділу середовищ, методологічним та математичним задачам побудови та використання таких моделей прикладного характеру. Також наведені постановки ряду невирішених задач, що становлять предмет наших досліджень – як сучасних, так і частково майбутніх.

Фізико-математичні моделі суцільних середовищ. Побудова фізико-математичних моделей суцільних середовищ і подальше дослідження процесів в них найчастіше ґрунтується на гіпотезах суцільності та неперервної диференційованості n разів усіх функцій, що описують параметри суцільного середовища, майже усюди, за винятком окремих точок, ліній або поверхонь, на яких допускаються розриви. Це дозволяє використати феноменологічний підхід із застосуванням розвиненого апарату математичного аналізу і математичної фізики. Проте, хоча феноменологічний підхід дозволив вирішити безліч проблем механіки суцільних середовищ, що стали вже класичними, і є нині одним з найчастіше вживаних, необхідно враховувати, що багато процесів в суцільних середовищах не відповідають цій фізичній моделі.

Наприклад, в турбулентній течії рідини поля швидкостей і прискорень не описуються в класі неперервних або майже усюди неперервних функцій, а стисла у напрямі дотичної до вільної поверхні плівка стає такою, що ніде не диференціюється в цьому напрямі, навіть якщо залишається неперервною (поверхня пілкоподібна із зубцями, перпендикулярними до неї). Інші приклади: розбризкування рідин, кавітація, де не можна провести індивідуалізацію навіть об'ємів, оскільки суцільне середовище перетворюється на сукупність окремих об'ємів. У гетерогенних середовищах поля швидкостей, температур і т.д. розривні і поєднання двох різних полів в одному континуумі, багатозначність параметрів відносяться не до індивідуалізованої точки середовища, а до точки простору, в якій поєднані індивідуалізовані точки з різними параметрами. Для неklasичних задач механіки суцільних середовищ, що не задовольняють гіпотезам феноменологічної теорії, застосовуються статистичний підхід і різні варіанти варіаційних методів [42-45]. Зважаючи на математичну складність, статистичний (мікроскопічний) підхід найчастіше використовується для обґрунтування феноменологічних (макроскопічних) моделей суцільних середовищ, якщо тільки він не є єдино можливим: розряджені гази, плазма, і тому подібне. Взагалі кажучи, в природі не існує суцільних середовищ, проте гіпотеза суцільності добре описує їх на макрорівні, і модель неперервного континууму дозволяє використати потужний апарат теорії неперервних функцій, диференціального і інтегрального числення.

Для систем, що не відповідають гіпотезі неперервності займаного простору, адекватнішою є теорія фракталів (об'єктів дробової розмірності) і розроблений апарат інтегрального і диференціального числення довільного порядку. Нами використовується в основному феноменологічний підхід, при якому побудова математичних моделей суцільних середовищ ґрунтується на припущенні, що кожна точка середовища – це фізично нескінченно малий об'єм, фізико-математичний стан якого характеризується набором визначальних параметрів, що вводяться на основі даних досвіду і теоретичних досліджень.

Нині з позиції феноменологічного підходу розроблена така безліч математичних моделей різного класу завдань з урахуванням їх специфічних особливостей, що назріла необхідність в їх

систематизації і розробці основних принципів математичного моделювання процесів в суцільних середовищах. Тому при розробці нових комплексів математичних і чисельних моделей необхідно виходити з модульного принципу, що дозволяє максимально уніфікувати процес моделювання і полегшити використання математичних і комп'ютерних чисельних моделей різними дослідниками в різноманітних завданнях.

Рівняння динаміки суцільних середовищ. При феноменологічному підході побудова математичних моделей суцільних середовищ ґрунтується на припущенні, що кожна точка середовища - фізично нескінченно малий об'єм, фізико-механічний стан якого характеризується набором визначальних параметрів, що вводяться на основі даних досвіду і теоретичних досліджень або ж як статистичні середні величини (температура, наприклад). Загальні рівняння динаміки суцільного середовища будь-якої структури (у тому числі гетерогенної суміші, що розглядається без урахування міжфазної взаємодії, яку можна не брати до уваги при вивченні руху гетерогенної системи як єдиного складного суцільного середовища), записуються так:

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t &= -\operatorname{div}(\rho \vec{v}), \quad \rho(\partial \vec{v} / \partial t + \vec{v} \nabla \vec{v}) = \operatorname{div} P + \rho \vec{F} - \sum_{j=1}^N \vec{v} \nabla (\rho_j \vec{v}_j), \\ \rho(\partial e / \partial t + \vec{v} \nabla e) &= \operatorname{div}(\vec{q} + P \vec{v}) + \rho \vec{F} \vec{v} + \sum_{j=1}^N \left[\rho_j \vec{F}_j \vec{v} - \operatorname{div}(\rho_j e_j \vec{v}) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

де ρ - щільність гетерогенного середовища, \vec{v} - вектор швидкості гетерогенного середовища, t - час, P - тензор напружень, \vec{F} - об'ємна сила, ρ_j, \vec{v}_j - параметри компонент середовища (як і інші параметри, відмічені індексами), e - питома щільність енергії, \vec{q} - питомий об'ємний приплив енергії. Перше рівняння системи (1) виражає закон збереження маси, друге - баланс імпульсу, третє - енергії. Для зворотних процесів теплота, що не компенсується, дорівнює нулю. Окрім внутрішньої енергії і ентропії використовуються і інші функції стану і додаткові термодинамічні співвідношення. У разі гетерогенного середовища, коли необхідно враховувати обмін масою, імпульсом і енергією між фазами усередині об'єму або на межах розділу фаз, в системі рівнянь (1) необхідно розкрити члени з обміном масою, імпульсом і енергією між фазами гетерогенної суміші. Саме це є основною проблемою механіки гетерогенних середовищ. У більшості випадків не ясно, яким чином визначити відповідні інтенсивності обміну масою, імпульсом і енергією між фазами суцільного гетерогенного середовища. Кожна фаза займає частину об'єму гетерогенного середовища: об'ємний вміст N фаз α_j задовольняє співвідношенню $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, щільність середовища виражається через істинні щільності фаз по формулі $\rho = \sum_{j=1}^N \rho_j \alpha_j$. У кожній точці гетерогенного середовища визначено N параметрів, що відносяться

до свого континууму (щільності, швидкостей, температур і так далі). Сукупність континуумів, кожен з яких відноситься до своєї фази і заповнює один і той же об'єм, називається багатошвидкісним континуумом. Підсумовування рівнянь суміші по усіх фазах дає рівняння гетерогенного середовища, узятого як єдина система, без урахування внутрішньої структури. Така модель не проявляє особливостей міжфазної взаємодії усередині гетерогенної суміші. В протилежність цьому, врахування взаємодії фаз як макроскопічних включень призводить до необхідності розгляду умов спільної деформації і руху фаз, впливу форми і розмірів включень, розподілу їх в просторі, фазових перетворень і так далі.

Якщо фізико-механічні процеси в суцільному середовищі досить точно описуються неперервними або майже усюди неперервними функціями координат і часу, можна від системи інтегральних співвідношень збереження перейти до відповідних диференціальних рівнянь. Проте для реальних суцільних середовищ, на які можуть діяти зовнішні поля і сили, класичні методи можуть виявитися неприйнятними, внаслідок чого застосовуються варіаційні і чисельні методи, базовані на використанні інтегральних законів збереження, що залишаються в силі і у разі розривних полів і середовищ, якщо в них зробити перехід від інтегрування за Риманом до інтегрування за Лебегом, а у загальному випадку – до заміни класичного інтегрування цілого порядку інтегруванням довільного порядку, яке справедливе для фрактальних областей. У області непе-

рервного або майже усюди неперервного руху суцільного середовища, використовуючи формулу Гауса-Остроградського, можна від інтегральних балансових рівнянь перейти до системи диференціальних рівнянь, що описує термогідродинамічні процеси в гетерогенному середовищі з урахуванням спільного руху фаз і міжфазного обміну маси, імпульсу, енергії. Основне ускладнення у використанні цієї системи при математичному моделюванні гетерогенних середовищ викликається необхідністю конкретизації законів взаємодії фаз, що є у край складним.

Закон деформації гетерогенного середовища залежить не лише від полів швидкості, тиску, температури фаз, тому визначення закономірностей міжфазної взаємодії навіть для окремих випадків - дуже складне завдання. Та все ж для деяких практично важливих завдань (подібних до розглянутих нами) врахування розривів полів на межах розділу фаз абсолютно необхідне. При порівняно слабкому прояві міжфазної взаємодії в гетерогенному середовищі для опису процесів, що відбуваються, можна використати систему диференціальних рівнянь, що отримується з рівнянь збереження покомпонентно, підсумовуванням по усій суміші. При цьому рівняння балансу імпульсу і енергії залежать від відносного руху фаз. Надалі з масових сил розглядатимуться в основному тільки гравітаційні і електромагнітні, а приток зовнішньої енергії - джоулева теплота або енергія вібраційної дії, що передається через границю розділу. Тому систему диференціальних рівнянь необхідно доповнити рівняннями поля, що з урахуванням викладеного дає:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \partial \vec{B} / \partial t = -\operatorname{rot} \vec{E}, \quad \vec{j} = \partial \vec{D} / \partial t + \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \rho d\vec{v} / dt = \operatorname{div} P + \rho \vec{g} + \rho_e \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}, \\ \rho_e = \operatorname{div} \vec{D}, \quad \rho de / dt = \vec{E}' \cdot \vec{j}' + \rho \vec{g} \vec{v} + \Phi + \operatorname{div} (\vec{q}^{eu} - \vec{q}^{en}) - p \operatorname{div} \vec{v}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\vec{E}' \cdot \vec{j}'$ - джоулева теплота, Φ - дисипативна функція, $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$, $\vec{j}' = \vec{j} - \rho_e \vec{v}$ - вектори електричної напруженості і щільності струму в системі координат, пов'язаній з розгляданим об'єктом рухливого суцільного середовища. Тензор напруження для ньютонівської рідини представляється у вигляді суми кульового тензора і девіатора: $P_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik}$, де по "німому" індексу мається на увазі підсумовування, δ_{ik} - символ Кронекера. Дисипативна функція Φ має вигляд $\Phi = \tau_{ik} v_{i,k}$, де i, k - "німі" індекси, $v_{i,k}$ - похідна від i -ої компоненти функції швидкості по k -ій координаті. Тепловий потік задається за законом Фур'є: $\vec{q} = -\kappa \nabla T$, κ - коефіцієнт теплопровідності. Закон Ома для щільності електричного струму:

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v} + \gamma_e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3)$$

Система рівнянь (1)-(3) може бути приведена до дивергентного вигляду, що дуже важливо для чисельного моделювання. Для її замикання, окрім вищенаведених, використовуються також інші визначальні співвідношення та емпіричні залежності фізичних характеристик середовищ від параметрів стану (тиску, температури) і тому подібне. Так, взагалі кажучи, κ - функція тиску і температури, а вектори магнітної і електричної індукції пов'язані з векторами напруженості електричного і магнітного полів співвідношеннями:

$$\vec{B} = \mu_m \vec{H}, \quad \vec{D} = \mu_e \vec{E}. \quad (4)$$

Вважається, що усі розглядувані суцільні середовища (як гомогенні, так і гетерогенні) є двопараметричними [350], що дозволяє використати співвідношення Гіббса

$$de = Tds - pdV, \quad (5)$$

де ентропія у випадку нестисливої рідини

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^{c_p/v}} + \text{const}, \quad (6)$$

і тому $de = c_v dT + \text{const}$, а для ідеального газу з урахуванням закону Клапейрона:

$$p = \rho RT, \quad c_p dT = c_v dT + d(p/\rho), \quad (7)$$

Тут c_p - в загальному випадку функція температури.

При розгляді гетерогенних середовищ передбачається, що властивості кожної фази визначаються з умови заповнення цією фазою усього об'єму. Температура фаз вводиться на підставі гіпотези локальної термодинамічної рівноваги в межах фази. Далі використовуються нестационарні диференціальні рівняння неізотермічного руху в'язкої нестисливої електропровідної рідини (1), (2) (або не електропровідної (1)) в Декартовій чи циліндричній системах координат. Тому доцільно привести їх тут для досить загального випадку при постійних μ_m, ν_m і змінних ρ, μ, κ . При цьому в кожному даному випадку використовуються співвідношення (3)-(7), що конкретизують модель суцільного середовища.

Декартова система координат. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що вісь спрямована проти сили тяжіння. Тоді, вважаючи магнітну силу значно більше електричної, з урахуванням вищевикладеного, запишемо систему диференціальних рівнянь (1), (2):

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(p + 0,5 \mu_m |\vec{H}|^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\
& + \mu_m \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} \right), \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{\mu_m}{2} |\vec{H}|^2 \right) = \\
& = \mu_m \left(H_x \frac{\partial H_y}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\
& \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{\mu_m}{2} |\vec{H}|^2 \right) = \mu_m \left(H_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + \right. \\
& + H_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_z}{\partial z} \left. \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \\
& \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) + p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial q_x^{su}}{\partial x} + \frac{\partial q_y^{su}}{\partial y} + \frac{\partial q_z^{su}}{\partial z} + \nu_m \left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = \nu_m \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (u H_y - v H_x) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} (u H_z - w H_x), \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v H_z - w H_y) + \frac{\partial}{\partial x} (v H_x - u H_y) + \nu_m \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right), \\
& \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (w H_x - u H_z) + \frac{\partial}{\partial y} (w H_y - v H_z) + \nu_m \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

В системі рівнянь (8) виділена потенціальна частина електромагнітного поля, що складає магнітний тиск, внаслідок чого ця форма запису називається симетричною.

Циліндрична система координат. У циліндричній системі (r, φ, z) , координатними поверхнями якої є циліндри $r = const$, напівплощини $\varphi = const$ і площини $z = const$, розглянуті диференціальні рівняння (8) перетворюються до виду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{\rho u}{r} + \frac{\partial(\rho v)}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v \partial u}{r \partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{\mu_m}{2} |\vec{H}|^2 \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_m \left(H_r \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{H_\varphi \partial H_r}{r \partial \varphi} + \frac{H_z \partial H_r}{\partial z} - \frac{H_\varphi^2}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial(\mu u)}{r \partial r} - \frac{\mu}{r^2} \left(2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right), \\
\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v \partial v}{r \partial \varphi} + \frac{w \partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{\mu_m}{2} |\vec{H}|^2 \right) &= \mu_m \left(H_r \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi \partial H_\varphi}{r \partial \varphi} + H_z \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} + \frac{H_r H_\varphi}{r} \right) + \\
&\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial(\mu v)}{r \partial r} + \frac{\mu}{r^2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right), \quad (9) \\
\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v \partial w}{r \partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{\mu_m}{r^2} |\vec{H}|^2 \right) + \rho g &= \mu_m \left(H_r \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{H_\varphi \partial H_z}{r \partial \varphi} + H_z \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial(\mu w)}{r \partial r}, \quad \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v \partial T}{r \partial \varphi} + \frac{w \partial T}{\partial z} \right) + \\
p \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial(\kappa T)}{r \partial r} + \\
&+ \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{r \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
&+ v_m \left[\left(\frac{\partial H_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} - \frac{\partial H_\varphi}{r \partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{\partial q_r^{su}}{\partial r} + \frac{q_r^{su}}{r} + \frac{\partial q_\varphi^{su}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial q_z^{su}}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial H_r}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (u H_\varphi - v H_r) + r \frac{\partial}{\partial z} (u H_z - w H_r) \right] + v_m \left(\frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 H_r}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} + \frac{\partial H_r}{r \partial r} - \frac{2 \partial H_\varphi}{r^2 \partial \varphi} - \frac{H_r}{r^2} \right), \\
\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} (v H_r - u H_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (v H_z - w H_\varphi) + v_m \left(\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial H_\varphi}{r \partial r} + \frac{2 \partial H_r}{r^2 \partial \varphi} - \frac{H_\varphi}{r^2} \right), \\
\frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} r (w H_r - u H_z) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (w H_\varphi - v H_z) \right] + v_m \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 H_z}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \frac{\partial H_z}{r \partial r} \right), \\
&\frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{r \partial \varphi} = - \frac{\partial H_z}{\partial z}.
\end{aligned}$$

У представленому загальному вигляді системи диференціальних рівнянь в частинних похідних (8), (9) мають, головним чином, евристичне значення і можуть використовуватися для чисельного і тим більше - аналітичного рішення лише при відповідних додаткових спрощуючих припущеннях про характер досліджуваних фізичних процесів. Нині, завдяки значному розвитку обчислювальної техніки і чисельних методів, такі системи для багатьох важливих завдань можуть вирішуватися в досить загальній постановці. Але взагалі дотепер значною мірою чисельне рішення багатьох завдань в загальній постановці все ще дуже скрутно навіть на самих швидкодіючих ЕОМ з продуктивністю понад 100 мільйонів операцій в секунду, тому що існуюча математична теорія чисельного рішення нелінійних рівнянь в частинних похідних досі ще не адекватна. Відсутність строгих оцінок погрішності чисельних рішень систем диференціальних рівнянь, доказів стійкості і збіжності чисельних алгоритмів для багатьох випадків викликає необхідність комплексного підходу до вирішення проблеми, що включає наступні основні етапи:

- чітке математичне дослідження спрощених лінеаризованих задач (із залученням евристичного обґрунтування та фізичної інтуїції),
- обчислювальний експеримент на ЕОМ,
- встановлення адекватності фізико-математичної моделі реальному фізичному процесу.

Суттєві труднощі в математичному моделюванні фізико-механічних процесів в суцільних середовищах пов'язані з незавершеністю теорії існування і єдиності рішень рівнянь в частинних похідних, що описують термо- і магнітогідродинамічні явища. Причому, теорія далека від завершення, як щодо самих рівнянь, так і щодо їх кінцево-різницевого або кінцево-елементних аналогів. Математичні питання збіжності і стійкості чисельних схем досить добре розроблені тільки для лінійних задач, тоді як нелінійні задачі все ще недостатньо вивчені. В якості початкових наближень рішень для них використовуються результати лінійних теорій. Відомо, що у багатьох випадках рішення нелінійних задач сильно залежать від точності і адекватності постановки граничних умов. Дестабілізуючий вплив граничних умов при рішенні нелінійних задач має вирішальне значення, внаслідок чого виведенню граничних умов з фізичних законів і дослідженню їх впливу на характер рішень необхідно приділяти значну увагу.

Постановка крайових задач з параметричних коливань у суцільних середовищах.

Постановка крайових задач вимагає конкретизувати тип параметричної дії: зовнішнього електромагнітного поля, вібраційної або теплової дії і тому подібне. Вібраційну дію можна характеризувати вектором віброприскорення і розглядати процес в рухливій системі координат, пов'язаній з віброуючою поверхнею, по якій розтікається рідина, враховуючи дію вібрацій в осцилюючій масовій силі. Фізичне обґрунтування крайових (початкових і граничних) умов є також важливим етапом досліджень. У загальному випадку необхідно задати просторовий розподіл визначальних параметрів середовища в початковий момент часу і відповідні умови на границях заданої області простору. Але в завданнях стійкості і поширення хвиль в лінійній постановці рішення можна розшукувати у вигляді суперпозиції прогресивних або стоячих хвиль. Тоді початкові умови принципово не впливають на характер процесу, оскільки основним є питання про закономірності зростання та спадання хвиль, а не про абсолютне значення амплітуди в початковий момент часу.

У лінійній теорії розглядаються прогресивні хвилі

$$\tilde{q}_j = Q_j(y, z, \omega) \exp i(kx - \omega t), \quad (10)$$

Що розповсюджуються вздовж осі x зі швидкістю ω/k . Тут Q_j - комплексна амплітуда. Виділення дійсної частини можна виконати у остаточному результаті.

Вивід і обґрунтування граничних умов - важливе завдання, якому приділяється все більше уваги [46] у зв'язку з проблемами отримання бракуючих умов, а також виникнення сингулярностей і впливу збурення граничних умов на характер модельованих фізичних процесів. Встановлено, що адекватність будь-якої граничної умови залежить від інших умов (граничних і початкових) і прийнятої математичної моделі і складає істотну особливість обчислювального експерименту в кожному конкретному випадку. При цьому численність визначаючих факторів часто ускладнює, а іноді робить неможливим аналітичне дослідження параметричних коливань в суцільних середовищах або ж обмежує його застосування. Як показують обчислювальні експерименти, питання про адекватність граничних умов пов'язане з типом різницевого схем, співвідношенням визначальних безрозмірних критеріїв і таке інше. У аналітичних дослідженнях адекватність завдання граничних умов впливає на адекватність отриманого рішення. У обчислювальному експерименті граничні умови визначають не лише точність отриманого рішення, але і стійкість самого обчислювального алгоритму, тобто можливість отримання рішення [47-49].

Річардсон ще в 1910 році дав чітку характеристику проблеми адекватної постановки граничних умов [50], але належну увагу їй стали приділяти лише останнім часом [51-57]. У більшості випадків дослідження граничних умов проводилося на ЕОМ з використанням досить простих двошарових явних кінцево-різницевого схем для граничних умов першого і другого роду. Задачі зі змішаними і нелінійними граничними умовами практично не вивчені [58]. Вплив граничних умов на рішення крайових задач з параметричних коливань в суцільних середовищах особливо істотний за наявності складних меж розділу середовищ, ліній контакту, поблизу яких має місце сильний прояв локальної динаміки системи: прослизання, гістерезис кутів контакту і т.д. Так, наявність гістерезису кута контакту не дозволяє побудувати коректну теорію

параметричних коливань навіть в лінійному наближенні [46], в той час як нелінійність сама по собі може стати причиною некоректності постановки крайової задачі.

Девіс і Вейланд [59] показали, що глобальна нестійкість рідких плівок на похилих поверхнях сильно залежить від граничних умов на лініях контакту. Сингулярність задач з наявністю міжфазних і вільних границь, що еволюціонують в просторі-часі, зумовлена мікроструктурою ліній контакту і точок переходу, положення яких змінюється невідомим чином. У загальному випадку граничні умови на динамічних поверхнях розділу суцільних середовищ нелінійні і нестационарні. Нелінійність може бути зумовлена кінематичними (у разі вільної границі) або динамічними особливостями: гістерезис кута контакту, релаксаційні явища, відриви рідини від стінки в окремих місцях і т.і. Не відомі умови, замінюючі класичні умови прилипання на контактній поверхні, що рухається [60], тому неможливе побудування загальної адекватної теорії параметричних коливань границь розділу суцільних середовищ.

Особливості термогідродинамічних процесів на міжфазних границях визначаються взаємодією середовищ в тонкому шарі з товщиною порядку радіуса молекулярної взаємодії (нано-розміри): $a' \square 10^{-9}$ м. У цьому шарі взаємодія молекул фаз призводить до того, що фізико-механічні і хімічні властивості середовища і його термодинамічні параметри відрізняються від властивостей і параметрів фаз. Для розгляду вказаних явищ використовуються різні підходи, наприклад, з введенням поняття поверхневої Σ -фази [61] і розглядом мікроявищ, а також інші методи [13]. Рівняння термогідродинамічних процесів на границі розділу середовищ можна записати у вигляді [61]:

$$\rho_j^0(\vec{v}_j - \vec{v}_\Sigma) \cdot \vec{n} = idem, \quad P_2 \cdot \vec{n} = P_1 \cdot \vec{n} + \rho_1^0(\vec{v}_1 - \vec{v}_\Sigma) \cdot \vec{n} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \frac{1}{a'S_{12}} \int_{\delta L'} \vec{p}_\Sigma(l') dl', \quad (11)$$

$$P_2 \cdot \vec{n} \cdot \vec{v}_2 = P_1 \cdot \vec{n} \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{a'S_{12}} \left[\int_{\delta L'} \vec{p}_\Sigma(l') \vec{v}_\Sigma dl' - \frac{d}{dt} a'e_2 S_{12} \right] + \rho_1^0(\vec{v}_1 - \vec{v}_\Sigma) \cdot \vec{n} \left[e_1 - e_2 + \frac{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2}{2} \right] + (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \cdot \vec{n},$$

де $e_\Sigma, \vec{p}_\Sigma, \vec{v}_\Sigma$ - питомі внутрішні енергія Σ -фази (віднесена до одиниці площі між фазовою поверхнею), сила поверхневого натягу і швидкість руху границі розділу середовищ, відповідно. Тут $\delta L'$ - контур, що охоплює поверхню S_{12} . Рівняння (11) можна використовувати в якості граничних умов для рівнянь мікроруку системи, а також для виведення макроскопічних граничних умов. Слід зазначити, що сила поверхневого натягу залежить від коефіцієнта поверхневого натягу, який визначається для будь-яких двох контактуючих середовищ температурою і концентрацією домішок. При цьому на межах розділу твердого і рідкого або газоподібного середовищ тяжіння між молекулами твердого середовища і рідини (газу) значно перевершує таке між молекулами рідини (газу), тому у більшості практично важливих випадків досить хорошим наближенням реальної фізичної ситуації є класична умова прилипання.

Макроскопічні граничні умови. При постановці макроскопічних граничних умов звичай використовуються феноменологічний підхід, фізичні міркування і емпіричні закони. Наприклад, розглядаючи об'єм V , обмежений поверхнями S_1 і S_2 , паралельними поверхні розділу середовищ S_{12} , можна вибрати координатну систему, в якій S_{12} нерухома. Тоді, спрямовуючи відстань між поверхнями S_1 і S_2 до нуля і нехтуючи впливом перехідного шару (контактної поверхні), з системи диференціальних рівнянь (2) не важко отримати умови на границі розділу середовищ у виді:

$$\rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n} \vec{v}_1 = (p_1 - p_2) \vec{n} + (\rho_1 - \rho_2) \vec{g} + (\rho_{e1} \vec{E}_1 - \rho_{e2} \vec{E}_2) \cdot \vec{n} + \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 + (\vec{J}_1 \times \vec{B}_1 - \vec{J}_2 \times \vec{B}_2) \cdot \vec{n} + p_s^{su}, \quad (12)$$

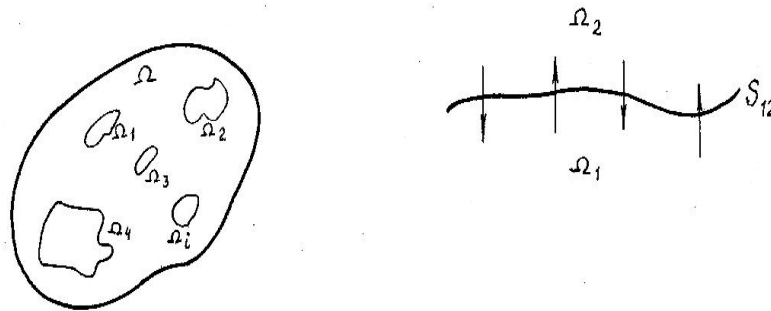
$$\rho_j \vec{v}_j \cdot \vec{n} = idem, \quad \vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0, \quad \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \times \vec{n}, \quad \vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0, \quad (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \rho_{es},$$

$$\rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n} \left(e_1 + \frac{1}{2} |\vec{v}_1|^2 \right) + (p_2 \vec{v}_2 - p_1 \vec{v}_1) \cdot \vec{n} + (\vec{q}_1^{su} - \vec{q}_2^{su}) \cdot \vec{n} = +q_s^{su} + \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n} \left(e_2 + \frac{1}{2} |\vec{v}_2|^2 \right) + (\vec{E}_2 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_1 \times \vec{H}_1) \cdot \vec{n} + (\vec{q}_2^{su} - \vec{q}_1^{su}) \cdot \vec{n}.$$

Тут p_s^{su}, q_s^{su} - поверхневі щільності розподілу зовнішніх сил і потоків енергії, \vec{J}_s, ρ_{es} - поверхневі струм і щільність зарядів. Умови (12) є законами збереження потоків маси, імпульсу і ене-

ргії на границі розділу суцільних середовищ і є основними при розгляді параметричних коливань границь розділу. Потоки енергії \vec{q} , що входять до них, і щільність енергії \vec{q}_s мають нетепловий, немеханічний і неелектромагнітний характер (вони враховані в інших членах). Те ж відноситься і до p_s^{611} . Ці умови мають досить загальний вигляд, вони використовуються як відправні при постановці відповідних граничних умов в конкретних фізичних ситуаціях. Так, нами розглядаються задачі, для яких поверхневий струм і щільність зарядів можна нехтувати як малі величини. Крім того, можуть виконуватися і інші умови, що відбивають специфіку конкретної фізичної ситуації: рівність температур, потенціалів (гідродинамічних, хімічних і т.д.). А для моделей гетерогенних середовищ іноді необхідно використати також і стохастичні граничні умови [51], якщо дані процеси значною мірою є недетермінованими.

Параметричні коливання на границях розділу електропровідної рідини. Як було відмічено вище, при розгляді задач параметричного збудження і пригнічення коливань границь розділу суцільних середовищ головне значення має питання обміну масою, імпульсом і енергією між взаємодіючими середовищами через поверхню розділу. За допомогою такого обміну відбувається взаємодія контактуючих середовищ, що призводить до зміни границі і (чи) параметрів середовищ. У загальному випадку структурні схеми фізичних систем представлені для наочності на рисунку 1, де однозв'язна границя розділу S_{12} областей Ω_1 і Ω_2 є поверхнею в просторі, а багатозв'язна границя розділу гетерогенної системи $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$, де S_i - відповідні поверхні розділу фаз (включень). Тут кожна з областей Ω_i характеризується своїм набором параметрів, і поверхня розділу середовищ може бути деформованою або ж частково (іноді - повністю) не деформованою.



Мал. 1. Багатозв'язна (зліва) та однозв'язна (справа) границі середовищ

Особливості поведінки границь розділу середовищ визначаються властивостями цих середовищ, умовами їх взаємодії і характером зовнішніх дій (наприклад, електромагнітних - у разі електропровідних середовищ). При цьому, оскільки в складних гетерогенних середовищах устежити за поведінкою кожної окремої границі розділу фаз не представляється можливим, використовуються різні усереднені рівняння і моделі, отримані при обліку взаємодії середовищ на окремих границях розділу [61-66]. Такий підхід нами використовувався при розгляді параметричних коливань на границях розділу фаз в гетерогенному середовищі. Основна задача дослідження - аналіз параметричних коливань границь розділу в'язких електропровідних і непровідних рідин з іншими середовищами, газоподібними і твердими. Управління границями розділу рідин проводилось за допомогою електричних і магнітних полів [1-4,12,19-27,67].

Наприклад, системи стабілізації меж фазового переходу (кристалізації) ґрунтовані на використанні високочастотних електромагнітних полів і активних чотириполюсників з терморезисторами і відповідними операційними підсилювачами. При переході з рідкої фази в тверду є стрибок в провідності середовищ, який дає можливість ефективно контролювати форму поверхні кристалізації, застосовуючи високочастотні електромагнітні поля. Системи управління границь фазового переходу працюють так. Збурення границі фазового переходу призводить до відповідного збурення магнітного поля, а зміна струму, що викликається ним, в обмотці системи

управління, після належного підсилення наводить вторинний струм в тонкому скин-шарі поблизу розділу фаз і тим сприяє вирівнюванню (стабілізації) збуреної границі джоулевими тепловиділеннями. Різноманітні особливості управління границями електропровідних рідин для різних фізичних ситуацій розглядалися у багатьох роботах:

- збудження регулярних коливань поверхні розділу за допомогою постійного електричного поля великої напруженості, що створює пробій рідини [68];
- параметрична дія на границі розділу схрещеними електричним і магнітним полями [1,2,9,30,69];
- збудження нестійкості Кельвіна-Гельмгольца в змінних магнітних полях [70], Релея-Тейлора [71], і багато інших випадків поверхневих хвиль на границях розділу.

Нами, в основному, досліджені закономірності збудження і пригнічення коливань границь розділу електропровідних і неелектропровідних середовищ за допомогою прогресивних або стоячих електромагнітних хвиль у разі малих магнітних чисел Рейнольдса Re_m , коли індуковане магнітне поле мале в порівнянні з зовнішнім. Розглядалися, головним чином, тонкі шари (плівки) електропровідної рідини, що мають ряд дивовижних особливостей в теоретичному і прикладному плані. З огляду на те, що поведінка системи визначається параметрами зовнішніх дій і власних коливань, задача електромагнітного збудження (пригнічення) коливань границь розділу формулюється як задача визначення і вибору електромагнітних полів, що фізично реалізуються і створюють необхідний ефект: стабілізацію (пригнічення нестійкості) границь фазового переходу (кристалізації) відносно випадкових або регулярних збурень [12,30,72-75], збудження коливань поверхні плівок заданої форми [21-24,76-80] і їх руйнування на краплі (розбрикування, диспергування) [1-4,29,78,81]. Досліджувались як силова, так і енергетична (джоулеве тепловиділення) дії електромагнітних полів на середовища.

Оскільки термогідродинамічні процеси на границях розділу відрізняються великою складністю і багатофакторністю і для ряду фізичних ситуацій до кінця не з'ясовані, у більшості робіт систему з двох фаз, розділених шаром міжфазного переходу (Σ -фаза), замінюють моделлю поверхнею розділу нульової товщини, по обидві сторони якої середовища однорідні за властивостями аж до границі. У загальному формулюванні задач з границями розділу фігурують два параметри [59,82]: капілярне число $Ca = We/Re$ і коефіцієнт ковзання, що характеризується відношенням довжини прослизання до лінійного масштабу системи. При $\sigma \rightarrow 0, Ca \rightarrow \infty$ з'являється сингулярність в граничних умовах (12) (капілярні сили проявляються лише у вузькому пограничному шарі), тоді як при $Ca \ll 1$ поверхня розділу визначається не в'язкою деформацією, а умовою локальної динаміки: конфігурації локальної течії, ковзанням фаз і т.і. Сингулярність у багатьох випадках дає умова прилипання. Ці особливості призводять до того, що в деяких фізичних ситуаціях малі зміни умов на границі розділу сильно впливають на зміну форми границі. Так, для систем з гістерезисом кута контакту не можна побудувати коректну теорію стійкості навіть в лінійному наближенні, зважаючи на нелінійність граничних умов [46] і сильну чутливість глобальних властивостей параметричних коливань границь розділу до умов контакту середовищ [59].

В силу вказаних особливостей взаємодія електромагнітних полів з границями розділу електропровідних середовищ багато в чому ще не до кінця зрозуміла, але у зв'язку з різними потребами практики було розглянуто безліч окремих випадків, що дають іноді суперечливі результати і не дозволяють створити цілісне уявлення процесу. Це свідчить про важливість задач, рішення яких все ще знаходиться в початковій стадії, незважаючи на велику кількість окремих публікацій і успіхи в розумінні деяких явищ. Так, стверджується [75], що постійне поле ефективніше пригнічує нестійкість тангенціального розриву, ніж змінне, а в [83] параметричні ефекти не розглядаються і робиться висновок, що змінне електромагнітне поле завжди дестабілізує границю розділу. В [84] показано, що змінне електромагнітне поле стабілізує довгохвильову частину спектру двовимірних збурень поверхні розділу електропровідної і не електропровідної рідин і викликає розвиток нестійкості, що має характер параметричного резонансу. Останнє важливе, наприклад, для проблеми плівкового МГД-гранулювання металів [1-3,78], успішно вирішеної нами.

Перші роботи з електромагнітної дії на поверхню рідкометалевого струменя з метою її стабілізації належать Ладикову Ю.П. [30], який показав, що при частоті поля, що задовольняє

умові малості товщини скин-шару порівняно з капілярним радіусом, коливання поверхні струменя затухають (струмінь стійкий). Надалі для утримання рідких металів було запропоновано використати два поля кругової поляризації різної частоти. Дослідження цієї проблеми стимулювалося необхідністю стабілізації нестійкостей Релея-Тейлора, Кельвіна-Гельмгольца, Тонкса-Френкеля [9]. Особливий вид нестійкості тонких в'язких струменів і плівок - утворення зубців на поверхні розділу, так званої «зморшкуватості» поверхні розділу, досліджувався на одновимірних і двовимірних математичних моделях [45,85], аналіз яких привів до отримання умов виникнення нестійкості, що зв'язується з гіперболічністю рівнянь. Багато нових теоретичних і експериментальних робіт по параметричному збудженню коливань поверхонь розділу за допомогою електромагнітних полів розглянуті в оглядах [86,87], що містять також обговорення механізмів взаємодії полів і середовищ і аналіз кількісних і якісних особливостей розвитку нестійкості і стабілізації поверхонь розділу.

Задачі стабілізації вільних і обмежених рідкометалевих струменів і плівок розглядалися у зв'язку з проблемами термоядерної технології [3,4,89], а збудження параметричної нестійкості і розпаду струменів - у зв'язку з проблемою гранулювання металів [1-4,78]. У разі непровідної рідини управління можливе шляхом зміни термогідродинамічних параметрів на границі (граничне управління), для гранулярного середовища, що проводить, пропусканням струму по частинках (виділення тепла в точках торкання гранул внаслідок локального підвищення опору призводить до появи об'ємного управління), для течії електропровідної рідини з непровідними частинками за допомогою спеціальних електромагнітних полів. Рішення такого роду задач потрібне для підвищення можливостей управління процесами в суцільних середовищах і створення умов для розробки нових високоефективних ресурсо- і енергозбережних технологій і пристроїв, у тому числі автоматизованих і автоматичних. Автоматичне управління (регулювання) процесів в суцільних середовищах може бути програмним [67] чи адаптивним (із зворотним зв'язком) [30,72,73,78], що особливо ефективно для швидкоплинних і нестійких процесів. Саме тому описані задачі актуальні в теоретичному і прикладному плані. Класифікацію досліджених фізичних процесів параметричного збудження і пригнічення коливань на межах розділу суцільних середовищ можна простежити з таблиці.

Параметричне збудження і пригнічення коливань на границях розділу непровідних середовищ. Параметричне збудження і пригнічення коливань на границях розділу непровідних середовищ можливе за рахунок дії в об'ємах, займаних середовищами, розподілених джерел енергії або обміну масою, імпульсом і енергією на самій границі. Це дозволяє ефективно впливати на кінематичні і термодинамічні властивості середовищ, виконувати управління процесами, що відбуваються в них: стабілізувати границі розділу середовищ у разі їх нестійкості відносно випадкових або регулярних збурень, збуджувати коливання заданого виду, руйнувати границі розділу шляхом збудження наростаючих по амплітуді (у часі або по якій-небудь координаті) коливань. У будь-якому випадку для збудження параметричних коливань в суцільних середовищах необхідно перевищити деякий бар'єр значень параметрів, тому що енергія, що підводиться до системи ззовні, витрачається не лише на накачування коливань, але і на дисипацію. Оскільки в природі відсутні абсолютно пружні середовища, то цей нижній бар'єр параметрів визначається саме енергією, що йде на дисипацію. Характерно, що параметричне збудження коливань на границях розділу з нескінченної послідовності областей нестійких мод дає максимальну ширину області частот, рівних половині частоти змушуючої сили (основна гармоніка).

Таблиця 1. Класифікація розв'язаних нами проблем

Процес	Електромагнітне керування коливаннями границь розділу електропровідних середовищ	Вібраційне керування розпадом струменів та плівок	Термогідродинамічні коливання на границях розділу суцільних середовищ
Вид границь розділу	Електропровідна рідина – непровідне середовище (рідина, газ, тверда фаза)	рідина - рідина, газ, вакуум	Твердая фаза - газ, рідина, границі фазового переходу з рідкого стану до твердого
Вид збурень, середовище	Прогресивні і стоячі електромагнітні хвилі, джоулеві потоки тепла, гомогенні	Вібраційні дії Гомогенні середовища	Електромагнітні поля, потоки тепла та маси на границях розділу, гомогенні та

	та гетерогенні середовища		гетерогенні середовища
<i>Вид течії Явище</i>	Пласкі та радіально розтікаючі плівки, згинаючі хвилі, розпад плінок	Радіально розтікаючі плівки, згинаючі хвилі, розпад плінок на краплі	Теплові коливання в гранулярних середовищах і на границях кристалізації
<i>Визначаючі сили</i>	Електромагнітні, капілярні, гравітаційні, в'язкі	Вібраційні, капілярні, гравітаційні, в'язкі	Термогідродинамічні, гравітаційні, в'язкі, міжфазні - гетерогенне середовище
<i>Нелінійність процесів, середовищ</i>	Нелінійність хвиль, дисперсія поверхневих і електромагнітних хвиль	Солітони і ударні хвилі, резонансний розпил плівок	Нелінійні термогідродинамічні, хвилі, нелінійні фізичні параметри середовищ

З безлічі різних способів збудження і пригнічення коливань границь розділу непровідних середовищ найчастіше використовуються акустичні, вібраційні і вібротермічні, механічні і газодинамічні, із застосуванням поверхнево-активних речовин, термокапілярного ефекту і інші. У багатьох роботах відзначалося, що параметричне збудження (пригнічення) одних гармонік може привести до збудження (пригнічення) інших. Параметрична стабілізація частини гармонік застосованими зовнішніми діями може призвести до збудження нестійкості іншого роду або в іншій частині спектру частот. У більшості робіт досліджуються три основні типи нестійкості і можливість їх пригнічення параметричними діями або посилення з метою руйнування середовища: диспергування, розбризкування. Одна з найбільш розвинених областей - теорія стійкості і розпаду рідких струменів - має численні застосування в різноманітних промислових, технічних і інших пристроях [1-4,78,89].

Дослідження розвитку зовнішніх збурень поверхні струменя показало, що процес майже завжди визначається в основному першою спектральною модою. Складний хвильовий процес, як правило, можливий лише при використанні спеціальних полігармонічних збудників коливань [1-4]. Резонансна взаємодія мод може призводити до перекачування енергії від однієї моди до іншої. Відоме, наприклад, явище генерації другої гармоніки, що називається ефектом Уілтона [90], коли в результаті взаємодії гравітаційно-капілярних хвиль з параметрами $k_2 = k_1$, $\omega_2 = \omega_1$ при швидкостях течії, близьких до порогових, відбувається посилення хвиль половинної довжини (перекачування енергії хвиль). Гідродинамічною своєрідністю і широким практичним застосуванням відрізняється інший дивовижний об'єкт досліджень параметричних коливань - плівки. Течії тонких шарів (плівок) рідини завжди нестійкі навіть в лінійному наближенні, якщо тільки нижня з межуючих рідин в'язкіша [483], а нелінійне насичення нестійкості в плівках, що рухаються, має місце при комбінованій дії зрушення і поверхневого натягнення. Робилися спроби [423] пояснити загальний механізм нелінійного насичення нестійкості в тонких плівках на прикладі Релей-Тейлорівської нестійкості. Встановлено, що в певному діапазоні зміни параметрів збурення розриває стоячу плівку і не розриває рухливу. Дослідженню впливу зовнішніх збурень нестійких рідких плівок на дисперсійний склад крапель, що утворюються в результаті їх розпаду, присвячені роботи [128, 130, 201, 277, 279, 420, 515]. Так, експериментальне дослідження вимушеної високочастотної дії на стійкість тонких рідких плівок показало [443] його слабкий вплив на темп наростання збурень поверхні плівок, проте вплив на дисперсійний склад крапель значний: зменшення розмірів крапель в середньому на 15-20%, а при деяких частотах до 40%.

У колоїдних системах спостерігалось [448] спонтанне руйнування плівок при критичній товщині. Явище розриву описане на основі чисельного рішення нелінійної крайової задачі. При цьому рядом авторів вказувалося на необхідність врахування ще і термокапілярних ефектів. Вплив динамічної дії повітря, розпад плівок в прямоточному газовому потоці, коливання поверхні плівок, формоутворення границь розділу, їх розпад, вплив оточуючого середовища, характеристики розпилу круглої плівки досліджувалися в [129,130,420,515] і в інших роботах. Поведінка границь розділу плівок нестискуваної рідини, розповсюджуваних в іншому рідкому середовищі, розглядалася як в лінійному, так і в нелінійному наближенні. У рамках лінійної теорії показано [465], що за наявності негативних дотичних напружень розвиваються згинаючі збурення поверхні плівки, що призводять до коливань без зміни товщини плівки. Такі коливання дістали назву згинаючих - на відміну від осесиметричних коливань, пов'язаних зі зміною товщини плівки (симетрично відносно міделевої поверхні).

Відомо, що довгохвильові збурення товщини плівки наростають у разі переваги негативних розтягуючих сил над капілярними силами. Обчислювальні експерименти з нелінійної динаміки вільних рідких плівок показали, що параметричні коливання поверхні розділу з рідиною, що її оточує, посилюються нелінійними ефектами і призводять до її розриву. Дослідження стійкості двовимірної течії в'язкої рідини, проведене методом Гальоркіна [500], показало: в лінійному випадку стійкість визначається числом Рейнольдса Re , тоді як в нелінійному випадку існує ще поріг стійкості (узгоджується з експериментальними даними). Вібраційне збудження параметричних коливань поверхні плівок води і розчинів полімерів, що радіально розтікаються, досліджували В.М. Єнтов із співробітниками [128]. Теоретично розглядалися два типи згинаючих збурень поверхні плівок: концентричні хвилі, що біжать, створюються віброуючим у вертикальній площині диском-розсікачем, на який натікає круглий струмінь, і стоячі хвилі, що утворюються від кромок диска і дефектів на його поверхні. Радіальні течії тонких рідких плівок, зміна їх товщини, профілів швидкості, флуктуації тиску на стінці, стійкість і перехід ламінарної течії в турбулентну досліджувалися японськими ученими [422]. Багато інших задач параметричного збудження і пригнічення коливань в плівках і струменях непровідної рідини розглянуті у ряді оглядів і монографій [95, 120, 130, 221, 227, 237, 260, 418, 495, 525]. В якості зовнішніх дій аналізувалися вібраційні, акустичні, термокапілярні, і т.д.

Термогідродинамічні коливання в гетерогенних середовищах і їх вплив на тепло-, масообмінні і гідродинамічні процеси досліджувалися у ряді радянських і зарубіжних робіт [26,35,87,88,344]. Так, результати експериментальних досліджень коефіцієнтів тепловіддачі і гідравлічного тертя [87] (проведені при стаціонарній і пульсуючій течії газу в пористому середовищі) показали підвищення інтенсивності процесів: при резонансних частотах коефіцієнти для пульсуючого режиму в 2-3 рази перевищують відповідні стаціонарні значення. Параметричне збудження і пригнічення коливань на границях розділу суцільних гомогенних і гетерогенних середовищ і їх вплив на інтенсивність протікання технологічних процесів - нова область сучасної термогідродинаміки і теорії управління процесами з розподіленими параметрами, що бурхливо розвивається. Це порівняно молода наука, що обіцяє великі можливості в створенні нових ресурсо- і енергозбережливих високоефективних технологій і економічних пристроїв великої продуктивності, украй необхідних сучасному народному господарству країни.

Слід зазначити, що внесення збурень порівняно низької інтенсивності зазвичай призводить до деякого зниження показників (нерезонансний випадок), тоді як при високій інтенсивності зовнішніх дій технологічний процес визначається, головним чином, характером цих дій і практично не залежить від характеру незбуреного стану системи. Для практичного використання особливо важливі резонансні ефекти, що дозволяють істотно підвищити інтенсивність процесу або навіть отримати принципово нове явище при порівняно низьких енергетических витратах, що відкриває прямі шляхи до створення нових і поліпшення відомих технологій. Нами проблема параметричного збудження і пригнічення коливань на границях розділу непровідних в'язких рідин розглядалась на прикладі течій плівок (тонких шарів) і гетерогенних гранулярних середовищ. Побудовані фізико-математичні моделі процесів для випадків вібраційних термічних дій були створені та застосовані як мазабезпечення для ЕОМ. Проведені обчислювальні і фізичні експерименти для виявлення закономірностей раніше недосліджених фізичних систем: збудження коливальних процесів заданого виду і руйнування границь розділу плівок в'язких рідин на краплі (диспергування, гранулювання), підвищення інтенсивності термогідродинамічних процесів за наявності коливань параметрів на границях розділу фаз в гетерогенному суцільному середовищі і інші.

Розглядалися не лише малоамплітудні лінійні збурення, але і нелінійні (у тому числі великої амплітуди), і завдання вирішувались в загальній постановці, що охоплює випадки як збудження, так і пригнічення параметричних коливань, специфічні особливості і характерні сфери застосування. Математичні моделі побудовані за модульним типом, вони дозволяють вирішувати цілий клас задач з параметричного збудження і пригнічення коливань на границях розділу непровідних суцільних середовищ і допускають просту адаптацію на інші близькі в математичному відношенні задачі з іншими зовнішніми діями. Розроблені нові технологічні рішення, деякі конкретні конструкції і проведені натурні випробування, які показали їх високу ефективність і унікальність в ряді аспектів. При цьому разом з поліпшенням показників відомих технологій і пристроїв отримані також принципово нові технології і розроблені пристрої, ґрунтовані

на красивих, оригінальних гідродинамічних явищах, теорію яких ще належить розвинути повною мірою в майбутньому. Це, наприклад: розпил рідких плівок з вібруючого диска-розсікача при числах Ейлера, що істотно перевищують одиницю, використання резонансних явищ електромагнітного руйнування плівок, солітонні режими руйнування плівок і деякі інші.

Висновки з проведених досліджень можна зробити наступні. Проблема параметричного збудження і пригнічення коливань на границях розділу суцільних середовищ розв'язувалась нами, зокрема, у зв'язку з практичними потребами. В основному, для розробки нових матеріалів на основі гранульної технології, для якої створювалися методи і облаштування щодо отримання частинок металів заданого розміру і з високою швидкістю кристалізації. Швидкість охолодження була досягнута 10 тисяч градусів за секунду! У США було досягнуто мільйон градусів за секунду, але не для частинок, а для лусочок, утворюваних на охолоджуваній твердій поверхні шляхом високошвидкісного розбивання крапель рідини на цій поверхні. З таких лусочок, на жаль, не можна виготовити високоякісного матеріалу, на відміну від гранул. А з гранул, як однорідних аморфних матеріалів, можна виробити матеріали з унікальними властивостями. Це так звані аморфні метали. Ідея їх створення пішла з оцінки міцності заліза, яку дав академік Я.І. Френкель ще на початку минулого століття, вказавши, що теоретична міцність заліза відрізняється від реальної до 1000 разів [91]. В останні десятиліття розвиваються нові напрями матеріалознавства, пов'язані з нанотехнологіями, але кращі досягнення гранульної технології [92-96], які не мають аналогів у світі, займають своє важливе місце і будуть корисними для майбутніх робіт зі створення нових матеріалів.

Література

1. Колесниченко А.Ф., Казачков И.В., Водянюк В.О., Лысак Н.В. Капиллярные МГД течения со свободными границами. Киев, Наук. думка, 1988, 176с.
2. Колесниченко А.Ф. Технологические МГД-установки и процессы. Киев, Наук. думка, 1980, 192с.
3. Колесниченко А.Ф., Гориславец Ю.М., Казачков И.В. и др. Разработать элементы теории и методы электромагнитного воздействия на технологические процессы в системах с жидкими проводниками. Киев, ИЭД АН УССР. Отчет, 1986, 90с., № Гос. рег. 01840047289.
4. Колесниченко А.Ф., Казачков И.В., Водянюк В.О. и др. Разработка и исследование конструкции генератора струйно-капельного потока диафрагмы опытного теплоядерного реактора (ОТР). Киев-Ленинград-Москва, ИЭД АН УССР-НИИЭФА им. Д.В. Ефремова-ИАЭ им. И.В. Курчатова. Отчет 2-х частях, 1986, 80с., 1987, 53с.
5. Коловандин Б.А. Устойчивость течения проводящей жидкости со свободной поверхностью при наличии магнитного и электрического полей. Прикладная механика, 1965, т.1, с.95-105.
6. Арбузов В.А., Кузнецов Е.А., Носков Н.Н. и др. О параметрическом возбуждении волн на поверхности жидкости. Новосибирск, 1977, 13с. (препринт Ин-т автоматки и электрометрии, СО АН СССР, №57).
7. Березин Ю.А. Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме. Новосибирск, Наука, 1977, 112с.
8. Бояревич В.В., Фрайберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.В. Электровихревые течения. Рига, Зинатне, 1985, 315с.
9. Брискман В.А. Параметрическая стабилизация границ раздела жидкостей. ДАН, 1976, т.226, вып.5, с.1041-1044.
10. Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А. и др. Взаимодействие нелинейных волн в средах без дисперсии. М., Наука, 1983, 151с.
11. Велихов Е.П. Устойчивость плоского пуазейлева течения идеально проводящей жидкости в продольном магнитном поле. ЖЭТФ, 1959, т.36, с.1192-1195.
12. Гагарин А.Г. Влияние постоянного электрического поля на пленочное течение жидкого диэлектрика. ИФЖ, 1985, т.XIVIII, №3, с.432-436.
13. Гидродинамика межфазных поверхностей. Механика, Новое в зарубежной науке. М., Мир, 1984, 210с.

14. Гогосов В.В., Налетова В.А., Тактаров Н.Г. и др. Гидродинамика поверхностных явлений. ПММ, 1984, т.48, вып.3, с.388-396.
15. Ентов В.М. Динамика пленок вязких и упругих жидкостей. М., 1979, 47с. (Препринт/ИПМ АН СССР, №130).
16. Ентов В.М., Султанов Ф.М., Ярин А.Л. Распад жидких пленок под действием перепада давления окружающего газа. ДАН, 1985, т.284, №5, с.1116-1120.
17. Ентов В.М., Ярин А.Л. Динамика струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей. Итоги науки и техники. МЖГ. М., 1984, т.18, с.112-197.
18. Babchin A.J. Frenkel A.L., Levich B.G. Nonlinear saturation of Rayleigh-Taylor instability in thin films// Phys. Fluids.- 1983.- 26.- N 11.- P. 3159-3161.
19. Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. Влияние переменного электромагнитного поля на волнообразование в жидкометаллической пленке. Магнитная гидродинамика. 1985, №3, с.77-82.
20. Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. О разрушении жидкометаллической пленки. находящейся в непроводящей среде, с помощью электромагнитного поля. Магнитная гидродинамика. 1984, №1, с.44-46.
21. Казачков И.В. Электромагнитное возбуждение волн в жидкометаллической пленке. Магнитная гидродинамика, 1985. №3, с.135-137.
22. Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. К вопросу об электромагнитном индуцировании распада жидкометаллических пленок/ Тез. докл. 11 Рижского сов. по магнитной гидродинамике, Рига, ч.1, 1984, с. 135-138.
23. Казачков И.В. К вопросу о распаде жидкометаллической пленки под действием электромагнитного поля. Магнитная гидродинамика, 1984, №3, с.85-88.
24. Казачков И.В. Электромагнитное возбуждение параметрических колебаний в жидкометаллических пленках, распространяющихся в непроводящих средах. Киев, 1986, 52с. (Препринт/Ин-т электродинамики АН УССР, № 454).
25. Казачков И.В. Электромагнитное подавление параметрических колебаний цилиндрических фронтов кристаллизации. Киев, 1986, 49с. (Препринт/Ин-т электродинамики АН УССР, №457).
26. Казачков И.В. Параметрические колебания в гранулярных насыщенных средах. М., 1986, 57с. (Препринт/Ин-т электродинамики АН УССР, №462).
27. Казачков И.В., Лысак Н.В. Комплекс ФОРТРАН-программ для решения нестационарных краевых задач о распространении параметрических колебаний в течении со свободными границами и в насыщенных гранулярных средах. –В кн.: Применение ЭВМ в моделировании задач матфизики. Сб. н. тр. Красноярского ун-та. Красноярск, 1988, с
28. Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. Электромагнитное возбуждение волн на поверхности радиально растекающихся пленок вязкой электропроводной жидкости. Тез. докл. 12 Рижского сов. по магнитной гидродинамике. Рига, 1987, ч.1, с.119-122.
29. Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. Электромагнитное управление распадом жидкометаллических пленок. Всес. межвуз. сб. «Гидроаэромеханика и теория упругости». Днепропетровск, ДГУ, 1987, с.20-24.
30. Ладиков Ю.П. Стабилизация процессов в сплошных средах. М., Наука, 1978, 432с.
31. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1983. 238с.
32. Нелинейные волны: Структуры и бифуркации. Ред. А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович.- М.: Наука.- 1987.- 401 с.
33. Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Матер. XX Сиб. теплофиз. семинара 1976г. Под ред. С.С. Кутателадзе. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1977. 417с.
34. Lomdahl P.S., Layne S.P., Bigio I.J. Solitons in biology// Los Alamos Sci.- 1984.- N 10.- P. 2-22.
35. Korteweg D.J. Vries G. de. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves// Philos. Mag.- 1895.- v. 39.- P. 422- 443.

36. Лаврентьев М.А. К теории длинных волн. Сб. н. тр. ИМ АН УССР, 1946, №8, с.13-69.
37. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. Киев, Наук. думка, 1984, 288с.
38. Lomdahl P.S., Layne S.P., Bigio I.J. Solitons in biology// Los Alamos Sci.- 1984.- N 10.- P. 2-22.
39. Галактионов В.А. О некоторых свойствах бегущих волн в среде с нелинейной теплопроводностью и источником тепла// ЖВММФ, 1981, т.21, №4, с.980-989.
40. Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. –В кн.: Сборник, посвященный 70-летию А.Ф. Иоффе. М., Изд. АН СССР, 1950, с.61-71.
41. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., Наука, 1987. 480с.
42. Балеску. Статистическая механика заряженных частиц. М., Мир, 1967, 514с.
43. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М., Гостехиздат, 1946, 119с.
44. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика, Теория поля и вариационные принципы. М., Мир, 1974, 304с.
45. Зак М.А. Неклассические проблемы механики сплошных сред. Л. Изд. ЛГУ, 1974, 120с.
46. Davis S.H. Moving Contact Lines and Rivulet Instabilities. Part 1. The Static Rivulet// J. Fluid Mech.- 1980.- 98.- P. 225-242.
47. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М., Мир, 1980. 616с.
48. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., Наука, 1977. 656с.
49. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1972. 724с.
50. Richardson L.F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with application to the stresses in a masonry dam// Trans. Roy. Soc. London.- 1910.- Ser. A.- v. 210.- P. 307-357.
51. Горицкий С.В. О постановке стохастических граничных условий в численной модели гранулированной среды.-В кн.: Проблемы прикладной механики. М., МФТИ, 1986, с.49-54.
52. Дородницын А.А. Лекции по численным методам решения уравнений вязкой жидкости. М. ВЦ АН СССР, 1969, 200с.
53. Чен С.И. Численное интегрирование уравнений Навье-Стокса. Ракет. техника и космонавтика, 1970, т.8, №12, с.3-13.
54. Allen D.N. de G., Southwell R.V. Relaxation methods applied to determine the motion in two dimensions of a viscous fluid past a fived cylinder// Quart. J. of Mech. And Appl. Math.- 1955.- v. 8.- P. 129-145.
55. Moretti G. The importance of boundary conditions in the numerical treatment of hyperbolic equations/ Polytechn. Inst. Brooklyn, PIBAL Rept.- 1969.- N 68-34.
56. Thom A., Apelt C.J. Field computations in engineering and physics.- London, N.Y.: C. Van Nostrand Company, Ltd.- 1961.- 168 pp.
57. Thoman D.C., Szewczyk A.A. Numerical solutions of time dependent two dimensional flow of a viscous, incompressible fluid over stationary and rotating cylinders.- Techn. Rept. 66-14.- Notre Dame.- Indiana.
58. Александров В.М., Коваленко Е.В., Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М., Наука, 1986, 336с.
59. Weiland R.H., Davis S.H. Moving Contact Lines and Rivulet Instabilities. Part 2. Long Waves on Flat Rivulets// J. Fluid Mech.- 1981.- 107.- P. 261-280.
60. Dussan V E.B. Hydrodynamic stability and instability of fluid systems with interfaces// Arch. Rat. Mech. Anal.- 1975.- v. 57.- P. 363.
61. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М., Наука. 1978. 336с.
62. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.Н. Осреднение процессов в периодических средах. М., Наука, 1984, 352с.
63. Гольдштик М.А. Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1984, 164с.

64. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т. и др. Механика насыщенных пористых сред. М., Недра, 1970. 335с.
65. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М., Мир, 1984. 472с.
66. Free Boundary Problems: Applications and Theory.- Vol. 3/ Ed. Bossavit A.- Boston: Pitman.- 1985.- 303 pp.
67. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., Наука, 1965, 474с.
68. Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я. Автоколебания неоднородной жидкости, помещенной в электрическое поле. ДАН, 1981, т.256, №2, с.318-320.
69. Гельфгат Ю.М., Лиелаусис О.А., Щербинин Э.В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил. Рига, Зинатне, 1975, 248с. 61,91,228
70. Lindsay K.A., Kelvin-Helmholtz instability for a viscous interface// Acta Mech.- 1984.- 52.- N 1-2.- P. 51-61.
71. Коротеев А.С., Рей И.Н. Неустойчивость Релея-Тейлора в тонких жидкометаллических пленках при наличии магнитного поля. Изв. СО АН СССР, сер. т.н., 1984, №10. вып.2, с.113-116.
72. Васильев В.И., Ладиков Ю.П., Казачков И.В. Об устойчивости и стабилизации гарнисажа в сталеплавильных агрегатах. Киев, 1981, 33с. (Препринт/Ин-т кибернетики АН УССР, №81-18.)
73. Ладиков Ю.П., Васильев В.И., Казачков И.В. Исследование устойчивости гарнисажа в сталеплавильных агрегатах. Автоматика, 1980, №4, с.80-85.
74. Меркулов В.И. Управление движением жидкости. Новосибирск, Наука, 1981. 174с.
75. Drazin P.G. Stability of parallel flow in a oscillating magnetic field// Q. J. Mech.- 1967.- v. 20.- pt.2.- P. 201-218.
76. Басов Н.И., Любартович С.А., Любартович В.А. Виброформирование полимеров. Л., Химия, 1979, 159с.
77. Колебательные явления в многофазных средах и их использование в технологии. Под ред. Р.Ф. Ганиева. Киев, Техника, 1980, 142с.
78. Казачков И.В. Параметрическое возбуждение и подавление колебаний на границах раздела сплошных сред/ Дис. Д-ра физ.-мат. наук.- Киев: Ин-т электродинамики АН УССР.- 1989.- 464 с.
79. Chandrasekhar S. Hydrodyn. and hydromagnetic stability.- Oxford.- Clarendon Press.- 1961.- 654p.
80. Peskin R., Raco R. Ultrasonic atomization of liquids// J. Acoust. Soc. Am.- 1963.- v. 35.- N 9.- P. 1378-1385.
81. Ohnesorge W. Zeitschrift fuer angewandte Mathematik und Mechanik.- 1936.- N 16.- S. 355.
82. Kern J. Zur Hydrodynamik der Rinnsale// Verfahrenstechnik.- 1971.- 5.- S. 289-294.
83. Garnier M. Ro'le de' stabilisant d'un champ magnetique alternatif applique' au voisinage d'une interface// C.R. Acad. Sci. Paris.- 1977.- Se'r B.- v. 284.- P. 365-368.
84. Коровин В.М. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в переменном магнитном поле. ЖПМТФ, 1984, №2, с.94-98.
85. Zak M. Shape instability in thin viscous films and jets// Acta Mech.- 1985.- 55.- N 1-2.- P. 33-50.
86. Неволин В.Г. Параметрическое возбуждение поверхностных волн. ИФЖ, 1984, т. XXVII, №6, с.1028-1042. Обзор.
87. Meixner J. und Reik H.G. Thermodynamic irreversible Prozesse.- Handbuch der Physik/ Ed. S. Fluegge.- Springer.- 1959.- v. VIII/2.- P. 413- 523.
88. Асапе, Такаси, Гоффман. Эксперименты с плоскими жидкими струями. Теор. Основы инж. Расчеты, 1981, т.103, №4, с.198-209.
89. Morley N.B., Malang S., Kirillov I. Thermofluid magnetohydrodynamic issues for liquid breeders// Fusion science and technology.- vol. 47, apr. 2005.- P. 488-501.
90. Ma Yan-Chow. Wilton ripples phenomenon with a background current// Phys. Fluids.- 1985.- Vol. 28.- N 4.- P. 1033-1039.
91. Френкель Я.И. Введение в теорию металлов.- Л.: Наука.- 1972.- 424 с.

92. Бинецкий Г.В., Водянюк В.О., Казачков И.В. Колесниченко А.Ф. Способ получения порошка из расплава/ А.с. СССР №1184153, 1985.
93. Казачков И.В., Колесниченко А.Ф., Кучинский В.П. и др. Способ гранулирования жидких металлов и устройство для его осуществления/ А.с. СССР №1412135, 1988.
94. Казачков И.В., Колесниченко А.Ф., Кучинский В.П. и др. Способ получения металлического порошка из расплавленного металла/ А.с. СССР 1476736, 1989.
95. Водянюк В.О., Иваночок И.Н., Казачков И.В. и др. Устройство для получения гранул из расплавов металлов/ А.с. СССР 1570154, 1990.
96. Казачков И.В., Колесниченко А.Ф., Кучинский В.П. и др. Устройство для производства порошка из жидких металлов / А.с. 1814254 СССР, 1992.

УДК 517.928.1

АСИМПТОТИКА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ ТА ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

О.В. Чорненька, В.О. Богдан

В даній роботі вивчається питання про побудову загального асимптотичного розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$x \frac{dy}{dx} = A(x, \varepsilon)y, \quad (1)$$

з регулярною особливою точкою $x = \infty$; ε - малий параметр, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$; x - незалежна змінна, $x > x_0 > 0$; $y(x, \varepsilon)$ - шукана вектор-функція, $A(x, \varepsilon)$ - квадратна матриця n -го порядку, яка задається асимптотичним розвиненням

$$A(x, \varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x^{-s} A_{sk}. \quad (2)$$

Диференціальні рівняння другого порядку з регулярною особливою точкою вивчалися у роботах [1, 2], де наведено побудову фундаментальної системи розв'язків рівняння

$$\varepsilon y'' + p(z)y' + q(z)y = 0,$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр, $p(z)$, $q(z)$ - нескінченно диференційовні функції.

В роботах Шкіля М.І. та Завізіона Г.В. [3 - 5] розглядається система сингулярно збурених диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h t \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x,$$

де $x=0$ - регулярна особлива точка, ε - малий параметр, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $h \in \mathbb{Z}$, $t \in [0; L]$, $A(t, \varepsilon)$ - матриця розмірів $n \times n$, яка має розвинення за степенями ε :

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r A_r(t).$$

Знайдено умови побудови загального асимптотичного розв'язку цієї системи як у випадку простого спектра матриці $A_0(t)$, так і у випадку кратного спектра головної матриці. Зокрема, показано, що розв'язки можна знайти у вигляді вектора

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) t^{\frac{a^2(\varepsilon)}{\varepsilon^h}} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda(t, \varepsilon) dt\right),$$

де $u(t, \varepsilon)$ n -вимірний вектор, $\lambda(t, \varepsilon)$, $a(\varepsilon)$ - скалярні функції, які мають розвинення за степенями параметра

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r u_r(t), \quad \lambda(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \lambda_r(t), \quad a(\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r a_r.$$

Вивченню питання про побудову загального асимптотичного розв'язку сингулярно збурених систем лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою присвячено роботи [6, 7]. Для систем вигляду

$$\varepsilon^h x^g \frac{dy}{dx} = A(x, \varepsilon)y,$$

де

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^r x^{-s} A_{rs},$$

розглядався випадок кратного спектра головного оператора. Показано, що асимптотичні розв'язки такої системи можна побудувати у вигляді подвійних розвинень за дробовими степенями параметра та відношення незалежної змінної та параметра.

Основним завданням дослідження, яке запропоноване у даній статті, є перевірка можливості побудови загального розв'язку системи (1), (2) у вигляді подвійних розвинень.

Вивчається випадок простого спектра головного оператора, тобто матриця A_{00} має n різних власних значень.

Відомо, що в даному випадку різним власним значенням λ_i , $i = \overline{1, n}$, матриці A_{00} , відповідають різні власні вектори φ_i , $i = \overline{1, n}$.

Розглянемо матриці $(A_{00} - \lambda_i E)^*$, $i = \overline{1, n}$, які є спряженими з $A_{00} - \lambda_i E$, $i = \overline{1, n}$. Тоді вектори ψ_i , $i = \overline{1, n}$, – елементи нуль-простору для матриці $(A_{00} - \lambda_i E)^*$, $i = \overline{1, n}$. Вектори ψ_i можна визначити так, щоб відповідні скалярні добутки визначалися рівністю

$$(\varphi_i \cdot \psi_i) = 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

У подальших викладках будемо передбачати, що рівності (3) виконується.

Доведено наступну теорему.

Теорема 1. Якщо матриця A_{00} має n різних власних значень, то система рівнянь (1) має n частинних формальних розв'язків вигляду

$$y_i(x, \varepsilon) = u_i(x, \varepsilon) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_i(t, \varepsilon)}{t} dt\right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

де $u_i(x, \varepsilon)$ – n -вимірні вектори, $i = \overline{1, n}$, $\lambda_i(x, \varepsilon)$ – скалярні функції, $i = \overline{1, n}$, що зображаються формальними розвиненнями

$$u_i(x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^{-s} \varepsilon^k u_{sk}^{(i)}, \quad \lambda_i(x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^{-s} \varepsilon^k \lambda_{sk}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Доведення. Основна ідея доведення даної теореми полягає у визначенні коефіцієнтів розвинень (5). Для цього підставимо вектори (4) у систему (1). Знайдемо

$$\frac{dy_i(x, \varepsilon)}{dx} = \frac{du_i(x, \varepsilon)}{dx} \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_i(t, \varepsilon)}{t} dt\right) + u_i(x, \varepsilon) \cdot \frac{\lambda_i(x, \varepsilon)}{x} \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_i(t, \varepsilon)}{t} dt\right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді система (1) запишеться наступним чином

$$x \left(\frac{du_i(x, \varepsilon)}{dx} \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_i(t, \varepsilon)}{t} dt\right) + u_i(x, \varepsilon) \cdot \frac{\lambda_i(x, \varepsilon)}{x} \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_i(t, \varepsilon)}{t} dt\right) \right) = A(x, \varepsilon) u_i(x, \varepsilon) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_i(t, \varepsilon)}{t} dt\right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Оскільки $\exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_i(t, \varepsilon)}{t} dt\right) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, то отримаємо системи вигляду

$$x \frac{du_i(x, \varepsilon)}{dx} + u_i(x, \varepsilon) \cdot \lambda_i(x, \varepsilon) = A(x, \varepsilon) u_i(x, \varepsilon), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Підставивши розвинення (2), (5) в системи (6) та врахувавши, що

$$\frac{du_i(x, \varepsilon)}{dx} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-s) \cdot x^{-s-1} \varepsilon^k u_{sk}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n},$$

отримаємо рівності

$$\begin{aligned} x \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-s) \cdot x^{-s-1} \varepsilon^k u_{sk}^{(i)} + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^{-s} \varepsilon^k u_{sk}^{(i)} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^{-s} \varepsilon^k \lambda_{sk}^{(i)} = \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x^{-s} A_{sk} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^{-s} \varepsilon^k u_{sk}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Використавши властивості подвійних степеневих рядів, прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях параметра та змінної. Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Зокрема, прирівнюючи коефіцієнти при $\left(\frac{1}{x}\right)^0 \varepsilon^0$, найпростіші рівняння такої системи запишуться

у вигляді:

$$(A_{00} - \lambda_{00}^{(i)} E) u_{00}^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

тобто коефіцієнти $\lambda_{00}^{(i)}$ та $u_{00}^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, розвинень (5) є відповідно власними числами та власними векторами матриці A_{00}

$$\lambda_{00}^{(i)} = \lambda_i, \quad u_{00}^{(i)} = \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Наступні алгебраїчні системи рівнянь, отримані прирівнюванням коефіцієнтів при

$\left(\frac{1}{x}\right)^0 \varepsilon^k$, $k \geq 1$, за умови (8) запишуться у вигляді

$$(A_{00} - \lambda_i E) u_{0k}^{(i)} = b_{0k}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k \geq 1, \quad (9)$$

де вектори

$$b_{0k}^{(i)} = \sum_{m=1}^{k-1} \lambda_{0m}^{(i)} \cdot u_{0,k-m}^{(i)} + \lambda_{0k}^{(i)} \cdot \varphi_i - A_{0k} \cdot \varphi_i - \sum_{m=1}^{k-1} A_{0m} \cdot u_{0,k-m}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k \geq 1.$$

З умови розв'язності систем (9) $(b_{0k}^{(i)} \cdot \psi_i) = 0$, $k \geq 1$, можна знайти

$$\lambda_{0k}^{(i)} = \frac{1}{(\varphi_i \cdot \psi_i)} \left(\left(A_{0k} \cdot \varphi_i + \sum_{m=1}^{k-1} A_{0m} \cdot u_{0,k-m}^{(i)} - \sum_{m=1}^{k-1} \lambda_{0m}^{(i)} \cdot u_{0,k-m}^{(i)} \right) \cdot \psi_i \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad k \geq 1,$$

за умовою (3)

$$\lambda_{0k}^{(i)} = \left(\left(A_{0k} \cdot \varphi_i + \sum_{m=1}^{k-1} A_{0m} \cdot u_{0,k-m}^{(i)} - \sum_{m=1}^{k-1} \lambda_{0m}^{(i)} \cdot u_{0,k-m}^{(i)} \right) \cdot \psi_i \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad k \geq 1. \quad (10)$$

Тоді

$$u_{0k}^{(i)} = H_i b_{0k}^{(i)} + \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad k \geq 1, \quad (11)$$

де H_i , $i = \overline{1, n}$, - узагальнено обернені матриці до $A_{00} - \lambda_i E$, $i = \overline{1, n}$.

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях $\left(\frac{1}{x}\right)^i \varepsilon^k$, $s \geq 1$, $k \geq 0$, отримаємо системи

$$(A_{00} - \lambda_i E) u_{sk}^{(i)} = b_{sk}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad s \geq 1, \quad k \geq 0, \quad (12)$$

де вектори

$$b_{sk}^{(i)} = \tilde{b}_{sk}^{(i)} + \lambda_{sk}^{(i)} \cdot \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad s \geq 1, \quad k \geq 0, \quad (13)$$

$$b_{sk}^{(i)} = \sum_{j=0}^s \sum_{m=1}^{k-1} \lambda_{jm}^{(i)} \cdot u_{s-j, k-m}^{(i)} + \sum_{j=0}^{s-1} \lambda_{jk}^{(i)} \cdot u_{s-j, 0}^{(i)} + \sum_{j=1}^s \lambda_{j0}^{(i)} \cdot u_{s-j, k}^{(i)} -$$

$$- \sum_{j=1}^s \sum_{m=0}^k A_{jm} \cdot u_{s-j, k-m}^{(i)} - \sum_{m=1}^{k-1} A_{0m} \cdot u_{s, k-m}^{(i)} - (s-1) u_{s-1, k}^{(i)}.$$

З умови розв'язності систем (12), (13) та врахувавши (3) знайдемо числа

$$\lambda_{sk}^{(i)} = \left(\tilde{b}_{sk}^{(i)} \cdot \psi_i \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad s \geq 1, \quad k \geq 0. \quad (14)$$

Тоді вектори

$$u_{ik}^{(i)} = H_i b_{ik}^{(i)} + \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad s \geq 1, \quad k \geq 0. \quad (15)$$

Отже, система (1) у випадку простого спектра головної матриці A_{00} має n частинних формальних розв'язків вигляду (4), а коефіцієнти розвинень (5) визначаються формулами (11), (15) та (10), (14) відповідно. Теорему 1 доведено.

Для обґрунтування асимптотичних властивостей побудованих розв'язків розглянемо наближення вектор-функцій (4)

$$y_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) = u_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_{mp}^{(i)}(t, \varepsilon)}{t} dt\right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

де вектори $u_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon)$ та функції $\lambda_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon)$ задаються скінченними сумами

$$u_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \sum_{k=0}^p x^{-s} \varepsilon^k u_{sk}^{(i)}, \quad \lambda_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \sum_{k=0}^p x^{-s} \varepsilon^k \lambda_{sk}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Враховуючи алгоритм побудови розв'язків (4) та визначення коефіцієнтів (5), наближення (16) задовольняє систему (1) з точністю $O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1}\right) + O(\varepsilon^{p+1})$, тобто

$$x \frac{dy_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon)}{dx} = A(x, \varepsilon) y_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) + \left[O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1}\right) + O(\varepsilon^{p+1}) \right] \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_{mp}^{(i)}(t, \varepsilon)}{t} dt\right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Застосовуючи методи [8, ст. 134 – 140], доведено таку теорему.

Теорема 2. Якщо виконуються умови $\text{Re}(\lambda_i + 1) < 0$, $i = \overline{1, n}$, то для кожного формального розв'язку (4) системи (1) існує такий точний розв'язок $\tilde{y}_i(x, \varepsilon)$, для якого формальний розв'язок (4) є його асимптотичним розвиненням при $x \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$. При цьому виконуються нерівності

$$\|y_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) - \tilde{y}_i(x, \varepsilon)\| \leq c \cdot \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1} + \varepsilon^p \left(\frac{1}{x}\right) \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Доведення. Введемо в розгляд вектор-функції

$$z_i(x, \varepsilon) = y_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) - \tilde{y}_i(x, \varepsilon), \quad i = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Згідно (18) маємо

$$x \frac{dz_i(x, \varepsilon)}{dx} = A(x, \varepsilon)z_i(x, \varepsilon) + \left[O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1}\right) + O(\varepsilon^{p+1}) \right] \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_{mp}^{(i)}(t, \varepsilon)}{t} dt\right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Розв'язки рівняння (20) будемо шукати у вигляді

$$z_i(x, \varepsilon) = U_{mp}(x, \varepsilon) \cdot w_i(x, \varepsilon), \quad i = \overline{1, n} \quad (21)$$

де $U_{mp}(x, \varepsilon)$ - матриця n -го порядку стовпцями якої є вектори $u_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$.

Підставивши (21) у рівняння (20), отримаємо

$$xU_{mp}(x, \varepsilon) \frac{dw_i(x, \varepsilon)}{dx} = \left[A(x, \varepsilon)U_{mp}(x, \varepsilon) - x \frac{dU_{mp}(x, \varepsilon)}{dx} \right] w_i(x, \varepsilon) + \left[O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1}\right) + O(\varepsilon^{p+1}) \right] \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_{mp}^{(i)}(t, \varepsilon)}{t} dt\right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Додамо та віднімемо від правої частини отриманого рівняння добуток $U_{mp}(x, \varepsilon) \cdot \Lambda_{mp}(x, \varepsilon) \cdot w_i(x, \varepsilon)$, де матриця $\Lambda_{mp}(x, \varepsilon) = \text{diag}\{\lambda_{mp}^{(1)}(t, \varepsilon), \lambda_{mp}^{(2)}(t, \varepsilon), \dots, \lambda_{mp}^{(n)}(t, \varepsilon)\}$. Отримаємо рівняння

$$xU_{mp}(x, \varepsilon) \frac{dw_i(x, \varepsilon)}{dx} = \left[A(x, \varepsilon)U_{mp}(x, \varepsilon) - x \frac{dU_{mp}(x, \varepsilon)}{dx} - U_{mp}(x, \varepsilon)\Lambda_{mp}(x, \varepsilon) \right] w_i(x, \varepsilon) + U_{mp}(x, \varepsilon)\Lambda_{mp}(x, \varepsilon)w_i(x, \varepsilon) + \left[O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1}\right) + O(\varepsilon^{p+1}) \right] \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_{mp}^{(i)}(t, \varepsilon)}{t} dt\right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Враховуючи доведення теореми 1, маємо

$$xU_{mp}(x, \varepsilon) \frac{dw_i(x, \varepsilon)}{dx} = \left[O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^m\right) + O(\varepsilon^p) \right] w_i(x, \varepsilon) + U_{mp}(x, \varepsilon)\Lambda_{mp}(x, \varepsilon)w_i(x, \varepsilon) + \left[O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1}\right) + O(\varepsilon^{p+1}) \right] \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_{mp}^{(i)}(t, \varepsilon)}{t} dt\right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (22)$$

Оскільки матриця $U_{mp}(x, \varepsilon)$ - неособлива, то існує обернена до неї матриця $U_{mp}^{-1}(x, \varepsilon)$.

Помножимо на цю матрицю рівність (22). Отримаємо

$$x \frac{dw_i(x, \varepsilon)}{dx} = \left[O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^m\right) + O(\varepsilon^p) \right] w_i(x, \varepsilon) + \Lambda_{mp}(x, \varepsilon)w_i(x, \varepsilon) + \left[O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1}\right) + O(\varepsilon^{p+1}) \right] \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_{mp}^{(i)}(t, \varepsilon)}{t} dt\right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (23)$$

Введемо в розгляд діагональну матрицю

$$W_{mp}(x, \varepsilon) = \text{diag}\left\{ \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_{mp}^{(1)}(t, \varepsilon)}{t} dt\right), \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_{mp}^{(2)}(t, \varepsilon)}{t} dt\right), \dots, \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_{mp}^{(n)}(t, \varepsilon)}{t} dt\right) \right\},$$

яка задовольняє рівняння

$$x \frac{dW_{mp}(x, \varepsilon)}{dx} = \Lambda_{mp}(x, \varepsilon)W_{mp}(x, \varepsilon). \quad (24)$$

Враховуючи (24) перейдемо від диференціального рівняння (23) до інтегрального

$$w_i(x, \varepsilon) = \int_{x_0}^x K_{mp}(x, t, \varepsilon) \left[O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{m+1}\right) + O\left(\varepsilon^p \frac{1}{t}\right) \right] w_i(t, \varepsilon) dt + \\ + \int_{x_0}^x K_{mp}(x, t, \varepsilon) \left[O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{m+2}\right) + O\left(\varepsilon^p \left(\frac{1}{t}\right)^2\right) \right] \exp\left(\int_{x_0}^t \frac{\lambda_{mp}^{(i)}(t_1, \varepsilon)}{t_1} dt_1\right) dt, \quad (25)$$

де

$$K_{mp}(x, t, \varepsilon) = W_{mp}(x, \varepsilon) \cdot W_{mp}^{-1}(x, \varepsilon), \quad (26)$$

$$K_{mp}(x, t, \varepsilon) = \text{diag} \left\{ \exp\left(\int_t^x \frac{\lambda_{mp}^{(1)}(t_1, \varepsilon)}{t_1} dt_1\right), \exp\left(\int_t^x \frac{\lambda_{mp}^{(2)}(t_1, \varepsilon)}{t_1} dt_1\right), \dots, \exp\left(\int_t^x \frac{\lambda_{mp}^{(n)}(t_1, \varepsilon)}{t_1} dt_1\right) \right\}.$$

Якщо враховувати розклади (17) для функцій $\lambda_{mp}^{(i)}(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$, і умови $\text{Re}(\lambda_i + 1) < 0$, $i = \overline{1, n}$, то кожен діагональний елемент матриці $K_{mp}(x, t, \varepsilon)$ обмежений по модулю, тоді сама матриця обмежена по нормі.

Розв'язок рівняння (25) побудуємо методом послідовних наближень. Нехай

$$w_i^{(0)}(x, \varepsilon) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

$$w_i^{(k+1)}(x, \varepsilon) = \int_{x_0}^x K_{mp}(x, t, \varepsilon) \left[O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{m+1}\right) + O\left(\varepsilon^p \frac{1}{t}\right) \right] w_i^{(k)}(x, \varepsilon) dt + \\ + \int_{x_0}^x K_{mp}(x, t, \varepsilon) \left[O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{m+2}\right) + O\left(\varepsilon^p \left(\frac{1}{t}\right)^2\right) \right] \exp\left(\int_{x_0}^t \frac{\lambda_{mp}^{(i)}(t_1, \varepsilon)}{t_1} dt_1\right) dt, \quad i = \overline{1, n}. \quad (27)$$

Зокрема

$$w_i^{(1)}(x, \varepsilon) = \int_{x_0}^x K_{mp}(x, t, \varepsilon) \left[O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{m+2}\right) + O\left(\varepsilon^p \left(\frac{1}{t}\right)^2\right) \right] \exp\left(\int_{x_0}^t \frac{\lambda_{mp}^{(i)}(t_1, \varepsilon)}{t_1} dt_1\right) dt, \quad i = \overline{1, n}.$$

Враховавши $\text{Re}(\lambda_i + 1) < 0$, $i = \overline{1, n}$, та $x > x_0$, оцінимо по модулю інтеграли

$$\left| \int_{x_0}^x \exp\left(\int_{x_0}^t \frac{\lambda_i}{t_1} dt_1\right) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x \exp(\lambda_i (\ln t - \ln x_0)) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x \exp\left(\ln \left| \frac{t}{x_0} \right|^{\lambda_i}\right) dt \right| = \\ = \left| \int_{x_0}^x \left| \frac{t}{x_0} \right|^{\lambda_i} dt \right| \leq \int_{x_0}^x \left| \frac{t}{x_0} \right|^{\lambda_i} dt = \frac{1}{|\lambda_i|} \left| \left| \frac{x}{x_0} \right|^{\lambda_i + 1} - 1 \right| < \frac{1}{|\lambda_i|} < c_1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді норма різниць

$$\|w_i^{(1)}(x, \varepsilon) - w_i^{(0)}(x, \varepsilon)\| \leq c_2 \cdot \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1} + \varepsilon^p \left(\frac{1}{x}\right) \right) \cdot c_3 \left| \int_{x_0}^x \exp\left(\int_{x_0}^t \frac{\lambda_i}{t_1} dt_1\right) dt \right| < c_4 \cdot \\ \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1} + \varepsilon^p \left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

де $c_4 = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$

$$\left\| K_{mp}(x, t, \varepsilon) \left[O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{m+2}\right) + O\left(\varepsilon^p \left(\frac{1}{t}\right)^2\right) \right] \right\| \leq c_2 \cdot \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+2} + \varepsilon^p \left(\frac{1}{x}\right)^2 \right),$$

$$\exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\lambda_{mp}^{(i)}(t, \varepsilon) - \lambda_i}{t_1} dt_1\right) \leq c_3.$$

Аналогічно

$$w_i^{(k+1)}(x, \varepsilon) - w_i^{(k)}(x, \varepsilon) = \int_{x_0}^x K_{mp}(x, t, \varepsilon) \left[O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{m+1}\right) + O\left(\varepsilon^p \frac{1}{t}\right) \right] (w_i^{(k)}(x, \varepsilon) - w_i^{(k-1)}(x, \varepsilon)) dt,$$

$$\|w_i^{(k+1)}(x, \varepsilon) - w_i^{(k)}(x, \varepsilon)\| \leq c_4 \left[O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^m\right) + O(\varepsilon^p) \right] \|w_i^{(k)}(x, \varepsilon) - w_i^{(k-1)}(x, \varepsilon)\|.$$

Якщо $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, то $c_4 \left[O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^m\right) + O(\varepsilon^p) \right] \leq \frac{1}{2}$, $c_4 \cdot \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+2} + \varepsilon^p \left(\frac{1}{x}\right)^2 \right) \leq \tilde{c}$.

$$\|w_i^{(k+1)}(x, \varepsilon) - w_i^{(k)}(x, \varepsilon)\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot \tilde{c}.$$

Отже, послідовність $\{w_i^{(k)}(x, \varepsilon)\}$ рівномірно збігається до деякої неперервної функції $w_i(x, \varepsilon)$. Перейшовши до границі при $k \rightarrow \infty$ у виразі (27), приходимо до висновку, що шукана вектор функція є розв'язком інтегрального рівняння (25). Оцінивши за нормою вираз (25), маємо оцінки

$$\|w_i(x, \varepsilon)\| \leq c_4 \left[O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^m\right) + O(\varepsilon^p) \right] \|w_i(x, \varepsilon)\| + c_4 \cdot \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1} + \varepsilon^p \left(\frac{1}{x}\right) \right), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\|w_i(x, \varepsilon)\| \leq c_4 \cdot \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1} + \varepsilon^p \left(\frac{1}{x}\right) \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Враховуючи (19), (21) та $\|U_{mp}(x, \varepsilon)\| \leq c_5$, $c = c_4 \cdot c_5$, отримаємо оцінки

$$\|y_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) - \tilde{y}_i(x, \varepsilon)\| \leq c \cdot \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1} + \varepsilon^p \left(\frac{1}{x}\right) \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Теорему 2 доведено.

Таким чином, у даній роботі доведено, що загальний асимптотичний розв'язок системи (1) у випадку простого спектра головного оператора матриці (2) можна побудувати у вигляді подвійних розвинень за цілими степенями параметра та незалежної змінної.

Література

1. Рабинович Ю. Л. Линейные уравнения с малым параметром при старшей производной в окрестности регулярно-особой точки / Ю. Л. Рабинович, М. М. Хапаев // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 129, № 2. – С. 268–271.
2. Юдина А. С. О методе регуляризации для уравнений с регулярной особой точкой / А. С. Юдина // Труды Московского ордена Ленина энергетического института : (прикладные вопросы математики) : тематический сборник. – М., 1978. – Вып. 357. – С. 119–121.
3. Завизион Г. В. Сингулярно возмущенная система дифференциальных уравнений с рациональной особенностью / Г. В. Завизион // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 7. – С. 867–878.
4. Завізіон Г. В. Зведення системи диференціальних рівнянь з виродженням у точці / Г. В. Завізіон // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1 “Фізико-математичні науки”. – 2003. – Вип. 4 – С. 177–191.
5. Шкіль М. І., Завізіон Г. В. Асимптотичне зведення сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з регулярною особливістю до діагонального вигляду / М. І. Шкіль, Г. В. Завізіон // Доп. НАН України. – 2000. – № 12. – С. 25–29.
6. Яковець В. П. Асимптотичні розв’язки сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / В. П. Яковець, О. В. Головченко // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 417–432.
7. Яковець В. П. Побудова асимптотичних розв’язків сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою у випадку кратного спектра граничної матриці / В. П. Яковець, О. В. Головченко // Нелінійні коливання. – 2008. – Т. 11, № 1. – С. 128–144.
8. Шкіль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н. И. Шкіль, И. И. Старун, В. П. Яковец – К. : Выща шк., 1991. – 207 с.



Фізика та астрономія

УДК 621.315 535.3:539.2

ПОВЕРХНЕВІ ПОЛЯРИТОННІ ЗБУДЖЕННЯ В ПЛІВКАХ ZnO НА ПІДКЛАДКАХ З ОПТИЧНОГО СКЛА

Є.Ф. Венгер¹, Л.Ю. Мельничук², О.В. Мельничук², Т.В. Семікіна¹

¹Інститут фізики напівпровідників імені В.Є. Лашкарьова НАН України, Київ,
Україна, 03028, Київ 28, проспект Науки 41

²Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, м. Ніжин, Україна,
16600, вул. Крапив'янського 2, E-mail: mov310@mail.ru

Уперше модифікованим методом порушеного повного внутрішнього відбивання (ППВВ) теоретично та експериментально досліджено плівки ZnO на підкладках з оптичного скла при різних оптичних та електрофізичних параметрах плівок, отриманих при одній і тій же температурі осадження в області 400 – 1400 см⁻¹. Отримані із спектрів ІЧ-відбивання параметри плівки ZnO вказують на наявність у спектрах ППВВ частотних «вікон», в яких збуджуються поверхневі фононні та плазмон-фононні поляритони. Теоретичні розрахунки задовільно узгоджуються з експериментальними результатами. Побудовано та досліджено дисперсійні залежності високо- та низькочастотної гілок сильно легованої плівки ZnO на підкладках із оптичного скла.

1. Вступ

Завдяки своїм унікальним властивостям (висока фоточутливість, високий вихід фото- і катодолюмінесценції, наявність піро- і п'єзоєфекту тощо) тонкі сильно леговані плівки оксиду цинку на діелектричних та напівпровідникових підкладках у сьогоденні привертають все більшу увагу дослідників, оскільки представляють собою основу найрізноманітніших опто- та акустoeлектронних приладів, побудованих на використанні поверхневих хвиль [1]. Перевагою цих приладів є їх мініатюрність, висока ефективність роботи в широкому частотному діапазоні, а також можливість інтеграції з іншими мікроелектронними елементами [2 – 4].

У роботах Венгера Є.Ф. та ін. значною мірою досліджувались монокристали оксиду цинку, які займають особливе місце серед широкозонних напівпровідників ($E_g = 3,37$ eV), що кристалізуються у структурі вюртциту та належать до просторової групи C_{6V}^4 ($P6_3mc$) [5 – 7]. Однак, не зважаючи на цілу низку позитивних характеристик монокристалів оксиду цинку, слід відмітити, що для вказаного напівпровідника характерним є один суттєвий недолік – досить висока собівартість. Зовсім інша ситуація має місце при використанні плівок ZnO, які поєднують у собі як властивості монокристалів оксиду цинку, так і нові властивості, характерні лише плівкам, а саме висока оптична прозорість і значення показника заломлення плівки оксиду цинку у видимій області спектра.

Авторами [8, 9] методами спектроскопії ІЧ-відбивання проведено комплексні дослідження у структурі повітря – плівка ZnO – оптичне скло, з яких випливає, що коефіцієнт відбивання в області «залишкових» променів добре моделюється при використанні об'ємних взаємно узгоджених параметрів для одноосциляторної математичної моделі, отриманих у роботах [5, 7] для монокристалів оксиду цинку. Проведені дослідження підтвердили перспективність методу ІЧ-спектроскопії при визначенні як електрофізичних властивостей плівок ZnO, так і ступеня їх текстурованості. На основі дисперсійного аналізу вивчених структур показано, що неруйнівні методи ІЧ-спектроскопії дозволяють визначати концентрацію електронів, рухливість та питому провідність досліджуваних зразків у межах похибки експерименту, не руйнуючи їх. Крім того, отримані дані дозволили розра-

хувати спектр діелектричної проникності в усій ІЧ-області спектра та з'ясувати проміжки з від'ємною діелектричною проникністю. Як відомо [7, 10], саме в області частот, де діелектрична проникність одного з межуючих середовищ має від'ємні значення, вздовж плоскої межі їх поділу можливе розповсюдження поверхневих хвиль *TM*-типу, амплітуда поля яких експоненційно зменшується в напрямку від межі поділу середовищ. Відповідні таким хвилям збудження називають поверхневими поляритонами (ПП) [7, 10]. Однак, не зважаючи на велику кількість публікацій щодо плівок оксиду цинку, в літературі відсутні дані щодо вивчення взаємодії електромагнітного випромінювання з різними типами коливань (фонони, плазмони, наприклад) та умов, за яких відбувається збудження і розповсюдження поверхневих поляритонів у тонких полікристалічних прозорих сильно легованих плівках оксиду цинку на підкладках з оптичного скла.

У даній роботі проведено теоретичні та експериментальні дослідження областей можливого існування, збудження та розповсюдження поверхневих поляритонів у тонких полікристалічних прозорих сильно легованих плівках оксиду цинку на підкладках з оптичного скла при різній концентрації вільних носіїв зарядів (електронів) та товщині плівки.

2. Експеримент

Для дослідження ПП фононного та плазмон-фононного типу сильно легованих плівок оксиду цинку найбільш зручним серед підкладок є діелектрики з оптичного скла, для якого відсутні будь-які осциляції в інфрачервоній області спектра [8, 9].

Плівки оксиду цинку були отримані методом атомно-шарового осадження на підкладки з оптичного скла. Більш детальний опис методу проведено в роботі [11]. Згідно даних роботи [12] вирощування відбувалося при використанні діетил цинку і парів дейонізованої води, як прекурсорів цинку і кисню. Тиск у камері вирощування становив декілька мілібар. Плівки ZnO на підкладках з оптичного скла отримано за температури 200 °C. Товщина плівок ZnO вимірювалась за допомогою рефлектометра Mikropack Nanocalc 2000. За допомогою атомно-силового мікроскопа (AFM; Veeco, Digital Instruments) в режимі виявлення було досліджено морфологію поверхні плівок, а методом рентгенівської дифракції – структурні характеристики плівок ZnO. Як показано в роботі [12], усі плівки ZnO є полікристалічними і мають тільки одну кристалографічну орієнтацію $E \perp C$. Крім того, поверхня плівки ZnO є однорідною при шорсткості у межах 1,5 нм.

Вимірювання спектрів ППВВ проводились за кімнатної температури при використанні спектрофотометра ИКС-31 з приставкою для відбивання НПВО-2 при використанні еталонного дзеркала в області частот 400 – 1400 cm^{-1} . Спектри $I(v)/I_0(v)$ записані з поляризатором, ступінь поляризації якого $P = 0,98$. Значення коефіцієнта ППВВ одержано з похибкою 1 – 2 %. Вимірювання $I(v)/I_0(v)$ проводились при $T = 300 \text{ K}$.

3. Теорія та аналіз спектрів ППВВ

Як відомо, одним із неруйнівних методів дослідження оптичних та електрофізичних властивостей тонких сильно легованих плівок оксиду цинку, що дозволяє контролювати їх якість і структурну досконалість, є метод поляритонної спектроскопії [7]. Останній дає інформацію не лише про фізико-хімічні властивості плівки, але й про параметри підкладки та стан якості обробки її поверхні.

Суть методу ППВВ полягає в наступному [7, 10]: при повному внутрішньому відбиванні промінь ІЧ-випромінювання здатний проникнути з прозорого в ІЧ-області оптично більш густого середовища в середовище оптично менш густе на глибину, що співрозмірна з довжиною падаючої хвилі ІЧ-діапазону. За таких умов, якщо оптично менш густе середовище володіє поглинанням, то інтенсивність світла, що проникає в досліджуване середовище, послаблюється і відбивання не буде повним. Слід пам'ятати, що досліджуване середовище володіє в даній ІЧ-області сильним поглинанням. За таких умов спектральні прилади будуть реєструвати спектр порушеного повного внутрішнього відбивання.

Область залишкових променів оксиду цинку розміщена в діапазоні між частотами поперечного і поздовжнього оптичного фонона. Враховуючи, що плівки ZnO є полікристалічними, використаємо отримані взаємоузгоджені параметри одноосцилярної моделі монокристалів ZnO при орієнтації $E \perp C$ (табл. 1).

Таблиця 1. Взаємно узгоджені параметри одноосцилярної моделі монокристалів ZnO при орієнтації $E \perp C$ [2, 14]

ϵ_0	ϵ_∞	$\nu_T, \text{см}^{-1}$	$\nu_L, \text{см}^{-1}$
8,1	3,95	412	591

Більш детальна методика отримання взаємно узгоджених параметрів для одноосцилярної моделі описана в роботах [5 – 7]. Авторами [5] показано, що ZnO характеризується значною анізотропією властивостей фононної і слабкою анізотропією плазмової підсистем. Завдяки цьому плівки оксиду цинку є добрими модельними об'єктами, зручними під час дослідження анізотропії оптичних та електрофізичних властивостей в ІЧ-області спектра за наявності зв'язку довгохвильових оптичних коливань ґратки з електронною плазмою.

Розрахунок проведено за формулами, що враховують взаємодію ІЧ-випромінювання з фононною та плазмовою підсистемами плівки ZnO для випадку $E \perp C$ на «напівнескінченних» підкладах з оптичного скла при використанні математичного редактора MATCAD:

$$R(\nu, \phi) := \left(\frac{1 + i \cdot P(\nu, \phi)}{1 - i \cdot P(\nu, \phi)} \right)^2$$

$$R(\nu, \phi) := \frac{\beta_2(\nu, \phi) \cdot \beta_3(\nu, \phi) \cdot A(\nu, \phi) + \beta_2(\nu, \phi) \cdot \tanh(k_2(\nu, \phi) \cdot 2 \cdot \pi \cdot d)}{\beta_1(\nu, \phi) \cdot \beta_2(\nu, \phi) + \beta_3(\nu, \phi) \cdot A(\nu, \phi) \cdot \tanh(k_2(\nu, \phi) \cdot 2 \cdot \pi \cdot d)}$$

$$A(\nu, \phi) := \frac{\beta_4(\nu, \phi) + \beta_3(\nu, \phi) \cdot \tanh(k_3(\nu, \phi) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot l)}{\beta_3(\nu, \phi) + \beta_4(\nu, \phi) \cdot \tanh(k_3(\nu, \phi) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot l)}$$

$$\beta_1(\nu, \phi) := \frac{\epsilon_1}{k_1(\nu, \phi)} \quad \beta_2(\nu, \phi) := \frac{\epsilon_2}{k_2(\nu, \phi)} \quad \beta_3(\nu, \phi) := \frac{\epsilon_3}{k_3(\nu, \phi)}$$

$$\beta_4(\nu, \phi) := \frac{\epsilon_4}{k_4(\nu, \phi)}$$

$$k_1(\nu, \phi) := \sqrt{\epsilon_1} \cdot \cos(\phi) \quad k_2(\nu, \phi) := \sqrt{(k_x(\nu, \phi))^2 - \epsilon_2} \quad k_3(\nu, \phi) := \sqrt{(k_x(\nu, \phi))^2 - \epsilon_3(\nu, \phi)}$$

$$k_4(\nu, \phi) := \sqrt{(k_x(\nu, \phi))^2 - \epsilon_4(\nu, \phi)} \quad k_x(\nu, \phi) := \sqrt{\epsilon_1} \cdot \sin(\phi) ;$$

знаки 1 – 4 належать відповідно призмі ППВВ, вакуумному зазору товщиною d_3 , сильно легованій напівпровідниковій плівці ZnO товщиною $d_{\text{пл}}$ та «напівнескінченній» підкладці з оптичного скла; $\epsilon_3(\nu)$ – діелектрична проникність плівки, яка адитивно враховує вклад активних оптичних фононів ν_T і плазмонів ν_p у тонких сильно легованих плівках ZnO:

$$\epsilon_3(\nu) = \epsilon_{\infty 3} \left(1 + \frac{\nu_{T3}^2 (\epsilon_{03} - \epsilon_{\infty 3})}{\nu_{T3}^2 - \nu^2 - i\nu\gamma_{\phi 3}} - \frac{\nu_{p3}^2}{\nu(\nu + i\gamma_{p3})} \right);$$

$\epsilon_4(\nu)$ – діелектрична проникність підкладки з оптичного скла; всі інші позначення є загальноузвичайними.

При розрахунках спектрів ППВВ використано взаємоузгоджені параметри оксиду цинку, представлені в табл. 1. Розрахунок проведено при використанні даних по товщині і концентрації вільних носіїв зарядів, отриманих незалежними вимірюваннями і представлених у табл. 2. Що стосується коефіцієнтів затухання плазмонів у плівках ZnO, то розрахунок усіх кривих проведено за умови $\nu_p = \gamma_p$. Затухання фононної підсистеми взято для всіх зразків, рівним 15 см^{-1} . Як показано в роботах [8, 9], при вказаних параметрах спостерігається найкраще узгодження теорії з експериментальними даними (табл. 2). Похибка не перевищує 3 %.

На рис. 1, а – в (лінії 1 – 3) представлено розрахункові залежності коефіцієнта ППВВ сильно легованої плівки ZnO на оптично ізотропній підкладці з оптичного скла від частоти. Параметри плівки, при яких проведено розрахунки, подано у табл. 1 та 2 за орієнтації $E \perp C$. Криві 1 – 3 відповідають товщині плівки $d = 0,22$ мкм при концентрації вільних носіїв зарядів (електронів) $1,5 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$ (крива 1), $7,35 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$ (крива 2) і $1,3 \times 10^{20} \text{ см}^{-3}$ (крива 3).

Таблиця 2. Електрофізичні параметри сильно легованих плівок ZnO [12]

Зразок		Концентрація, см^{-3}	Плазмова частота, см^{-1}	Рухливість, $\text{см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$	Провідність, $\text{Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$
1.	ZnO/glass (S312-1)	$1,5 \times 10^{19}$	1140	24	$1,73 \times 10^3$
2.	ZnO/glass (S312-2)	$7,35 \times 10^{19}$	2530	23,3	$3,65 \times 10^2$
3.	ZnO (III-2)	$1,3 \times 10^{20}$	3370	$1,94 \times 10^{-3}$	$2,48 \times 10^1$
4.	ZnO (III-1)	$1,42 \times 10^{20}$	3520	$1,66 \times 10^{-3}$	$2,65 \times 10^1$
5.	ZnO/glass (S312-3)	$4,33 \times 10^{20}$	6145	25,7	$5,6 \times 10^3$

Теоретичні розрахунки проведено за умови, що значення коефіцієнта затухання фононної підсистеми $\gamma_\phi = 15 \text{ см}^{-1}$, товщина зазору у призмі ППВВ $d_3 = 5$ мкм та кут падіння ІЧ-випромінювання у призмі ППВВ $\phi = 40^\circ$ сталі для кривих 1 – 3 (рис. 1, а). Як видно з рис. 1, а, зміна концентрації електронів у плівці оксиду цинку при незмінних відповідно товщині плівки і коефіцієнті затухання фону супроводжується збільшенням «напівширини» спектра ППВВ. Тенденція спостерігається для всіх зразків. Так, на рис. 1, а «напівширина» спектра збільшується від 33 (крива 1) до 75 см^{-1} (крива 3). Згідно з даними роботи [7], це вказує на збільшення коефіцієнта затухання поверхневих поляритонів у плівці оксиду цинку при збільшенні ступеня легування плівки. Аналогічна тенденція спостерігається і для кривих 1 – 3, представлених на рис. 1, б, в, які отримані при вказаних вище параметрах, але за $\gamma_\phi = 30 \text{ см}^{-1}$ (рис. 1, б) та $\gamma_\phi = 45 \text{ см}^{-1}$ (рис. 1, в). На рис. 1 (крива 1) добре видно збільшення «напівширини» спектра ППВВ від 33 до 69 см^{-1} при збільшенні коефіцієнта затухання фононної підсистеми від 15 до 45 см^{-1} .

Підтвердженням того, що в системі ZnO – оптичне скло збуджуються поверхневі поляритони є прояв мінімумів у спектрах ППВВ лише в p -поляризованому ІЧ-випромінюванні та приналежність до області від'ємних значень діелектричної проникності (область між частотами поперечного і поздовжнього оптичного фону). Крім того, мінімум спектра ППВВ зміщується у високочастотну область при збільшенні кута падіння світла в призмі ППВВ і при зменшенні інтенсивності поглинання за незмінної величини проміжку між призмою ППВВ та системою ZnO – оптичне скло [7, 10].

На рис. 2 представлено спектри ППВВ в структурі ZnO – оптичне скло при різних значеннях товщини плівки (від 0,22 до 0,72 мкм). Теоретичні спектри для кривих 1 – 3 отримані при куті падіння світла в елементі ППВВ $\phi = 40^\circ$. У спектрах ППВВ спостерігаються мінімуми відповідно на частотах 496 (крива 1), 504 (крива 2) і 513 см^{-1} (крива 3). Як видно з рисунка, при збільшенні товщини плівки спостерігається зміщення частоти ПП у високочастотну область спектра та його «напівширини», що пов'язано з впливом фононної підсистеми плівки оксиду цинку на спектр ПП в області «залишкових променів» оксиду цинку. При збільшенні товщини плівки оксиду цинку мінімуми у спектрах ППВВ, що належать поверхневим поляритонам плівки ZnO, зближаються з 73 до 64 см^{-1} (див. рис. 2).

Точками зображений експериментальний спектр ППВВ системи ZnO – оптичне скло для зразка товщиною $d_{\text{пл}} = 0,38$ мкм типу легована напівпровідникова плівка на діелектричній «напівнескінченній» підкладці при орієнтації $K \perp C$, $xu \parallel C$. Спектр записаний при повітряному проміжку між елементом ППВВ з KRS-5 і зразком товщиною $d = 5$ мкм і кутом $\phi = 40^\circ$ в елементі ППВВ. У спектрі ППВВ спостерігається мінімум на частоті 508 см^{-1} , що узгоджується з розрахунковими даними в межах похибки (504 см^{-1} , крива 2).

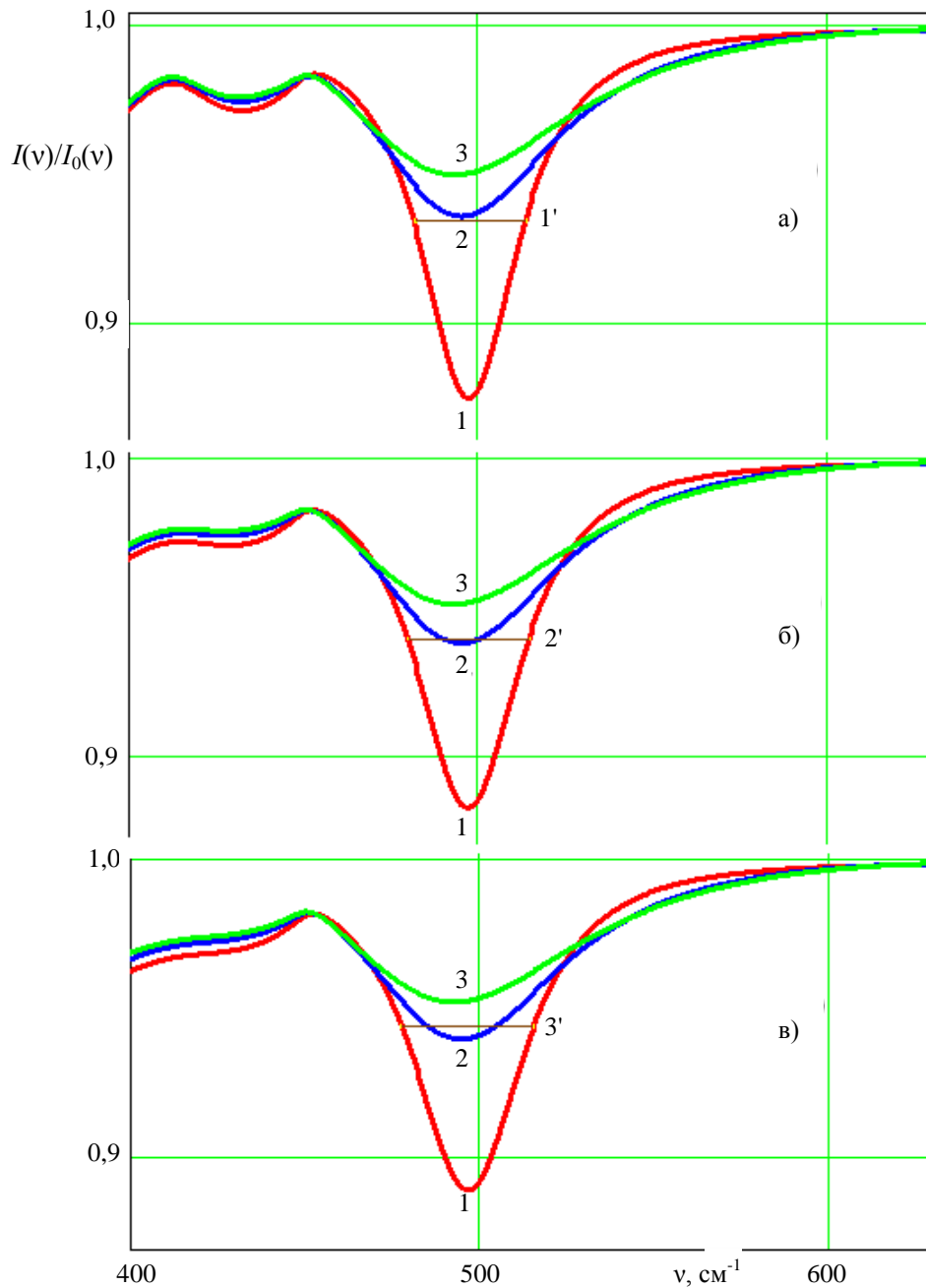


Рис. 1. Теоретичні спектри ППВВ сильно легованої плівки ZnO на підкладці з оптичного скла в області «залишкових променів» оксиду цинку.

Очевидно, що найбільш точні дані можна отримати при побудові так званої поверхні відбивання ППВВ $I(v)/I_0(v)$, яка являє собою тривимірне представлення коефіцієнта пропускання зазначеної вище системи і залежить від частоти випромінювання і кута падіння. При відсутності взаємодії випромінювання з поверхню структури значення $I(v)/I_0(v) = 1$ і в даній області поверхня плоска, але за наявності збудження поверхневих поляритонів у плівці ZnO або підкладці з оптичного скла на вказаній поверхні проявляється ряд «ущелин» (рис. 3).

Глибина «ущелин» залежить від параметрів системи: величини зазора d_3 між напівциліндром ППВВ і зразком, частоти ν випромінювання тощо. Підтвердженням існування ПП в структурі оксид цинку – оптичне скло є і той факт, що при збільшенні кута падіння спостерігається зміщення частото-

ти мінімуму в спектрах ППВВ на рис. 2 в більш високочастотну область та зменшення «напівширини» спектра.

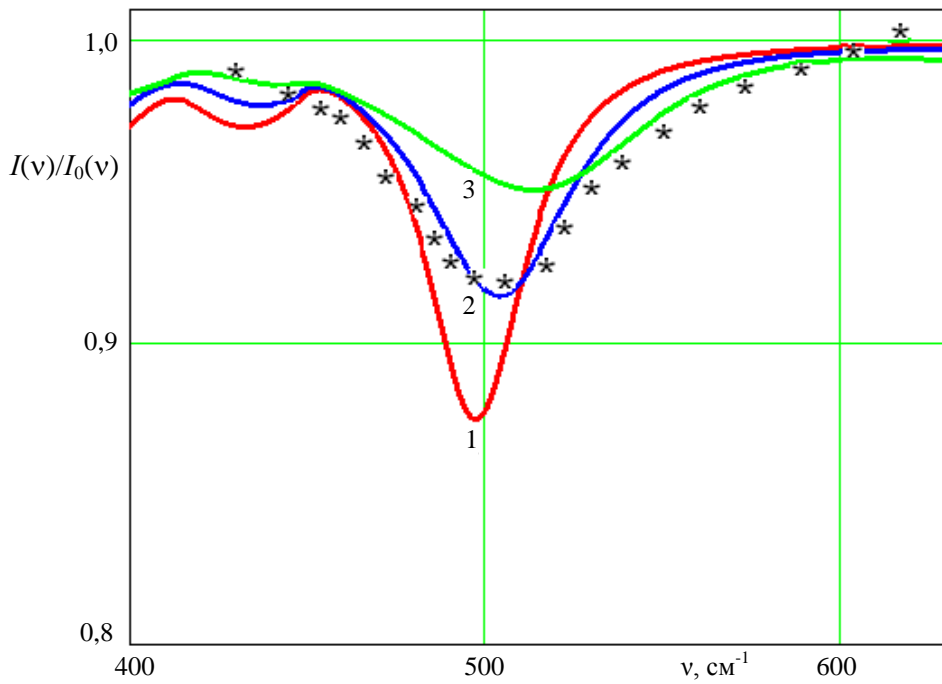


Рис. 2. Спектри ППВВ структури ZnO – оптичне скло при $d_{пл} = 0,22$ мкм (крива 1); $d_{пл} = 0,38$ мкм (крива 2); $d_{пл} = 0,72$ мкм (крива 3); * – експеримент ($d_{пл} = 0,38$ мкм).

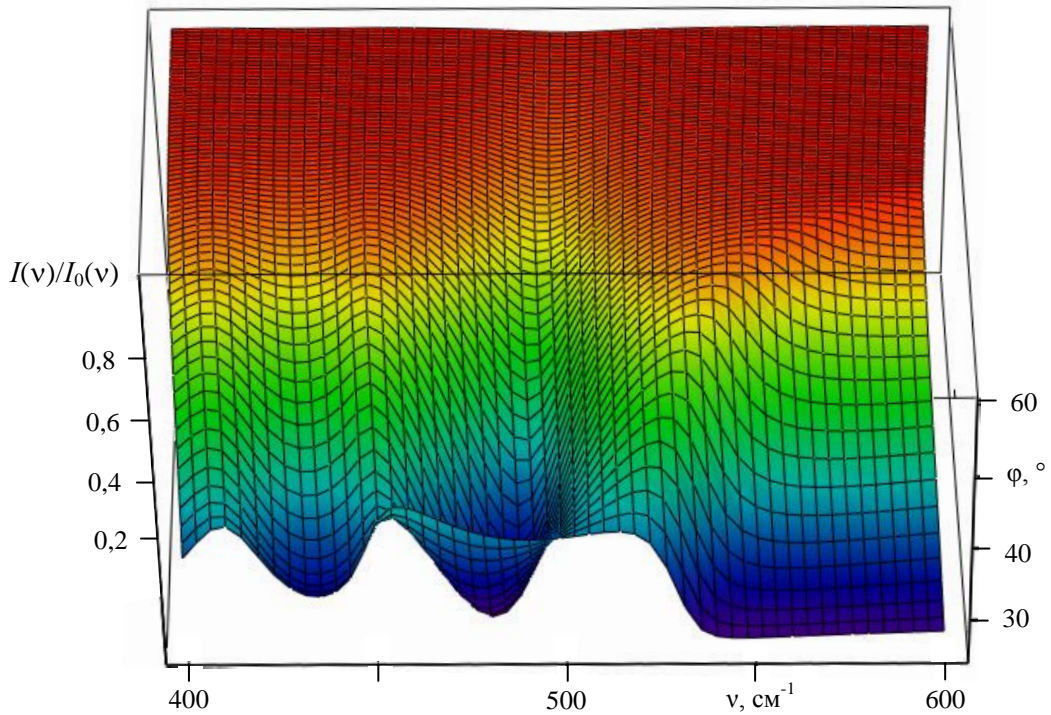


Рис. 3. Поверхня модифікованого ППВВ системи плівка ZnO на підкладці з оптичного скла при $E \perp C$.

Точками показано експериментальні дані спектрів ІЧ-відбивання для ZnO/SiO₂ (дані для зразка S312-2 див. табл. 2). Крок сканування за частотою становив 5 см⁻¹.

З наведених вище теоретичних розрахунків і аналізу даних монографії [7] для структури ZnO/Al₂O₃ можна зробити висновок, що характер дисперсії поляритонних гілок якісно не змінюється при зміні товщини плівки оксиду цинку, але спостерігаються кількісні зміни, які, на нашу думку, зумовлені зростанням значень ефективної частини діелектричної проникності в ІЧ-області спектра.

На рис. 4 представлено високочастотні (криві 1, 2) та низькочастотні (криві 1', 2') дисперсійні гілки для сильно легованої плівки ZnO відповідно товщиною 0,22 та 0,72 мкм. Прояв дисперсійних кривих спостерігається в області частот «залишкових променів» плівки ZnO (412 – 591 см⁻¹) на підкладці з оптичного скла. Саме в цьому діапазоні дійсна частина діелектричної проникності плівки ZnO від'ємна і енергетичні втрати нескінченно малі. Розрахунок дисперсійних гілок у системі ZnO – оптичного скла проведено за формулами без врахування анізотропії коливань у плівці [13, 14]. Видно, що в такій системі при $d_{пл} \leq 5$ мкм спостерігається дві гілки. Аналогічні дані були отримані раніше в роботі [13] для системи ZnO/Al₂O₃. Розв'язком рівнянь є низькочастотна (криві 1', 2') та високочастотна (криві 1, 2) дисперсійні гілки.

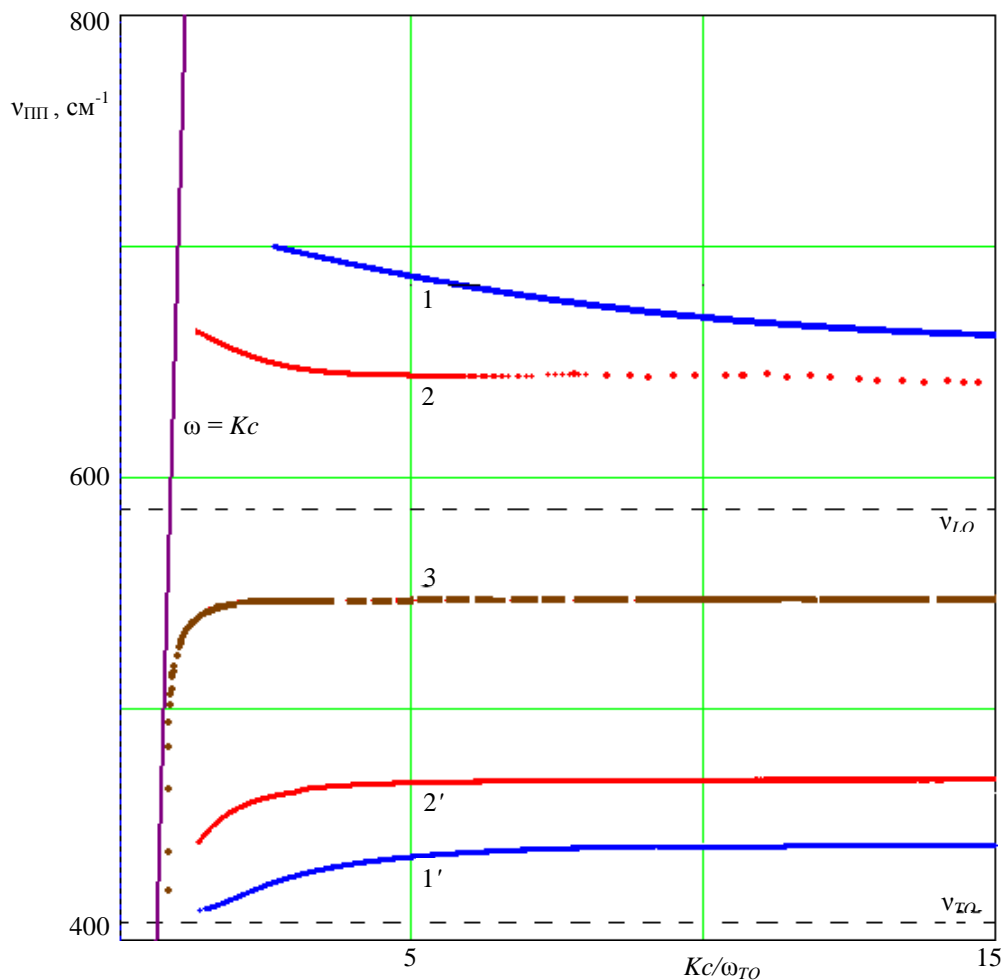


Рис. 4. Залежність частоти ППВ від зведеного хвильового вектора K системи сильно легована плівка ZnO на підкладці з оптичного скла при $E \perp C$ при різних значеннях $d_{пл}$.

З аналізу спектрів ППВВ (рис. 1 – 3) та дисперсійних гілок (рис. 4), побудованих для різної товщини плівки, впливає, що чим менша товщина плівки, тим більша відстань між мінімумами в спектрах ППВВ, а отже, між дисперсійними гілками.

Як видно з наведених вище графіків, високочастотна гілка при $d_{пл} \leq 0,22$ мкм для сильно легованої плівки оксиду цинку ($n_0 = 1,5 \times 10^{19}$ см⁻³) знаходиться вище частоти поздовжнього

оптичного фону оксиду цинку. Розрахунки показують, що при збільшенні товщини плівки ZnO обидві гілки наближаються одна до одної. При товщині плівки $d_{\text{пл}} \geq 5$ мкм криві практично вироджуються в одну криву (рис. 4, крива 3), що співпадає з даними роботи [7] для монокристала ZnO.

4. Висновки

Таким чином, у даній роботі експериментально та теоретично проведено дослідження сильно легованої плівки ZnO на оптично ізотропній підкладці з оптичного скла від частоти в області «за-лишкових променів» плівки ZnO та підкладки з оптичного скла. Показано наявність частотних «вікон», в яких можливе збудження та розповсюдження поверхневих поляритонів. Уперше для вказаної структури побудовано тримірне представлення спектрів ППВВ при скануванні одночасно кута падіння та частоти ПЧ-випромінювання, а також отримано дисперсійні залежності високо- та низькочастотної гілок.

Література

1. Шермергор Т.Д., Стрельцова Н.Н. Плёночные пьезоэлектрики. – М.: Радиосвязь, 1986. – 136 с.
2. Поверхностные акустические волны / Под ред. А. Олнера. – М.: Мир. – 1981. – 390 с.
3. Морозов А.И., Проклов В.В., Станковский Б.А. Пьезоэлектрические преобразователи для радиоэлектронных устройств. – М.: Радио и связь, 1981. – 84 с.
4. Чопра К., Дас С. Тонкоплёночные солнечные элементы: Пер. с англ. с сокращениями. – М.: Мир, 1986. – 440 с.
5. Venger E.F., Melnichuk A.V., Melnichuk L.Ju., Pasechnik Ju.A. Anisotropy of the ZnO Single Crystal Reflectivity in the Region of Residual Rays // Phys. Status Solidi (b). – 1995. – Vol. 188, N 2. – P. 823 – 831.
6. Venger E.F., Ievtushenko A.I., Melnichuk L.Yu., Melnichuk O.V. Investigation of surface excitations in optically-anisotropic ZnO single crystals placed in a uniform magnetic field // Вестник БарГУ. Серия физико-математические науки. – 2013 – Вып. 1. – С. 131 – 151.
7. Венгер Є.Ф., Мельничук О.В., Пасічник Ю.А. Спектроскопія залишкових променів. – К.: Наук. думка, 2001. – 192 с.
8. Венгер Є.Ф., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В., Семікіна Т.В., Хроколова Ю.І. Дослідження тонких плівок ZnO на поверхні SiO₂ методом ПЧ-спектроскопії відбивання // Фізико-математичні записки: Збірник наук. праць. – Ніжин: Видавництво НДУ ім. М. Гоголя, 2013. – С. 59 – 65.
9. Venger E.F., Korbutyak D.V., Melnichuk L.Yu., Melnichuk O.V. Research of films of ZnO on the substrate with optical of flew down the method IR-spectroscopy of reflection // Transactions (Iakob Gogebashvili Telavi State University). – 2014. – N 1 (27). – С. 64 – 69.
10. Виноградов Е.А., Дорофеев И.А. Термостимулированные электромагнитные поля твёрдых тел. – М.: Физматлит, 2010. – 484 с.
11. Семикина Т.В. Атомное послойное осаждение как нанотехнологический метод для получения функциональных материалов: Обзор. Учёные записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского. Серия «Физика». – 2009. – Том 22 (61). – № 1. – С. 116 – 126.
12. Luka G., Krajewski T., Wachnicki L., Witkowski B., Lusakowska E., Paszkowicz W., Guziewicz E., and Godlewski M. Transparent and conductive undoped zinc oxide thin films grown by atomic layer deposition // Phys. Status Solidi. – 2010. – A 207, No. 7. – P. 1568 – 1571.
13. Венгер Є.Ф., Мельничук А.В., Пасечник Ю.А., Сухенко Е.И. Поверхностные поляритоны в системе ZnO на сапфире // Оптоэлектроника и полупроводниковая техника. – 1996. – Вып. 31. – С. 120 – 128.
14. Венгер Є.Ф., Давиденко С.М., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В., Пасічник Ю.А. Поверхневі поляритони в системі ZnO/SiC-6H // Оптоэлектроника и полупроводниковая техника. – 2000. – Вып. 35. – С. 190 – 195.

УДК 536.2.0817

ВИКОРИСТАННЯ ТЕПЛОВІЗОРІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛОВИХ ВТРАТ НАВЧАЛЬНИХ І ЖИТЛОВИХ ПРИМІЩЕНЬ

С.М. Давиденко, Л.М. Кнорозок, В.С. Решетицький

Стійка тенденція зростання цін на енергоносії в Україні, стимулює розвиток енергозберігаючих технологій у будівництві та експлуатації споруд. Відповідно, завдяки раціональному використанню енергії можна досягнути суттєвого покращення енергетичної, екологічної та економічної ситуації. При цьому, саме у сфері опалення, можна економити велику кількість енергоносіїв. Тому, що саме при опаленні споживається найбільша частина всієї енергії. При тому, часто ця енергія використовується не раціонально.

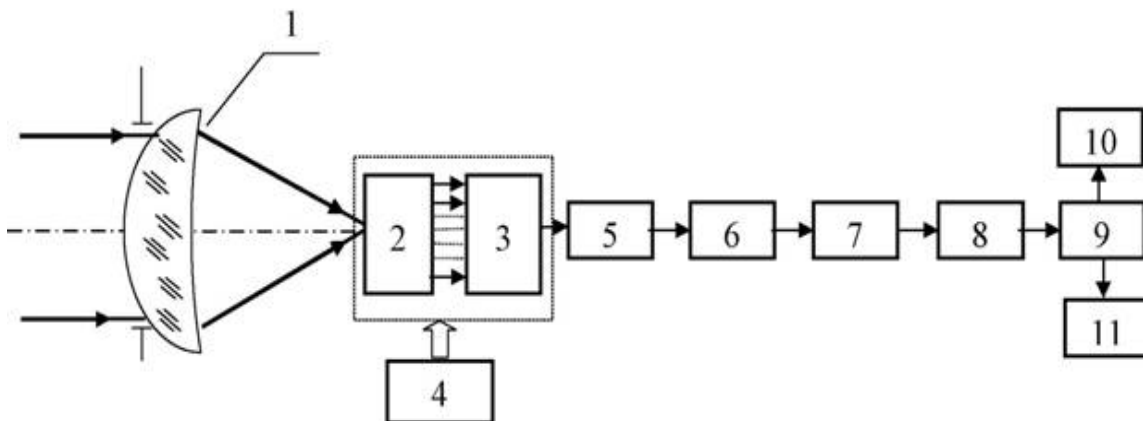
Проблема неефективного, нераціонального споживання палива та енергії має вкрай негативні соціальні наслідки: значна частина міського населення України забезпечується водопостачанням нерегулярно, звичним явищем у регіонах стали відключення від електропостачання. Якість теплопостачання, як правило, не відповідає встановленим вимогам, поступово руйнується інфраструктура паливно-енергетичного комплексу та комунальних підприємств водо- і теплопостачання, що останнім часом вже призводить до техногенних катастроф.

Відповідно, щоб вирішити проблему тепловтрат у житлових будинках, потрібно провести тепловізійне дослідження споруди (теплоаудит). Цей метод наглядно показує наявність або відсутність прихованих конструктивних, технологічних, будівельних та експлуатаційних дефектів теплозахисту будівель.

Основою методу тепловізійного контролю є зйомка за допомогою спеціального пристрою — тепловізора. Тепловізор, або інфрачервона камера, — це пристрій для отримання зображень в інфрачервоному діапазоні довжин хвиль. Саме у цьому діапазоні знаходиться максимум випромінювальної здатності тіл, що мають звичні для нас температури (-30 — $+40$ °C). За допомогою тепловізора можна миттєво виміряти тепловий потік від десятків тисяч точок об'єкту, або, інакше кажучи, отримати його температурне поле (термограму). Термограми є основою для аналізу отриманої інформації щодо теплового стану об'єкта.

Актуальність даної науково-дослідної роботи зумовлена появою нових приладів для вимірювання температури і їх можливістю для застосування у різних галузях науки і промисловості. В основному це сучасні тепловізори. Раніше тепловізори використовували у військовій галузі, але з часом з розвитком техніки удосконалені теплові зори почали використовувати у важкій промисловості, медицині, а також у будівництві.

Більшість використовуваних в даний час тепловізійних приладів побудовані за першим принципом, але в зв'язку з успіхами в технології виробництва матричних приймачів випромінювання з'явилися прилади без оптико-механічного сканування, які не тільки не поступаються, але навіть перевершують прилади першого типу за споживчими властивостями.



Мал. 1. Схема тепловізора з електричним скануванням.

На мал. 1 представлена узагальнена функціональна схема тепловізора з фокальною ІЧ матрицею (1 - оптична система; 2 - фокальна матриця з підсилювачем; 3 – мультиплексор; 4 - система охолодження; 5 - коректор неоднорідності характеристик чутливих елементів; 6 - аналого-цифровий перетворювач; 7 - цифровий коректор неоднорідності; 8 - коректор непрацюючих осередків; 9 - формувач зображення; 10 - дисплей; 11 - цифровий вихід).

Фокальні ІЧ матриці можуть мати розмірність 128×128 , 256×256 і навіть 512×512 елементів при розмірі цих чутливих елементів 30×30 мкм. Фокальні матриці виготовляються як функціонально закінчені фотоприймальні пристрої (ФПУ), що включають систему охолодження, підсилювачі, мультиплексор, коректор неоднорідності характеристик чутливих елементів, аналого-цифровий перетворювач, блоки цифрової обробки і формувач вихідних сигналів. Сигнали з виходу такого ФПУ можуть передаватися на відеоконтрольний пристрій телевізійного типу або в цифровому вигляді в блоки цифрової обробки.

Основною особливістю тепловізора з електричним скануванням є його матричний фотоприймач, завдяки якому характеристики тепловізора покращуються в багато разів у порівнянні з тепловізорами з оптико-механічним скануванням.

Матричні фотоприймачі. Матричні фотоприймачі (FPA), встановлювані в фокальній площині об'єктива, складаються з безлічі чутливих елементів, розташованих по рядах і стовпцях прямокутної матриці. Чутливі елементи не заповнюють всю площу матриці, тому одним з важливих параметрів таких детекторів є коефіцієнт заповнення. Чим вище коефіцієнт заповнення, тим якісніше зображення, особливо при моніторингу температур, близьких до температури навколишнього середовища, а також при аналізі слабких температурних градієнтів. У кращих матрицях коефіцієнт заповнення може досягати 90%.

Розрізняють дві технології виготовлення матричних фотоприймачів: монолітну і гібридну. Монолітні матриці дешевше і простіше у виготовленні, оскільки в них чутливі майданчики і зони передачі електричного сигналу розташовані в підкладці з одного матеріалу, проте їх коефіцієнт заповнення не перевищує 55%. У монолітних матрицях важче реалізувати сучасні алгоритми вбудованої обробки сигналу, наприклад змінний час інтегрування. У гібридних матрицях зона чутливих майданчиків і зона зчитування сигналів розташовані в двох шарах, розділених індієвими контактами, через які відбувається мультиплексування сигналів кожної площадки. Такі фотоприймачі володіють максимальним коефіцієнтом заповнення та забезпечують найбільш високу якість зображення з температурною межею до $0,02^\circ\text{C}$.

Мультиплексор є пристроєм, який організовує і форматує електричні сигнали, що генеруються окремими чутливими майданчиками, а також передає ці сигнали на спеціальний процесор. З погляду зв'язку з процесором існує два типи пристроїв: прилади із зарядним зв'язком та прилади на комплементарних метал-оксидних. В детекторах сигнал кожної чутливої площадки створюється електронами, які послідовно збираються в детекторі аж до останньої колонки, де сумарний сигнал зчитується. При цьому можлива як втрата частини сигналу, так і розмиття зображення за рахунок перетікання надлишкових електронів з однієї площини на іншу при візуванні об'єктів з занадто високою температурою. Охолоджувані детектори є більш енергоємними. Охолоджувані детектори вимагають ефективного охолодження (до -200°C), яке досягають використанням мініатюрних компресорів Стірлінга, але такі детектори забезпечують найкращі вимірювальні можливості тепловізорів

Більша частина резерву енергозбереження в житловому фонді (52,3%) пов'язана з тепловою ізоляцією загороджувальних конструкцій житлових будинків. Зараз втрати теплової енергії через стіни в середньому становлять 21,6%, через вікна 26,6%.

Більш детально зупинимося на характеристиці матеріалів та конструкцій, які за функціональним призначенням можна об'єднати в групу, призначену для створення «теплого будинку» («термобудинку»). Слід зазначити, що щорічні втрати тепла в будівлях житлового та державного секторів складають до 10 млн ккал. Втрати тепла в будівлях Північної Європи у 2-4 рази менші [3].

Введені в Україні нові нормативи теплової ізоляції стін, що в 2-2,5 рази перевищують попередні, вимагають значного зменшення теплових втрат. Так, згідно з нормативами (термічний опір зовнішніх стін не менше $2,2 \text{ м}^2 \text{ }^\circ\text{C}/\text{Вт}$) стіни з монолітної цегляної кладки для північних районів України повинні зводитися товщиною близько 150 см, а товщина одношарових панелей

повинна бути близько 65 см. Звичайно, на практиці це виконати неможливо, тому єдиним способом утеплення стін повинно стати використання шару з ефективного утеплювача.

Розрахунок кількості тепла, яке витрачається на опалення будівлі, базується на визначенні тепловтрат в опалювальних приміщеннях. Тепловтрати через огорожуючі конструкції розраховують згідно основного рівняння теплопередачі:

$$Q = k \cdot S \cdot \Delta t, \quad (1)$$

де Q – тепловтрати через огорожуючу конструкцію (стіну), кВт;

k – коефіцієнт теплопередачі, Дж/м²·К;

S – площа поверхні теплопередачі, м²;

Δt – різниця між температурами внутрішнього і зовнішнього повітря, К.

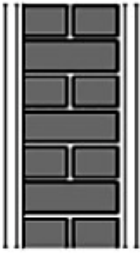

У стандартах будівельних конструкцій розглядають загальний термічний опір конструкції R як величину, обернену до коефіцієнта теплопередачі k :


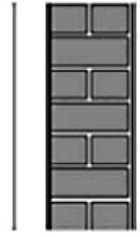
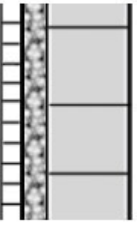
$$k = \frac{1}{R}.$$

Згідно з основного рівняння теплопередачі ми бачимо, що головна умова побудови енергозберігаючого будинку – це оптимальний вибір товщини та типу теплоізоляції. Чим нижче λ тим краща теплоізоляція, відповідно тим більший термічний опір R . Нижче в табл.1 приведені характеристики популярних конструкцій стін [4].

Цегляні стіни завтовшки 510 мм зі звичайної глиняної цегли на цементно-піщаному розчині, відштукатурені зсередини будівлі, мають термічний опір 0,81 (м²·К)/Вт, що значно менше нормативних показників і не відповідає теплотехнічним вимогам, що діють в Україні. Збільшення товщини такої стіни є неефективним з точки зору використання матеріалу. Виходом із цієї ситуації є проектування багатшарових конструкцій із застосуванням ефективних утеплювачів. Як теплоізолятор можна використати різноманітні теплоізолюючі матеріали [5]. У табл.1 наведені теплові характеристики будівельних матеріалів для різних стін.

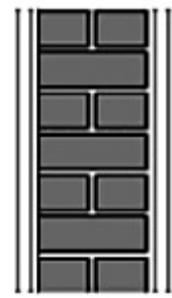
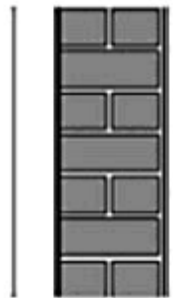
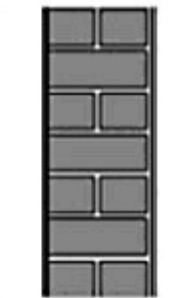
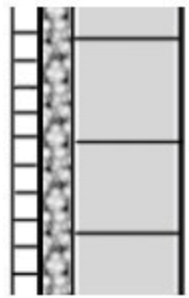
Таблиця 1. теплові характеристики будівельних матеріалів для різних стін

Схематичне зображення конструкції	Опис	Величина опору теплопередачі R , (м ² ·К)/Вт
	Цементний розчин(0,01м), керамічна цегла (0,25м/ 0,38м),цементний розчин (0,01м)	0,318 – 0,483
	Фасадне облицювання, вентиляційний повітряний прошарок (0,015м), базальтова вата (0,06м / 0,1м), цегла повнотіла (0,38м), мінеральна штукатурка (0,015м)	2,22 – 3,33

	Стінова сендвіч-панель змінеральною ватою (0,1 м)	2,7
	Фасадне облицювання, пінополіуретан (0,05 м), силікатна цегла (0,38 м)	3,12
	Облицювальна силікатна цегла(0,25м), перлітний пісок (0,05м), піноблок (0,4 м)	4,45

Тепловтрати квадратного метра стіни наведені в табл. 2 для основних типів конструкцій, значення яких обраховується за формулою (1).

Таблиця 2. Тепловтрати популярних в Україні стін

1,5 цегли $q > 100 \text{ Вт/м}^2$	1,5 цегли+ 5 см пінопласту $q = 70-80 \text{ Вт/м}^2$	1,5 – 2 цегли+ 10 см пінопласту $q = 70-80 \text{ Вт/м}^2$	1,5 цегли+ перлітний пі- сок+піноблок $q < 50 \text{ Вт/м}^2$
			

Підвищення теплозахисних властивостей огорожуючих конструкцій будівель є одним із основних напрямків енергозбереження. Ця проблема повинна вирішуватися комплексно шляхом впровадження сучасних технічних та конструктивних рішень теплозахисту будівель під час будівництва чи ремонту, впровадженням енергозберігаючого децентралізованого теплопостачання та локального комбінованого виробництва теплової і електричної енергії. Важливим є запуск у виробництво будівельних панелей з вищою теплостійкістю. В даний час спроектована теплоізоляцій на спроможність панелей, що виробляються на будівельних комбінатах України, складає до $1,40 \frac{\text{м}^2 \cdot \text{°C}}{\text{Вт}}$, що в 3-3,5 рази нижче, порівняно з подібними панелями західних виробників. Налагодження виробництва та використання нових будівель з вищою теплоізоляцією дає можливість зменшити потреби тепла на 30-40%. Важливим при цьому є випуск утеплюючих матеріалів.

Згідно з діючими в Україні нормами, у теплий період року температура в приміщенні не повинна підніматися вище 20-25 °С при відносній вологості 60-30% та швидкості руху повітря

0,3 м/с; у холодний та перехідний періоди року температура в приміщенні не повинна опускатись нижче 18 °С (нормовані значення – 20-22 °С) при вологості 45-30% та швидкості руху повітря 0,2 м/с.

За допомогою тепловізора TESTO 875-2i проведено теплоаудит житлового будинку. Тепловізійна зйомка наглядно показує наявність чи відсутність прихованих дефектів теплозахисту будівель, які можна умовно розділити на два типи. В першу чергу — це підвищена фільтрація (інфільтрація) через щілини й нещільності в стиках елементів огорожувальних конструкцій. Другий тип дефектів пов'язаний з порушенням теплоізоляції огорожувальних конструкцій. Основною метою обстеження є виявлення всіх температурних аномалій. Таким чином, здійснення контролю із застосуванням сучасних технологій з дотриманням нормативних вимог до теплозахисту будівель, якість матеріалів і їхній монтаж на різних етапах будівництва дасть можливість ефективно боротися з надлишковими втратами тепла і сприятиме подальшому підвищенню енергоефективності будівель і споруд.

Тепловізійні обстеження показують справжній ступінь енергоефективності будівель, сприяють покращенню якості будівельних робіт, технологій і матеріалів. У табл. 3 наведені експериментально одержані температурні дані житлового будинку (при зовнішній температурі - 15 °С).

Таблиця 3. Експериментально одержані температурні дані житлового будинку

Термограма	$t, ^\circ\text{C}$				
	Скло	Рама вікна	Стіна	Холодні місця на вікнах	Холодні місця на стінах
1	18	15	20	13	16
	17	14,5	21	12,3	16,5
	16,5	14	19	12,5	17
2	16	12,5	22	5,5	13
	15,5	13	21	6	
	15	12	20	7	
3	15	14	17	12	11,7
			17,5	12,5	12,5
			15	12	14

При виконанні науково-дослідної роботи виконані наступні завдання:

1. Проаналізовано використання сучасних тепловізорів для дослідження теплових втрат у житлових і навчальних приміщеннях.
2. Проведено порівняння використання ІЧ термометрів та тепловізорів для безконтактного вимірювання температури.
3. Проаналізовано отримані термограми, зроблений аналіз енергоефективності будинку по отриманій «карті тепловтрат».
4. Практичне застосування інфрачервоної техніки для термографії житлових будинків показало, що через стіни із віконними конструкціями втрати тепла становлять до 30 %.
5. Тепловтрати в основному обумовлені теплопровідністю матеріалів стін, а також теплопровідністю і не герметичністю монтажу віконної конструкції.
6. За допомогою тепловізора доведено, що в місцях де накопичується волога, зокрема в кутках і віконних щілинах спостерігається зниження температури та поява плісняви.
7. Досліджено недоліки монтування віконних конструкцій і виявлення різних дефектів, через які збільшуються втрати тепла у навчальних приміщеннях НДУ імені Миколи та деяких житлових будинків.
8. Результати даної роботи можна використовувати при плануванні заміни традиційних вікон на сучасні та при проведенні ремонтних робіт.

Література

1. Офіційний сайт Національної Академії Наук України [Електронний ресурс].- 2015 – Режим доступу: <http://www.nas.gov.ua/>
2. Урядовий портал, прес-служба Кабінету Міністрів України [Електронний ресурс]. .- 2015 – Режим доступу: <http://www.kmu.gov.ua/>
3. Професійний ремонт [Електронний каталог]. 2015– Режим доступу: <http://proremont.in.ua/contact-information.html>
4. Дудикевич Ю.Б. Енергоощадні котеджі / Ю.Б. Дудикевич. – Львів: Сполом, 2011. – 192 с.
5. ЕнергоРесурс. Теплоізоляційні матеріали [Електронний каталог]. – 2015Режим доступу:<http://energetyka.com.ua/energoberezhenie/303-teploizolyatsijni-materiali>
6. Міцний дім [Електронний каталог]. -2015 – Режим доступу:<http://mdim.com.ua/>

УДК 536.521.2

ВИМІРЮВАННЯ ІНТЕНСИВНОСТІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ КОМП'ЮТЕРА

М.П. Руденко, О.Ю. Секереш

Електрично заряджені частинки або електричні струми створюють в усіх точках навколишнього простору особливий стан – електричне поле, яке діє на всяку іншу заряджену частинку або струм, вміщені в довільну точку цього простору. Електромагнітне поле може існувати незалежно від частинок чи струмів, які його створили, у вигляді електромагнітних хвиль – процесу поширення змінного електромагнітного поля в просторі з плином часу.

Енергетичне навантаження від електромагнітних випромінювань у промисловості та побуті зростає постійно в зв'язку зі стрімким розширенням мережі джерел фізичних полів електромагнітної природи, а також зі збільшенням їх потужностей. Людина нездатна фізично відчувати електромагнітне поле, що її оточує, проте воно викликає зменшення її адаптивних резервів, зниження імунітету, працездатності, під його впливом у людини розвивається синдром хронічної втоми, збільшується ризик захворювань.

Механізм дії електромагнітного випромінювання на живі організми до цього часу остаточно не розшифрований. Існує декілька гіпотез, що пояснюють біологічну дію електромагнітного поля. В основному вони зводяться до створення струмів у тканинах і безпосереднього впливу поля на клітинному рівні.

У кожній точці простору електромагнітне поле (а отже, і електромагнітна хвиля) характеризується енергією, імпульсом, напруженостями електричного та магнітного полів, частотою, швидкістю поширення, поверхневою густиною потоку енергії тощо. З точки зору негативного впливу електромагнітного поля на живі організми вирішальними є напруженість електричного поля та поверхнева густина потоку енергії електромагнітного поля.

Одним із джерел електромагнітного випромінювання є комп'ютер. При його роботі відбувається випромінювання електромагнітних хвиль різних частотних діапазонів. Враховуючи особливості поширення та впливу цих полів на людський організм, особливої уваги заслуговує випромінювання частот, що лежать в інтервалі від 0,5 ГГц до 3,5 ГГц.

З метою обмеження негативного впливу електромагнітних полів на людський організм в Україні прийнято ДСН 239-96 «Державні санітарні норми і правила захисту населення від впливу електромагнітних випромінювань», які регламентують гранично допустимий рівень напруженостей електромагнітних полів та поверхневу густина потоку їх енергії. Зокрема, для частот випромінювання комп'ютера (яке найбільш небезпечно для людини) гранично допустимий

рівень напруженості електричного поля становить $3 \frac{В}{м}$, а поверхневої густини потоку енергії випромінювання – $2,5 \frac{мкВм}{м^2}$. Слід зазначити, що встановлені в Україні гранично допустимі

рівні випромінювання значно нижчі, ніж у багатьох інших країнах. Зокрема, в Росії цей рівень $10 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$, у Скандинавії – $100 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$, в Угорщині – $10 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$.

При проведенні вимірювань поверхневої густини потоку енергії електромагнітного випромінювання комп'ютера ми обстежили випромінювання монітора, системного блока та клавіатури. При цьому з'ясувалося, що на відстані 2 – 3 см від названих елементів поверхнева густина потоку енергії електромагнітного випромінювання становить: монітор (спереду) – $35,8 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$, монітор (ззаду) – $17,9 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$; системний блок (спереду) – $44,7 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$, системний блок (ззаду) – $28,5 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$, системний блок (зліва) – $16,9 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$, системний блок (справа) – $4,1 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$; клавіатура – $3,3 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$. Після цього ми виміряли випромінювання на відстані 20 см від цих же елементів. Воно становило в усіх випадках від $1,5 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$ до $3 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$.

Випромінювання системного блока при знятій кришці коливалося в межах від $800 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$ до $1000 \frac{\text{мкВт}}{\text{м}^2}$. Аналогічним чином було проведено вимірювання напруженості електричного поля випромінювання комп'ютера. При цьому ми виміряли напруженість електричного поля монітора, системного блока та клавіатури. З'ясувалося, що на відстані 2 – 3 см від названих елементів напруженість електричного поля становить: монітор (спереду) – $154 \frac{\text{мВ}}{\text{м}}$, монітор (ззаду) – $70 \frac{\text{мВ}}{\text{м}}$; системний блок (спереду) – $91 \frac{\text{мВ}}{\text{м}}$, системний блок (ззаду) – $79 \frac{\text{мВ}}{\text{м}}$, системний блок (зліва) – $24 \frac{\text{мВ}}{\text{м}}$, системний блок (справа) – $23 \frac{\text{мВ}}{\text{м}}$; клавіатура – $20 \frac{\text{мВ}}{\text{м}}$. Після цього ми виміряли випромінювання на відстані 20 см від цих же елементів. Воно становило від $18 \frac{\text{мВ}}{\text{м}}$ до $37 \frac{\text{мВ}}{\text{м}}$.

Провівши дослідження, ми дійшли висновку, що ні поверхнева густина потоку енергії електромагнітного випромінювання комп'ютера, ні напруженість його електричного поля не перевищують гранично допустимі значення, встановлені Державними санітарними нормами. Найкращими способами захисту від електромагнітного випромінювання є захист екранами та захист відстанню. Тому при роботі з комп'ютером не варто знімати його кожухи (які є екранами) та розміщуватися в безпосередній близькості до елементів комп'ютера.

Література

1. Богуш В.А. Электромагнитные излучения. Методы и средства защиты / Богуш В.А., Борботько Т.В., Гусинский А.В. – Б.: Бестпринт, 2003. – 406 с.
2. Безпека життєдіяльності: [теоретичні основи] / П.С. Атаманчук, В.В. Мендерецький, О.П. Панчук, О.Г. Чорна. – Кам'янець-Подільський: Центр учбової літератури, 2008. – 108 с.
3. Державні санітарні норми і правила захисту населення від впливу електромагнітних випромінювань / ДСанПін № 239, 1996. (Наказ «Міністерство охорони здоров'я України»).
4. Холодов Ю.А. Мозг в электромагнитных полях / Ю.А. Холодов. – М.: Наука, 1982. – 358 с.

УДК 371.1

**ЕВОЛЮЦІЙНІ ТРЕКИ ІНДИВІДУАЛЬНОГО РИЗИКУ НЕБЕЗПЕК
В ІМОВІРНІСНОМУ ФАЗОВОМУ ПРОСТОРІ****О.Г. Шевчук**

На основі математичної формалізації основних категорій безпеки життєдіяльності (чинника довкілля, життєвого параметру, ризику небезпек) послідовно вводяться поняття життєвого стану, життєвого статусу біологічного об'єкту та алгебр на цих категоріях. Показано, що цю алгебру можна коректним чином ініціювати в σ -алгебру із відображенням в борелівську σ -алгебру на \mathbf{R} . Це дозволяє побудувати імовірнісний фазовий простір $\tilde{\Phi}$, який є прямим добутком підпростору \tilde{A} життєвих параметрів та підпростору \tilde{R} ризику небезпек. Вводячи норму, що діє в \tilde{A} та \tilde{R} отримуємо нормований фазовий простір $\tilde{\Phi}$, в якому визначаються поняття відстані між життєвими станами та статусами. Еволюція ризику небезпек при цьому є фазовою траєкторією в $\tilde{\Phi}$, яка перетинає гіперповерхні, що відповідають градаціям небезпек.

Ключові слова: життєві параметри, життєвий статус, життєвий стан, фазовий простір, підпростір ризику, підпростір небезпек, фазова траєкторія.

В багаточисленній літературі [1 – 5] з питань безпеки життєдіяльності відсутній єдиний підхід до поняття ризику небезпек, до аналітичного опису еволюції ризику. Зазвичай автори публікацій із вказаної тематики обмежуються вербальним описом цього поняття, що є абсолютно незадовільною ситуацією, враховуючи все більше проникнення формальних математичних теорій в гуманітарні області знань.

Застосування моделей, які використовують математичний апарат дозволяє проводити числові розрахунки, оцінки досліджуваних параметрів, обробляти масиви даних, використовуючи методи математичної статистики, теорії ймовірностей, проводити прогностичні оцінки.

Формалізовані теорії, крім того, відкривають шлях до проведення оцінок статистичних гіпотез, які виникають в рамках цих теорій, а отже, надають можливість не тільки верифікацій модельних уявлень, а й їх фальсифікацій, що є корисним засобом розвитку наших уявлень про перебіг явищ та процесів і їх вплив на життєдіяльність людини.

Тому метою даної роботи є побудова деякої формальної модельної системи уявлень про вплив факторів довкілля та життєдіяльності людини, за допомогою якої можна було б проводити числові оцінки рівня небезпек, описувати життєвий статус об'єкта, кількісні характеристики еволюції ризику небезпек довкілля.

Означення 1. Величини, за допомогою яких характеризують властивості системи, називають її параметрами[9].

Зрозуміло, що величини можуть бути фізичними, біологічними, хімічними тощо.

Розробка еталонів величин, які описують безпеку та небезпеку як категорій Матерії, систем їх одиниць – одна з головних задач безпеки життєдіяльності .

Таким чином, кількісною мірою станів середовища буде набір значень величин, які характеризують це середовище в даний момент часу. Опис станів допускає при цьому як мікро- так і макроскопічний підхід. В першому випадку величини характеризують стани структурних одиниць середовища, в другому – їх статистичні ансамблі.

Означення 2. Під життєвими параметрами будемо розуміти макропараметри, які є величинами, що визначають стани функціональних систем організму [9].

Означення 3. Фактором довкілля називатимемо такий прояв властивостей середовища, спряженим з його параметрами, інтенсивність дії якого перевищує поріг чутливості аналізаторів організму [9].

З останнього означення слідують основні властивості факторів довкілля:

- Фактори довкілля за їх належністю до середовища можуть бути факторами зовнішнього середовища (ФЗС) та факторами внутрішнього середовища (ФВС).

- Деяка властивість середовища стає його фактором, якщо її дія більша за інтегральний або ж диференціальний поріг чутливості аналізаторів організму.
- Фактори довкілля не існують поза процесом взаємодії середовища з організмом.
- Фактори довкілля носять як об'єктивний так і суб'єктивний характер /в останньому випадку можна вказати на вплив думок, навіювання, сновидінь, на зміну значень життєвих параметрів організму/.

Слід відзначити, що в літературі з безпеки життєдіяльності [1 – 5] поняття фактора довкілля або ж взагалі відсутнє, або ж є суперечливим, неповним поняттям, яке не дає змогу виділити основні властивості цих чинників, приводить до прямо протилежних суджень про характер взаємодії середовища з організмом. Останні три з вище перелічених властивостей факторів довкілля взагалі не згадуються в цитованій літературі.

Означення 4. *Поле Δ життєво значимих негативних наслідків життєдіяльності назовемо сукупність наслідків впливу факторів-чинників довільної природи, дія яких на організм призвела до таких змін його життєвих параметрів, при яких порушились процеси в організмі, що призвело до стійкого розладу здоров'я людини [9].*

У зв'язку з тим, що класичне означення поняття ймовірності події не може бути застосованим до елементів поля Δ / не виконуються вимоги ідентичності умов повторюваності подій та повнота подій для елементів з Δ /, необхідно оперувати іншими поняттями при введенні алгебри над полем Δ . У зв'язку з цим виникає потреба ввести поняття частоти події та поняття ризику.

Означення 5. *Частотою появи v_ω деякого елемента з Δ називатимемо числову характеристику цього елемента, яка визначається відношенням кількості зареєстрованих подій, що проявляються в реалізації (настанні) наслідку ω з Δ до повної кількості актів спостереження над умовами життєдіяльності в статистично значимій виборці об'єктів спостереження і при усередненні за часом спостереження значень макропараметрів середовища [9].*

З означення слідує, що

$$0 \leq v_\omega < 1.$$

Означення 6. *Ризиком R_ω життєдіяльності за елементом ω поля Δ ($\omega \in \Delta$) назовемо числову характеристику життєдіяльності, яка чисельно співпадає з частотною характеристикою v_ω елемента ω в припущенні впливу середовища з таким же набором макропараметрів на статистично значиму сукупність організмів аутентичних заданому для якого отримане значення v_ω [9].*

$$0 \leq R_\omega < 1.$$

Нехай множина $\{B\} \equiv \mathbf{B}$ – множина всіх значень значимих в аспекті дослідження життєвих параметрів, а $b_i(t)$ – значення життєвого параметру $b_i \in \mathbf{B}$ у момент часу t . Якщо ми починаємо відлік часу в момент початку впливу чинника α_j довкілля з множини Ω чинників довкілля, то зміну значення життєвого параметру b_i за цим фактором позначимо через $\Delta b_{i\alpha_j}(t)$ в момент часу t .

Отже

$$b_{i\alpha_j}(t) = b_i(0) + \Delta b_{i\alpha_j}(t) \equiv b_{i0} + \Delta b_{i\alpha_j}(t). \quad (1)$$

Означення 7. *Назовемо життєвим станом за α_j -чинником дозвілля сукупність значень $b_{i\alpha_j}(t)$ для всіх b_i з \mathbf{B} .*

Отже, життєвий стан в момент часу t можна представити кет-вектором стану, ініційованого α_j чинником

$$\Psi(t)_{\alpha_j} : |b_{\alpha_j}(t)\rangle. \quad (2)$$

Зрозуміло, що кет-стани (2) можна задати для моменту часу t для всіх чинників довкілля з Ω :

$$\forall \alpha_j \in \Omega, \forall t \exists \Psi(t)_{\alpha_j} : |b_{\alpha_j}(t)\rangle. \quad (3)$$

Означення 8. Назвемо

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j |\Delta b_{\alpha_j}(t)\rangle + |b_{i_0}\rangle \quad (4)$$

життєвим статусом в момент часу t .

Позначимо через \mathfrak{A} родину підмножин множини \mathbf{B} . Тобто, \mathfrak{A} співпадає із станом $\mathbf{B}(t)$ з числа всіх можливих станів життєдіяльності. Зрозуміло, що

$$\mathfrak{A} \subset 2^{\mathbf{B}};$$

крім того виконуються наступні вимоги

$$\emptyset \in \mathfrak{A}, \quad (5)$$

$$\forall b_j \in \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \setminus b_j \in \mathfrak{A}, \quad (6)$$

$$\forall b_i, b_j \in \mathbf{B}, (b_i, b_j) \in \mathfrak{A} \Rightarrow b_i \cup b_j \in \mathfrak{A}. \quad (7)$$

(5) – (7) задають деяку алгебру, що діє на \mathbf{B} .

Якщо допустити, що $\Delta b_{i\alpha_j}$ є випадковою величиною внаслідок випадкового (недермінованого) впливу фактора α_j , то $\mathbf{B}(t)$ отримує статус випадкової множини, а (5) – (7) задають на \mathbf{B} деяку алгебру подій.

Реально фіксація змін життєвих параметрів може бути реалізована через скінченні проміжки часу. Нехай Δt^* є мінімальним з числа таких проміжків для всіх b_i з \mathbf{B} , тобто мінімальним дискретним відліком значення життєвого параметру:

$$\Delta t^* = \min_i \{\Delta t_i\}. \quad (8)$$

Тоді \mathfrak{A} є зчисленною родиною і (7) можна посилити до рівня наступної вимоги

$$\forall b_i \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{N_0} b_i \in \mathfrak{A}, \quad (9)$$

де $i \in (\overline{1, N_0})$.

Таким чином, вимоги (5), (6), (9) еквівалентні замкненості відносно зчисленної множини об'єднань своїх елементів та операції доповнення. Водночас (5), (6) та (9) продукують на \mathfrak{A} σ -алгебру.

Включимо в цю σ -алгебру вимогу існування скінченно-вимірної адитивної міри μ_σ на \mathfrak{A} , для якої $\mu_\sigma(\mathbf{B}) = 1$. *Впорядкована трійка $\langle \mathbf{B}, \mathfrak{A}, \mu_\sigma \rangle$ задає імовірнісний простір життєвого статусу, де μ_σ називається імовірністю.*

При цьому скінченновимірну адитивну міру μ_σ на \mathfrak{A} можна було б ввести наступним чином. Ототожнимо множину G_{b_i} із матрицею елементів g_{B_i} , які є значенням ризику небезпек [1 – 5] із фіксованого списку за значеннями $b_i(t)$. Значення $b_i(t)$ будемо при цьому подавати із значенням дискретності δb_i , який вибираємо з практичних потреб, які диктуються конкретною задачею управління життєдіяльністю. Якщо ризик небезпеки вводиться як частотна характеристика [1– 4], то з достатнім ступенем наближення можна вважати, що елементи з G_{b_i} є ймовірностями небезпек за життєвим параметром b_i . При цьому адитивність та скінченновимірність такої числової характеристики елементів з G_{b_i} виконуються автоматично.

Співставлення $b_i(t)$ з елементами G_{b_i} задає відображення $\xi: b_i(t) \subset \mathfrak{A} \xrightarrow{\xi} \square$ вимірне відносно σ -алгебри на \mathfrak{A} та борелівської σ -алгебри на \square , яке є випадковою величиною [8, 10, 11].

Зрозуміло [11], що ξ задає на \mathfrak{A} природну σ -алгебру:

$$\sigma(\xi) = \{\xi^{-1}(B_i) | B_i \in \mathcal{B}_i(\square)\}. \quad (10)$$

де $\mathcal{B}_i(\square)$ – борелівська σ -алгебра на \mathbf{R} .

Побудуємо тепер абстрактний фазовий $\tilde{\Phi}$ простір [8] за наступними етапами.

1. Введемо осі \bar{b}_i на яких будемо відкладати значення $b_i(t)$ життєвих параметрів b_i з \mathbf{B} .

2. Введемо осі \vec{G}_{b_i} на яких будемо відкладати значення частот (ймовірностей) небезпек за значеннями $b_i(t)$ з матриці G_{b_i} , тобто ризики небезпек за значеннями $b_i(t)$.

3. Сумістимо початки осей \vec{b}_i та \vec{G}_{b_i} .

З 1 – 3 слідує, що фазовий простір $\tilde{\Phi}$ можна розбити на два підпростори: *простір \tilde{B} життєвих параметрів*, який задається множиною осей $\{\vec{b}_i\}$ і який ми назвемо *параметровим підпростором* та *простір ризику небезпек*, що задається набором осей $\{\vec{G}_{b_i}\}$ і який ми назвемо *підпростором ризику \tilde{R}* :

$$\tilde{\Phi} = \tilde{B} \times \tilde{R}. \quad (11)$$

Означення 9. Кожна точка в $\tilde{\Phi}$ тоді задає життєвий статус $|\Psi(t)\rangle$.

Означення 10. Зміна положення зображуючого вектора життєвого статусу $|\Psi(t)\rangle$ в $\tilde{\Phi}$ задає годограф в $\tilde{\Phi}$, який ми назвемо *фазовою траєкторією об'єкта в $\tilde{\Phi}$* .

Отже, годограф кет-вектора життєвого статусу $|\Psi(t)\rangle$ описує еволюцію життєвого статусу в імовірнісному фазовому просторі $\tilde{\Phi}$.

В кожній матриці G_{b_i} виділимо область $G_{b_i}^*$, яка відповідає безпечним [1 – 5] значенням ризику небезпек за життєвими параметрами b_i . Перенесемо виділені області $G_{b_i}^*$ в простір ризику \tilde{R} фазового простору $\tilde{\Phi}$. В результаті отримаємо n -вимірний багатогранник (n -вимірну замкнену поверхню, гіперповерхню) в $\tilde{\Phi}$ яку назвемо *гіперповерхнею $\mathcal{G} \subset R$ безпеки*.

Зрозуміло, що як тільки фазова траєкторія в $\tilde{\Phi}$ потрапляє в область \mathcal{G} ризик життєдіяльності стає мінімальним. В міру віддалення від \mathcal{G} ризик зростає.

У відповідності із загальноприйнятою градацією ризику небезпек [1 – 5] можна аналогічно до виділення $G_{b_i}^*$ в G_{b_i} та введення \mathcal{G} в \tilde{R} виділити в \tilde{R} області, які відповідають цим градаціям ризику α . Тоді підпростір \tilde{R} ризику імовірнісного фазового простору $\tilde{\Phi}$ розіб'ється на області \mathcal{G}_α , які попарно не перетинаються. Як тільки зображуюча точка потрапляє в області \mathcal{G}_α реалізується ситуація α в градації ризику небезпек за сукупністю життєвих параметрів з \mathbf{B} :

$$\forall \alpha, \beta | \mathcal{G}_\alpha \cap \mathcal{G}_\beta = \Phi, \quad (12)$$

$$\cup_j \mathcal{G}_{\alpha_j} = \tilde{R}. \quad (13)$$

Використовуючи введені вище поняття можна представити еволюцію ризику небезпек як рух зображуючої точки у фазовому просторі $\tilde{\Phi}$. При цьому якісною характеристикою ризику життєдіяльності буде належність зображуючої точки до однієї з областей \mathcal{G}_α простору \tilde{R} .

Для введення кількісної характеристики ризику життєдіяльності необхідно *метризувати* фазовий простір $\tilde{\Phi}$.

Для цього застосуємо поняття *коваріації* [10, 11] *випадкових векторів*, які діють в одному просторі. Нехай $|X\rangle, |Y\rangle$ – випадкові вектори, $|\bar{X}\rangle, |\bar{Y}\rangle$ – вектори їх середніх значень.

Означення 11. Коваріацією $|X\rangle$ та $|Y\rangle$ буде величина

$$\text{cov}(|X\rangle, |Y\rangle) = M(|X\rangle - M|X\rangle)(|Y\rangle - M|Y\rangle), \quad (14)$$

де M – оператор математичного очікування.

Прийнявши

$$M|X\rangle \equiv |\bar{X}\rangle, M|Y\rangle \equiv |\bar{Y}\rangle, \quad (15)$$

з (14) та (15) слідує:

$$\text{cov}(|X\rangle, |Y\rangle) = M(|X\rangle - |\bar{X}\rangle)(|Y\rangle - |\bar{Y}\rangle). \quad (16)$$

Зокрема коваріація випадкового вектора із самим собою

$$\text{cov}(|X\rangle, |X\rangle) = M(|X\rangle - |\bar{X}\rangle)^2 = \mathbf{D}(|X\rangle), \quad (17)$$

де \mathbf{D} – оператор дисперсії.

Цілком природно припустити, що результат дії операторів M та \mathbf{D} у правих частинах (15) – (17) є визначеним.

В подальшому будемо вважати, що випадкові вектори $|X\rangle$ та $|Y\rangle$ належить до класу L^2 , тобто мають *скінченний другий момент*. Звідси слідує, що й коваріація $\text{cov}(|X\rangle, |Y\rangle)$ завжди визначена та скінченна.

До незміщених випадкових векторів в гільбертовому просторі $\tilde{\mathbf{G}}$ в силу $M|X\rangle = M|Y\rangle = 0$; тобто

$$L_0^2 = \{|X\rangle^{(0)} \in L^2 | M|X\rangle^{(0)} = 0\},$$

маємо

$$\text{cov}(|X\rangle^{(0)}, |Y\rangle^{(0)}) = M(|X\rangle^{(0)}, |Y\rangle^{(0)}) \quad (18)$$

і задовольняє аксіомам скалярного добутку.

Виходячи з (16) легко переконатися в наступних твердженнях. Якщо $|X\rangle$ та $|Y\rangle$ – незалежні випадкові вектори, то

$$\text{cov}(|X\rangle, |Y\rangle) = 0,$$

$$\text{cov}(|X\rangle, |Y\rangle) = \text{cov}(|Y\rangle, |X\rangle), \quad (19)$$

$$\text{cov}(|X\rangle + |\text{const}\rangle_1, |Y\rangle + |\text{const}\rangle_2) = \text{cov}(|X\rangle, |Y\rangle), \quad (20)$$

$$\text{cov}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i |X\rangle_i, \sum_{i=1}^n \beta_i |Y\rangle_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \text{cov}(|X\rangle_i, |Y\rangle_j), \quad (21)$$

де $|X\rangle_i, |Y\rangle_j$ – випадкові кет-вектори, $\alpha_i, \beta_j (i, j \in \overline{1, n})$ – дійсні числа, а $|\text{const}\rangle_1$ та $|\text{const}\rangle_2$ – сталі (фіксовані) кет-вектори, що діють в тому ж імовірнісному просторі $\langle X, \mathfrak{A}, \mu_\sigma \rangle$, що й $|X\rangle_i$ та $|Y\rangle_j$.

Властивість (19), очевидно, означає, що коваріація випадкових векторів є комутативною бінарною операцією, яка діє в $\langle X, \mathfrak{A}, \mu_\sigma \rangle$.

Властивість (21) є властивістю білінійності бінарної операції «коваріація» за елементами з \square .

Властивість (17) коваріації дозволяє ввести *норму* випадкового вектора

$$\| |X\rangle \| = \sqrt{\text{cov}(|X\rangle, |X\rangle)} = \sqrt{\mathbf{D}(|X\rangle)}. \quad (22)$$

Відповідно величина

$$\rho(|X\rangle, |Y\rangle) = \sqrt{\text{cov}(|X\rangle, |Y\rangle)} \quad (23)$$

задовольняє аксіомам відстані, а тому може бути прийнята за міру відстані між випадковими векторами в $\langle X, \mathfrak{A}, \mu_\sigma \rangle$.

Означення 11. *Величину*

$$\rho(|X\rangle, |Y\rangle) = \sqrt{\text{cov}(|X\rangle, |Y\rangle)}$$

будемо називати відстанню між випадковими векторами в $\langle X, \mathfrak{A}, \mu_\sigma \rangle$.

Ототожнивши вектори $|X\rangle$ та $|Y\rangle$ із векторами $|\Psi(t_1)\rangle$ та $|\Psi(t_2)\rangle$ життєвого статусу для моментів часу t_1 та $t_2 (t_2 > t_1)$, або ж із векторами $|b_{\alpha_j}(t_1)\rangle, |b_{\alpha_j}(t_2)\rangle$ життєвого стану, ініційова-

ного чинником α_j в моменти часу t_1 та t_2 , введений вище формалізм (14) ÷ (23) аналітично продовжуємо в простір $\langle \mathbf{B}, \mathfrak{M}, \mu_\sigma \rangle$. При цьому в якості $M |X\rangle$ та $M |Y\rangle$ можна прийняти $|b^*\rangle$, де $|b^*\rangle$ – кет-вектор, елементами якого є значення життєвих параметрів з \mathbf{B} , які визнані *стандартними (еталонними)* за мінімальним значенням міри ризику небезпек, пов'язаних з числовим значенням b_i з \mathbf{B} .

В результаті отримуємо

$$\text{cov}(|\Psi(t_1)\rangle, |\Psi(t_2)\rangle) = \mathbf{M}(|\Psi(t_1)\rangle - |b^*\rangle)(|\Psi(t_2)\rangle - |b^*\rangle), \quad (24)$$

$$\text{cov}(|\Psi(t_1)\rangle, |\Psi(t_1)\rangle) = \mathbf{D}|\Psi(t_1)\rangle, \quad (25)$$

$$\|\Psi(t)\rangle\| = \sqrt{\mathbf{D}|\Psi(t)\rangle}, \quad (26)$$

$$\rho(|\Psi(t_1)\rangle, |\Psi(t_2)\rangle) = \sqrt{\text{cov}(|\Psi(t_1)\rangle, |\Psi(t_2)\rangle)}. \quad (27)$$

Ведення співвідношення (26) на елементах векторів життєвого статусу перетворює простір \tilde{B} імовірнісного фазового простору $\tilde{\Phi}$ в нормований простір.

Співвідношення (27) дозволяє ввести «відстань» між життєвими статусами в моменти часу t_1 та t_2 . Єдиною вадою такої «відстані» є її залежність від масштабу, тобто, неінваріантність відносно найменування одиниці вимірювання елементів вектора життєвого статусу.

Для усунення цього недоліку необхідно масштабувати коваріацію на дисперсію значень кет-векторів, які входять до складу коваріації:

$$\rho^*(|\Psi(t_1)\rangle, |\Psi(t_2)\rangle) = \left(\frac{\text{cov}(|\Psi(t_1)\rangle, |\Psi(t_2)\rangle)}{\mathbf{D}|\Psi(t_1)\rangle \cdot \mathbf{D}|\Psi(t_2)\rangle} \right)^{1/2}. \quad (28)$$

Так як $\sqrt{\mathbf{D}|\Psi(t)\rangle} = \sigma_{|\Psi(t)\rangle}$ – середньоквадратичне відхилення $|\Psi(t)\rangle$ від $|b^*\rangle$ в момент часу t , то

$$\rho^*(|\Psi(t_1)\rangle, |\Psi(t_2)\rangle) = \frac{\sqrt{\text{cov}(|\Psi(t_1)\rangle, |\Psi(t_2)\rangle)}}{\sigma_{|\Psi(t_1)\rangle} \sigma_{|\Psi(t_2)\rangle}}. \quad (29)$$

ρ^* задовольняє всім аксіомам відстані і не залежить від одиниці вимірювання елементів $|\Psi(t)\rangle$, а тому може бути прийнятий в якості відстані між життєвими статусами $|\Psi(t_1)\rangle$ та $|\Psi(t_2)\rangle$ в моменти часу t_1 та t_2 ($t_1 < t_2$).

Означення 12. Величину

$$\rho^*(|\Psi(t_1)\rangle, |\Psi(t_2)\rangle) = \frac{\sqrt{\text{cov}(|\Psi(t_1)\rangle, |\Psi(t_2)\rangle)}}{\sigma_{|\Psi(t_1)\rangle} \sigma_{|\Psi(t_2)\rangle}}$$

будемо називати відстанню між випадковими векторами в $\langle X, \mathfrak{M}, \mu_\sigma \rangle$.

Легко бачити, що (29) по суті задає коефіцієнт кореляції Пірсона. Таким чином, $\rho^*(|\Psi(t_1)\rangle, |b^*\rangle)$ визначає відстань життєвого статусу в довільний момент часу t життєдіяльності від еталонного життєвого статусу. $\rho^*(|\Psi(t_1)\rangle, |b^*\rangle)$ разом із $|g_{bi}\rangle$ – кет-вектором, елементами якого є елементи матриці \hat{G}_{bi} співвідносні із значеннями $b_i(t)$ – елементами кет-вектора життєвого статусу $|\Psi(t)\rangle$ – є числовими характеристиками зображуючої точки на фазовій траєкторії в імовірнісному фазовому просторі $\tilde{\Phi}$.

При цьому підпростір \tilde{R} фазового простору все ще залишається не нормованим. Для нормування простору ризику \tilde{R} введемо норму вектора стану ризику $|g\rangle$, елементи якого нале-

жать \hat{G}_{bi} і складаються із такої підсистеми елементів \hat{G}_{bi} , які відповідають частотам небезпек за життєвими параметрами b_i з \mathbf{B} у момент часу t , згенерованими факторами довкілля α_i з Ω . Враховуючи, що елементи \hat{G}_{bi} є дійсними числами, норму $|g\rangle$ можна задати наступним чином:

$$\|g\rangle = \left(\sum_i g_{bi} \right)^{1/2}, \quad (30)$$

а відстань від абсолютної безпеки в \tilde{R}

$$\rho_R = \left(\sum_i (g_{bi} - g_{bi}^*)^2 \right)^{1/2}, \quad (31)$$

де g_{bi}^* – елементи кет-вектора $|g_{bi}^*\rangle$, який складається з чисел значень ризику небезпек, що визначають небезпеку як «безпечна ситуація» за прийнятою градацією небезпек за життєвим параметром b_i .

Так як елементи $|g_{bi}\rangle$ є функціями часу, то й норма (30) і функція відстані ρ_R є функціями часу, отже, описують еволюцію ризику в \tilde{R} . Результатом ведення норм в \tilde{B} та \tilde{R} згідно з (22) та (31) є нормованість імовірнісного простору $\tilde{\Phi}$.

Отже, набір параметрів

$$\{ |\Psi(t)\rangle, |g(t)\rangle, \rho^*(|\Psi(t_1)\rangle, |\Psi(t_2)\rangle), \rho_R(t), \|\Psi(t)\rangle, \|g\rangle \} \quad (32)$$

є повним набором спостережуваних, які аналітично описують положення зображуючої точки в $\tilde{\Phi}$.

При цьому підмножина $\{ |\Psi(t)\rangle, |g(t)\rangle \}$ з (32) аналітично описує траєкторію зображуючої точки у фазовому просторі $\tilde{\Phi}$, підмножина $\{ \|\Psi(t)\rangle, \|g\rangle \}$ з набору (32) задає норму (масштаб) в $\tilde{\Phi}$, а підмножина параметрів $\{ \rho^*, \rho_R \}$ з (32) характеризує ступінь відхилення життєвого статусу та ризику небезпеки життєдіяльності від еталонних (абсолютно безпечних) значень цих параметрів відносно прийнятої границі небезпек.

В якості підсумку відмітимо, що перспективним розвитком досліджень в даному напрямку є аналіз скорельованості станів $|\Psi(t_1)\rangle$ та $|\Psi(t_2)\rangle$ та опис ризику небезпек у фазовому просторі $\tilde{\Phi}$ в умовах квазіпостійної (хронічної) дії одного або групи чинників $\{b_i\}$ з \mathbf{B} .

Також досить цікавим питанням є питання про можливість опису значень сплутаних життєвих статусів, тобто статусів, які в довільні моменти часу t_1 та t_2 задаються не «чистими» станами $|\Psi(t_1)\rangle$ та $|\Psi(t_2)\rangle$, а їх тензорним добутком

$$|\Psi(t_1)\rangle \otimes |\Psi(t_2)\rangle \equiv |\Psi(t_1)\rangle |\Psi(t_2)\rangle \equiv |\Psi_{\tilde{\mu}\tilde{\epsilon}}\rangle, \quad (33)$$

причому $|\Psi_{\tilde{\mu}\tilde{\epsilon}}\rangle$ відноситься до моменту часу t_3 спостережень, а t_1 та t_2 передують t_3 , тобто $(t_1, t_2) < t_3$.

При розгляді еволюції ризику небезпек для системи (колективу) еволюція ризику небезпек кожного члену колективу є траєкторією зображуючої точки у фазовому просторі $\tilde{\Phi}$. Отже, еволюція ризику небезпек колективу є сукупністю фазових траєкторій в $\tilde{\Phi}$. Так як динамічні рівняння руху зображуючих точок

$$\begin{cases} |\Psi(t)\rangle_i; \\ |g(t)\rangle_i, \end{cases}$$

(де i – кількість членів колективу) не є гамільтоновими динамічними рівняннями, то колектив не є гамільтоновою системою.

Отже, для фазового простору зображуючих точок в $\tilde{\Phi}$ не виконуються умови теореми Ліувілля [8]. В зв'язку із цим перспективним було б вирішення питання про необхідні та достатні умови, яким повинні задовольняти рівняння руху зображуючої точки в $\tilde{\Phi}$, при яких виконується теорема Ліувілля.

Література

1. Порядочний Л.В., Заплатинський В.М. Безпека в надзвичайних ситуаціях та цивільна оборона / Л.В.Порядочний, В.М.Заплатинський. – К.: КНТЕУ, 2003. – 300 с.
2. Сусло С.Т. Безпека життя і діяльності людини / С.Т.Сусло. – К.: НТУ, 2001. – 288 с.
3. Купчик М.П. Основи безпеки життєдіяльності в надзвичайних ситуаціях / М.П.Купчик. – Х.: Основа, 2002. – 284 с.
4. Пістун І.П. Безпека життєдіяльності / І.П.Пістун. – Суми: Університетська книга, 2000. – 302 с.
5. Пістун І.П. Безпека життєдіяльності / І.П.Пістун, В.Ф.Піщенко, А.П.Березовецький. – Львів, 1995.
6. Чертов А.Г. Физические величины / А.Г.Чертов. – М.: Высшая школа, 1990. – 336 с.
7. Юдин М.Ф. Основные термины в области метрологии. Словарь-справочник / М.Ф.Юдин, М.Н.Селиванов, О.Ф.Тищенко, А.И.Скороходов. – М.: Техника, 1989.
8. Василевский А.С., Мултановский В.В. Статистическая физика и термодинамика / А.С.Василевский, В.В.Мултановский. – М.: Просвещение, 1985. – 256 с.
9. Кнорозок Л.М. Вплив адаптаційних механізмів організму людини на зміну значень параметрів її життєдіяльності за результатом дії факторів – чинників довкілля / Л.М.Кнорозок, О.В.Мельничук, О.Г.Шевчук.// Фізико – математичні записки. Збірник наукових праць. Видавництво НДУ ім. М. Гоголя. Ніжин, 2007. – с. 103 – 105.
10. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике / Г.Корн, Т.Корн. – М.: Наука, 1978. – С. 832.
11. Бугір М.К. Теорія ймовірності та математична статистика / М.К.Бугір. Тернопіль, 1998. – с. 173.

3

Інформатика

УДК 004.75

ДОБРОВІЛЬНІ ОБЧИСЛЕННЯ НА ПЛАТФОРМІ VOINC

І.М. Глушко

VOINC (Berkeley Open Infrastructure for Network Computing) – відкрита інфраструктура для розподілених обчислень університету Берклі [1]. Це некомерційне міжплатформне програмне забезпечення, що використовується для організації розподілених добровільних обчислень.

Добровільні обчислення (англ. Volunteer computing) – це напрямок в розподілених обчисленнях, ідеологія якого припускає надання особистих обчислювальних ресурсів для організації масштабних розрахунків так званими добровольцями, або «волонтерами» [1, 2]. Добровольці – це, як правило, члени широкої громадськості, які мають персональні комп'ютери підключені до мережі Internet. Такі організації, як школи та підприємства, також можуть надавати свої комп'ютери для обчислень. Волонтери надають ресурси власних персональних комп'ютерів для вирішення різноманітних наукових завдань. Слід зазначити, що при цьому задіяні тільки вільні ресурси, які не використовуються персональним комп'ютером для інших цілей. Таким чином, участь у добровільних обчисленнях не заважає власній роботі користувачів-волонтерів.

Добровільні обчислення є одним з видів Grid-обчислень. Комп'ютери добровольців, які можуть перебувати в географічно віддалених один від одного точках, об'єднуються в Grid під управлінням деякого середовища. Такі Grid-системи створюються під конкретні завдання (їх називають проектами добровільних обчислень), на вирішення яких можуть йти місяці і навіть роки. В основному, ці проекти ініціюються університетами та науковими центрами, які мають необхідні обчислювальні ресурси.

Участь у добровільних обчисленнях є анонімною, проте учасники зобов'язані зареєструватися і надати свій e-mail. Через свою анонімність, добровольці не відповідальні перед проектами. Якщо доброволець навмисно повертає неправильні результати обчислень, то проект не зможе його переслідувати або покарати. Погодившись брати участь у проекті доброволець повинен виявити певну довіру до проекту:

- вірити, що надані додатки, не пошкоджують комп'ютер учасника або вторгаються в його приватне життя;
- вірити, що проект надає правдиву інформацію про те, яка робота ведеться встановленими додатками, і як буде використовуватися отримана інтелектуальна власність;
- вірити, що проектом передбачені належні методи безпеки, щоб хакери не могли використовувати проект як засіб для зловмисних дій.

Першим проектом добровільних обчислень був проект GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), присвячений пошуку простих чисел Мерсенна, який почався в 1995 році. На сьогоднішній день існує більше 50 активних проектів.

Найбільш популярною відкритою програмною платформою для організації добровільних обчислень є VOINC. Дана інфраструктура спочатку розроблялася для проекту SETI@Home в U.C. Berkeley Spaces Sciences Laboratory (США). З 2002 року платформа VOINC вільно поширюється під ліцензією GNU Lesser General Public License, а з 2004 року на її основі створюються інші проекти. Станом на 21.08.2015 р проекти на платформі VOINC сумарно володіють наступними характеристиками:

- 252 303 активних учасників;
- 419 227 активних комп'ютерів;
- середня продуктивність в мережі 7,014 PFLOPS.

Для порівняння станом на 02.04.2012 р показники були наступними [2]:

- 295 000 активних учасників;
- 949 000 активних комп'ютерів;

- середня продуктивність в мережі 6,4 PFLOPS.

Платформа працює на різних операційних системах, включаючи Microsoft Windows, Linux, FreeBSD, Mac OS X, Android, Solaris.

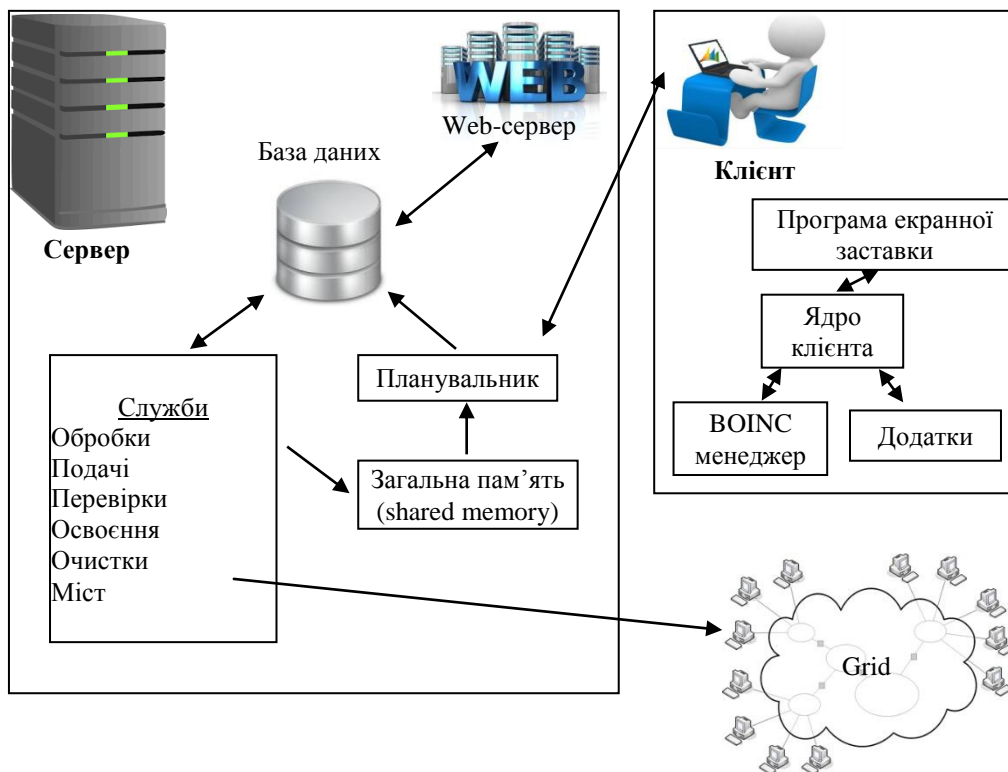
Платформа BOINC має архітектуру «клієнт-сервер» (див. мал. 1) [1, 3, 3]. У цілому, система складається з сервера BOINC, множини клієнтів, що виконують завдання сервера, та можливо Grid-мереж.

Сервер BOINC складається з:

- як мінімум одного Web-сервера, який обробляє вхідні і вихідні повідомлення;
- сервера баз даних, який відстежує стан підзадач і відповідні їм результати, а також зберігає інформацію про клієнтів і набрані ними кредити;
- служб, які періодично перевіряють стан бази даних і виконують необхідні роботи з обслуговування системи та розподілу підзадач.

За необхідності сервер BOINC може бути розподілений на декілька фізичних серверів з метою підвищення продуктивності, відмовостійкості та безпеки.

Основою всього проекту BOINC є база даних. У ній зберігається вся інформація, що відноситься до сервера BOINC, включаючи відомості про зареєстрованих користувачів і їх комп'ютери, про додатки і версії додатків, про використовувані учасниками клієнти BOINC і їх версії, а також про підзадачі і результати обчислень. До цієї інформації звертаються спеціальні службові програми сервера як для зчитування інформації, так і для внесення змін. Система BOINC насамперед орієнтована на роботу з СУБД MySQL.



Мал. 1. Архітектура платформи BOINC

Служби:

- служба обробки стану підзадач (англ. Transitioner) – обробляє стан обчислювальних підзадач і результатів їх розв'язання, здійснює перевірку поточного стану підзадачі в базі даних і оновлення відповідних полів, коли підзадача готова перейти в новий стан;
- служба перевірки результатів (англ. Validator) – перевіряє коректність результатів, надісланих з персональних комп'ютерів добровольців, а також нараховує кредити за коректні результати;

- служба освоєння (англ. Assimilator) – обробляє коректні результати;
- служба видалення файлів (англ. File deleter) – видаляє вихідні файли оброблені службою освоєння і вхідні файли, які більше не потрібні;
- служба подачі (англ. Feeder) – завантажує необроблені підзадачі з бази даних в сегмент загальної пам'яті для обмеження числа запитів до бази даних;
- міст (англ. Bridge) – забезпечує зв'язок і спільну роботу над проектом інфраструктури BOINC і стандартної Grid.

Коли клієнт приєднується до сервера проекту і запрошує наступну порцію завдань запускається планувальник. Планувальник отримує завдання з сегмента загальної пам'яті, в який завдання завантажує служба подачі. Він також може за самостійно призначати підзадачі клієнтам, так як не всі клієнти мають однакові налаштування і комп'ютери. Під час сесії роботи з планувальником клієнт також звітує про завершені роботи, які були вже завантажені на сервер з часу останньої сесії планування.

Клієнт BOINC складається з:

- ядра клієнта (англ. Core client), яке взаємодіє із зовнішніми серверами використовуючи протокол HTTP, а також запускає і контролює додатки;
- BOINC менеджера (англ. GUI або BOINC manager), який забезпечує графічний інтерфейс для моніторингу та контролю ядра клієнта;
- програми екранної заставки, яка працює, коли користувач знаходиться далеко від комп'ютера;
- додатків – програм, які виконують наукові обчислень.

Для того щоб підключитися до проекту, потрібно встановити на свій персональний комп'ютер стандартну програму «BOINC-клієнт», яку можна завантажити на офіційному сайті <https://boinc.berkeley.edu/>. Далі користувач повинен вибрати проект і зареєструватися, вказавши адресу електронної пошти і пароль. Після цього обчислення на стороні користувача відбуваються автоматично:

- 1) комп'ютер запрошує нові завдання на сервері;
- 2) сервер дивиться чи є у нього відповідні для Вашого персонального комп'ютера типи завдань, і якщо так – видає їх;
- 3) комп'ютер завантажує порцію нових завдань;
- 4) починається обробка завдань;
- 5) після того як всі завдання оброблені, комп'ютер відвантажує результати на сервер і запитує нову порцію. Цикл повторюється знову.

Оскільки дані обчислення є добровільними, то надані ресурси персонального комп'ютера не оплачуються. Проте виділяють ряд причин, які мотивують волонтерів до участі у проектах:

- за кожне виконане завдання учасникам проекту нараховуються, пропорційно витраченим обчислювальним ресурсам, так звані «Кредити». Кількість кредитів є характеристикою, за якою учасники змагаються між собою. Учасники можуть об'єднуватися в команди за різними ознаками (національними, регіональними тощо), які також змагаються між собою;
- при виявленні чергового об'єкту пошуку на сайті проекту публікується інформація про учасника, на персональному комп'ютері якого даний об'єкт був знайдений;
- відчуття причетності до важливих наукових досліджень.

Як зазначалося раніше всі проекти є анонімними, а тому існує ймовірність фальсифікації результатів або їх некоректності в результаті апаратного або програмного збою. Для запобігання цього, зазвичай використовуються надлишкові обчислення, тобто для кожного завдання формується декілька копій, які відправляються на персональні комп'ютери різних учасників з різних команд. Отримані результати порівнюються, і якщо вони збігаються, то завдання вважається вирішеним. Якщо ж є розбіжності, то результати анулюються, після чого формуються нові копії завдання, які відправляються іншим учасникам.

Існують три основні статуси проектів добровільних обчислень: «альфа», «бета» і «реліз». Виділяють наступні критерії, за яким проектам привласнюють відповідні статуси [2]:

- стабільність (доступність сайту і сервера проекту 24 години на добу, постійна наявність готових до відправки завдань);
- ступінь завершеності серверного і прикладного ПЗ;

- наявність версій ППЗ для основних операційних систем (Windows, Linux, Mac OS);
- повнота і наочність опису цілей проекту, запланованих та отриманих результатів.

Статуси проектів, що використовують платформу BOINC можна знайти на сайтах Formula BOINC (<http://formula-boinc.org/>), BOINC STATAS (<http://boincstats.com/>).

У табл. 1 наведено приклади діючих проектів на платформі BOINC, їх електронні адреси, цілі, статус та ініціатори.

Таблиця 1. Проекти на платформі BOINC

Назва	E-mail	Мета	Організатор проекту	Статус проекту
Asteroids@home	http://asteroidsathome.net/	Визначення форми і параметрів обертання астероїдів за даними фотометричних спостережень	Карлів університет, чехія	Alpha-версія
ATLAS@Home	http://atlasathome.cern.ch/	Моделювання зіткнень часток в рамках однойменного детектора ATLAS	CERN	Alpha-версія
Citizen Science Grid	http://csggrid.org/csg/	Присвячений підтримці широкого спектру науково-дослідних та освітніх проектів з використанням добровільних обчислень і громадянської науки	Університет Північної Дакоти, США	Beta-версія
Climateprediction.net	http://climateprediction.net/	Вивчення і передбачення клімату Землі.	Оксфордський університет, Великобританія	Повністю функціонує
Collatz Conjecture	http://boinc.thesonnets.com/collatz/	Дослідження гіпотези Коллатца	Приватний проект	Alpha-версія
DENIS@Home	http://denis.usj.es/denisathome/	Проведення досліджень в області серцевої електрофізіології	San Jorge University, Іспанія	
Enigma@Home	http://www.enigmaathome.net/	Спроба розшифрувати 3 повідомлення, зашифрованих німецькою шифрувальною машиною Енігма	Приватний проект	Alpha-версія

Вже розроблено додаток для смартфонів з операційною системою Android, який використовує незадіяні обчислювальні ресурси пристрою і виконує завдання для науково-дослідних проектів.

Отже, добровільні обчислення дозволяють проводити різноманітні наукові дослідження, використовуючи обчислювальні ресурси користувачів мережі Internet.

Література

1. BOINC. Open-source software for volunteer computing [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://boinc.berkeley.edu/>.
2. Заикин О.С. Организация добровольных вычислений на платформе BOINC на примере проектов OPTIMA@home и SAT@home / О.С. Заикин, М.А. Посыпкин, А.А. Семёнов, Н.П. Храпов // CAD/CAM/CAE Observer. – #3 (71). – 2012. – С. 87-92.
3. Ивашко Е.Е. Вычислительная эффективность BOINC-GRID / Е.Е. Ивашко, А.С. Головин // Міжнародна конференція «Високопродуктивні обчислення» НРС-UA'2012 (Україна, Київ, 8-10 жовтня 2012 року). – 2012. – С. 187-194.
4. Ивашко Е.Е. Распределенные вычисления: Часть 2. Архитектура высокопроизводительных вычислений на базе BOINC [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.ibm.com/developerworks/ru/library/1-boinc/index.html>.

УДК 681.3.04

ПРОВЕДЕННЯ ОДНОФАКТОРНОГО ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ ЗА ДОПОМОГОЮ STATISTICA

В. С. Фетісов

Дисперсійний аналіз є одним з методів математичної статистики, спрямованим на пошук залежностей експериментальних даних шляхом дослідження значущості різниць середніх значень. При цьому оброблюються кілька вибірок, що об'єднані в єдиній таблиці. На відміну від *t*-критерія, цей метод дозволяє порівнювати середні значення трьох і більше груп. Метод розроблено Р. Фішером саме для аналізу результатів експериментальних досліджень.

Сутністю метода є вивчення впливу одного або кількох незалежних чинників (факторів) на залежну (результативну) змінну. Залежні змінні подаються у вигляді шкал. Незалежні змінні є категоріальними, тобто відбивають групову причетність і можуть мати дві або більше градації (рівня). Прикладами незалежної змінної X_i може бути стать (X_0 – жіноча, X_1 – чоловіча), тип експериментальної групи (контрольна, експериментальна) тощо.

У літературі для дисперсійного аналізу залежно від кількості включених в нього факторів застосовують назву ANOVA (від англ. ANalysis Of Variance), якщо здійснюється однофакторний аналіз і MANOVA – для багатфакторного. Однофакторний дисперсійний аналіз використовується в тих випадках, коли є три або більше незалежні вибірки, отримані з той самої генеральної сукупності шляхом зміни якого-небудь незалежного чинника, для якої немає кількісних вимірів. Для цих вибірок припускають, що вони мають різні вибіркові середні і однакові вибіркові дисперсії. Необхідно дати відповідь на питання, чи здійснює цей чинник істотний вплив на розкидання вибірових середніх або це розкидання є наслідком випадковостей, викликаних невеликими обсягами вибірок. Іншими словами, якщо вибірки належать тій самій генеральній сукупності, то розкидання даних між вибірками (між групами) має бути не більше, ніж розкидання даних усередині цих вибірок (усередині груп).

Нульова гіпотеза для дисперсійного аналізу формулюється як відсутність розбіжностей між груповими середніми результативної змінної: $H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_m$. Перевірка цієї гіпотези ґрунтується на декомпозиції варіації результативної змінної за джерелами формування.

Загальна варіація результативної змінної ознаки розкладається на дві складові:

Міжгрупову варіацію, зумовлену дією фактора, покладеного в основу групування.

Внутрішньогрупову, випадкову варіацію.

Основну тотожність однофакторного дисперсійного аналізу можна подати як взаємозв'язок між сумами квадратів відхилень:

$$Q = Q_B + Q_W$$

де $Q = \sum_1^m \sum_1^{n_j} (x_{ij} - \bar{x})^2$ – сума квадратів відхилень окремих спостережень x_{ij} від загальної середньої \bar{x} ;

$Q_B = \sum_1^m n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$ – сума квадратів відхилень групових середніх \bar{x}_j від загальної середньої \bar{x} ;

$Q_W = \sum_1^m \sum_1^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$ – сума квадратів відхилень окремих спостережень x_{ij} всередині груп від групових середніх;

n_j – кількість спостережень у j -й групі; m – кількість груп (вибірок); $n = n_j m$ – загальна кількість спостережень.

На основі сум квадратів відхилень розраховуються три оцінки дисперсій за джерелами варіацій:

загальна: $S^2 = \frac{Q}{n-1}$;

міжгрупова: $S_B^2 = \frac{Q_B}{m-1}$;

внутрішньогрупова: $S_W^2 = \frac{Q_W}{n-m}$.

Знаменники оцінок дисперсії є ступенями свободи відповідних джерел варіації. Очевид-

но, вони співвідносяться так само, як суми квадратів відхилень:

$$(n - 1) = (m - 1) + (n - m)$$

Перевірка нульової гіпотези в однофакторному дисперсійному аналізі ґрунтується на співвідношенні міжгрупової і внутрішньогрупової варіації (в розрахунку на один ступінь свободи). F-тест показує, в скільки разів оцінка міжгрупової варіації перевищує внутрішньогрупову:

$$F = \frac{S_B^2}{S_W^2}$$

Критичні значення F-критерію для рівня істотності α визначаються співвідношенням числа ступенів свободи чисельника $(m - 1)$ і знаменника $(n - m)$. Процедура тестування стандартна: якщо $F > F_{1-\alpha}(m - 1; n - m)$, то нульову гіпотезу відхиляють, а якщо $F < F_{1-\alpha}(m - 1; n - m)$, то підстав для відхилення нульової гіпотези немає.

Недоліком однофакторного дисперсійного аналізу є неможливість виявлення вибірок, що відрізняються від інших. З цією метою необхідно використовувати метод Шефе або проводити парні порівняння вибірок.

Алгоритм проведення дисперсійного аналізу

1. Виконати команду **Анализ** ▶ **Дисперсионный анализ (Statistics** ▶ **ANOVA)**. З'явиться вікно "Общий ДА" ("General ANOVA/MANOVA", Загальний дисперсійний аналіз).
2. Вибрати зі списку "Вид анализа" ("Type of analysis") пункт "Однофакторный ДА" ("One-way ANOVA").
3. Натиснути «ОК». З'явиться вікно "Однофакторный ДА".
4. Натиснути кнопку «Переменные» («Variables») і вибрати залежну (dependent) і незалежну (predictor) змінні у вікні "Выберите зависимые переменные и категориальный предиктор" ("Select dependent variables and a categorical predictor (factor)"). *Предиктор* – це незалежна змінна. Якщо її значення поєднуються у групи (категорії), то вона називається *категоріальною*, а якщо ні – то *неперервною*.
5. Натиснути «ОК». З'явиться вікно "Результаты анализа" ("ANOVA Results").
6. Натиснути кнопку «Все эффекты» («All effects»). З'явиться вікно "Одномерный критерий значимости..." для вибраної залежної змінної.

Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	93,97304	1	93,97304	103,3211	0,000000
Группа	12,41905	2	6,20952	6,8272	0,010474
Error	10,91429	12	0,90952		

Мал. 1

7. У вікні з результатами дисперсійного аналізу:

- рядок з назвою незалежної змінної відображає міжгрупову варіацію;

- рядок “Ошибка” (“Error”) відображає внутрішньогрупову варіацію.
- Якщо значення у рядку з назвою незалежної змінної виділені червоним кольором, то це свідчить про те, що розбіжності між груповими середніми є істотними, тобто нульова гіпотеза про відсутність розбіжностей між груповими середніми результативної змінної відхиляється. Рядок з назвою незалежної змінної у колонці “F” містить значення F-критерію Фішера. У рядках з назвою незалежної змінної і “Ошибка” (“Error”) відображаються значення ступенів свободи (Degr. of freedom), що надалі можна використати для розрахунку критерію Фішера.

Додатковий аналіз визначення впливу незалежної змінної на залежну здійснюється за допомогою F-критерію Фішера:

1. За командою **Анализ ► Вероятностный калькулятор ► Распределения...** завантажити ймовірнісний калькулятор.
2. У списку “Распределение” (Розподіл) вибрати “F (Фишера)”.
3. У полях “ст. св. 1” і “ст. св. 2” ввести значення ступенів свободи 1 і 2, обчисливши їх відповідно за формулами $(m - 1)$ і $(n - m)$, де n – кількість спостережень, m – кількість вибірок.
4. У полі “p” задати ймовірність. Оскільки зазвичай для суспільно-економічних явищ приймають $\alpha=0,05$ або $\alpha=0,01$, то ввести у цьому полі значення “0,95” або “0,99”.
5. Натиснути кнопку «**Вычислить**» («**Compute**», Обчислити).
6. Порівняти обчислене значення F-критерію зі значенням, що було розраховане під час проведення дисперсійного аналізу.

4

Методика

УДК 371.124:54

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Н. А. Барило, В.О. Шило

Навчання учнів різним методам і способам розв'язування задач належить до однієї із важливих проблем шкільної математики. Процес розв'язування задач, з точки зору психологів та дидактів-методистів є складним аналітико-синтетичним процесом, що спрямований на взаємодію суб'єкта, який пізнає і мислить з об'єктивним змістом задачі, яку він розв'язує.

Методи і способи розв'язування задач визначаються як характером самих задач, так і тими засобами, якими володіють учні на даному етапі навчання.

Психологічні та дидактичні дослідження проблеми навчання до розв'язування задач встановлюють такі основні причини несформованості в учнів загальних умінь розв'язування задач:

- 1) невміння аналізувати задачу, проникати в її суть, орієнтуватися у ситуаціях, сформульованих в умовах задачі;
- 2) відсутність аналізу власної діяльності учнем після розв'язування задачі, необхідного для того, щоб виділити істотне у структурі розв'язування, вибрати інформацію, корисну для розв'язування інших задач;
- 3) недостатнє управління розумовою діяльністю учнів з боку вчителя в процесі розв'язування задач;
- 4) недостатня увага до з'ясування функцій певних типів задач і кожної конкретної задачі, їх місця в навчанні.

Навчальні задачі і вправи мають складати певну систему з умовами замкненості та мінімальності. Необхідна можливість знаходити розв'язування кожної із задач системи незалежно від інших задач. Але одночасно з тим уміння розв'язувати задачі одного типу мають полегшувати розв'язування задач іншого типу. Важко переоцінити роль у цьому математичних задач з параметрами.

Дійсно, розв'язування математичних задач з параметрами відкриває перед учнями значну кількість евристичних прийомів загального характеру, цінних насамперед, для математичного розвитку особистості та подальшого формування їх загальної математичної культури.

В останні два-три десятиліття задачі з параметрами постійно пропонуються в завданнях зовнішнього незалежного оцінювання та на вступних екзаменах багатьох вузів. Оскільки це дає можливість перевірити знання основних розділів шкільної математики, рівень математичного і логічного мислення, початкові навички дослідницької діяльності.

Висока діагностична цінність задач з параметрами вигідна для екзаменаторів, але аргумент мало втішний для випускників та абітурієнтів. Більше того, досвід показує, що для багатьох ці задачі є «каменем спотикання». Тому не викликає сумніву, що вчителі математики повинні надавати належну увагу у підготовці учнів до «зустрічі з параметром».

Учні частково ознайомлені з поняттям «параметра» (слово «параметр» походить від грецького слова «parametron», що означає «такий або той, що вимірює») під час вивчення лінійних рівнянь і нерівностей, дослідження квадратних рівнянь, розв'язування раціональних нерівностей з параметрами тощо. Отже, база для розгляду таких типів вправ присутня, але складність розуміння даного матеріалу залишається.

Специфікою задач з параметрами є те, що поруч із невідомими величинами в них фігурують параметри, чисельні значення яких конкретно не вказані, але приймаються за відомі. Зрозуміло, що при цьому значення параметрів суттєво впливають на логічний та технічний хід розв'язання задач та форму відповіді. Це є однією з причин не сприймання учнями даного виду вправ.

Параметри входять до рівнянь, нерівностей, систем рівнянь та систем нерівностей.

Рівняння з параметрами має вигляд:

$$F(x, y, z, a, b, c) = 0, \quad (1)$$

де вираз $F(x, y, z, a, b, c)$ визначає деяку функцію від аргументів x, y, z .

В рівнянні (1) значення параметрів a, b, c називають допустимою множиною параметрів.

На допустимій системі параметрів при розв'язуванні різних задач накладаються певні вимоги. Наприклад, розв'язати рівняння (систему рівнянь) з параметрами означає для кожної допустимої системи параметрів знайти множину всіх розв'язків.

В більшості випадків при дослідженні рівнянь розв'язуються такі питання:

- 1) Знайти значення параметрів, при яких рівняння (система) має розв'язок, при яких не має розв'язку.
- 2) Визначити кількість розв'язків в залежності від параметрів.
- 3) Знайти множину допустимих значень параметрів, при яких розв'язки задовольняють певні умови.
- 4) При складанні рівнянь до задач встановлюються умови, які повинні задовольняти допустимі значення невідомих і параметрів.

Аналогічні питання розглядаються при розв'язуванні нерівностей (систем нерівностей).[1]

Для кожного виду рівнянь і нерівностей шкільного курсу математики встановлений загальний метод розв'язування, що відповідає рівнянням і нерівностям з параметрами єдиний як для одного так і для двох параметрів. Для того, щоб перейти безпосередньо до розгляду доцільно дібраних задач звернемо увагу на таке. По-перше, ми обмежимося розглядом лише аналітичного методу розв'язування рівнянь; по-друге, ми не ставимо за мету акцентувати увагу лише на рецептурі, а насамперед на логіці розв'язування задач з погляду знань по темі «Похідна та її застосування». Цей розділ є одним із розділів, що вивчається в шкільній математиці і не відноситься до елементарної математики. Знання отримані при його вивченні дають можливість випускнику не тільки одержати уявлення про диференціальне числення як сильний прикладний апарат сучасної математики, але і навчитися свідомо його використовувати при розв'язанні цілого ряду задач, що не піддаються елементарним методам їх розв'язку.[2]

Розглянемо деякі види задач з параметрами, при розв'язуванні яких використовуються ідеї математичного аналізу і його апарат, зокрема:

- похідна, її геометричний зміст;
- рівняння дотичної до графіка функції;
- екстремуми функції (критичні точки);
- зростання, спадання функції (монотонність);
- найбільше і найменше значення функції на відрізьку;
- розв'язування задач прикладного змісту.

Здебільшого сам апарат математичного аналізу відіграє допоміжну кількісно-уточнюючу роль, в той час, коли якісна картина отримується і без нього.

На прикладах доцільно дібраних задач, що містять параметр, розкриємо методичні особливості їх розв'язання, з використанням елементів диференціального числення, зокрема поняття похідної.

Завдання №1. При якому від'ємному значенні параметра a рівняння

$$\sin^3 x \cos x = a \quad (2)$$

має один корінь на інтервалі $(0; \pi)$?

Розв'язання:

Скориставшись геометричною інтерпретацією, бачимо – рівняння (2) матиме один корінь, якщо лінії $y(x) = \sin^3 x \cos x$ і $y = a$ ($a < 0$) матимуть одну спільну точку. Звідси пряма $y = a$ – дотична до кривої $f(x) = \sin^3 x \cos x$. За означенням стаціонарні (критичні) точки функції $f(x)$ є коренями рівняння

$$f'(x) = 0.$$

Завдання зводиться до розв'язання рівняння

$$3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x = 0$$

Звідси,

$$\sin^2 x = 0 \quad \text{або} \quad 3\cos^2 x - \sin^2 x = 0,$$

корені якого:

$$\left\{ \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi m, \quad n, k, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Серед яких лише множини

$$\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi m, \quad \text{де } k = 0, m = 0$$

задовольняють умову задачі.

Легко переконатись, що

$$\max_{(0; \pi)} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} > 0;$$

$$\min_{(0; \pi)} f(x) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16} < 0.$$

Отже, рівняння (2) має єдиний корінь $x = \frac{2\pi}{3}$ на інтервалі $(0; \pi)$, при $a = -\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

Відповідь: при $a = -\frac{3\sqrt{3}}{16}$ рівняння (2) має єдиний корінь $x = \frac{2\pi}{3}$ на інтервалі $(0; \pi)$.

Завдання №2. Знайти всі a , при яких на графіку функції $f(x) = ax^3 + (a-1)x^2$ існує єдина точка з від'ємною абсцисою, дотична в якій паралельна прямій $y = 2x$.

Розв'язання:

Геометричний зміст похідної $y = f(x)$ в заданій точці x_0 показує, що

$$f'(x_0) = k, \quad \text{де } k = \operatorname{tg} \alpha = 2.$$

Звідси,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2(a-1)x,$$

тоді задача зводиться до розв'язання

$$3ax^2 + 2(a-1)x - 2 = 0 \tag{3}$$

причому $x < 0$.

Очевидно, при $a = 0$, корінь рівняння (3) – єдиний: $x_1 = -1$; якщо $a \neq 0$, то (3) рівносильне рівнянню:

$$x^2 + \frac{2(a-1)}{3a}x - \frac{2}{3a} = 0,$$

де $D = \frac{4a^2 + 16a + 4}{9a^2}$.

Визначимо значення параметра a : якщо $D = 0$, то $a_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$.

При таких значення параметра одержимо $x = \frac{1-a}{3a}$, який, очевидно, від'ємний. За теоремою Вієта для існування одного від'ємного кореня достатньо виконання умови

$$-\frac{2}{3a} < 0,$$

звідки $a > 0$, що забезпечує умову: $D > 0$.

Відповідь: при $a = -2 - \sqrt{3}$ або $a = -2 + \sqrt{3}$, або $a \geq 0$ існує єдина точка з від'ємною абсцисою.

Завдання №3. Знайти всі a , при яких хорда параболи $y = -a^2 x^2 + 5ax - 4$ дотикається до кривої $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ в точці $x = 2$ і ділиться нею навпіл.

Розв'язання:

Загальний вигляд рівняння дотичної:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Тоді рівняння дотичної, яка проведена до графіка функції $y = \frac{1}{(1-x)^2}$ в точці $x = 2$:
 $y = -2x + 3$.

Оскільки

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'(2) = -2, \quad f(2) = 1.$$

Нехай x_1 і x_2 - абсциси кінців хорди параболи, про яку йдеться в умові. Тоді ці значення змінної x будуть коренями рівняння

$$-a^2x^2 + 5ax - 4 = -2x + 3, \quad (4)$$

яке рівносильне рівнянню

$$a^2x^2 - x(2 + 5a) + 7 = 0.$$

Оскільки $x = 2$ є абсцисою середини хорди, то $x_1 + x_2 = 4$, а їх сума

$$\frac{5a+2}{a^2} = 4.$$

Тоді шукані значення параметра – розв'язок системи:

$$\begin{cases} D > 0, \\ \frac{5a+2}{a^2} = 4. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} -3a^2 + 20a + 4 > 0, \\ 4a^2 - 5a - 2 = 0, \end{cases}$$

де $a_1 = \frac{5+\sqrt{57}}{8}$, $a_2 = \frac{5-\sqrt{57}}{8}$.

Зауваження: за умовою задачі випадок

$$\begin{cases} D = 0, \\ a = 0, \end{cases}$$

можна не розглядати.

Відповідь: $a_1 = \frac{5+\sqrt{57}}{8}$, $a_2 = \frac{5-\sqrt{57}}{8}$.

Завдання №4. Знайти критичні точки функції $f(x) = (2x - 1)\sqrt[4]{x - a}$.

Розв'язання:

За означенням критична точка – це внутрішня точка області визначення функції, в якій похідна дорівнює нулю або не існує.

За правилом похідної добутку одержимо:

$$f'(x) = \frac{10x-8a-1}{4\sqrt[4]{(x-a)^3}}.$$

Оскільки, знайдена похідна існує у всіх внутрішніх точках області визначення функції f , то критичні точки слід шукати серед коренів рівняння $f'(x) = 0$, звідси

$$\frac{10x-8a-1}{4\sqrt[4]{(x-a)^3}} = 0, \quad (5)$$

корені якого

$$x = \frac{4a}{5} + \frac{1}{10}.$$

Оскільки

$$4\sqrt[4]{(x-a)^3} \neq 0.$$

Звідки $x \neq a$, тому має виконуватись умова $\frac{4a}{5} + \frac{1}{10} > a$. Отримуємо $a < \frac{1}{2}$.

Відповідь: якщо $a < \frac{1}{2}$, то $x = \frac{4a}{5} + \frac{1}{10}$ - критична точка; якщо $a \geq \frac{1}{2}$, то критичних точок немає.

Завдання №5. Знайти всі значення параметра c , при яких функція

$$f(x) = (c - 12)x^3 + 3(c - 12)x^2 + 6x + 7$$

монотонно зростає для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Розв'язання:

Область визначення функції:

$$D(y) = \mathbb{R}.$$

Функція диференційована на всій числовій прямій:

$$f'(x) = 3(c - 12)x^2 + 6(c - 12)x + 6.$$

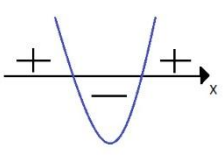
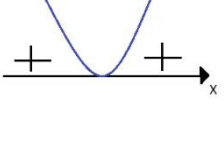
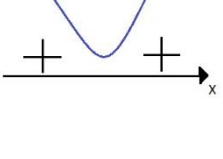
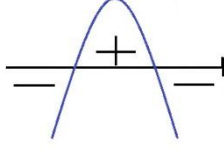
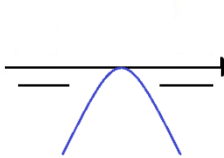
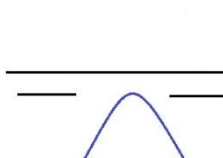
Умову задачі можуть задовольняти ті і тільки ті значення параметра c , які знайдемо за умовою зростання функції:

Якщо $f'(x) \geq 0$ у кожній точці інтервалу $(a; b)$ (причому рівняння $f'(x) = 0$ має лише скінченну множину коренів), то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.

Аналізуючи похідну заданої функції, враховуємо, що вона є квадратичною функцією тільки у випадку, коли $c - 12 \neq 0$ (тобто $c \neq 12$). Тому випадок $c - 12 = 0$ (тобто $c = 12$) слід розглянути окремо.

Всі можливі варіанти розміщення параболи відносно осі абсцис подані в Таблиці 1.

Таблиця 1

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$c - 12 > 0$			
$c - 12 < 0$			

Таким чином, знайдемо всі значення c , при яких нерівність $f'(x) \geq 0$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, по-перше, слід розглянути випадок, коли $c = 12$. Отримаємо

$$f'(x) = 6 > 0$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$. Якщо $c \neq 12$, то $f'(x)$ – квадратична функція. Вона приймає невід'ємне значення для всіх $x \in \mathbb{R}$, якщо

$$\begin{cases} D \leq 0, \\ c - 12 > 0. \end{cases}$$

Маємо

$$\begin{cases} (c - 12)^2 - 2(c - 12) \leq 0, \\ c - 12 > 0. \end{cases}$$

Звідси

$$12 < c \leq 14.$$

Відповідь: $12 < c \leq 14$.

Завдання №6. Знайти найбільше значення функції $f(x) = x^4 - 2ax^2 + 3a^2$ на відрізку $[-2; 1]$ в залежності від значень параметра a .

Розв'язання: маємо

$$f' = 4x(x^2 - a).$$

Очевидно, якщо $a \leq 0$, то вихідна функція має лише одну критичну точку $x = 0$, яка є точкою мінімуму. Звідси, при $a \leq 0$ функція f може приймати найбільше значення на проміжку $[-2; 1]$ лише в точках $x = -2$ або $x = 1$. Далі можна зробити так: знайти $f(-2)$ і $f(1)$ і порівняти отримані значення. Однак, помітивши, що функція f парна, приходимо до висновку, що $f(-2) = f(2) > f(1)$ (функція f при $a \leq 0$ зростає на проміжку $[0; \infty)$). Таким чином,

$$\max_{[-2; 1]} f(x) = f(-2) = 16 - 8a + 3a^2.$$

Якщо $a > 0$, то дана функція має три критичні точки: $x = -\sqrt{a}$, $x = 0$, $x = \sqrt{a}$. Легко встановити, що $x = 0$ – точка максимуму, $x = -\sqrt{a}$, $x = \sqrt{a}$ – точки мінімуму, причому в силу характеру монотонності функції f :

$$f(0) > f(-\sqrt{a}) \text{ і } f(0) > f(\sqrt{a}).$$

Отже, точки $x = -\sqrt{a}$ і $x = \sqrt{a}$ в подальшому дослідженні не приймають участі і залишається лише порівняти значення $f(-2)$, $f(0)$ і $f(1)$. Маємо $f(0) = 3a^2$, $f(1) = 3a^2 - 2a + 1$. Очевидно при $a \geq 2$: $f(0) \geq f(-2)$, $f(0) \geq f(1)$. Легко перевірити, що при $a < 2$: $f(-2) > f(0)$, $f(-2) > f(1)$.

Відповідь: якщо $a < 2$, то

$$\max_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = 16 - 8a + 3a^2;$$

якщо $a \geq 2$, то

$$\max_{[-2;1]} f(x) = f(0) = 3a^2.$$

Завдання №8. Було перевірено декілька державних ферм, що спеціалізуються на вирощуванні великої рогатої худоби. За результатами перевірки було отримано функцію:

$$f(x) = 1690 + 32ax + 10x^2,$$

де $f(x)$ – виробничі затрати (грн.), x – валовий приріст (тис. ц.).

Визначити обсяг виробництва, при якому собівартість одиниці продукції буде найменшою.

Розв'язання:

Якщо x – обсяг виробництва, а затрати на нього визначаються функцією $f(x)$, то собівартість продукції буде визначатись через похідну

$$\begin{aligned} f'(x) &= 32a + 20x_0, \\ \frac{f(x_0)}{x_0} &= \frac{1690}{x_0} + 32a + 20x_0, \\ 32a + 20x_0 &= \frac{1690}{x_0} + 32a + 20x_0, \\ x_0 &= 13 \text{ (тис. ц.)}. \end{aligned}$$

Отже, мінімальна собівартість одиниці продукції буде за умови, що річний валовий приріст маси становитиме 13 тис. ц. при $a \in R$.

Відповідь: $x_0 = 13$ тис. ц. при $a \in R$.

Як бачимо, в запропонованих задачах №1-№8 завдання зводилось до складання і розв'язання того чи іншого рівняння (нерівності) з параметром. Звідси вчителю необхідно звернути увагу на закріплення навичок та вмінь в розв'язуванні простіших рівнянь.

Оскільки будь-яке рівняння або нерівність з параметрами можна розв'язувати як звичайне рівняння (нерівність) доти, поки всі перетворення або міркування, які необхідні для розв'язку, можна буде виконати однозначно. В протилежному випадку, розв'язування потрібно розбивати на стільки випадків, щоб в кожному з них відповідь через параметри записувалась однозначно.

Розв'язування рівнянь (нерівностей) з параметрами вимагає навичок у досліджуванні умов існування розв'язків у залежності від конкретних числових значень параметрів, що в свою чергу розвиває творчі здібності школярів.

Вправи

1. Знайти всі дійсні значення параметра a , при яких на графіку функції

$$f(x) = ax^3 - (a-1)x^2$$

існує єдина точка з від'ємною абсцисою, дотична якої паралельна прямій $y = -2x$.

Відповідь: $a \leq 0$ або $a = 4 - \sqrt{15}$.

2. Знайдіть критичні точки функції

$$f(x) = 2 \sin a \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{\sqrt{4a - a^2}}.$$

Відповідь: Якщо $0 < a \leq \frac{\pi}{6}$ чи $\frac{5\pi}{6} \leq a < 4$, то $x = \pi n$ або $x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1+2\sin a}{2}\right) + \pi n$; якщо $\frac{\pi}{6} < a < \frac{5\pi}{6}$, то $x = \pi n$, де $n \in Z$.

3. Знайти множину всіх значень параметра a , при яких функція

$$f(x) = (a + 2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$$

є монотонно спадаючою для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Відповідь: $a \leq -3$.

4. Знайти найбільше значення функції

$$f(x) = \frac{1}{2bx^2 - x^4 - 3b^2}$$

на відрізку $[-2; 1]$ в залежності від значень параметра b .

Відповідь:

$$\text{якщо } b \leq 2, \text{ то } \max_{[-2;1]} f(x) = -\frac{1}{3b^2 - 8b + 16};$$

$$\text{якщо } b \geq 2, \text{ то } \max_{[-2;1]} f(x) = -\frac{1}{3b^2}.$$

5. При яких дійсних значеннях a і b всі екстремуми функції

$$f(x) = a^2x^3 - 0,5ax^2 - 2x - b$$

додатні і мінімум знаходиться в точці $x_0 = \frac{1}{3}$?

$$\text{Відповідь: } a = -2, b < -\frac{11}{27} \text{ або } a = 3, b < -\frac{1}{2}.$$

Література

1. Нестеренко Л. І. Рівняння і нерівності з параметрами. – Ніжинський державний пед. ін.-т, 1997. – 18 с.
2. Програми з математики для 5-11 кл. загальноосвітньої школи / Мін. Освіти України. – К., 1992. – 89 с.
3. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. Пособие для 11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991. – 61-86 с.
4. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. – К.: РИА «Текст»; МП «ОКО», 1992. – 290 с.
5. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підручник для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – 5-те вид. – Х.: Гімназія, 2009. – 169-170 с.
6. Цыпкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука, 1989. – 576 с.
7. Барило Н. А., Горова А. В. Застосування похідної при графічному методі розв'язування задач з параметрами // Фізико-математичні записки: Збірник наукових праць. – Ніжин: вид. НДУ ім. Миколи Гоголя, 2012. – 69-78 с.

УДК 372.851:372

МІЖПРЕДМЕТНІ ЗВ'ЯЗКИ МАТЕМАТИКИ І ФІЗИКИ ЯК СКЛАДОВА ПЕДАГОГІЧНОЇ СИСТЕМИ

Л.М. Бойко, М.П. Бойко

Шкільна система освіти призвана забезпечити передачу наступним поколінням педагогічно адаптованої культурної спадщини людства. Культура, соціальний досвід, є основним джерелом змісту освіти [1]. В.В. Краєвський, І.Я. Лернер, Н.М. Скаткін виділяють три рівня формування змісту освіти: рівень загальнотеоретичного уявлення, рівень навчального предмета, рівень навчального матеріалу [2]. Вивчення окремих предметів в школі в своїй сукупності має забезпечити засвоєння учнями системи наукових знань.

Навчальні предмети, розглядаючи факти і явища реального світу, виділяють і висвітлюють окремі їх сторони. Це полегшує процес пізнання. Проте, в реальному природному середовищі різні сторони і властивості об'єктів взаємопов'язані і взаємообумовлені. І якщо специфічний предметний підхід не буде органічно пов'язаний з пізнанням інших сторін об'єктів, що вивчаються, то в учнів може сформуватися неправильне уявлення про існування ізольованих сфер

прояву властивостей об'єктів і явищ реального світу. Це ускладнює формування цілісних уявлень, про об'єкти пізнання, утруднює пізнання закономірностей природного і суспільного середовищ.

Уникнути зазначених вище недоліків у навчанні дозволяє налагодження зв'язків між окремими предметами – міжпредметних зв'язків (МПЗ). МПЗ допомагають розкрити зв'язки між об'єктами і явищами, які вивчаються на уроках з різних дисциплін, сприяють кращому розумінню учнями сутності цих об'єктів і явищ.

Проблема взаємозв'язку шкільних дисциплін постала перед педагогами ще в період становлення дидактики як науки. Я.А. Коменський, І.Г. Песталоцці, Ф. Дістверг, В.Ф. Одоєвський, К.Д. Ушинський та ін. бачили необхідність встановлення зв'язків між різними навчальними предметами. МПЗ розглядалися ними як одна з важливих умов подолання схоластики у процесі навчання і формалізму в засвоєнні знань учнями, підвищення ефективності навчального процесу.

Я.А. Коменський зазначав: «Все, що пов'язано між собою, повинно пов'язуватись постійно» [3, с. 65]. І.Г. Песталоцці з того ж приводу писав: «Приведи в своїй свідомості всі взаємопов'язані між собою речі в такий саме зв'язок, в якому вони дійсно знаходяться в природі» [3, с. 324].

З 70-х років минулого століття проблема МПЗ стає однією з центральних в дидактиці. Розглядалися можливості їх реалізації не лише на рівні змісту освіти, а й в діяльності учнів, методах і організаційних формах. Приділялась значна увага виховному аспекту МПЗ, навчально-пізнавальної діяльності учнів під час їх здійснення, ролі таких зв'язків у вдосконаленні процесу навчання в цілому.

В умовах істотних змін в шкільній освіті, коли впровадження діяльнісного, особистісно-орієнтованого підходу розглядається як умова всебічного розвитку особистості учня, а математика все ширше використовується як методологія сучасної фізики й інших наук, питання міжпредметних зв'язків набуває особливого значення.

Разом із тим на сьогодні в педагогічній науці немає єдиного підходу до визначення і трактування сутності міжпредметних зв'язків як дидактичного феномена. Так, А.В. Усова, Н.Т. Донченко, А.С. Адігазаров розглядають МПЗ як дидактичний еквівалент зв'язків різних наук [4]. В.М. Федорова вважає МПЗ відображенням між наукових зв'язків у змісті і методах навчання, що виступає як дидактична умова науковості і доступності навчання [5]. О.Л. Швай розглядає МПЗ як умову вдосконалення усього навчального процесу [6]. Інші дослідники вважають МПЗ проявом принципу системності наукового пізнання, методом пізнання та ін. С.У Гончаренко в «Українському педагогічному словнику» дає таке означення МПЗ: «Міжпредметні зв'язки – це взаємне узгодження навчальних програм, зумовлене системою наук і дидактичною метою» [7, с. 210]. В останньому означенні випадає сутність МПЗ як складової навчального процесу.

Загально визнано, що освітній педагогічний процес як процес оволодіння змістом педагогічно адаптованого соціального досвіду, має здійснюватися під егідою педагогічної системи [8, 9, 10]. За означенням Н.В. Кузьміної, педагогічна система це упорядкована сукупність взаємопов'язаних структурних і функціональних компонентів підпорядкованих цілям навчання й виховання [10, с. 11]. Необхідною і достатньою умовою функціонування педагогічної системи є сукупність п'яти основних взаємопов'язаних компонентів: мета освітнього процесу, зміст освіти, засоби педагогічної комунікації, учитель, учень.

Очевидно, що успішна реалізація міжпредметних зв'язків можлива лише за наступних умов:

- чіткого визначення і розуміння мети реалізації МПЗ в системі вивчення певних предметів;
- виділення змісту МПЗ в рамках оволодіння відповідними навчальними предметами під час вивчення тих чи інших питань програми на уроках і в позаурочний час;
- обрання певних, таких, що відповідають змісту, засобів педагогічної комунікації (методи навчання, форми організації навчального процесу, технічні, інформаційні засоби і т. ін.);
- педагога, який знає з якою метою, які і як мають бути встановлені і використані міжпредметні зв'язки під час оволодіння учнем навчальним матеріалом з даного предмета;
- учня, який має сприйняти відповідний навчальний матеріал.

Тому, в ієрархії педагогічних систем, які забезпечують освіту і виховання молоді необхідно забезпечити ефективне функціонування підсистем МПЗ чітко визначивши їхню мету, зміст, форми й методи включення в структуру і логіку процесу оволодіння учнями відповідними знаннями, вміннями й навичками.

Особливе значення проблема міжпредметних зв'язків має для математики і фізики.

Математика як шкільний навчальний предмет відіграє важливу міждисциплінарну об'єднуючу роль в процесі взаємопроникнення та взаємовпливу різних наук. Одна й та сама математична модель може слугувати основою різних об'єктів і процесів природознавства.

Проте, найбільш актуальною є проблема міжпредметних зв'язків математики і фізики (МПЗМФ). Розвиток фізики і математики тісно взаємопов'язаний. Математичні методи, як загальні методи розв'язання практичних і теоретичних питань значною мірою з'явилися і продовжують розвиватися у зв'язку з необхідністю розв'язання задач фізики і техніки. Тому проблема ефективності функціонування підсистеми міжпредметних зв'язків у процесі вивчення математики і фізики з завжди актуальною і повинна здійснюватися в різних напрямках: використання символіки та термінології суміжної дисципліни; узгодженість формувань та інтерпретації математичних і фізичних понять; формування спільних способів діяльності; розробка і виконання завдань і задач з міжпредметним змістом на уроках математики і фізики, тощо.

Зрозуміло, що міжпредметні зв'язки на уроці математики або фізики не є самоціллю. Їх використання підпорядковане дидактичній меті уроку з відповідного предмета і спрямоване на підвищення ефективності засвоєння певного навчального матеріалу. Зміст міжпредметних зв'язків визначається темою уроку, рівнем володіння вже набутими знаннями, вміннями, навичками суміжного предмету, які передбачається використати на даному уроці, або до оволодіння якими необхідно підготувати учнів.

Зміст освіти загалом і зміст освіти в межах кожної навчального предмета, як показали дослідження І.Я. Лернера, В.В. Краєвського та інших вчених, може бути представлений як педагогічно адаптований соціальний досвід людства. Зміст шкільного предмета відбиває зміст відповідної науки, визначений програмою і включає чотири складових:

- знання теоретичних основ відповідної науки (закони, теорії, поняття й ін.);
- знання способів діяльності у відповідній галузі й оволодіння способами цієї діяльності у вигляді вмінь і навичок;
- оволодіння досвідом творчої діяльності (зокрема досвідом вирішувати задачі в нестандартних ситуаціях);
- досвідом ціннісного ставлення до діяльності у відповідній галузі.

Як обов'язковий елемент змісту освіти МПЗ обумовлюють певну послідовність вивчення тем із математики й фізики, яка мають бути відображені в програмах та навчальних планах. Це накладає певні вимоги щодо рівня сформованості необхідних міжпредметних знань, умінь, навичок та передбачає певну узгодженість в організації навчального процесу під час вивчення і математики і фізики.

Підсумовуючи сказане вище, можна стверджувати, що МПЗМФ повинні забезпечувати формування математичного апарату вивчення фізики, зміст якого забезпечує необхідний обсяг знань, умінь і навичок з математики, достатній для оволодіння фізикою як шкільним навчальним предметом.

У зв'язку з цим можна виділити такі вимоги до змісту математичного апарату шкільного курсу фізики:

- забезпечувати, по можливості, вивчення всіх математичних об'єктів, необхідних на тому чи іншому етапі для вивчення шкільного курсу фізики;
- забезпечувати засвоєння математичних понять, законів та теорій на рівні, достатньому для вивчення шкільного курсу фізики на даному етапі навчання.

Засвоєння математичного апарату вивчення фізики повинно відбуватися переважно на уроках математики, тобто передувати їх застосуванню на уроках фізики. Теорему Піфагора, подібні трикутники, лінійні й квадратні рівняння та ін. учні повинні вивчити до того, як вивчаються закони рівномірного і нерівномірного руху, вводяться рівняння руху, розглядаються задачі динаміки, статички і т. ін..

У процесі вивчення матеріалу, що може бути використаним у суміжній дисципліні, слід дотримуватися єдності термінології, позначень, використання символів, та однакового тракту-

вання відповідних понять на уроках математики і фізики (шлях, переміщення, вектор, швидкість, рівності, рівняння й ін.).

Організація навчального процесу повинна передбачати засвоєння учнями способів діяльності, методів однієї дисципліни, з метою забезпечення можливості перенесення ЗУН і використання під час вивчення суміжної дисципліни (розв'язування рівнянь, вміння визначати площі, об'єми різних геометричних тіл, інтерпретувати графіки залежностей різних величин, виявляти функціональні залежності між різними величинами й ін.).

Оволодіти міжпредметними знаннями, вміннями, навичками неможливо лише шляхом посилення на відповідний матеріал, що вивчається на уроках математики або фізики. Формування способів діяльності можливе лише за умов включення учнів у відповідну навчальну діяльність. Загально визнаний принцип єдності свідомості й діяльності встановлений Леонтьєвим говорить, що формування людини (учня) можливе лише в процесі діяльності адекватної їй, риси якої потрібно сформувати. Така діяльність може бути організована на основі виконання вправ і задач з міжпредметним змістом у процесі навчання математики і фізики.

Література

1. Дидактика средней школы: Некоторые вопросы современной дидактики / Под ред. М.Н. Скаткина. – М.: Просвещение, 1982. – 319 с.
2. Теоретические основы содержания общего среднего образования / Под ред. В. В. Краевского, И. Я. Лернера. – М.: Педагогика, 1983. – 352 с.
3. Коменский Я.А., Локк Д., Руссо Ж.-Ж., Песталоцци И.Г. Педагогическое наследие / Сост. В.М. Кларин, А.Н. Джурицкий. – М.: Педагогика, 1988. – 416 с.
3. Донченко Н.Т. та ін. Міжпредметні зв'язки під час вивчення фізики в середній школі: Посібник для вчителів. - К.: Рад. шк., 1979, – 118 с.
4. Федорова В.Н., Киришкін Д.М. Междпредметные связи. На материале естественнонаучных дисциплин средней школы. – М.: Педагогика, 1972. – 152с.
5. Швай О.Л. Формирование функциональных представлений учащихся 6-8 классов при изучении математики на междпредметной основе: дис... канд. пед. наук: 13.00.02; Науч.-исследов. ин-т педагогики Украины. – Киев, 1992. – 193 с.
6. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник. – К.: Либідь, 1997. – 375 с.
7. Беспалько В.П. Основы теории педагогических систем. Воронеж: ВГУ, 1977. – 304 с.
8. Ильина Т.А. Системно-структурный подход к организации обучения. Вып. 1. – М.: Знание, 1972. – 72 с.
9. Методы системного педагогического исследования: учеб. пособие/под ред. Н.В. Кузьминой. М.: Народное образование, 2002. – 208 с.

УДК 371.32:51

ФОРМУВАННЯ СОЦІАЛЬНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ У ЕВРИСТИЧНОМУ НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Н.П. Варущик

На сучасному етапі розвитку суспільства й науки в українську систему освіти впроваджується компетентнісний підхід. Тобто на зміну знаннєвій парадигмі приходять особистісно-орієнтована. Провідним стає:

- 1) надбання різностороннього досвіду діяльності;
- 2) націленість суб'єкта на оцінку своєї діяльності та її результатів, рефлексію своїх можливостей, усвідомлення меж своєї компетентності й некомпетентності.

Упровадження компетентнісного підходу знайшло своє відображення і в загальних критеріях оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти, і в навчальних програмах. У той же час залишаються протиріччя між цілями й завданнями математичної освіти, спрямованими на формування системних знань, інтелектуальний розвиток, активізацію

пізнавальної діяльності учнів, формування в них ключових і математичних компетентностей, крім того, недостатнім є методичне забезпечення, відсутність конкретних методичних рекомендацій необхідних для розв'язання цих завдань. Усе це зумовлює актуальність наукового обґрунтування засобів реалізації вище зазначених змін у математичній освіті.

Мета дослідження: теоретично обґрунтувати методичну систему формування соціальних компетентностей у старших класах у процесі навчання математики.

Питанням упровадження компетентнісного підходу в математичну освіту присвячені роботи С. А. Ракова, І. М. Аллагулової, Л. І., О.В. Шавальової та ін. Зокрема С. А. Раков визначає математичну компетентність як уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибки обчислень. Суттєвою ознакою компетентностей як результату освіти є те, що вони формуються і проявляються в діяльності, тому компетентнісний підхід дає змогу реалізувати діяльнісний характер освіти.

В основі компетентнісного підходу лежать два основних поняття: «компетенція» і «компетентність», які в найбільш загальному розумінні означають: компетенція – питання, в яких людина добре обізнана, володіє пізнанням та досвідом; компетентність – володіння відповідними знаннями і здібностями, які дають людині змогу ґрунтовно судити про певну сферу й ефективно в ній діяти.

Соціальна компетентність як одна з ключових компетентностей передбачає вміння жити і працювати з людьми, з близькими, в трудовому колективі, в команді. Слід створити умови навчання, в яких випускник школи зможе:

- оволодіти стилем мислення, що характерний для математики, з його абстрактністю, строгістю, доказовістю;
- вміти логічно доводити твердження, висувати гіпотези і розуміти необхідність їх перевірки;
- ясно, точно та грамотно висловлювати свої думки в усному та письмовому мовленні, використовувати різні форми математичної мови (словесну, символічну, графічну);
- використовувати математичні підходи до розв'язування задач, що виникають у навколишньому світі;
- виконувати пошук, відбір, аналіз, систематизацію і класифікацію інформації;
- самостійно використовувати різноманітні інформаційні джерела складати бази даних [1].

Оскільки усі ланки методичної системи навчання математики перебувають у діалектичній єдності, то зміна цілей навчання потребує змін і в інших її складових, а саме оновлення змісту, оптимального відбору засобів навчання, методів, форм організації, комплексне використання яких забезпечувало б розвиток психічних якостей особистості, сприяло б формуванню соціальної компетентності, яка передбачає здатність діяти в соціумі з урахуванням позицій інших.

Математична компетентність – це вміння бачити й застосовувати математику в реальному житті, розуміти її зміст і метод математичного моделювання, будувати і досліджувати математичні моделі. Досить далекими від математичних компетентностей є запам'ятовування формул, розв'язування формальних задач, уміння використовувати готові схеми.

Ідея математичного моделювання та математичної моделі є однією з основних ідей математики. Проте, для учнів вона залишається недостатньо виявленою, або просто невідомою. Однією з причин, безперечно є те, що в шкільному курсі математики до цих пір ця ідея не знаходила належного відображення. Для того, щоб учні оволоділи ідеями і методами сучасної математики необхідно ввести їх у зміст навчання у явному вигляді, оскільки актуально усвідомлюється лише той зміст навчального матеріалу, який є предметом цілеспрямованої активності суб'єкта.

Учні повинні усвідомити, що математична модель – це наближений опис будь-якого класу явищ зовнішнього світу, виражений за допомогою математичної символіки. Школярі також мають засвоїти, що процес застосування математики до розв'язування будь-яких практичних задач поділяється на три етапи:

- 1) етап формалізації – переклад запропонованої задачі на мову математики;
- 2) етап розв'язування задачі в середині побудованої моделі;
- 3) етап інтерпретації одержаного розв'язку задачі, застосування цього розв'язку до вихідної ситуації.

Усі три етапи повинні реалізовуватися в навчанні, тому на формування цих понять спеціально слід виділити урок. Учні повинні чітко усвідомити і засвоїти їх. Необхідним кроком у формуванні поняття математичної моделі є розуміння учнями наступних важливих положень:

1. Модель повинна адекватно відображати найбільш суттєві (з погляду постановки задачі) властивості об'єкта, при цьому ігноруються несуттєві властивості.
2. Модель має визначену область застосування, обумовлену прийнятими при її побудові припущеннями.
3. Модель повинна дозволяти отримувати нові знання про об'єкт, що вивчає

У зв'язку із цим заслуговує на увагу система задач, яка вимагає формалізації прикладної ситуації та інтерпретації математичних понять і тверджень у термінах відповідної дисципліни (біології, фізики, хімії й т.д.).

У відповідності до закономірностей процесу засвоєння знань формування понять «математична модель» і «математичне моделювання» слід здійснювати поетапно:

- 1) первинне сприймання;
- 2) осмислення;
- 3) запам'ятовування.

На етапі первинного сприймання, як правило, переважає колективна робота під керівництвом вчителя, у процесі якої відпрацьовується кожен крок розв'язування прикладних задач. Переважає метод бесіди з елементами пояснення.

На етапі усвідомлення переважає напівсамостійна робота, в ході якої учитель допомагає учням. У залежності від рівня викладання математики (звичайний, поглиблений) необхідно розв'язати одну або дві задачі з метою осмислення поняття «математична модель» та методу математичного моделювання.

На етапі запам'ятовування розв'язування задач буде здійснюватися самостійно.

У діючих підручниках із математики недостатньо задач прикладного характеру, тому по кожній змістовій лінії потрібно поповнити систему задач. Залучаючи учнів до пошуку розв'язання прикладних задач, учитель зможе забезпечити формування навичок математичного моделювання, необхідних у практичному житті, побуті, на виробництві; учень стане здатним створювати власний продукт, вчитиметься приймати рішення, бути відповідальним за них.

Під час відбору задач необхідно пам'ятати, що задача повинна бути прикладною по суті, потребувати формалізації умов і інтерпретації результатів дослідження. Можна скористатися рекомендаціями до оптимального відбору прикладних задач з урахуванням спрямованості класу. При цьому необхідно враховувати найбільш важливі критерії: М – цінність для курсу математики; П – прикладну спрямованість; Д – доступність; І – інтерес учнів до задачі. Ці критерії дозволяють давати експертну оцінку прикладним задачам. Наприклад, критерій М оцінюється вчителем математики за шкалою: 0 – не має цінності; 1 – мала цінність; 2 – достатня; 3 – цінна; 4 – дуже цінна. Аналогічно для кожної задачі оцінюються критерії П, Д, І та час на розв'язування задачі

Відповідно до останнього критерію відбираються задачі з найбільшим значенням $W = МПДІ$. При цьому оптимальні задачі для класів різного профілю і різним рівнем викладання математики можуть відрізнятися.

Для прикладу розглянемо прикладні задачі на механічний зміст похідної.

Задача 1. Із пункту O по двох прямих, кут між якими 60° рухаються два тіла: перше – рівномірно зі швидкістю 5 км/год, друге – за законом $S(t) = 2t^2 + t$, де S виражено в кілометрах, t – в годинах. Визначте, з якою швидкістю вони віддаляються одне від одного, коли перше тіло знаходиться від пункту O на відстані 10 км.

Розв'язання.

Нехай трикутник AOB , в якому сторона $OA = 5t$ км – шлях, який пройшло перше тіло за t годин; сторона $OB = (2t^2 + t)$ км – шлях, який пройшло друге тіло за цей же час і кут будуть математичною моделлю даної задачі.

2) Переходимо до розв'язування задачі в середині побудованої моделі. Відстань AB між тілами в момент часу t визначаємо за теоремою косинусів:

$$AB = \sqrt{(5t)^2 + (2t^2 + t)^2 - 2 \cdot 5t(2t^2 + t)\cos 60^\circ} = \sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2}$$

Використовуючи механічний зміст похідної, знаходимо, що тіла віддаляються одне від одного зі швидкістю $v(t) = AB'$, тому

$$v(t) = \frac{16t^3 - 18t^2 + 42t}{2\sqrt{t^2(4t^2 - 6t + 21)}} = \frac{8t^2 - 9t + 21}{\sqrt{4t^2 - 6t + 21}}$$

3) Коли перше тіло буде знаходитись від пункту O на відстані 10 км, час t , який мине від початку руху, складатиме 2 год. Тому, $v(2) = 7$ км/год.

У процесі розв'язування задачі перевіряється правильність побудови математичної моделі, правильність здобування результатів у даній практичній ситуації. Правильність побудови математичної моделі здійснюється за допомогою таких методів контролю моделей:

1. Контроль розмірностей: прирівнюватися можуть лише величини однакової розмірності. За цим необхідно слідкувати під час розв'язування будь-яких прикладних задач.

2. Контроль характеру залежностей. Мова йде про перевірку монотонності зміни одних величин при зміні інших, про швидкість зміни. Вони повинні бути такими, як це впливає зі змісту задачі.

3. Контроль граничних умов. Якщо в результаті дослідження моделі повинна бути побудована деяка функція, вона повинна задовольняти на границі області певні умови, які впливають зі змісту задачі

Показниками результативності роботи по формуванню понять «математична модель» та «математичне моделювання» є те, що учні вміють:

- 1) розв'язувати задачі;
- 2) описувати схеми діяльності;
- 3) розв'язувати аналогічні задачі за складеною програмою діяльності;
- 4) уточнювати ці задачі;
- 5) встановлювати межі використання схеми

Компетентісно-орієнтована освіта передбачає нову педагогічну етику, визначальною рисою якої є взаємоповага, взаєморозуміння та співробітництво. Вона зумовлює використання діалогу, як головної форми навчального спілкування.

На уроках математики необхідно організовувати природне спілкування з його заданістю тематики, готовим змістом, напрямом і засобами діалогу.

Наведемо приклади застосування евристичного діалогу у процесі вивчення теми «Первісна та інтеграл»

Учень. Обчислюючи первісну для функції $f(x) = \sin x \cdot \cos x$, ми дістали дві відповіді: $F_1(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$ і $F_2(x) = -\frac{1}{2} \cos^2 x$. Тому записали рівність $\frac{1}{2} \sin^2 x = -\frac{1}{2} \cos^2 x$, звідки $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$ або просто $1 = 0$.

Учитель.

Оскільки ви відразу зрозуміли, що припустилися помилки, то запишіть відповіді інакше.

Учень.

$F_1(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$, $F_2(x) = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C$. після цього в рівності $\frac{1}{2} \sin^2 x + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C$ дістали ту ж безглузду відповідь: $1=0$. Довелося записати відповіді, додержуючись всіх вимог точності: $F_1(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x + C_1$, $F_2(x) = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C_2$. Але ж цими сталими можуть бути будь-які числа, зокрема й рівні, наприклад 2012, тоді з рівності $\frac{1}{2} \sin^2 x + 2012 = -\frac{1}{2} \cos^2 x + 2012$, виходить знову та сама настирлива помилка: $1 = 0$.

Учитель.

Ви вже зрозуміли, що можна і чого не можна писати, коли маєш справу з первісними?

Оскільки функція $F_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$ є первісною для f , то будь-яка первісна для f , зокрема $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x$, подається у вигляді $F_1(x) + C$. Для F_2 константа C знаходиться з рівності $-\frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$. Підставивши, наприклад, $x = 0$, дістанемо $C = -\frac{1}{2}$. Отже, $F_2(x) = F_1(x) - \frac{1}{2}$. Зрозуміло також, що будь-яка первісна для f подається у вигляді $F_2(x) + C$. Зокрема, $F_1(x) = F_2(x) - \frac{1}{2}$.

Математичний розвиток школяра залежить від об'єднання евристичності й діалогічності. Там, де математичні діалоги, там і засвоєння математичної термінології, мови і мовлення, там – занурення учнів у різноманіття математичних моделей і методів, їх засвоєння, осмислення, визнання в якості невід'ємного компоненту особистої життєвої діяльності. Тому використання діалогових форм на уроках математики є ефективним, оскільки сприяє розвитку соціальних компетентностей.

Формуванню вміння працювати в колективі з урахуванням потреб інших людей сприяти колективна творча праця учнів на уроці (робота в парах, в групах гомогенного та гетерогенного складу)

Велике значення у засвоєнні будь-якої теми має мотивація навчально-пізнавальної діяльності. Щоб учні стали суб'єктом навчального процесу, вони повинні прийняти зовні внесені цілі навчання як свої власні, як суспільно значущі. Виходячи з цього, вчитель повинен здійснити відбір змісту, прийомів та методів навчання, застосування яких дало б можливість розкрити мотиви вивчення теми. Наприклад, з метою усвідомлення учнями того факту, що в масових випадкових подіях існують закономірності, які незалежно від людини підлягають обліку, доцільно з учнями в класі провести такий дослід. Кожний пише на аркуші паперу будь-які чотири слова. Після цього підраховує, скільки букв у кожному з написаних слів і записує ці числа проти відповідного слова. Потім кількість парних чисел записують у рамочці. Запис може мати такий вигляд:

Математика 10	3
Квітка 6	
Сталь 5	
Стіл 4	

Кожен з 25-30 учнів класу пише три записки. Після цього всі записки збирають і двоє учнів підраховують (не оголошуючи результатів) кількість записок, що мають у рамці числа 0, 1, 2, 3, 4. Виявляється, що можна наперед розрахувати кількість записок з остаточною цифрою 0, 1, 2, 3, 4. Покажемо, як це зробити.

Міркуватимемо так. Поява в записці остаточною цифрою 0, 1, 2, 3, 4 – події випадкові. В основу покладемо припущення, що слова з парною і непарною кількістю букв трапляються однаково часто. Крім цього враховуємо, що для одного слова однаково можливі лише дві випадкові події:

I подія – слово має парне число букв (п);

II подія – слово має непарне число букв (н);

Для двох слів однаково можливі чотири події (табл. 1).

Таблиця 1

Перше слово	Друге слово	
	п	н
П	пп	пн
Н	нп	нн

Для трьох слів однаково можливі вісім випадкових подій (табл. 2).

Таблиця 2

Перше і друге слово	Третє слово	
	п	н
Пп	ппп	ннп
Пн	пнп	нпп
Нп	нпп	нпн
Нн	ннп	ннн

Для чотирьох слів однаково можливі шістнадцять випадкових подій (табл. 3).

Таблиця 3

Перше, друге і третє слово	Четверте слово	
	п	н
Ппп	пппп	пппн
Ппн	пппн	ппнн
Пнп	пнпп	пнпн
Пнн	пнпн	пннн
Нпп	нппп	нппн
Нпн	нпнп	нпнн
Ннп	ннпп	ннпн
Ннн	ннпн	нннн

Кожна з 16 подій можлива $\frac{1}{16}$ частина всіх записок.

Із таблиці 3 робимо такі висновки щодо можливого розподілу записок.

1) Подія, що відповідає появі всіх чотирьох слів з парним числом букв, зустрічається в таблиці один раз. Тому всі чотири слова можуть мати парне число літер у $\frac{1}{16}$ частині всіх записок.

2) Подія, що відповідає можливій появі трьох слів з парним числом букв, повторюється в таблиці чотири рази. Тому три слова можуть мати парне число букв у $\frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$ частині всіх записок.

3) Подія, що відповідає появі двох слів з парним числом букв, зустрічається шість разів. Тому два слова можуть мати парне число букв у $\frac{1}{16} \cdot 6 = \frac{3}{8}$ частині всіх записок.

4) Подія, що відповідає появі одного слова з парним числом букв, повторюється в таблиці чотири рази. Тому слід чекати появи одного слова з парним числом букв у $\frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$ частині всіх записок.

5) Подія, що відповідає появі всіх чотирьох слів з непарним числом букв, трапляється в таблиці один раз. Тому всі чотири слова мають бути з непарним числом букв у $\frac{1}{16}$ частині всіх записок.

У класі, де проводили дослід, 26 учнів написали 78 записок. Тому розрахунки призвели до таких результатів:

- із числом 4 має бути $78 \cdot \frac{1}{16} = 4 \frac{7}{8}$, тобто 4 або 5 записок.
- із числом 3 має бути $78 \cdot \frac{1}{4} = 19 \frac{1}{2}$, тобто 19 або 20 записок.
- із числом 2 має бути $78 \cdot \frac{3}{8} = 29 \frac{1}{4}$, тобто 29 або 30 записок.
- із числом 1 має бути $78 \cdot \frac{1}{4} = 19 \frac{1}{2}$, тобто 19 або 20 записок.
- із числом 0 має бути $78 \cdot \frac{1}{16} = 4 \frac{7}{8}$, тобто 4 або 5 записок

Результати досліджу виявились такими: з 78 записок з числом 4 було 5 записок, з числом 3 – 20 записок, з числом 2 – всього 27 записок, з числом 1 – 19 записок, з числом 0 – всього 7 записок.

Наочне уявлення про характер розподілу записок показує графік, на якому по осі Ox потрібно відкласти числа 0, 1, 2, 3, 4, а по осі Oy – відповідну кількість записок. Якщо в одній системі координат побудувати графік розподілу записок за результатами досліджу і розрахунковими результатами, то графіки мало чим відрізнятимуться один від одного. Форма графіків нагадуватиме форму розподілу дроби на дошці Гальтона [2].

Завдання вчителя так організувати частково-пошукову діяльність учнів, щоб ще до проведення досліджу виявилось можливим шляхом теоретичних міркувань передбачити його результати з невеликою похибкою. Такий процес діяльності є найціннішим у будь-якому науковому дослідженні і у теорії ймовірностей, зокрема.

Задача 2. Побудувати графік функції $y = x^5 - 5x^3 + 2,8x + 1$ мотивуючи необхідність застосування похідної до дослідження функції учитель може запропонувати учням завдання: побудувати графік функції за табличними даними.

x	0	1	2	-1	-2
y	1	-0,2	-1,4	2,2	3,4

Виявляється, що одержані точки належать прямій лінії, що суперечить раніше відомому факту та умові задачі: дана функція не є лінійною. За допомогою GRAN 1 школярі можуть побудувати графік даної функції і «зчитати» властивості, проте проблемність ситуації полягає у необхідності розв'язати обернену задачу: дослідити властивості і побудувати графік функції. Виникає потреба в поповненні знань.

Широкі можливості для формування соціальних компетентностей має методу проектів. Учні індивідуально або по групах за певний час виконують пізнавальну, дослідницьку, конструкторську або іншу роботу на задану тему. Наведемо приклад використання групових завдань на уроці з теми «Тотожні перетворення тригонометричних виразів». Кожна група учнів («дослідники», «раціоналізатори», «фізики», «софісти») повинна виконати проблемне завдання на «Застосування тригонометричних тотожностей» відповідно в геометрії, алгебрі, фізиці та придумати софізми, в яких були б відображені характерні помилки теми. Керівники груп розподіляють обов'язки; колективно планують свою діяльність, оформлення результатів дослідження, форму звітності. Напередодні заняття інформують учителя про результати роботи, в міру потреби одержують необхідні консультації. Обов'язковою вимогою щодо захисту робіт є використання СКТ та створення презентацій. Оскільки, оцінка результату групового дослідження залежить не лише від особистісно чи суспільно значущого відкриття, а і від його захисту, то всі учні зацікавлені у взаємонавчанні. Така форма роботи передбачає організацію спілкування, коректування думок, формування здатності до рефлексії, толерантності

Для прикладу пропонуємо звіт групи «Раціоналізаторів»

Задача 3. Доведіть тотожність

$$\text{Якщо } a_1^2 + b_1^2 = 1, a_2^2 + b_2^2 = 1, a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0,$$

$$\text{то } a_1^2 + a_2^2 = 1, b_1^2 + b_2^2 = 1, a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Доведення

Враховуючи перші дві рівності умови можемо ввести позначення

$$a_1 = \sin \alpha, b_1 = \cos \alpha$$

$a_2 = \sin \beta, b_2 = \cos \beta$, тоді третя рівність набуде вигляду

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = 0 \text{ або } \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} = \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 1 - 0 = 1, \end{aligned}$$

що і треба було довести.

$$b_1^2 + b_2^2 = 1, \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 1.$$

$$\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta = \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\beta = \frac{1}{2} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

Звіт групи «Фізиків»

Задача 4. Деяка матеріальна точка під дією сили F_1 може виконувати в деякому напрямку (наприклад, вздовж осі Ox) гармонічне коливання

$$y_1 = 2 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right),$$

а під дією іншої сили F_2 – коливання

$$y_2 = 3 \sin \pi t.$$

Який рух виконає ця точка в результаті одночасної дії обох сил?

Розв'язання

За законом механіки точка рухається так:

$$y = y_1 + y_2 =$$

$$= 2 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \sin \pi t = 2 \sin \pi t \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cos \pi t \sin \frac{\pi}{3} + 3 \sin \pi t =$$

$$= (2 \cos \frac{\pi}{3} + 3) \sin \pi t + (2 \sin \frac{\pi}{3}) \cos \pi t = 4 \sin \pi t + \sqrt{3} \cos \pi t.$$

Перетворимо цю суму способом введення допоміжного аргументу.

$a = 4, b = \sqrt{3}$, тоді $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{19}$,

$$4 \sin \pi t + \sqrt{3} \cos \pi t = \sqrt{19} \left(\frac{4}{\sqrt{19}} \sin \pi t + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \cos \pi t \right) =$$

$$= \sqrt{19} (\cos \varphi \sin \pi t + \sin \varphi \cos \pi t) = \sqrt{19} \sin(\pi t + \varphi), \text{ знайдемо } \varphi \text{ з умови}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \cdot \frac{\sqrt{19}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

звідси $\varphi \approx 23^\circ 22' \approx 0.4078$ радіан, тоді

$$y_1 + y_2 = \sqrt{19} \sin(\pi t + 0.4078).$$

Науково доведено, що здібності до певного виду діяльності формуються й проявляються лише за умови залучення особистості в діяльність саме такого виду. Загальними ознаками соціальних компетенцій - досвіду особистості з конкретного виду діяльності є його практична зорієнтованість і творча спрямованість. Тому перевагу слід віддати:

- діяльності у формі парної, групової колективної творчої праці;
- актуалізації мотиваційного фактора;
- діалогових форм навчання із застосуванням СКТ;
- інтерактивних методів навчання.

Література

1. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: монографія / С. А. Раков. – Х.: Факт, 2008. – 307
2. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів / З. І. Слєпкань. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 510 с.

УДК 37.02

МЕНТАЛЬНІ КАРТИ

Н.О. Головіна

Формування інформаційної культури у цілого покоління людей є соціальним замовленням інформаційного суспільства, перехід до якого почався з другої половини ХХ століття. Це століття визначило головним ресурсом інформацію, а основними технологіями – інформаційні технології пошуку, подання, обробки, збереження та використання інформації. Інформаційна культура сучасної людини – обумовлена тим фактом, що вміння опанувати інформацію та орієнтуватися в її великій кількості стає невід'ємною рисою фахівця у будь-якій сфері. [2]

У зв'язку із збільшенням обсягу інформації, запам'ятовувати нові знання стає все важче. Пам'ять людини не на довго зберігає інформацію, яка була записана, прочитана або почута. Доведено, що людина краще запам'ятовує інформацію, якщо вона представлена у структурованому вигляді, та ще й містить графічні зображення.

До основних недоліків лінійного запису інформації можна віднести [3]:

- Записану інформацію важко запам'ятати і ще важче відновити в пам'яті. Це відбувається через візуальну монотонність тексту – однакові літери, слова, абзаци.

- У великому конспекті важко виділити щось основне. Навіть записуючи інформацію нам хочеться виділити ключові слова, поняття підкресленням, кольором, шрифтом тощо – тобто, присвоїти їм певне графічне маркування.

- Час при веденні об'ємного конспекту використовується нерационально. Зазвичай ми записуємо багато зайвої інформації, через деякий час перечитуємо багато зайвого, знову витрачаючи час, щоб знайти основні поняття певної теми.

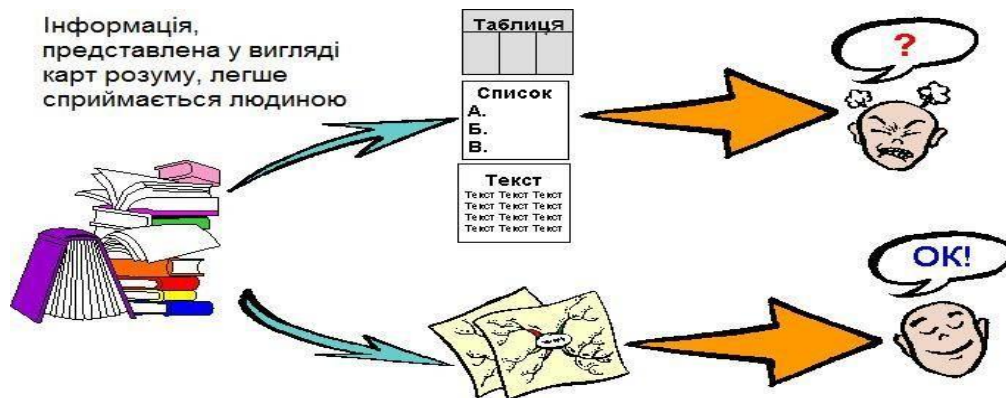
Постає необхідність застосування методу, який допоможе систематизувати та узагальнити отримані знання, закріпити вміння та навички. Таким методом став, відносно новий для української, але далеко не новий і апробований у західній школі, підхід до вивчення нового навчального матеріалу – майндмеппінг (англ. *Mindmap*).

Майндмеппінг – це метод формування ментальних карт (карт розуму або інтелект-карт), техніка зручного запису та систематизації інформації.

Ментальні карти – це спосіб опрацювання інформації графічним та візуальним способами; вид запису ідей, думок. Суть побудови ментальної карти полягає у тому, щоб за допомогою зрозумілих символів, образів, об'єктів, асоціацій, якими мислить людина, наочно зобразити цілісну картину знань про предмет вивчення.

Основоположником ментальних карт є один із найвидатніших представників епохи Вісокого Відродження італійський мислитель, учений, філософ, художник Леонардо да Вінчі. Саме він вів запис своїх ідей за допомогою візуальних образів. Термін «ментальна карта» вперше застосував Тоні Б'юзан (TonyBuzan) у 1970 році, англійський психолог, який встановив рекорд у запам'ятовуванні великих об'ємів інформації і має найбільший у світі «коефіцієнт творчого мислення». Він визначив це поняття як особливу діаграму зі словами, ідеями, певними завданнями чи проблемними питаннями [1].

Як стверджують науковці, на відміну від сприйняття інформації через текст, коли задіяна лише одна півкуля мозку, ментальні карти зображують інформацію, поєднуючи її два типи: текстовий (числовий) та візуальний, або графічний, що дозволяє активізувати обидві півкулі мозку, що, у свою чергу, дозволяє підвищити рівень якісного сприйняття інформації (Мал. 1).



Мал.1. Приклад ментальної карти

На сучасному етапі основні напрямки застосування ментальних карт, є три.

Розвиток особистості:

- Генерація ідей, їх аналіз у пошуках рішення, узгодження і впровадження потенційного рішення.
- Упорядкування інформації у вигляді логічного ланцюжка подій, ідей і фактів.
- Опрацювання інформації. Техніка майндмеппінг дозволяє читати швидше, запам'ятовувати більше, краще концентруватися.
- Стратегічне мислення: можливість поглянути на проблему повністю та враховуючи всі особливості. Складання планів, розуміння своїх цілей, опис напрямків діяльності.
- Вийти за рамки своїх же власних обмежень.

Навчання:

- Інтелектуальні карти для цього підходять краще за звичайні нотатки. Їхнє створення займає менше часу, ніж написання великого об'єму тексту, крім цього, таке відображення інформації саме по собі є логічно організованим. Кожна карта пам'яті є унікальною і зберігається в пам'яті як цілісний об'єкт.
- Створення звітів, статей, оглядів. Інтелектуальна карта допомагає чітко визначити структуру та розставити акценти в потрібних місцях, що значно полегшує написання роботи.

- Вивчення іноземної мови використовуючи метод асоціацій.

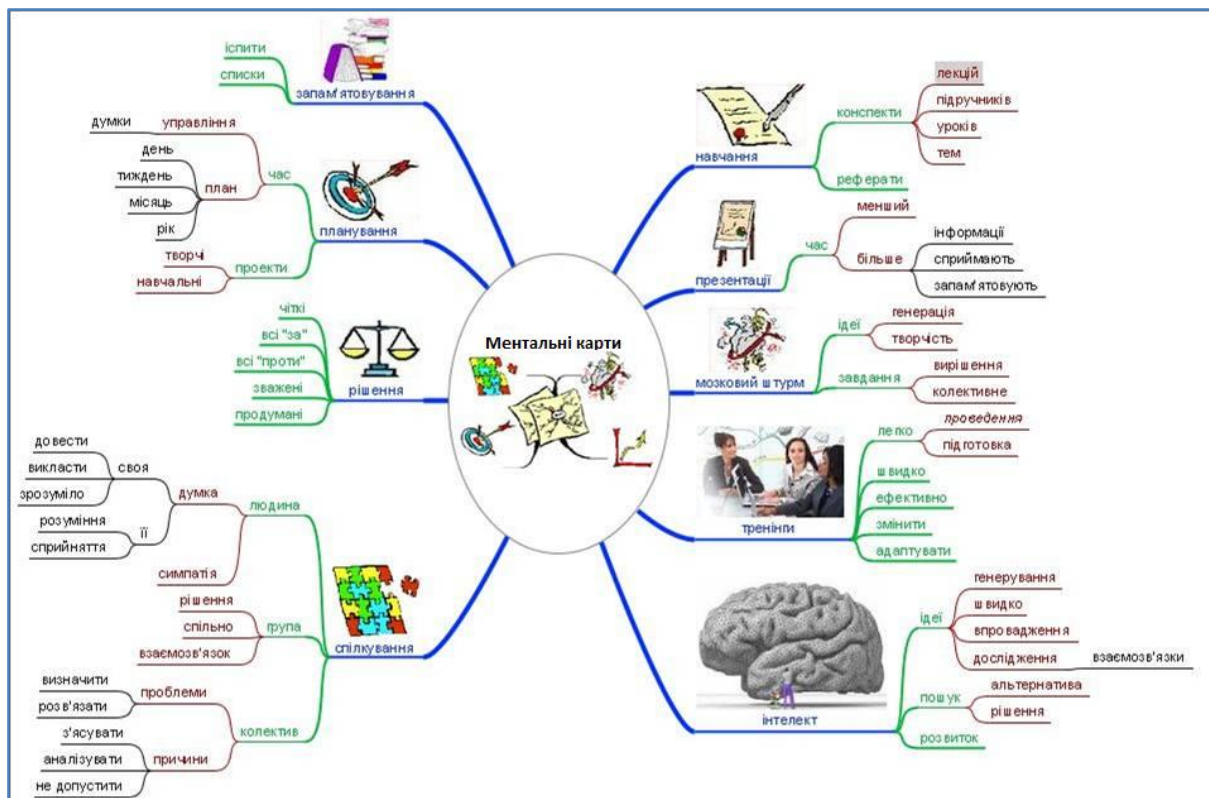
Робочий процес:

- Створення презентацій та проектів ідей, в яких відображено хід думок.
- Прийняття рішень.
- Мозгові штурми. Карти пам'яті є потужним інструментом для роботи із асоціаціями. Записуючи, а потім переглядаючи ідеї, знаходяться нові зв'язки між концепціями, які були непоміченими до того. Крім того, сам спосіб малювання карти переводить мозок у режим креативності.
- Знову планування. Мова йде про зустрічі, розмови.
- Керування задачами. Перед усім це постановка і визначення параметрів. А деякі види ПЗ дозволяють здійснювати і оперативне керування.

- Керування проектами.

Користь застосування майндмепінгу в освіті очевидна. Заслужений учитель України В. Ф. Шаталов використовував «опорно-графічні конспекти», для послідовного, логічного розкриття теми та розвитку творчого мислення учнів [4]. Корисний досвід використання «узагальнюючих схем» вчитель математики Іржавцевої В. П.

Узагальнення напрямків застосування техніки майндмепінгу, відображено на ментальній карті (Мал. 2)



Мал. 2. Узагальнення напрямків застосування техніки ментальних карт

Розглянемо ті переваги, які приносить метод інтелект-карт в освітній процес [3].

1. Карта знань допомагає реалізувати один із найважливіших принципів педагогіки – принцип наочності. Карта знань дає змогу охопити все одним поглядом, так як блок-схема показує все найвагомніше в асоціативних порівняннях та зв'язках.
2. Принцип побудови інтелект-карт корисно використовувати на уроках-підбиття підсумків з будь-якого предмету. Узагальнення даних по темі відображається на одному зображенні, вся інформація з навчальної теми трансформується в асоціативні зв'язки навчальних понять. Так, наприклад, доцільно провести урок із застосуванням ментальних карт з теми «Інформація та інформаційні процеси» (інформатика 5кл. або 9 кл.) – як узагальнення вивчених понять.
3. Ментальні карти можна будувати під час конспектування великих по об'єму лекцій – замість довгих конспектів та витрат часу для запису матеріалів учень формує лише одну блок-схему.
4. Метод майндмепінгу дозволяє розвинути творче мислення учнів.
5. Метод інтелект-карт розвиває логіку та вміння згортати весь навчальний матеріал до самого найважливішого, підвищує якість та інтенсивність навчання, тренує пам'ять.

6. Використання карт допомагає учням підвищити концентрацію уваги.

Створюються ментальні карти на папері (оригінальний спосіб), або ж за допомогою програмного забезпечення, якого станом на 2015 рік існує вже близько 50 видів. Основні елементи карти – ключі (або їх ще називають тригери): слова і малюнки, кожен із яких символізує конкретний спогад, сприяє виникненню нових думок та ідей і таким чином допомагає повніше використовувати можливості мислення. Тригери радіально розходяться від центральної ідеї за допомогою серії з'єднуючих гілок. Процес побудови карти імітує поведінку нейронів в процесі мислення, коли активуються зв'язки між ними. Провідна ідея ментальних карт полягає у відображенні саме такого “натурального” стилю мислення.

Визначають наступні правила створення ментальних карт [5]:

1. Починаємо з центральної ідеї посередині чистого аркушу, використовуючи малюнок і хоча б три кольори.

2. Використовуємо картинки, символи, коди і заповнюємо ними весь вільний простір.

3. Вибираємо ключові слова і друкованим текстом наносимо на гілки, використовуючи верхній та нижній регістр.

4. Кожен елемент (слово/картинка) повинен мати власну гілку.

5. Лінії повинні бути з'єднані, починаючи від центральної ідеї. Центральні лінії товстіші, органічні і текучі. Всі наступні гілки стаючи тоншими в залежності від радіального розходження від центру.

6. Робимо лінії такої ж довжини, як і слово/картинка.

7. Використовуємо кольори на власний розсуд і на всій карті пам'яті.

8. Розробляємо свій особистий стиль майндмепінгу.

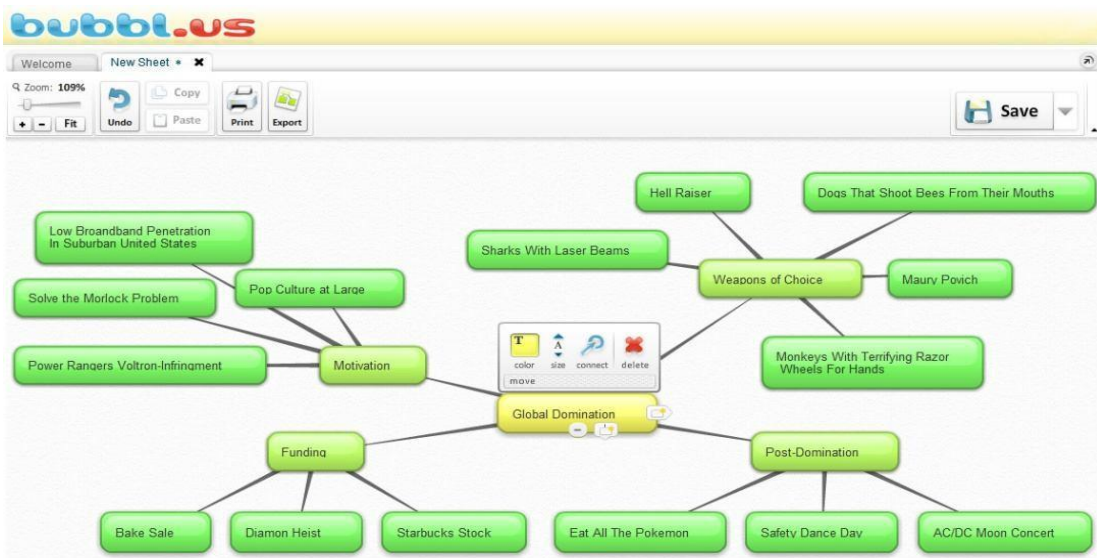
9. Використовуємо акценти і показуємо асоціації на своїй карті пам'яті.

10. Зберігаємо ясність інтелектуальної карти, використовуючи радіальну ієрархію в цифровому порядку, або охоплюючи всі гілки.

Серед доступних в мережі Інтернет веб-сервісів по створенню ментальних карт найзручнішими у використанні є:

1. Bubbl.us – інтернет-сервіс спільного створення ментальних карт.

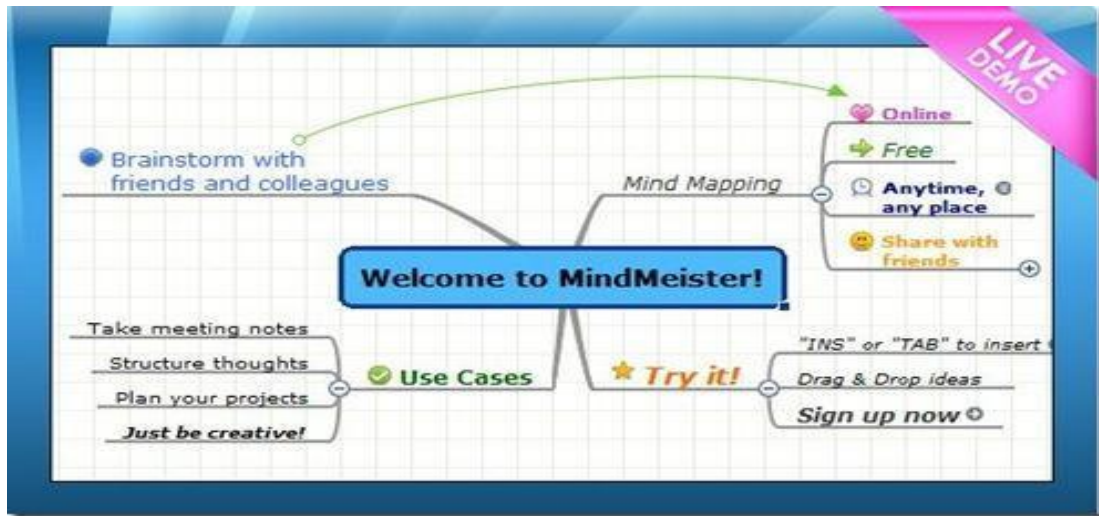
Для створення ментальної карти не потрібно реєструватись (реєстрація необхідна лише, коли ви хочете експортувати інтелект-карти чи ділитись ними з іншими користувачами мережі). Робоче поле програми досить просте, управління легке і зручне – можна оперувати лише блоками – прямокутниками. Блок-схема, створена в цій програмі досить чітка і не перевантажена елементами різних типів. Ментальна карта може редагуватись декількома користувачами одночасно (якщо надано доступ). Так, наприклад карту з певної навчальної теми може складати вчитель зі своїми учнями.



Мал. 3. Приклад ментальної карти, створеної в програмі Bubbl.us

2. MindMeister – web – додаток для побудови ментальних карт.

Даний онлайн-ресурс пропонує багато можливостей для персоналізації вашої ментальної карти (іконки, шрифти, стилі). Підтримується експорт в pdf, rtf, jpg, gif, png.



Мал. 4. Приклад ментальної карти, створеної в MeindMeister

3. Spinscape – потужний веб-додаток для створення ментальних карт.

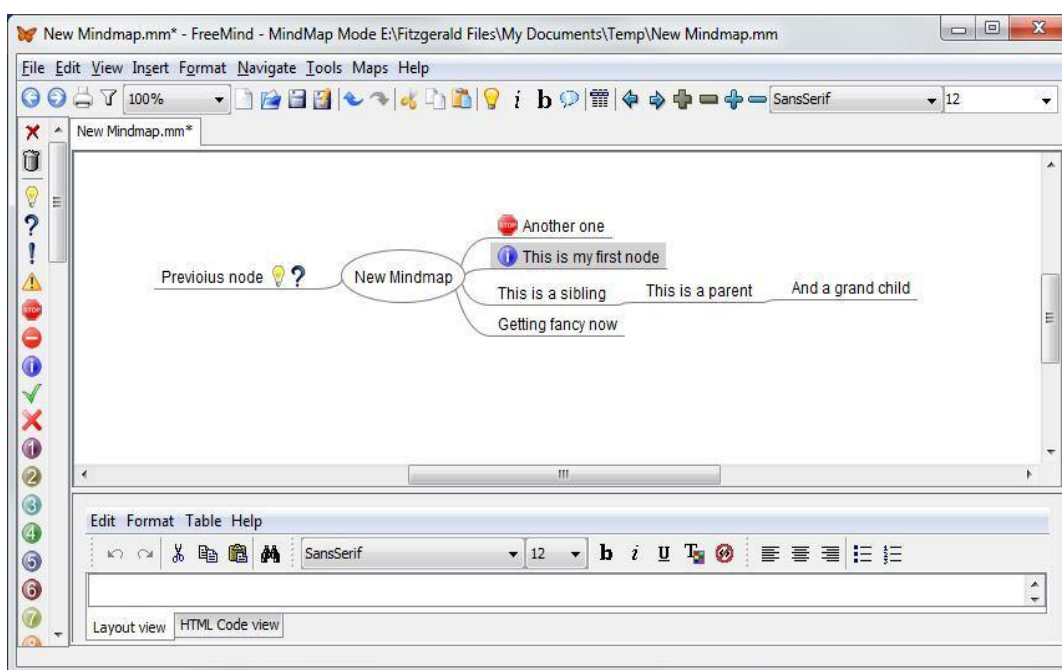
Даний онлайн-ресурс надає доступ до спільного редагування карти в реальному часі, а також можливість налаштувати індивідуальний доступ до карти і окремих її частин. Має власний формат Smar, а також підтримує імпорт з MindManager/ Excel / CSV / HTML і експорт в Mindmanager / PDF / HTML / Word. Відрізняється від інших платформ для створення ментальних карт режимом презентації та можливістю вбудовувати YouTube-відео.



Мал.5. Приклад ментальної карти, створеної в Spinscape

4. FreeMind – програма вільного користування для особистих та корпоративних цілей, яка надає можливість декорувати вузли та гілки ментальних карт.

У FreeMind можна пов'язувати та давати посилання на інші ментальні карти, веб-документи, файли, що дає можливість налаштувати асоціативний зв'язок не лише між елементами однієї блок-схеми, але й між двома/трьома різними ментальними картами, що розширює асоціативну область, яка запам'ятовується. В програмі може здійснюватись пошук по словам та гілкам. Недоліком FreeMind можна назвати відсутність спільного доступу до редагування карти знання.



Мал. 6. Приклад ментальної карти, створеної в FreeMind

Існує цікавий ресурс для публікування своїх інтелектуальних карт, на якому зібрано вже більше 500 тисяч екземплярів – Biggerplate (<http://www.biggerplate.com/mindmap-library>).

Отже, достатній асортимент веб-ресурсів, які дозволяють побудувати ментальні карти знань за декілька хвилин дають змогу використовувати інтелект-карти для досягнення як педагогічної, так і бізнес – чи індивідуальної мети.

Література

1. Блог Тоні Бьюзена [Електронний ресурс] / TonyBuzan. – Режим доступу: <http://www.thinkbuzan.com/intl>.
2. Морзе Н.В. Інформаційна культура та її складові // Українська педагогіка (освітній портал). –Вип. 04.03.2009.
3. Черній М. Карти знань як засіб збільшення ефективності засвоєння навчального матеріалу учнями та їх застосування за допомогою веб-сервісів // Проблеми підготовки сучасного вчителя. Збірник наукових праць. УДПУ ім. П.Тичини. - Умань. - 2012. № 6. – Ч. 1. С.87-93.
4. В чем особенность системы обучения В. Ф. Шаталова [Електронний ресурс] // [Матер. веб-блога «Професинальний учитель-начальна школа»] – Режим доступу: <http://prof-teacher.ru/pedagogicheskaya-psixologiya/v-chem-osobennost-sistemy-obucheniya-v-f-shatalova>.
5. Техніка інтелектуальних карт (mindmapping) для організації думок і не тільки– Режим доступу: <http://world-ny.com/mind-mapping-technique/>

УДК 378.147:537.86

РОЗРАХУНОК ТА МОДЕЛЮВАННЯ ЗИГЗАГОПОДІБНИХ УКХ АНТЕН ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОГРАМИ MMANA –GAL

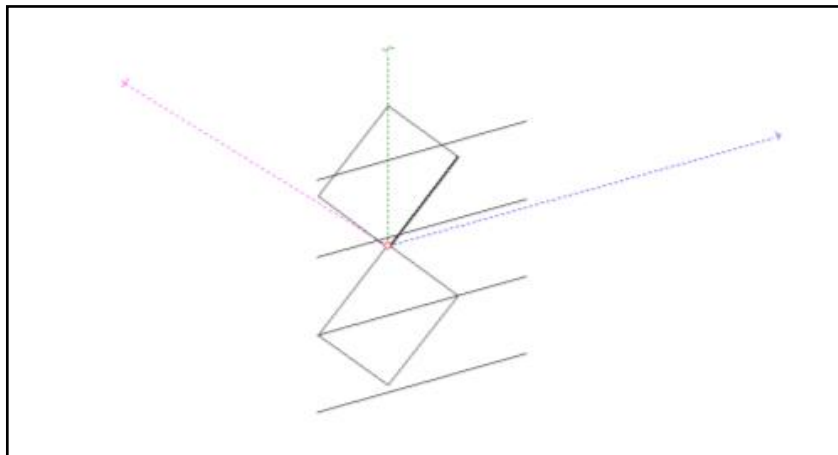
В.М. Закалюжний, С.О. Левицький

У прикладній фізиці та радіотехніці вважається аксіомою, що одним із найважливіших компонентів будь-якої безпроводної системи радіо- чи телекомунікації є антенно-фідерний пристрій, від якості якого визначальним чином залежить ефективність усієї системи.

У зв'язку з бурхливим розвитком цифрового ефірного телебачення, стільникового радіозв'язку, поширенням Wi-Fi технології посилюється інтерес до розроблення нових та удосконалення відомих конструкцій антен та фідерів для УКХ діапазону. Особливий запит існує на конструкції, здатні поєднувати в собі широкосмуговість та високий коефіцієнт напрямленої дії.

На практиці для радіозв'язку в складних умовах, як правило, застосовують багатовібраторні антенні системи. Такі антени мають високі технічні характеристики: гостру діаграму напрямленості, високий коефіцієнт підсилення, значне послаблення зворотного випромінювання. Але ці антени мають й істотні недоліки: вузьку смугу робочих частот, критичність розмірів, значну залежність параметрів від оточуючих предметів тощо.

Тому, для систем телевізійного, мобільного, військового, космічного та супутникового зв'язку все більшого значення набувають розробки антен різноманітних конструкцій, які б мали широку смугу робочих частот і стабільні параметри, навіть, в дуже складних умовах експлуатації. Перспективними у цьому сенсі є зигзагоподібні антени, запропоновані К. Харченком.



Мал.1. Загальний вигляд антени, обраної для проектування

Донедавна розрахунок антенних систем здійснювався «вручну». Цей процес потребував великої кількості допоміжної інформації і відбирав у конструкторів багато часу. Наразі існує низка комп'ютерних програм, які крім розрахунку антен дозволяють провести їх оптимізацію під конкретні умови експлуатації. Серед них вигідно відрізняється програма MMANA-GAL. Це програма моделювання антен, що працює в середовищі Windows, яка дозволяє:

- розраховувати діаграми напрямленості (ДН) антен у вертикальній і горизонтальній площинах під будь-якими кутами;
- редагувати опис кожного елемента антени, включаючи можливість змінювати форму елемента без зсуву його резонансної частоти.

- оптимізувати антену, гнучко налаштовуючи обраний параметр оптимізації: Z_{vh} , КСХ, підсилення, відношення випромінювання вперед / назад (F / B), мінімум вертикального кута випромінювання тощо.

Розглянемо послідовність розрахунку та моделювання зигзагоподібної антени за допомогою програми MMANA-GAL.

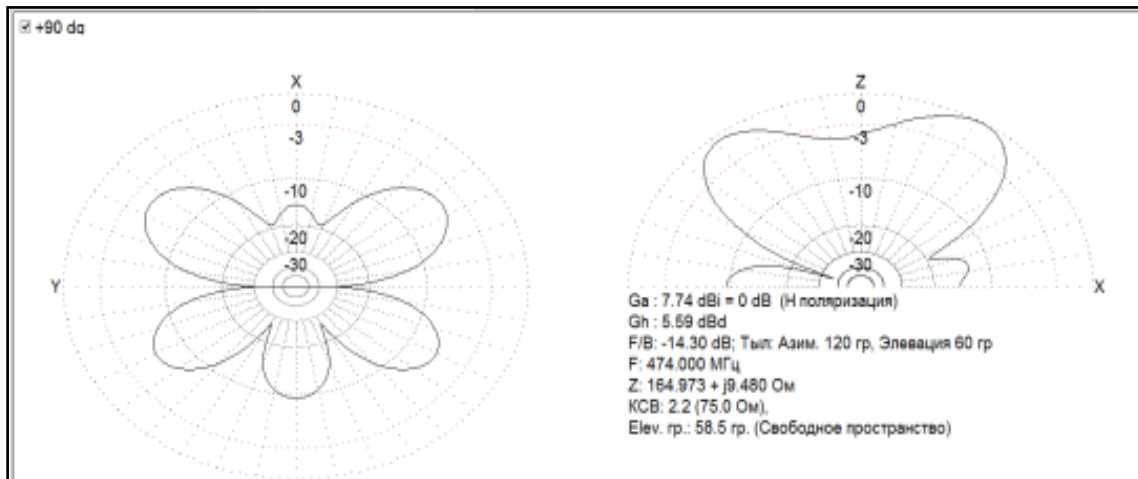
З наведеної в програмі бібліотеки антен вибираємо антену ZZ-NEW. Її вигляд показаний на мал. 1.

Розрахуємо антену на середню частоту 474 МГц. Периметр одного ромба має дорівнювати середньому значенню робочої довжини хвилі. Рефлектор розташовується на відстані 0,12 м. На мал. 2 показано інтерфейс програми з відповідними вікнами для уведення вихідних даних.



Мал. 2

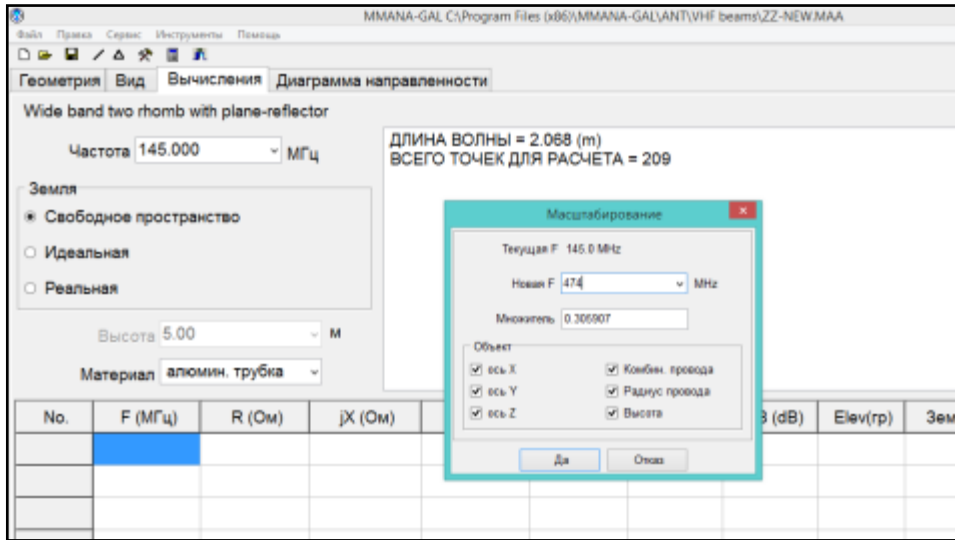
При цьому отримуємо таку діаграму напрямленості (мал. 3):



Мал. 3. Неоптимізована діаграма напрямленості

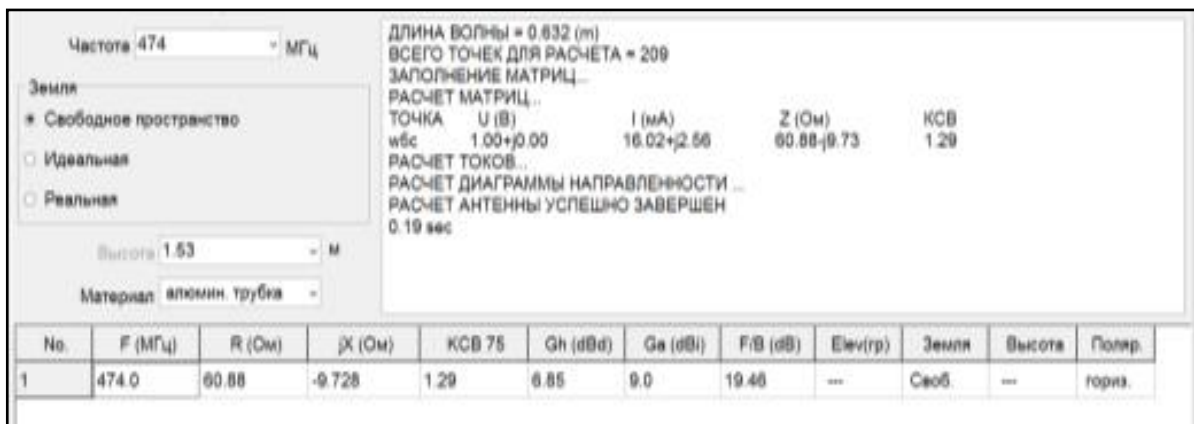
Висновок з мал. 3: діаграма напрямленості така, що антена не випромінює енергію в потрібному напрямку і має не досить хороший КСХ. Таким чином, необхідно оптимізувати антену.

Проведемо масштабування антени від стандартної частоти, на яку вона розрахована - 145 МГц до необхідної частоти 474 МГц (мал. 4).

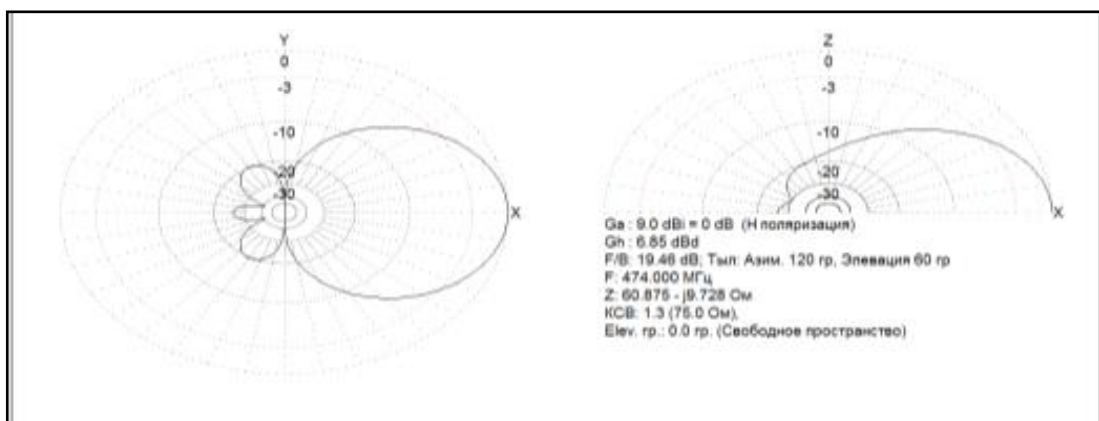


Мал. 4. Інтерфейс програми з уведеними параметрами масштабування

В результаті отримаємо (мал. 5):



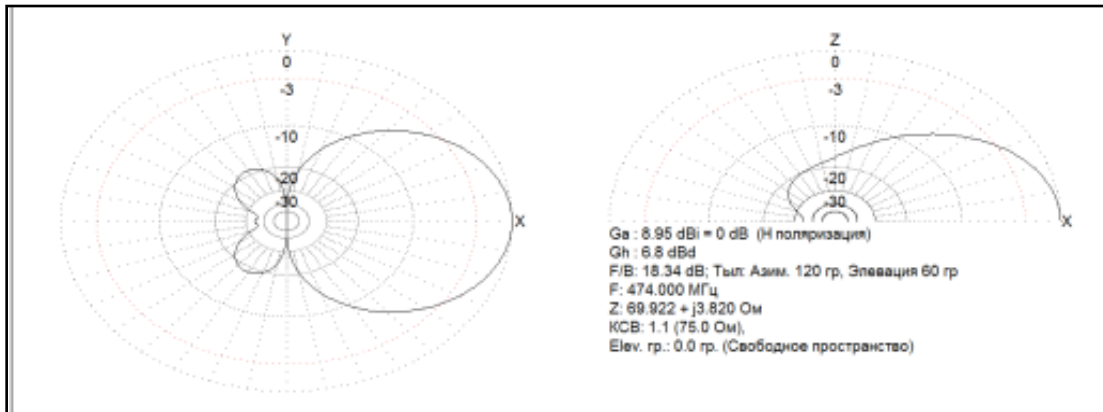
Мал. 5



Мал. 6. Діаграма напрямленості після масштабування

Висновок: як видно з мал. 5 та мал. 6, випромінювання здійснюється уздовж позитивного напрямку осі x і притиснуте до Землі у вертикальній площині. Проведемо оптимізацію антени по частоті для пошуку максимального відношення F / B і KСХ.

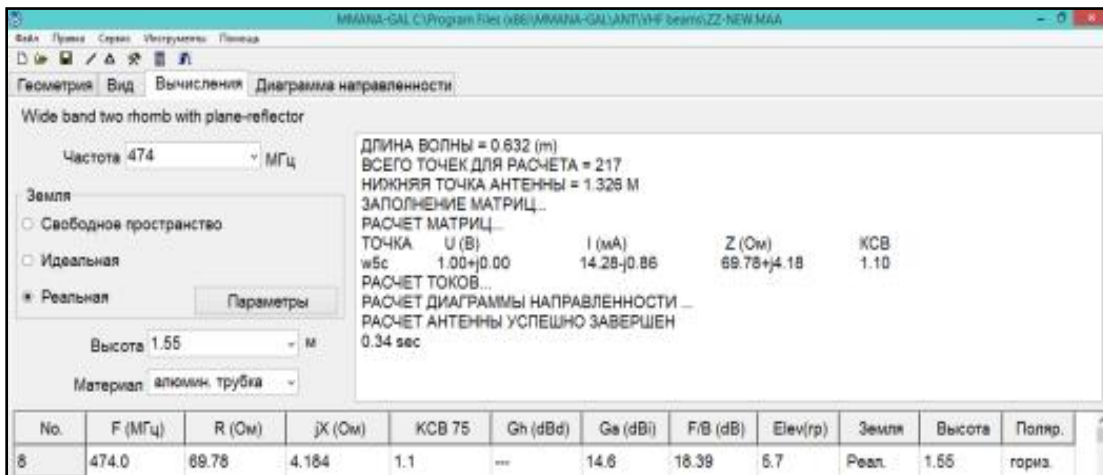
Після чого отримуємо (мал. 7):



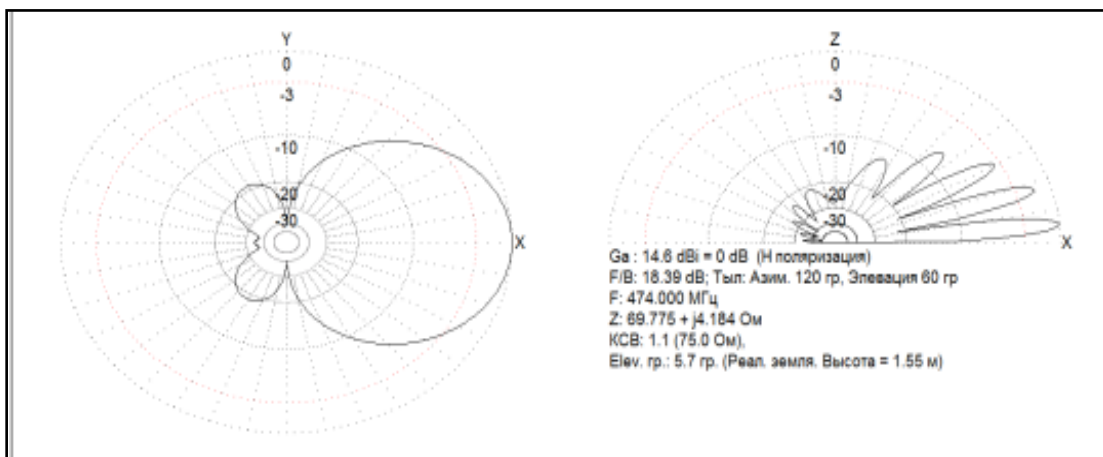
Мал. 7. Діаграма напрямленості після оптимізації за частотою і повторного масштабування

Висновок з мал. 7: на даному етапі оптимізації було отримано необхідну діаграму напрямленості і досить високий КНД, рівний 8,95 дБ. КСХ зменшився на 0,2.

Тепер, з'ясуємо, який вплив Землі на характеристики антени (мал. 8):



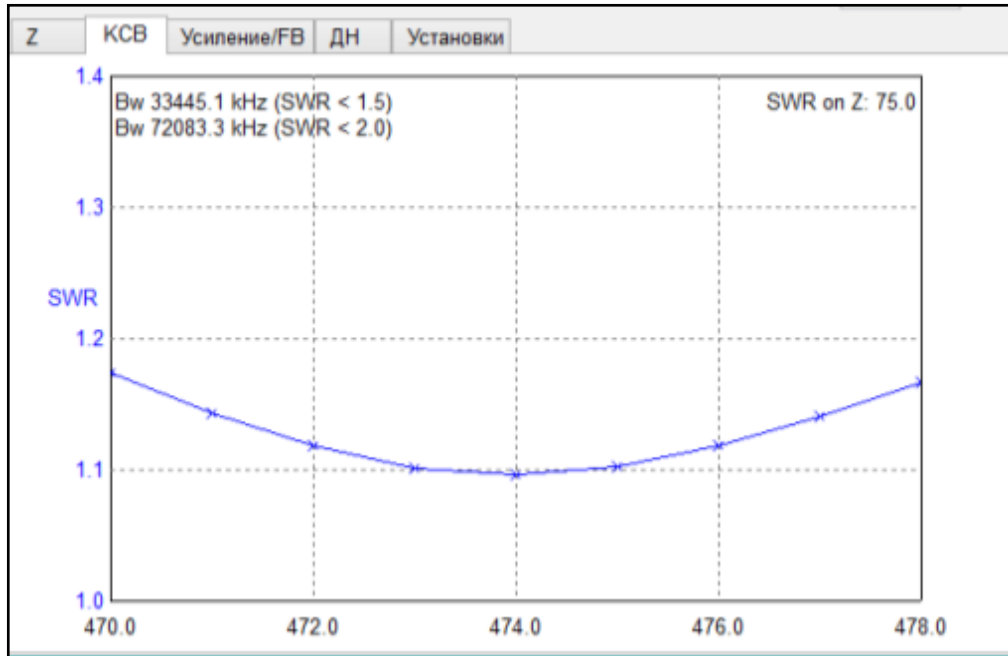
Мал. 8.



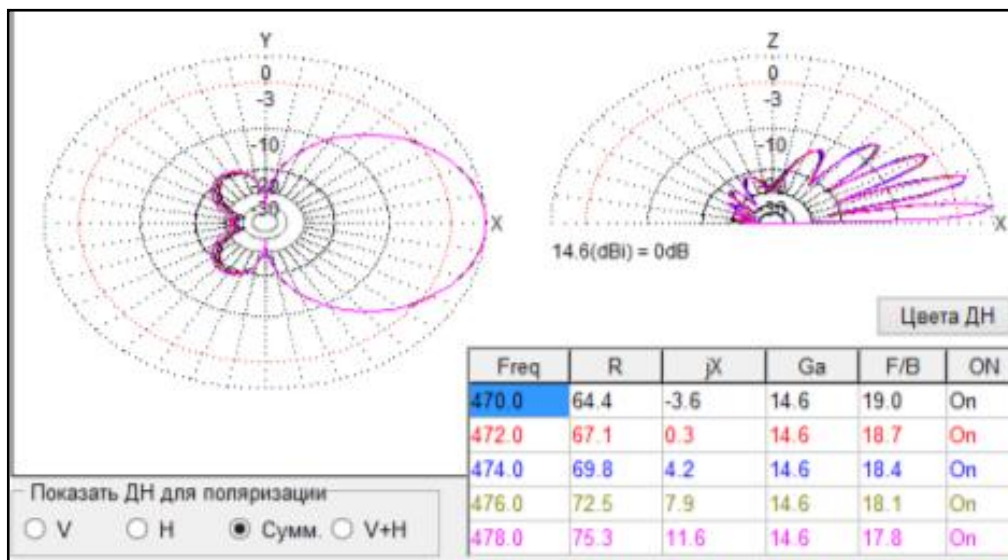
Мал. 9. Діаграма напрямленості оптимізованої антени з урахуванням земної поверхні (на висоті 1,55 м)

Висновок з аналізу мал. 8 та мал. 9: змінюючи висоту підвісу, переконаємося, що висота підвісу практично не впливає на зміну КСХ та підсилення. КСХ змінюється на 0,01Дб, підсилення на 1 Дб.

Перевіримо, які основні характеристики цієї антени в заданому діапазоні частот.

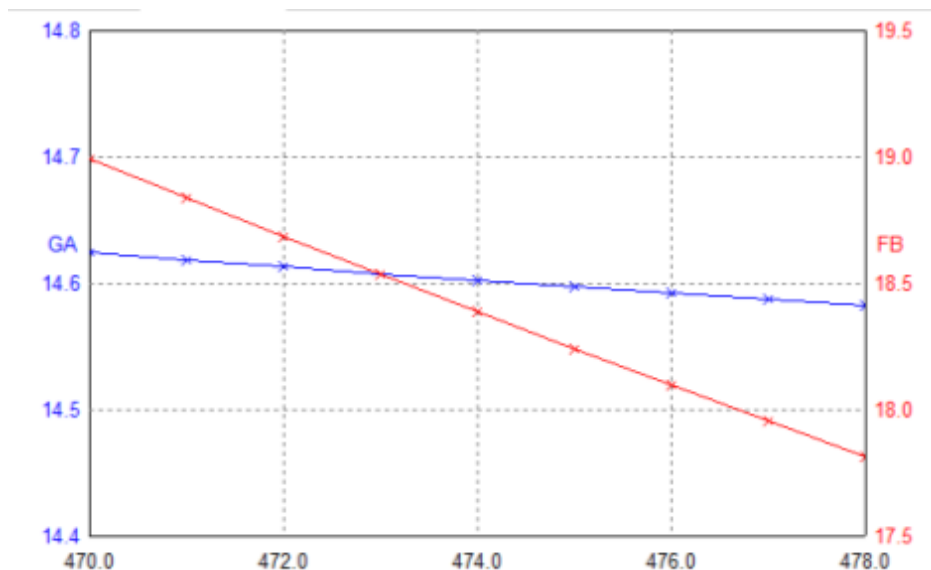


Мал. 10. Графік залежності КСХ від частоти



Мал. 11. Остаточні діаграми напрямленості антени у горизонтальній та вертикальній площинах

Аналізуючи підсумкові діаграми та графіки залежності коефіцієнта підсилення від частоти (мал. 10), КСХ від частоти (мал. 12) і діаграму напрямленості (мал. 11), можна сказати, що зигзагоподібна антена добре працює в заданому діапазоні частот, КСХ змінюється від 1,1 до 1,17, коефіцієнт підсилення майже постійний, діаграма напрямленості від частоти майже не залежить.



Мал. 12. Графік залежності підсилення від частоти, вперед / назад від частоти

Висновок: діаграма напрямленості антени з урахуванням впливу Землі набуває «порізаного характеру». Однак, в потрібному нам напрямку концентрується максимум енергії. Встановлювати таку антену можна як на маленьких, так і на великих висотах (від 1 до 20 метрів). Причому висота антени практично не впливатиме на діаграму напрямленості. КСХ антени дорівнює 1,1, що задовольняє умові оптимального приймання сигналу. Активний опір антени становить 75 Ом, реактивний опір невеликий 4,184 Ом, що говорить про узгодженість антени зі стандартним коаксіальним кабелем, опір якого також дорівнює 75 Ом. Антена має хороші показники: підсилення з урахуванням впливу Землі становить 14,6 дБ. Випромінювання антени в потрібному напрямку на 18,39 дБ більше ніж у зворотному, ширина ДН становить 75 градусів.

Сконструйована за наведеними вище розрахунками антена була випробувана в ефірних умовах для приймання каналів телебачення дециметрового діапазону УКХ. Для оцінювання ефективності антени використовувався приймач цифрового телебачення TRIMAX TR-2012HD, обладнаний електронним індикатором рівня сигналу. Основні параметри реальної антени виявилися дуже близькими до розрахованих.

До переваг антени можна віднести її високу технологічність: для її виготовлення не потрібні дефіцитні матеріали, не потрібно складного устаткування, виготовлена за розрахунками антена не потребує додаткового налаштування.

Отримані результати дають підстави вважати зигзагоподібну антену однією з кращих конструкцій для забезпечення надійного приймання сигналів радіо, цифрового телебачення, WI-FI тощо, особливо в умовах обмеженого простору для устаткування антенно-фідерних пристроїв.

Література

1. Гончаренко И.В. Компьютерное моделирование антенн. Все про программу MMANA-GAL / И.В.Гончаренко . - М.: РадиоСофт, 2002. - 80 с.
2. Гончаренко И.В. Антенны КВ и УКВ. Часть II. Основы и практика / И.В.Гончаренко . - М.: РадиоСофт, 2007. - 288 с.
3. Драбкин А.Л. Антенны / А.Л. Драбкин, Е.Б. Коренберг, С.Е.Меркулов. - М.: Радио и связь, 1992. - 144 с.
4. Харченко К. В помощь конструктору УКВ антенн. /К. Харченко, - М: Радио, 1965, 23 с.

УДК 371.3

ОЦІНЮВАННЯ ЯК СУБ'ЄКТ-ОБ'ЄКТНА ВЗАЄМОДІЯ У ПРОЦЕСІ ПЕРЕХОДУ ДО НОВИХ МЕТОДІВ НАВЧАННЯ

Т.М. Канівець

Щоб бути використаними з тією чи іншою метою форми та методи сучасного оцінювання повинні задовольняти наступним вимогам:

1. вони повинні чітко відповідати програмам навчальних дисциплін;
2. бути об'єктивними і стабільними (тобто не схильними до змін, незалежними від часу або характеру суб'єкта оцінювання);
3. бути економічно вигідними (тобто час, науково-методичні зусилля на їх розробку і проведення повинні бути реалістичними).

У практиці традиційного навчання виявляються істотні негативні сторони систем оцінювання. Це стосується як середньої так і вищої освіти. Аналіз традиційних методів контролю якості освіти показує, що зазвичай оцінювання не спирається на об'єктивні методи педагогічних вимірювань, тому «якість» трактується сьогодні досить довільно, кожним педагогом розробляється своя система перевірочних завдань. Суб'єктивність оцінювання пов'язана в певній мірі й з недостатньою розробкою нових методів оцінювання. Нерідко оцінювання за тему, курс або його частину відбувається шляхом перевірки окремих, можливо, другорядних елементів, засвоєння яких не може свідчити про досягнення поставлених цілей курсу. Зміст і послідовність завдань визначаються кожним викладачем інтуїтивно, і часто не кращим чином.

Ще одна слабка ланка поточного оцінювання у вищій школі – необхідність паралельно проводити формуюче та підсумкове оцінювання, що на практиці через брак часу призводить до витіснення формуючого оцінювання підсумковим, оскільки непорушним принципом формуючого оцінювання є зворотний зв'язок. Забезпечення зворотного зв'язку вимагає часу та немалих зусиль для проведення аналізу виконаних завдань та розробки рекомендацій щодо усунення недоліків, донесення такої інформації до студентів.

Принциповий недолік традиційної системи оцінювання, що гальмує перехід на якісно вищий рівень, - не так фрагментарність оцінювання, не жорсткість і кількісна направленість оцінки, і навіть не штучність умов, за яких вона здійснюється, а розуміння її як суб'єкт-об'єктної взаємодії, в якій студент є пасивною стороною [1].

Численні дослідження сучасних методів оцінювання науковцями та приклади методик, розроблених педагогами-практиками дають чимало ефективних ідей щодо вирішення таких проблем. Зокрема, актуальним є залучення студентів до участі в процесі оцінювання за рахунок:

- обговорення функцій методів оцінювання та їх відповідності цілям курсу;
- використання само- та взаємооцінювання студентів;
- пропозиції студентам розділити відповідальність при виборі методів оцінювання.

Ключовим принципом новітніх підходів до оцінювання є, на нашу думку, опора на якісно розроблені критерії оцінювання завдань, попереднє повідомлення студентам очікуваних результатів освіти. Значення якісно та детально розроблених критеріїв оцінювання складно переоцінити. Зокрема такі критерії можуть слугувати елементом зворотного зв'язку в процесі поточного (формуючого) оцінювання, оскільки деталізація вимог дозволяє студентам провести аналіз власних робіт самостійно. Або ж, як приклад сучасного інтерактивного підходу, провести взаємооцінювання самими студентами, використовуючи розроблені викладачем критерії та/чи еталонні завдання.

Використання процедури само- та взаємооцінки передбачає:

- розробку викладачем чітких еталонів (критеріїв) оцінювання;
- повідомлення цих критеріїв та ініціювання, забезпечення здійснення само- та взаємооцінювання;
- створення необхідного психологічного налаштування на аналіз та усвідомлення рівня власних навчальних результатів.

В якості прикладу розглянемо наступний сценарій організації взаємооцінювання студентських письмових робіт, який можливо втілити в практику оцінювання (як поточного так і підсумкового) лише за умови якісно розроблених критеріїв.

Студенти отримують зразки відповідей, шкалу оцінювання і коментарі, підготовлені викладачем. Кожен студент оцінює власну роботу та непідписану роботу колеги-студента. При оцінюванні роботи свого колеги-студента на аркуші зі шкалою оцінювання студенти повинні детально описати те, в чому їх колега відступив від зразків відповідей, і оцінити роботу по кожному критерію, визначеному шкалою оцінювання. До своїх власних робіт студенти застосовують ту ж саму процедуру, не знаючи, які оцінки виставив їм колега. Результати само- і взаємооцінки порівнюються викладачем. Якщо розбіжність в оцінках була менше ніж 10%, студенту виставляють оцінку, відповідну самооцінці. Якщо ж розбіжність більша, то робота перевіряється викладачем. 20% робіт, вибраних випадковим чином, перевіряється викладачем для перешкодження тасмним змовам між студентами [2].

Цей сценарій був апробований при викладанні курсу «Новітні інформаційні технології в освіті». Перед виконанням чергового завдання студенти отримували таблицю критеріїв оцінювання та коментарі викладача, а після виконання студентам пропонувалось провести самота взаємооцінювання робіт.

Завдання. Використовуючи табличний процесор оформити спрощені сторінки шкільного журналу згідно зразка, поданого в Таблиці 1 (аркуші назвати: Інформатика, Математика, Фізика). Використовуючи автоматичне виставлення тематичних оцінок і підсумкової за перший семестр як середнього арифметичного поточних оцінок і тематичних відповідно, заповнити таблиці. На окремому аркуші (аркуш назвати Табель) створити табель, в який автоматично заносяться семестрові оцінки із вказаних предметів (Таблиця 2). На цьому ж аркуші створити таблицю підрахунку кількості оцінок по кожному предмету (Таблиця 3). Побудувати діаграму, що відображає розподіл оцінок учнів по заданим предметам (Мал.1).

Таблиця 1

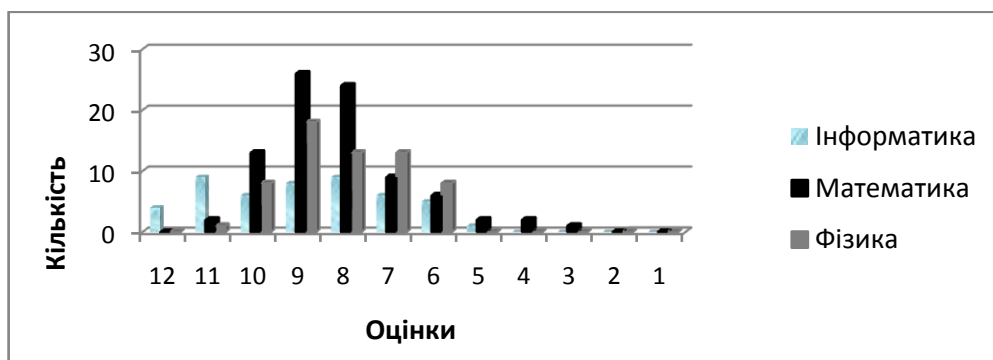
ІНФОРМАТИКА																	
№	Прізвище, ім'я	02.09	09.09	16.09	23.09	30.09	07.10	Тема I	14.10	21.10	03.11	10.11	17.11	20.12	24.12	Тема II	Семестр
1	Гах Павло		10			9			н	н		10		10			
2	Кравець Сергій	7		н	9						8		н		8		
3	Легейда Ольга	н	н	8			9			6		9		8			
4	Подустенко Віктор		10			11					11		11		12		
5	Погорєлов Роман	11		12			12			н	12			11			
6	Пономар Віктор		10		11				н	н		11			11		
7	Раків Валерій			6		7			н	н	7			7			
8	Середа Юлія			5	н		8			8				9			
9	Сорока Віктор		8			9			н			7		6			
10	Тихий Павло	н		9			6		н		9			6			

Таблиця 2

Табель успішності учнів 10 класу за I семестр				
№	Прізвище, ім'я	Математика	Фізика	Інформатика

Таблиця 3

Можливі оцінки	Кількість оцінок по предметах		
	Математика	Фізика	Інформатика
12			
11			
10			
9			
8			
7			
6			
5			
4			
3			
2			



Мал. 1

Для само- та взаємооцінювання виконання представленого завдання студентам пропонува- лась таблиця з критеріями оцінювання. Максимальна оцінка – 10 балів.

Прізвище студента	Форматування аркушів жур- налу			Форматування аркуша Та- бель		Підрахунок кількості оці- нок по пред- метам		Побудова діа- грами		
	Дизайн таблиці	Формули тема- тичних оцінок	Формула оцінки за семестр	Дизайн таблиці	Формули для оцінок за се- местр	Формули підра- хунку кількості	Використання абсолютних ад- рес	Дизайн діагра- ми	Вибір рядів да- них	Підписи діаг- рами, осей
	0,5	1	1	0,5	2	2	1	0,5	1	0,5

Використання такого підходу в поточному оцінюванні суттєво посилило мотивацію сту- дентів до навчання, дієво вплинуло на формування реалістичного рівня домагань. Розуміння студентом оцінки (балу), виставленого викладачем, вимагає достатньо високого рівня сформо- ваності самооцінки. Без цього об'єкт-суб'єктна взаємодія в навчальному процесі виглядає як розмова двох глухих [4].

Література

1. Зачёсова Е.В. Традиционные и инновационные принципы оценивания достижений учащихся // ПЕДДИАГНОСТИКА. – 2007 №4 С.58-67
2. Центр проблем развития образования Белорусского государственного университета <http://charko.narod.ru/tekst/an6/3.html>
3. Вукіна Н.В., Дементієвська Н.П. Критичне мислення: як цього навчати. – Х.: Основа, 2007. – 110 с.
4. Эльконин Д. Б. Избранные психологические труды// М.: Педагогика, 1989. – 492 с.

УДК 371. 5.16:53

АКТУАЛЬНІ НАПРЯМИ РОЗВИТКУ ОСВІТНІХ ВИМІРЮВАНЬ В УКРАЇНІ

Ю.О. Ковальчук, Т.В. Лісова

Освітні вимірювання як потужний інструмент забезпечення надійного, об'єктивного і справедливого оцінювання рівня навчальних досягнень осіб невпинно розвиваються, відіграючи все більш помітну роль у становленні систем забезпечення якості освіти на всіх рівнях, а також у пов'язаних областях професійної орієнтації, професійного відбору, ліцензування та акредитації професійної діяльності тощо. Забезпечення ефективного і справедливого відбору до ВНЗ впливає прямо чи опосередковано на усі ці області є невід'ємною ланкою розвитку освіти як запоруки сталого і гармонійного розвитку суспільства.

Прогрес освітніх вимірювань у XXI столітті обумовлений передусім успіхами когнітивної науки (Mislevy, R., 2006) одночасно з кращим розуміння ролі некогнітивних характеристик осіб у процесах навчання, а також повсюдним проникненням інформаційних технологій у сферу освіти. Усе помітніший дрейф освітніх процесів у «цифровий океан» відкриває нові перспективи для створення цілісних освітніх систем, у яких валідне та надійне оцінювання гармонійно співіснує з усіма їх складовими. Мабуть, найбільш вагомими у розвитку освітніх вимірювань двох останніх десятиліть є небезуспішні спроби подолання недоліків і обмежень стандартизованого тестування, зумовлених положеннями класичної психометрії, його ізольованості по відношенню до «повсякденного» формівного оцінювання осіб, що навчаються. Намітився перехід до нової парадигми доказово-орієнтованого оцінювання – Evidence-centered Design (Mislevy, R.J., Steinberg, L.S., & Almond, R.G., 2002), який став можливим завдяки зближенню освітніх вимірювань з галуззю автоматизованого пошуку та аналізу закономірностей у великих масивах цифрових даних – Data Mining (Baker R., 2009; Romero C., 2010), зокрема – апаратом байєсівських мереж (Almond R. G. at all, 2015). Все більше уваги дослідників і розробників систем оцінювання привертає можливість отримання результатів тестування у вигляді не значення рівня єдиного конструкту, а багатовимірних профілів особи, у яких кожен з вимірів представляє окремий конструкт або компетентність, виміряні у дискретних шкалах. Перехід до дискретних шкал (класифікація) дозволяє застосовувати в освітніх вимірюваннях розвинені методи аналізу даних – крім згаданих Байєсівських мереж, варто відмітити технологію побудови моделей діагностичної класифікації (diagnostic classification models, див. наприклад, Rupp, A.A., Templin, J., and Henson, R.J., 2010). Апарат моделювання структурними рівняннями (SEM – Structural Equating Models) успішно застосовується для вивчення причинно-наслідкових зв'язків між факторами впливу на вимірювані конструкти. Розвивається методологія та розширюється сфера застосування комп'ютеризованого адаптивного тестування (CAT), цікавим і повчальним є досвід Грузії в імплементації CAT в систему масового зовнішнього незалежного оцінювання школярів. Особливої уваги заслуговує проблема вивчення місця та ролі широкомасштабного стандартизованого тестування у національній системі забезпечення якості освіти.

В Україні по мірі розбудови системи ЗНО з'явилася коло дослідників, здатних як забезпечувати науково обґрунтований аналіз ефективності системи та її впливу на освітні процеси на сучасному етапі, так і пропонувати шляхи її вдосконалення та використання у майбутньому.

У дослідженні системи ЗНО співіснують і діалектично взаємодіють два аспекти – внутрішня якість системи, та зовнішня ефективність її використання.

Внутрішню якість системи доцільно розглядати у вигляді комплексного дослідження валідності інтерпретації результатів тестування, в руслі міні-теорії (Kane M, 2006), яка за своєю суттю є реалізацією так званої системи практичної аргументації (Toulmin, Stephen E., 1958). Зокрема, заслугове ретельного вивчення проблема певної невідповідності змісту предметних тестів ЗНО, розроблених як засіб вимірювання рівня навчальних досягнень випускників середньої школи за шкільними навчальними програмами, меті вимірювання – ефективному прогнозуванню успішності навчання осіб у ВНЗ. Хоча тести ЗНО й демонструють впродовж років незмінно високу прогностичну валідність, забезпечення справедливості їх функціонування у досягненні даної мети для окремих груп випускників, передусім за їх соціально-економічним статусом, не можна на сьогодні вважати достатньо вивченим і реалізованим. Цю проблему доцільно розглядати як на рівні конструктивної валідності тестів в цілому, так і на рівні функціонування окремих тестових завдань. На наш погляд, більш рішуче, ніж це передбачено умовами прийому до ВНЗ на 2016 рік, слід впроваджувати тести ТЗНК як складову конкурсних балів вступників.

Що стосується зовнішнього аспекту застосування системи ЗНО, то той факт, що правила гри, у сенсі використання тестів ЗНО для прийому до ВНЗ та підсумкової шкільної атестації, постійно змінюються, має позитивний ефект у тому розумінні, що надає у розпорядження дослідників дані для порівняльного аналізу. Так сталося, зокрема, з правилами використання середнього балу атестата. Далі, надання ВНЗ права самостійно формувати структуру конкурсних балів із використанням вагових коефіцієнтів його складових дає змогу за динамікою прогностичної валідності конкурсного бала з'ясувати, наскільки ефективно ВНЗ зуміли скористатися цим правом, і які є перспективи для поліпшення ситуації. Уведення з 2015 року практики експертного встановлення порогових балів «склав – не склав» загострила проблему смислової інтерпретації тестових балів. Хоча використання еквіпроцентильної нормалізації первинних результатів тестування при шкалюванні у рамках класичної теорії тестування є цілком виправданим, для дослідження валідності тестів доцільно використовувати також IRT та інші методи математико-статистичного моделювання даних. Зокрема, методами як СТТ, так і IRT можна досліджувати проблему порівнюваності сертифікатів ЗНО різних років, яка стала нагальною з переходом до шкалювання після вилучення з розгляду осіб, які не подолали поріг успішності.

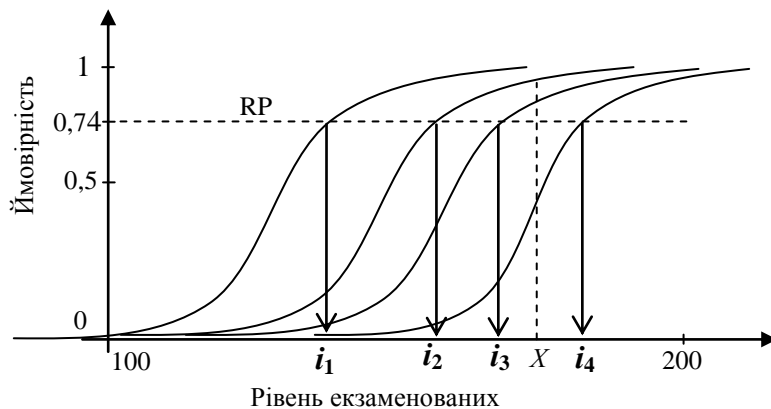
Далі у цьому розділі розглянемо детальніше три актуальні, на наш погляд аспекти досліджень: смислову інтерпретацію тестових балів; диференційоване функціонування тестових завдань для різних категорій осіб; порівнюваність результатів різних тестів.

Інтерпретація тестових балів ЗНО у термінах цільової предметної області. Той факт, що тести ЗНО від самого початку їх існування в Україні є нормо-орієнтованими, призводить до критики з боку представників різних верств суспільства, у тому числі й багатьох освітян. Лунають навіть звинувачення у тому, що УЦОЯО навмисно намагається приховувати від українців реальний стан якості шкільної освіти. Цінна інформація про процентильні ранги вступників, яку легко отримати за їх тестовими балами, виходячи з загального розподілу балів учасників тестування, рідко береться до уваги в ВНЗ під час планування вступної кампанії, зокрема, під час прийняття рішень про встановлення власних порогових балів. У ВНЗ воліли би краще знати, що конкретно знає і уміє з даної дисципліни вступник, який набрав певну кількість балів за тест ЗНО з цієї дисципліни.

Проблемі можна зарадити, довівши процес шкалювання результатів тестування до його логічного завершення – смислової інтерпретації балів. Для цього можна використати технологію, що полягає у послідовному використанні двох процедур, які отримали в англійській літературі назви *Item Mapping* (укр. переклад – відображення завдань) та *Scale Anchoring* (укр. переклад – прив'язка завдань).

Перша з цих процедур, *Item Mapping*, полягає у розміщенні на тій же шкалі, у якій оцінюються екзаменовані, самих тестових завдань. Для правильного розуміння цього методу слід передусім погодити, що буде означати фраза «власник такого-то балу уміє (знає, розуміє, уміє застосувати) те-то», наприклад, «власник 150 балів тесту ЗНО з математики уміє розв'язувати лінійні рівняння». Очевидно, подібні твердження можуть бути справедливими лише з певною долею ймовірності. Адже ніколи немає абсолютної впевненості у тому, що той екзаменований,

який отримав, скажімо, найвищий тестовий бал, зуміє розв'язати лінійне рівняння, і навпаки, екзаменований, який отримав найнижчий бал, не зможе цього зробити. Разом з тим є природним вважати, що чим більший бал має особа, тим більшою є ймовірність того, що вона упорається з завданням. В процедурі Item Mapping спочатку призначається число – порогова величина ймовірності правильної відповіді на завдання, яке називають *response probability level (RP-level)* (укр. переклад – поріг ймовірності відповіді). Зазвичай це значення встановлюється у межах від 0,5 до 0,8 (для закритих завдань із вибором правильної відповіді). Нехай, наприклад, прийнято рішення про те, що поріг *RP* має дорівнювати 0,5. Тоді для кожного завдання тесту на шкалі відшукується тестовий бал, який отримала така множина осіб, що половина з них відповіли на завдання правильно. Особливо просто виконується ця процедура при застосуванні теорії IRT: на осі вимірюваного рівня навчальних досягнень відшукується точка, яка відповідає ординаті *RP* характеристичної кривої завдання (мал. 1).



Мал. 1. Відображення завдань i_1 - i_4 на шкалу рівня екзаменованих з порогом $RP=0,74$. За процедурою *scale anchoring* для тестового бала X зміст завдань i_1 - i_3 підлягає узагальненню для смислової інтерпретації цього бала.

Якщо задано вищий рівень *RP-level*, наприклад, 0,8, то точка на шкалі, що відповідає завданню, буде знаходитися далі у бік зростання вимірюваного рівня навчальних досягнень. Таким чином, вибір рівня *RP* істотно впливає на змістову інтерпретацію оцінок шкали. Застосовують також додаткові умови. Наприклад, для відображення можуть обиратися лише ті завдання тесту, які мають високу роздільну здатність. У тестах NAEP (National Assessment of Educational Progress, довготривала національна програма оцінювання прогресу в освіті США) 1996 року з природничих наук для учнів 4-го класу застосовувалося відображення з *RP*-рівнем 0,74. Слід враховувати, яка ймовірність вгадування вкладається у поняття складності для завдань закритого типу. Наприклад, ті завдання вибіркового типу (MCQ), які мають спостережений рівень складності 0,5, насправді мають менший істинний рівень складності. Розміщуючи завдання на шкалі, зазвичай їх переформулюють у термінах знань і умінь, наприклад, «уміє показати на карті, де знаходиться Тихий океан».

Просте розташування завдань на шкалі є все ще мало інформативним для розгорнутої характеристики учасника тестувань із тим чи іншим тестовим балом. Для цього виконується наступна процедура, *Scale Anchoring*. Береться до уваги, що особа, яка справляється із завданням, яке розташоване близько до місця цієї особи на шкалі, також справляється з усіма більш простими завданнями, тобто тими завданнями, які розташовані на шкалі лівіше. На мал. 1 для тестового бала X це завдання 1-3. Експерт повинен описати всю множину цих завдань у вигляді, найбільш прийнятному для користувача, особливо ретельно формулюючи зміст «граничного» завдання. Оскільки ця робота не є простою, зазвичай процедуру *Scale Anchoring* застосовують не для кожного бала шкали, а лише для деяких балів (наприклад, медіани і квартилів, або для децилів).

Вказані процедури, за умови ретельного їх виконання, могли б використовуватися для порівняння рівня навчальних досягнень екзаменованих різних років. Щоправда, на заваді цьому

стоїть той факт, що учасники тестування не репрезентують правильно усю популяцію випускників школи. Для тих тестів ЗНО, які складатимуть всі випускники, ця проблема не буде виникати.

Дослідження функціонування завдань тесту для різних груп екзаменованих. Одним із доказів валідності тесту як інструменту вимірювання є його неупереджене функціонування у різних групах екзаменованих, що гарантує справедливість оцінювання. Інколи в тестових оцінках може існувати зміщення (англійською – *bias*), причини виникнення якого можуть бути пов'язані з тим, що результати тестування обумовлені не тільки вимірюваним конструктом, але й іншими факторами, які є сторонніми по відношенню до цього конструкту (наприклад, належністю людини до певної групи – культурної, етнічної, соціальної, гендерної тощо). У цьому випадку кажуть про упереджене функціонування тестового завдання (і, як наслідок, усього тесту). Відомі випадки, коли результати тестування переглядалися або й скасовувалися із значними матеріальними затратами через обґрунтовані претензії однієї з груп щодо упередженого їх оцінювання.

У більшості процедур відшукування упередженого функціонування завдань до тієї чи іншої групи екзаменованих (так званої фокусної групи) до всіх інших екзаменованих (референтної групи) спочатку необхідно проводити дослідження, яке в англійській літературі отримало назву як *DIF* (*differential item functioning* (укр. переклад – диференційоване функціонування завдання).

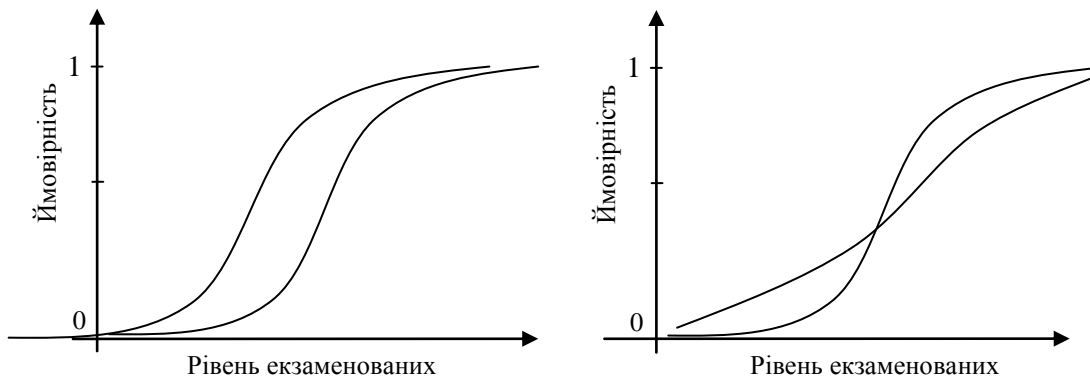
Раніше терміни *DIF* та *bias* були взаємозамінними, але з кінця 1980-х років прийнято розрізняти ці два поняття (Holland P., Thayer D., 1988). Вважається, що *bias* завдання має місце тоді, коли екзаменовані однієї групи мають менше шансів відповісти на нього правильно, ніж екзаменовані іншої групи, через вплив факторів, які не стосуються мети тестування (упередженість вимірювання). *DIF* же відбувається тоді, коли екзаменовані з різних груп (референтної та фокусної), які мають однакові рівні вимірюваного конструкту, показують різні ймовірності успіху. Введення більш прийнятної з політичної точки зору терміну *DIF* дозволило також чітко розмежувати ситуації, коли завдання проявляє дійсно *bias* чи просто *impact* (Zumbo B., 2007). Завдання може демонструвати *DIF* через те, що різні групи дійсно мають різні рівні вимірюваної здатності і тому по різному відповідають на завдання. У цьому випадку нема підстав вважати оцінювання несправедливим, тому говоримо про *impact*. Якщо ж *DIF* виникає через сторонні фактори, то говоримо про *bias* завдання. Отже, *DIF* є необхідною, але не достатньою умовою упередженості. Якщо завдання не проявляє *DIF*, то воно функціонує неупереджено. Проте, якщо на початковому етапі було виявлено *DIF*, то необхідно залучити експертів для проведення поглибленого аналізу та з'ясування можливої наявності упередженості. *DIF* класифікують на рівномірне або нерівномірне залежно від того, чи є залежність між членством у групі та рівнем вимірюваного конструкту екзаменованих.

Рівномірне *DIF* існує, коли такої взаємодії немає, тобто однакова різниця у виконанні завдання спостерігається для всіх членів групи порівняно з іншими учасниками незалежно від рівня членів цієї групи. Нерівномірне ж *DIF* присутнє, коли різниця між групами проявляється, але по-різному для членів групи з різними рівнями (мал. 2). Рівномірне *DIF* проявляється як різниця у складності завдання для представників різних груп, а нерівномірне *DIF* – це й як різниця у його розподільчій здатності. Крім іншого, *DIF* може вказувати на присутність сторонніх розмірностей у даних.

З кінця 80-х років минулого століття було розроблено багато різних статистичних методів для виявлення *DIF* у рамках трьох основних підходів до моделювання результатів тестування: за допомогою таблиць спряженості або регресійних моделей, сучасної теорії тестів IRT та багатовимірних моделей. Серед цих методів є параметричні та непараметричні, одні з них базуються на тестових балах, інші – на отриманих оцінках здатності, одні краще виявляють рівномірне *DIF*, інші – нерівномірне *DIF*. Серед цих методів немає універсального, кожен має певні переваги та недоліки. Але всі вони в основі мають ідею перевірки нульової статистичної гіпотези про відсутність *DIF*.

Простий у використанні та водночас потужний непараметричний метод *Мантель-Ханзеля* вперше при дослідженні *DIF* використали Holland P. та Thayer D. у 1988 році. Він базується на аналізі таблиць спряженості та, після відхилення нульової гіпотези про відсутність

DIF, дозволяє класифікувати завдання за розміром DIF. Прийнято розрізняти велике (рівень C), середнє (рівень B) та незначне (рівень A) DIF. Інший непараметричний метод, *Simultaneous Item Bias Test (SIBTEST)*, розроблено Shealy R. та Stout W. (1993) для визначення DIF у рамках багатовимірної моделі, коли весь простір латентної змінної наперед вважається багатовимірним. Обидва ці методи добре працюють при визначенні рівномірного DIF, але мають низьку здатність виявляти нерівномірне DIF. Метод логістичної регресії, введений Swaminathan H. та Rogers H. у 1990 році як альтернатива процедурі Мантель-Ханзеля, дозволяє з однаковим успіхом виявляти рівномірне та нерівномірне DIF. Таку ж властивість мають методи, засновані на використанні моделей IRT. У рамках цієї теорії зазвичай перевіряється або різниця між параметрами логістичної моделі (Thissen D., Steinberg L. та Wainer H., 1993), або різниця між характеристичними кривими завдання, обчислена як площа між ними (Raju N., 1988). Такий тест дозволяє глибше аналізувати причини DIF, які зумовлені не лише складністю завдання, а й роздільною здатністю та схильністю екзаменованих до угадування. Хоча методи IRT мають багато теоретичних переваг, вони, як і всі інші параметричні методи, засновані на модельних припущеннях, а тому висновки залежать від того, наскільки добре спостережувані дані відповідають моделі.



Мал. 6.2. Випадки рівномірного (зліва) і нерівномірного (справа) DIF од-ного завдання для фокусної та референтної груп екзаменованих.

Загалом проблемі диференційованого функціонування завдань та тесту у цілому (Differential Test Functioning – DTF) присвячено багато робіт, одні з яких висвітлюють місце та роль DIF та DTF у дослідженні валідності інструменту вимірювання інші пропонують та вдосконалюють різні статистичні процедури та засоби для дослідження DIF. Багато робіт присвячено порівнянню різних методів на реальних чи змодельованих даних та проблемі узгодженості висновків, отриманих за різними процедурами. Деякі автори радять використовувати в одному дослідженні, особливо з реальними даними, кілька методів одночасно, оскільки відомі випадки, коли різні методи призводять до різних висновків щодо кількості завдань з проявом DIF та розміру DIF.

За останні десятиліття з'явилося багато досліджень у психології, медицині та в освітній галузі, де досліджується вплив DIF на справедливість оцінювання та пропонуються шляхи зменшення такого впливу. Дані різних міжнародних обстежень також залишаються постійно у центрі уваги дослідників різних країн.

Проблема порівнюваності результатів різних тестів. При дослідженні проблеми порівняння оцінок різних осіб, що отримані у результаті вимірювання за допомогою різних інструментів (тестів), часто використовують тісно пов'язані між собою терміни *linking* (зв'язування) та *equating* (вирівнювання). Термін *linking* використовують, коли потрібно встановити зв'язок між результатами двох різних тестів, які не обов'язково мають однаковий зміст і рівень складності. Цю проблему, наприклад, доведеться вирішувати приймальним комісіям вищих навчальних закладів при порівнянні сертифікатів ЗНО з різних предметів або різних рівнів. Термін

equating використовують для порівняння різних паралельних форм одного тесту, які при створенні вважаються аналогічними за змістом та складністю. Тоді процес вирівнювання регулює відмінності у складності і робить оцінки за різними формами взаємозамінними.

Далі процес вирівнювання або зв'язування шкал називатимемо *linking*, а якщо метою вирівнювання є порівняння оцінок учасників, то використовуватимемо термін *equating*.

Якщо розміщуються на одній шкалі результати за паралельними тестами двох груп учасників, розподіли здатностей яких можна вважати однаковими, то говорять про *горизонтальне вирівнювання*. Саме горизонтальне вирівнювання здійснюється для виставлення остаточних балів учасників ЗНО різних сесій. Аналогічна проблема виникає при порівнюванні складностей завдань, отриманих у різних групах тестованих, з метою їх розміщення на спільній шкалі для створення банку тестових завдань. Цю ж проблему необхідно вирішувати при проведенні адаптивного тестування, коли кожен учасник отримує свій власний варіант тесту, сформований із завдань такої складності, що відповідають виключно його рівню здатності.

Інший тип вирівнювання здійснюється у випадку, коли використовуються тести, що вимірюють одну характеристику, але мають різні рівні складності. Наприклад, при дослідженні прогресу у навчанні з певного предмета пропонується кілька різнорівневих тестів для різних років навчання. Тоді процедуру розміщення результатів в одній шкалі з метою їх порівнюваності називають *вертикальним вирівнюванням*. Статистичні методи горизонтального та вертикального вирівнювання одні і ті ж, але способи їх застосування та інтерпретації дещо відрізняються.

Першим відомим тестом, для якого розроблялись процедури вирівнювання, був американський армійський тест, що використовувався після першої світової війни у двох варіантах «Alpha» – для тих, хто володіє англійською, та «Beta» – для тих, хто не володіє. З тих пір розроблено багато різних прийомів та методів вирівнювання залежно від процедури тестування та способу збору інформації.

Досить ґрунтовно проблему вирівнювання у рамках класичної теорії тестування (КТТ) виклав Levine R. (1955). У КТТ розроблено три основні стратегії вирівнювання: вирівнювання середнього, лінійне та еквіпроцентильне вирівнювання, які дозволяють побудувати деяку функцію $Y^* = f(X)$, що перетворює оцінки на шкалі тесту X в еквівалентні оцінки на шкалі тесту Y . Усі методи вирівнювання в КТТ вимагають серйозних припущень щодо ідентичності розподілів первинних балів та еквівалентності груп учасників, що виконують різні варіанти тесту. Вирівнювання в КТТ лише дозволяє встановити відповідність між балами за різними варіантами тесту і не передбачає побудови спільної шкали.

Lord F. (1980) вперше застосував для вирівнювання методи сучасної теорії тестування IRT. Методи вирівнювання у рамках IRT дозволяють порівнювати не бали чи процентильні ранги, а об'єктивні оцінки параметрів завдань та учасників, розмістивши їх при цьому на одній спільній шкалі. З того часу розроблено багато методів вирівнювання з використанням переваг IRT, які зараз можна умовно розділити на дві групи: методи моментів та методи характеристичних функцій.

Kolen M. та Brennan R. (2004) у своїй роботі, яку зараз можна вважати енциклопедією з вирівнювання, зазначають, що будь-яке вирівнювання повинно мати властивості симетричності, справедливості та інваріантності. Властивість *симетричності* означає, що функція переведення результатів зі шкали X у шкалу Y повинна бути оберненою до функції, що переводить результати з Y в X ; властивість *справедливості* означає, що розподіли балів до та після вирівнювання повинні зберігати форму; властивість *інваріантності* означає, що функція вирівнювання не повинна залежати від вибірки, що бере участь у вирівнюванні. Методи та підходи до вирівнювання у рамках IRT повністю забезпечують виконання цих властивостей.

Процес вирівнювання, незалежно від теоретичного підходу, завжди має дві фази. Перша фаза – збір даних для вирівнювання – залежить від способу організації тестування або ж дизайну. Дизайни умовно поділяються на два типи: дизайни єдиної групи, коли можна вважати групи еквівалентними, взятими з однієї вибірки, та дизайни нееквівалентних груп.

Для вирівнювання методами IRT використовуються три основні дизайни, які забезпечують необхідну якісну інформацію. Це *дизайн рівноваги для єдиної групи*, коли вся вибірка випадковим чином ділиться на дві підгрупи, кожна з яких виконує обидва тести, але у різному порядку. Такий дизайн використовується рідко через технічну складність. *Дизайн еквівалентних*

груп, коли кожна з двох груп, відібраних випадковим чином з однієї популяції, виконує свій відмінний тест, є більш привабливим з технічної точки зору. Якірною інформацією тут є лише належність обох груп до однієї популяції. Для більшості методів IRT цього не достатньо, тому для забезпечення додаткової інформації для процесу вирівнювання у рамках цього дизайну вводять до обох тестів спільні завдання, не накладаючи на них особливих умов. *Дизайн якірного тесту для нееквівалентних груп* передбачає наявність у обох тестах не просто набору спільних завдань, а якірного тесту, який повинен бути «мініверсією» основного тесту і задовольняти ряд вимог: вимірювати той самий конструкт; мати таку ж специфікацію, як основний тест; діапазон складностей повинен максимально перекриватись з усім тестом. Крім того, додатковими вимогами при використанні методів IRT є відповідність завдань якірного тесту обраній моделі та відсутність упередженого функціонування цих завдань у різних групах (DIF). Як правило, кількість якірних завдань складає не менше 20% довжини всього тесту. При цьому можливі два варіанти використання дизайну якірного тесту. За першим варіантом (*internal common items*) відповіді учасників на питання якірного тесту враховуються у його загальну оцінку, а самі питання можуть бути розподілені по всій довжині тесту. За іншим варіантом (*external common items*) завдання якірного тесту пропонуються після або перед основним тестом і відповіді на них не враховуються у загальну оцінку.

Наступна фаза процесу вирівнювання – трансформація даних – може відбуватися у різні способи залежно від дизайну, наявності програмного забезпечення та бажаної точності вирівнювання. Перший спосіб полягає у одночасному оцінюванні всіх учасників за обома тестами, його називають конкурентним оцінюванням (CC – *concurrent calibration*). Даний спосіб може використовуватись із будь-яким дизайном. Необхідно лише правильно підготувати файл з даними, залежно від дизайну, і оцінки параметрів учасників та завдань для обох тестів зразу отримуються у єдиній шкалі. Недоліком такого способу є необхідність обробляти дуже розрізнені матриці відповідей великого розміру, що веде до накопичення похибок.

За другим підходом (FCIP – *fixed common item parameter*) тести аналізуються окремо, а для подання результатів одного тесту у шкалі іншого використовуються якірні завдання. Знову ж таки, використання якірних завдань може відбуватися у різний спосіб. Один з них, коли другий тест аналізують із зафіксованими параметрами якірних завдань, отриманими у результаті аналізу першого тесту. Тоді параметри для другої групи автоматично розміщені у шкалі першої групи. Недоліком цього способу є те, що ми не отримуємо аналітичного зв'язку між двома шкалами.

Інший спосіб реалізації FCIP полягає у побудові лінійного перетворення $\theta_i^X = A\theta_i^Y + B$ оцінок учасників за тест Y у шкалу тесту X . Тут A та B – деякі дійсні числа, θ_i^X та θ_i^Y – оцінки рівня підготовленості θ i -го учасника у шкалах тесту X та Y відповідно. Існування такого перетворення забезпечується властивостями моделей IRT. Сталі A та B можуть знаходитись різними методами. Так, наприклад, методи моментів *mean/sigma* (Marco G., 1977) та *mean/mean* (Loyd B. & Hoover H., 1980) використовують різні статистики якірних завдань.

Метод *mean/sigma* (MS) використовує лише складності якірних завдань, але не враховує їх роздільну здатність:

$$A = \frac{\sigma(\delta^X)}{\sigma(\delta^Y)}, \quad B = \mu(\delta^X) - A \cdot \mu(\delta^Y),$$

де $\sigma(\delta)$ та $\mu(\delta)$ – середньоквадратичне відхилення та середнє арифметичне множини складностей якірних завдань у відповідній групі. За методом *mean/mean* (MM) маємо:

$$A = \frac{\mu(d^Y)}{\mu(d^X)}, \quad B = \mu(\delta^X) - A \cdot \mu(\delta^Y),$$

де $\mu(d)$ – середнє арифметичне параметрів роздільної здатності якірних завдань. Ці методи дають різні результати. Інколи перевагу надають MS, аргументуючи тим, що оцінки параметрів складності δ більш стійкі, ніж параметрів d . З іншого боку, MM використовує лише середні, які зазвичай більш стійкі, ніж квадратичні відхилення. У зв'язку з цим розроблені різні модифі-

кації методів моментів, які не мають вказаних недоліків, наприклад метод *Robust mean/sigma* (Linn R., Levine M., Hastings C., & Wardrop J., 1981). Покращення стійкості A та B у RMS досягається за рахунок введення ваг для кожної пари оцінок якірних завдань:

$$w_i = \frac{1}{\max\{\sigma^2(\delta^Y), \sigma^2(\delta^X)\}} \quad \text{та} \quad w'_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^k w_j},$$

де k – кількість якірних завдань. Далі A та B знаходять як за методом MS, використовуючи середнє та квадратичне відхилення уже зважених оцінок $\delta^{Y'} = w'_i \cdot \delta^Y$ та $\delta^{X'} = w'_i \cdot \delta^X$.

На противагу методам моментів було розроблено ряд методів характеристичних функцій (Test Characteristic Curve – ТСС), які використовують усі параметри завдань, а тому забезпечують більшу точність. Ідея методів у тому, щоб знайти такі A та B , при яких різниця між характеристичними функціями якірних завдань чи тестів є мінімальною. За одним методом ТСС (Наебара Т., 1980) знаходять мінімум функції

$$H_{cr} = \sum_i H(\theta_i),$$

$$\text{де } H(\theta_i) = \sum_j \left(P_{ij}(\theta_i, \delta_j^X, d_j^X, c_j^X) - P_{ij}(\theta_i, \delta_j^Y, d_j^Y, c_j^Y) \right)^2$$

– функція втрат. Тут сумування з індексом j проводиться по всіх якірних завданнях, θ_i – точки розбиття на осі латентної характеристики, а не рівні підготовки конкретних учасників. Такий підхід забезпечує незалежність перетворення від вибірки опитаних. Можна використовувати також реальні рівні підготовки, або використати щільність нормального розподілу в якості вагових коефіцієнтів до функції втрат.

За іншим методом ТСС (Stocking M. & Lord F., 1983) мінімізують критерій

$$SL_{cr} = \sum_i SL(\theta_i), \quad \text{де } SL(\theta_i) = \left(\sum_j P_{ij}(\theta_i, \delta_j^X, d_j^X, c_j^X) - \sum_j P_{ij}(\theta_i, \delta_j^Y, d_j^Y, c_j^Y) \right)^2,$$

а сумування з індексом j проводиться по всіх завданнях тесту. Тут у дужках маємо різницю характеристичних функцій обох тестів. Цей метод ще називають вирівнюванням істинної оцінки (*true score equating*). Значення A та B , при яких відповідні критерії досягають мінімуму, знаходять прирівнюванням до нуля частинних похідних по A та B . Обидва методи, незважаючи на різні обчислювальні процедури, дають дуже близькі результати. Також ці критерії можна використовувати для порівняння якості вирівнювання іншими методами, щоб вибрати найкращий.

Література

1. Карданова Е.Ю. Выравнивание показателей в случае экспертного оценивания заданий / Елена Карданова // Педагогика и психология. Известия Томского политехнического университета, Т. 310, № 3. – 2007. – С. 233-237.
2. Крокер Л. Введение в классическую и современную теорию тестов / Линда Крокер, Джеймс Алгина. – М.: Логос, 2010. – 668 с.
3. Нейман Ю.М. Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов / Ю.М. Нейман, В.А. Хлебников. – М.: Прометей, 2000. – 168 с.
4. Фройнд Ф.А. Анализ DIF в оценке общего интеллекта для генерируемых компьютером графических тестовых задач в двух этнически различных выборках / Ф.А. Фройнд, С.В. Давыдов, Й.П. Берглинг, Х. Холлинг, Г.С. Шляхтин // Социология. Психология. Философия. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2012. – № 5 (1). – С. 334–341.
5. Acar T. Comparison of Differential Item Functioning Determination Techniques: HGLM, LR and IRT-LR / T. Acar, H. Kelecioğlu // Educational Sciences: Theory & Practice. – 2010. – 10 (2). – P. 639–649.

6. Almond R. G. Bayesian Networks in Educational Assessment. / Almond R. G., Mislevy R. J. at all. – Springer, 2015. – 666 p.
7. Angoff W.H. Scales, norms and equivalent scores / In R.L. Thorndike (Ed.), Educational measurement (2nd ed.). – Washington, DC: American Council on Education, 1971. – P. 508–600.
8. Ayala R.J. The theory and practice of Item Response Theory / Rafael J. de Ayala. – N.Y., L.: The Guilford Press, 2009. – 448 p.
9. Baker R. The State of Educational Data Mining in 2009: A Review and Future visions. / Baker R., Yacef K. // Journal of Educational Data Mining. – 2009. – Vol 1. – No 1. – pp. 3-17.
10. Baker F., Al-Karni A. A comparison of two procedures for computing IRT equating coefficients / F. Baker, A. Al-Karni // Journal of Educational Measurement. – 1991. – Vol.28. – P. 147-162.
11. Bolt D.M. A monte carlo comparison of parametric and nonparametric polytomous DIF detection methods / D.M. Bolt // Applied Measurement in Education. – 2002. – Vol. 15. – P. 113–141.
12. Bolt D.M. Evaluating the effects of multidimensionality on IRT true-score equating / D.M. Bolt // Applied Measurement in Education. – 1999. – Vol.12(4). – P. 383-407.
13. Camilli G. Test fairness / Gregory Camilli / In R. Brennan (Ed.), Educational measurement. – Westport, CT: ACE, Praeger series on higher education, 2006. – P. 221–256.
14. Cohen A.S., Kim S.H. An investigation of linking methods under the graded response model / A.S. Cohen, S.H. Kim // Applied Psychological Measurement. – 1998. – Vol.22(2). – P. 116-130.
15. Dorans N.J. ETS Contributions to the Quantitative Assessment of Item, Test, and Score Fairness / N.J. Dorans. – Educational Testing Service: Princeton, New Jersey, 2013. – 38 p.
16. Ercikan K. Comparability of bilingual versions of assessments: Sources of incomparability of English and French versions of Canada's national achievement tests / K. Ercikan, M.J. Gierl, T. McCreith et al. // Applied Measurement in Education. – 2004. – Vol. 17(3). – P. 301–321.
17. Ercikan K. Examining the Construct Comparability of the English and French Versions of TIMSS / K. Ercikan, K. Koh // International Journal of Testing. – 2005. – Vol. 5(1). – P. 23–35.
18. Gierl M.J. Performance of SIBTEST When the Percentage of DIF Items is Large / M.J. Gierl, A. Gotzmann, K.A. Boughton // Applied Measurement in Education. – 2004. – Vol. 17(3). – P. 241–264.
19. González A. EASY-DIF: Software for Analyzing Differential Item Functioning Using the Mantel-Haenszel and Standardization Procedures / A. González, J.L. Padilla, M.D. Hidalgo et al. // Applied Psychological Measurement. – 2011. – Vol. 35(6). – P. 483–484.
20. Haebara T. Equating logistic ability scales by a weighted least square method / T. Haebara // Japanese Psychological Research. – 1980. – Vol.22. – P. 144-149.
21. Hambleton R.K. Translating achievement tests for use in cross-cultural studies / R.K. Hambleton // European Journal of Psychological Assessment. – 1993. – Vol. 9. P. 57–68.
22. Holland P.W. Linking and equating / Paul W. Holland, Neil J. Dorans, In R.L. Brennan (Ed.), Educational measurement (4th ed.). – Westport, CT: Praeger, 2006. – P. 187–220.
23. Holland P.W. Differential item performance and the Mantel-Haenszel procedure / P.W. Holland, D.T. Thayer / In H. Wainer and H. Braun (ed), Test validity. – Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1988. – P. 129–145.
24. Kane, Michael T. Validation. // In R. Brennan (Ed.), Educational measurement (4th ed., pp. 17–64). Westport, CT: American Council on Education and Praeger, 2006.
25. Kim S., Cohen A. S. Effect of linking methods on detection of DIF / S. Kim, A.S. Cohen // Journal of Educational Measurement. – 1992. – Vol.29. – P. 51-66.
26. Kolen M.J. Test Equating, Scaling, and Linking: Methods and Practices / Michael J. Kolen, Robert L. Brennan (2nd ed.). – N.Y.: Springer, 2004. – 549 p.

27. Le L.T. Investigating Gender Differential Item Functioning Across Countries and Test Languages for PISA Science Items / Luc T. Le // *International Journal of Testing*. – 2009. – Vol. 9(2). – P. 122–133.
28. Levine R. Equating the score scales of alternate forms administered to samples of different ability (Research Bulletin 55-23) / R. Levine. – Princeton, NJ: Educational Testing Service, 1955.
29. Linn R.L. Item bias in a test of reading comprehension / R.L. Linn, M.V. Levine, C.N. Hastings, J.L. Wardrop // *Applied Psychological Measurement*. – 1981. – Vol.5(2). – P. 159-173.
30. Lord F.M. Application of item response theory to practical testing problems / F.M. Lord. - Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1980.
31. Loyd B.H., Hoover H.D. Vertical equating using the rasch model / B.H. Loyd, H.D. Hoover // *Journal of Educational Measurement*. – 1980. – Vol. 17 (3). – P. 179–193.
32. Marco G.L. Item characteristic curve solutions to three intractable testing problems / G.L. Marco // *Journal of Educational Measurement*. - 1977. – Vol.14. – P. 139-160.
33. Mislevy R. Cognitive psychology and educational assessment. // In R. Brennan (Ed.), *Educational measurement* (4th ed., pp. 257–305). Westport, CT: American Council on Education and Praeger, 2006.
34. Mislevy R.J., Steinberg L.S., & Almond R.G. On the structure of educational assessments. // *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, 1, 3-67. Forthcoming as CSE Research Report.
35. Oliveri M.E. Effects of Population Heterogeneity on Accuracy of DIF Detection / M.E. Oliveri, K. Ercikan, B.D. Zumbo // *Applied Measurement in Education*. – 2014. – Vol. 27(4). – P. 286–300.
36. Romero C. Educational data mining: a review of the state of the art. / Romero, C., Ventura, S. // *IEEE Transactions on Systems, Man, And Cybernetics – Part C: Applications And Reviews*. – 2010. – Vol. 40. – No. 6– pp. 601-618.
37. Rupp A.A., Templin J., and Henson R.J. *Diagnostic Measurement: Theory, Methods, and Applications*. Guilford Press, New York, NY, 2010.
38. Sandilands D. Investigating Sources of Differential Item Functioning in International Large-Scale Assessments Using a Confirmatory Approach / D. Sandilands, M.E. Oliveri, B.D. Zumbo et al. // *International Journal of Testing*. – 2013. – Vol. 13. – P. 152–174.
39. Shealy R. A model-based standardization approach that separates true bias/DIF from group differences and detects test bias/DIF as well as item bias/DIF / R. Shealy, W.F. Stout // *Psychometrika*. – 1993. – Vol.58. – P. 159–194.
40. SIBTEST manual [Электронный ресурс] / W.F. Stout, L. Roussos, 1995. – Режим доступа: <http://psychometrictools.measuredprogress.org/dif1>.
41. Stocking M.L., Lord F.M. Developing a common metric in item response theory / M.L. Stocking, F.M. Lord // *Applied Psychological Measurement*. – 1983. – Vol.7. – P. 201-210.
42. Stoneberg B.D. A study of gender-based and ethnic-based Differential Item Functioning (DIF) in the Spring 2003 Idaho Standards Achievement tests applying the Simultaneous Bias Test (SIBTEST) and the Mantel-Haenszel chi-square Test [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489949.pdf>.
43. Swaminathan H. Detecting differential item functioning using logistic regression procedures / H. Swaminathan, H.J. Rogers // *Journal of Educational Measurement*. – 1990. – Vol. 27. – P. 361–370.
44. Thissen D. Detection of differential item functioning using the parameters of item response models / D. Thissen, L. Steinberg, H. Wainer // In P.W. Holland and H. Wainer (ed), *Differential item functioning*. – Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1993. – P. 67–113.
45. Thissen, D. IRTL RDIF v.2.0b: Software for the computation of the statistics involved in item response theory likelihood-ratio tests for differential item functioning [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.unc.edu/~dthissen>.
46. Toulmin, Stephen E. *The Uses of Argument* (1958). 2nd edition. – Cambridge : Cambridge University Press, 2003. – 247 p.

47. Zumbo B.D. A Handbook on the Theory and Methods of Differential Item Functioning (DIF): Logistic Regression Modeling as a Unitary Framework for Binary and Likert-Type (Ordinal) Item Scores [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.educ.ubc.ca/faculty/zumbo/DIF/index.html>.
48. Zumbo B.D. Three Generations of DIF Analyses: Considering Where It Has Been, Where It Is Now, and Where It Is Going / B.D. Zumbo // Language Assessment Quarterly. – 2007. – Vol. 4(2). – P. 223–233.

УДК 371.32(51+004.42)

ДО ПИТАННЯ ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ НА ВСЕУКРАЇНСЬКИХ ОЛІМПІАДАХ З ІНФОРМАТИКИ

В.М. Харченко

Для успішної участі у Всеукраїнських олімпіадах з інформатики учні повинні володіти не тільки глибокими знаннями з мови програмування, а й знати багато розділів математики[2], зокрема й ті, які не вивчаються в школі. Одним із таких розділів є теорія графів. Аналіз завдань третього та четвертого етапів Всеукраїнських олімпіад з інформатики за 2012 – 2015 рр. показує, що кожного року є задачі, в яких учасник повинен застосувати знання з даного розділу дискретної математики[1].

У силабусі, опублікованому комітетом з підготовки Міжнародної олімпіади з інформатики в 2015 р., вказується, що учні повинні володіти знаннями з розділу «Графи та дерева» [2, с.7]. Причому вони повинні знати не тільки основи теорії графів, а й вміти знаходити Ойлерові та Гамільтонові цикли, здійснювати пошук вглиб та вшир. Хоча в ньому й чітко не виділено, але дуже часто зустрічаються задачі, в яких слід застосувати алгоритми Дейкстри, Флойда чи Краскала.

Якщо на другому етапі Всеукраїнських олімпіадах з інформатики в задачах графи містять порівняно не дуже велику кількість вершин, то на третьому й четвертому етапах їх кількість часто близька до 10^5 . Це означає, що учні повинні вміти задавати граф не тільки матрицями суміжності чи інцидентності, а й динамічними списками суміжності.

Складність задач і алгоритмічні структури, якими повинні володіти учні 8-11 класів шкіл – учасники олімпіади, продемонструємо на одній із задач першого туру третього етапу олімпіади з інформатики 2013-2014 навчального року.

C. Winter

Inputfilename:	winter.in
Outputfilename:	winter.out
Timelimit:	500 ms
Memorylimit:	256 M

Країна Ужляндія славиться своїми ідеальними дорогами, але навіть вони не витримали цьогорічної аномально холодної та сніжної зими. Деякі з доріг виявилися заблокованими для руху автомобілістів. Внаслідок цього порушився зв'язок між містами Ужляндії. Два міста країни вважаються з'єднаними, якщо можна дістатися з одного міста в інше, рухаючись не заблокованими дорогами, можливо, через інші міста.

Сусідня братська держава відома на весь світ своїми унікальними обігрівачами. Керівництво країни вирішило надати Ужляндії гуманітарну допомогу. Було вирішено, що обігрівачі доставлятимуться на гвинтокрилі, а далі за допомогою вантажівок розвезитимуться по містах. Оскільки авіаційне паливо не дешево, потрібно мінімізувати кількість приземлень гвинтокрила

так, щоби кожне місто отримало необхідні обігрівачі. Будь ласка, якомога швидше порахуйте цю кількість і врятуйте мешканців Ужляндії.

Формат вхідних даних: У першому рядку записано два числа N і M ($1 \leq N \leq 100000, 0 \leq M \leq 200000$) – кількість міст в Ужляндії та кількість не заблокованих доріг відповідно. У наступних M рядках записано по два числа i та j ($1 \leq i, j \leq N$), що значить дорога між містами з номерами i та j не заблокована. Міста в Ужляндії нумеруються в 1 до N .

Формат вихідних даних: В єдиному рядку виведіть мінімальну кількість приземлень гвинтокрила.

Приклади вхідних та вихідних даних:

winter.in	winter.out
6 4	3
3 1	
1 2	
5 4	
2 3	

Пояснення до прикладу:

Міста 1, 2 та 3 з'єднані між собою, а тому щоби забезпечити їх обігрівачами, необхідно здійснити одне приземлення в одному з цих міст, далі обігрівачі доставлять вантажівками. Міста 4 та 5 зв'язані між собою, тому треба ще одне приземлення. І нарешті місто 6, яке ізольоване від інших, щоби доставити обігрівачі в це місто, треба окреме приземлення гвинтокрила. Всього виходить 3 приземлення.

Розв'язання

За умовою задачі маємо N міст, деякі з яких з'єднані між собою дорогами. Очевидно, що доставити вантажівками обігрівачі можна лише в ті міста, які зв'язані дорогами. У таку групу міст потрібно лише одне приземлення гвинтокрила. Необхідно визначити кількість таких груп, які і будуть кількістю приземлень гвинтокрила.

Сформулюємо математичну модель даної задачі. Дано неорієнтований граф із N вершинами та M ребрами, які задано списком. Підрахувати кількість компонент зв'язності.

Підрахувати кількість компонент зв'язності в неорієнтованому графі, що складається з N вершин та M ребер, можна за допомогою алгоритму пошуку вглиб. Зауважимо, що застосовувати матрицю суміжності не вдасться через установлене обмеження на використовувану пам'ять і велику кількість вершин. Тому доведеться послуговуватися списком суміжності. Він є структурою даних, яка для кожної вершини графа зберігає список суміжних з нею вершин. Список є масивом вказівників, i -ий елемент якого містить покажчик на список вершин, суміжних з i -ою вершиною.

При створенні таких списків вважається, що граф є орієнтованим, тому задіємо процедуру додавання ребер `Add` двічі: для (u, v) і (v, u) . Масив `used` набуває значення `true`, якщо у вершині вже були і `false` – якщо у ній ще не були.

Складність такого алгоритму $O(N+M)$. Отриманий результат задовольняє умову оптимальності, а тому буде відповіддю на задачу.

Описаний алгоритм на мові `FreePascal` запишеться:

```
var n, m, u, v, kil, i: LongInt;
    used: array [1..100000] of boolean;
    head: array [1..100000] of LongInt; // індекси початків списків
    next: array [1..400002] of LongInt; // індекси наступних елементів списків
    value: array [1..400002] of LongInt; // значення елементів списків
    free_pos: LongInt; // наступна вільна позиція, спочатку встановити 1
procedure Add(v, u: LongInt); // додає ребро (v->u)
begin
    next[free_pos] := head[v];
    // у вільну комірку наступним елементом робимо початок списку вершини V
    value[free_pos] := u; // у цю комірку записуємо інформацію про ребро (кінець ребра)
```

```
head[v] := free_pos; //установлюємо новий початок списку вершин V
inc(free_pos); // збільшуємо значення вільної позиції
end;
procedureDfs(v: LongInt); //пошук вглиб починаючи з v->
varu, i: LongInt; // допоміжні змінні, де i – індекс у списках, u – кінець ребра
begin
used[v] := true;
i := head[v]; // встановлюємо на початок списку
while i <> 0 do// поки не покаже на кінець списку
begin
u := value[i];
if (notused[u]) thenDfs(u);
i:=next[i];
end;
end;
procedureinitial;// ініціалізація масивів
begin
fillchar(used, sizeof(used), false);
fillchar(head, sizeof(head), 0);
fillchar(next, sizeof(next), 0);
fillchar(value, sizeof(value), 0);
end;
procedurerun;// процедура знаходження кількості компонент зв'язності пошуком вглиб
begin
//зчитування даних
assign(input, 'winter.in');
reset(input);
readln(n, m);
free_pos := 1;
kil := 0;
for i := 1 to m do
begin
readln(u, v);
// додавання ребер у списки суміжності
Add(u, v);
Add(v, u);
end;
for i:=1 to n do
begin
//якщо вершина не пройдена – задіяти пошук вглиб
if (notused[i]) then
begin
inc(kil); // додати до кількості компонент 1
Dfs(i);
end
end;
close(input);
end;
procedurewritedata;// записування результату у файл
begin
assign(output, 'winter.out');
rewrite(output);
writeln(kil);
close(output);
end;
```

```
begin  
initial;  
run;  
writedata;  
end.
```

Дане розв'язання показує, що учням, а значить і їх вчителям, потрібно вільно володіти не тільки мовою програмування, а й базовими знаннями з теорії графів.

Література

1. Завдання Всеукраїнських олімпіад з інформатики 2012- 2015 рр. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://matholymp.org.ua/contests/types/olympiads/informatics/>
2. TheInternationalOlympiadinInformaticsSyllabus[Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://people.ksp.sk/~misof/ioi-syllabus/ioi-syllabus.pdf>

УДК 372

ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ДІТЕЙ

Е.О. Чернишова

Нинішні діти вже не можуть обійтися без комп'ютерів, смартфонів, планшетів, а також Інтернету. І з цим батьки нічого вже не зможуть вдіяти, оскільки таким є сучасне життя. Тому найкраще, що можна зробити – це вчасно допомогти дитині обрати корисні сайти чи програми, зацікавити діяльністю, яка, можливо, в майбутньому допоможе визначитися із професією. Однією з затребуваних професій є професія програміста (хоча, це скоріше стиль життя).

З метою популяризації IT-індустрії серед молоді та дітей, зростання привабливості професії програміста і задля мотивації молодого покоління до реалізації власних проектів у цій сфері, у всьому світі щорічно в рамках Всесвітнього тижня інформатики проводиться Година коду. Година коду є одногодинним вступом до інформатики, призначеним для демістифікації програмування, а також демонстрації того, що кожен може опанувати його основи. Як вказують самі організатори на сайті проекту: «Година Коду є глобальним заходом, який залучає десятки мільйонів учнів із більш, ніж 180 країн світу. Одногодинний курс доступний більш, як 40 мовами. Без попередніх вимог. **Для всіх віком від 4 до 104» [1].**

У 2014 році до цієї глобальної освітньої ініціативи долучилася і Україна. У Годині коду прийняли участь більше 12000 учнів із 608 українських шкіл. У 2015 році Година коду проходитиме в рамках Всесвітнього тижня інформатики, що проходитиме 7-13 грудня.

Code.org – це одна з найбільших на сьогоднішній день некомерційних організацій, яка займається популяризацією програмування. Проект у 2013 році заснували Алі та Хаді Партові. На даний момент вона фінансово підтримується Microsoft, Google, Facebook, Білом Гейтсом, Марком Цукербергом та багатьма іншими людьми та компаніями. Як наголошують засновники проекту, його мета – зробити програмування таким же стандартним уроком шкільної програми, як, наприклад, алгебра, біологія або хімія. Організація проводить роботу по всьому спектру освіти: проектування власних курсів або в партнерстві з іншими організаціями, навчання вчителів, співпраця зі школами, допомагають змінити політику уряду щодо комп'ютерних наук, розширюють зв'язки на міжнародному рівні через партнерські відносини.

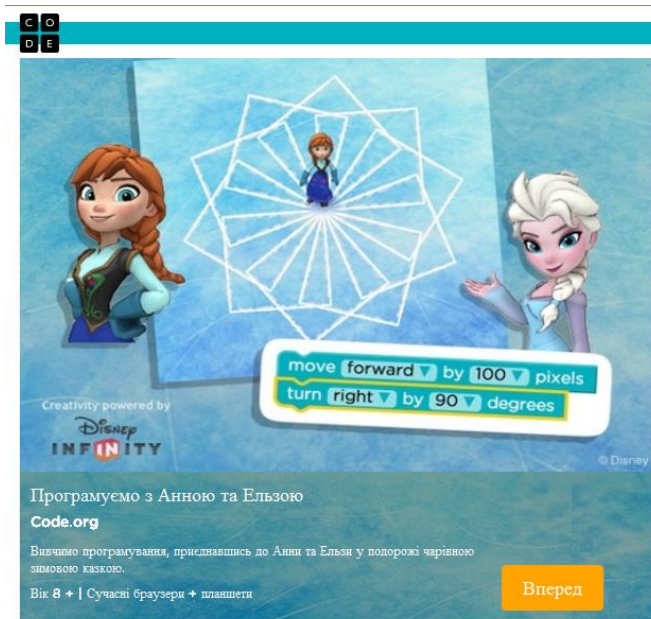
Крім усього іншого, Code.org являє собою відмінну безкоштовну он-лайн платформу для навчання дітей програмуванню в ігровій формі.

Щоб спробувати свої можливості у кодуванні будь-хто може спробувати пройти пробні завдання, зайшовши на сайт проекту, які доступні без реєстрації на сайті. Реєстрація дозволить зберегти процес проходження різних он-лайн курсів та продовжити роботу наступного разу.

Завдання розраховані на дітей віком від 8 років. Діти вивчатимуть програмування з Анною та Ельзою з мультфільму «Холодне серце» (мал. 1).

Перед дітьми постає завдання допомогти героїням намалювати ковзанами сніжинку на льоду. Для цього необхідно скласти програму руху героїні.

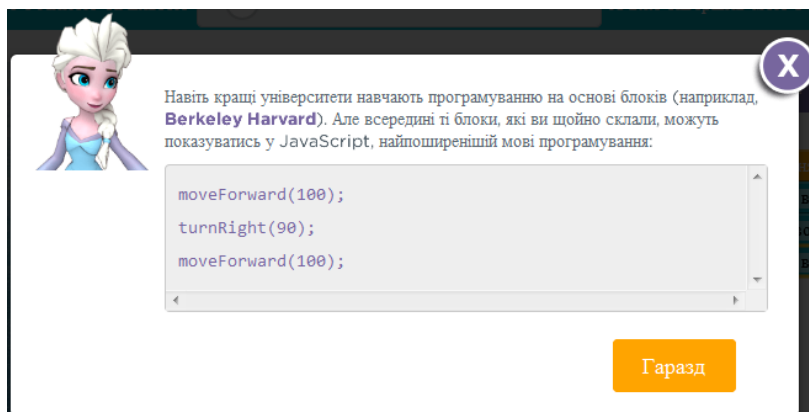
Вправи спроектовані таким чином, що ознайомлення з основними алгоритмічними конструкціями відбувається у близькому до ігрового режимі з використанням візуального середовища Blockly.



Мал. 1.



Мал. 2.



Мал. 3.

Програмування дій відбувається шляхом правильного розташування блоків дій у робочій області (мал. 2). Після складання «програми» необхідно натиснути кнопку «Запустити» і переглянути анімований рух головної героїні по кризі. Якщо відповідь неправильна або неефективна, з'явиться відповідна підказка. Крім того існує можливість переглянути код складеної програми, написаний на мові JavaScript (мал. 3).

Так, 20-годинні курси вступу до інформатики розраховані на учнів різних вікових груп (4-6 років, 6-18 років, 8-18 років, 10-18 років). Наприклад, курс для найменших кодувальників розроблений для того, щоб учні, які лише вчать читати, могли створювати комп'ютерні програми, які навчають співпрацювати з іншими, розвивати навички розв'язування задач та наполегливість у пошуку рішень.

У розділі «Художник» діти навчаються складати блок-програму, яка допоможе Художнику малювати узори та картини.

Розділи «Ігрова студія», «Ігрова лабораторія» та «Код Пурха» надають можливість створити власну гру або історію за участі різних цікавих персонажів, деякі з яких відомі дітям по улюбленим мультфільмам.

Література

1. Година коду [Електронний ресурс]. Спосіб доступу: [<https://hourofcode.com/ua>]
2. Година коду та обчислювальне мислення [Електронний ресурс]. Спосіб доступу: [<http://chabala.com.ua/dystosvita/година-коду-та-обчислювальне-мисленн/>]

УДК 371.3:378.14:53

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ АНАЛОГІЇ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ЕЛЕКТРО- ТА МАГНІТОСТАТИКИ В КУРСІ ТЕОРЕТИЧНОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

О.Г. Шевчук

Однією із найважливіших задач методичного спрямування при викладанні деяких розділів загальної та теоретичної фізики є формування стійких, ґрунтовних, активно діючих знань. Зазвичай, формування вказаного статусу навчальних вмінь та навичок наштовхується на значні труднощі. Однією з причин такого стану речей є та, що студенти сприймають навчальний матеріал як нагромадження вербального релятиву, який необхідно механічно запам'ятати [1]. На наш погляд це пояснюється застосуванням традиційної методики викладу навчального матеріалу, яка базується на використанні схем лінійно-абстрактного подання матеріалу в умовах майже повної відсутності міжпредметних зв'язків.

Синтез, узагальнення та порівняння є потужними засобами засвоєння, вивчення та систематизації навчального матеріалу [1,2]. Якщо ж до цих методів застосувати такі принципи навчання як наочність та послідовність викладу – процес засвоєння нових знань, умінь та навичок стає найбільш плідним та активним. Постає проблема підбору таких форм та методів роботи, які б приводили до досягнення позитивного результату. Розвиваюче навчання спрямоване на формування особистості учнівської молоді, в основі процесу навчання – самостійна пізнавальна активність.

Практика показала, що одним із дієвих методів організації повторення, узагальнення та систематизації знань з фізики є системне використання методу аналогій [3]. Необхідність використання методу аналогій обумовлена тим, що в академічних групах навчаються студенти із різним рівнем підготовки, різним ступенем абстрактного мислення та з різними темпами засвоєння навчального матеріалу.

Метод аналогій дозволяє краще засвоїти навчальний матеріал, подати його у наочній формі, систематизувати отримані знання, провести оперативний контроль ступеня засвоєння матеріалу.

При застосуванні методу аналогії вибирають об'єкт-оригінал із відомого знання, а досліджуваній об'єкт розглядають як об'єкт-аналог [1 - 4]. Висновок, зроблений за методом аналогії стосується об'єкта-аналога. На основі подібностей об'єкта-оригінала та об'єкта-аналога (які, на перший погляд, не піддаються порівнянню) виникають інтуїтивні передбачення щодо способів розв'язування проблеми. При цьому виробляється вміння застосовувати вже відомі способи розв'язування задач у нових навчально-практичних ситуаціях [5].

Застосування методу аналогії уже багато років реалізовано різними науковцями у таких питаннях: аналогія поступального та обертального рухів; аналогія гравітаційного та електростатичного полів; застосування аналогії при вивченні послідовного і паралельного з'єднання елементів; аналогія в задачах на обчислення роботи змінних сил; аналогія у коливальних процесах; застосування електромеханічної аналогії до розв'язування аналогічних задач; аналогія в геометричній оптиці; застосування аналогій при визначенні середніх величин [6, 7, 9 - 10].

Найдоцільніше використовувати метод аналогій і життєвих компетенцій учнів при вивченні тих розділів, де інші методи застосувати дуже важко. Це в першу чергу стосується квантової фізики та електродинаміки [6, 7, 9 - 10].

В роботі представлено використання методу аналогій з тем «Електростатичне поле та його характеристики» та «Магнітостатичне поле та його характеристики», які є одними з найважливіших в курсі фізики, оскільки їх якісне засвоєння створює передумови для успішного вивчення не лише усіх наступних розділів курсу загальної фізики, а й теоретичної електродинаміки.

1. Алгебри та їх відображення

Використання понятійного апарату вищої алгебри дає змогу, по-перше, уніфікувати поняття, явища та процеси, а, по-друге, провести їх класифікацію.

Аналіз змістової частини курсів загальної та теоретичної свідчить про те, що багато на перший погляд не пов'язаних між собою блоків інформації можна об'єднати та уніфікувати на основі алгебраїчного формалізму.

Введемо попередньо ряд основних означень та тверджень [8].

Алгеброю називається впорядкована пара $A = \langle A, \Omega \rangle$, де A – непорожня множина, Ω – непорожній перелік операцій на A .

Таким чином, алгебра A визначається двома множинами:

(а) непустою множиною $A \equiv |A|$. Ця множина називається *основною множиною алгебри A* , а її елементи – *елементами алгебри A* ;

(б) непустою множиною операцій Ω , визначених на A . Ці операції називаються *головними операціями алгебри A* .

Дві алгебри $A = \langle A, \Omega \rangle$ та $B = \langle B, \Omega^* \rangle$ будемо називати *однотипними*, якщо існує ін'єктивне відображення множини $\Omega \rightarrow \Omega^*$, при якому всі операції $f_B \xleftarrow{\psi} f_A$, $f_B \in \Omega^*$ мають один і той же ранг.

Ми надалі будемо розглядати лише ті алгебри, для яких $\|\Omega\|$ та $\|\Omega^*\|$ є фінітними числами. Перелік елементів f_A алгебри A ми будемо писати у вигляді: $A = \langle A, f_1, f_2, \dots, f_s, \alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \dots, \alpha_n \rangle$, де $f_i (i \in \overline{1, s})$ – операції на A , ранг яких перевищує ранг нульмісної операції, а $\alpha_p (p \in (s+1) \div n)$ – виділені в A елементи певними нульмісними операціями $f_{s+1}, f_{s+2}, \dots, f_n$. Ці елементи часто називають ще *головними елементами A* .

Типом алгебри A будемо називати *послідовність рангів її операцій*: $MorfA = \{rang(f_1), rang(f_2), \dots, rang(f_n)\}$.

З означень ясно, що у випадку, коли алгебри A та B є однотипними, то $MorfA = MorfB$ при введенні відображення $f_A \xrightarrow{\psi} f_B$ для всіх операцій, що діють на A та B .

Якщо $MorfA = \{2, 0\}$, то алгебра A є *моноїдом*. Надалі розглянемо важливий випадок *гомоморфних та ізоморфних алгебр*.

Нехай A та B – дві однотипні алгебри, f_A – довільна головна операція алгебри A , f_B – головна операція алгебри B ($f_A \xrightarrow{\psi} f_B$). Тоді відображення $|A| \xrightarrow{\psi} |B|$ зберігає операцію $f_A \in \Omega$, якщо виконується умова:

$$\psi(f_A(a_1, a_2, \dots, a_k)) = f_B(\psi(a_1), \psi(a_2), \dots, \psi(a_k)), \forall a_1, a_2, \dots, a_k \in A.$$

Алгебри A та B називають *гомоморфними* (позначення: $A \oplus B$), якщо існує відображення ψ $|A|$ в (на) $|B|$, яке зберігає всі головні операції f_A цієї алгебри і, крім того $MorfA = MorfB$.

Нехай $A = \langle \oplus, +, -, \div, \times, \frac{d}{dt}, \theta_A, \vec{0}_A, \vec{l}_r, 1_A; q, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \varphi, \vec{r}, t \rangle, B = \langle \oplus, +, -, \div, \times, \frac{d}{dt}, \theta_B, \vec{0}_B, \vec{l}_r, ; \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{A}, \vec{r}, t \rangle$ – дві алгебри, \oplus – дія геометричного підсумовування векторів; $+, -, \div, \times$ – арифметичні дії; $\frac{d}{dt}$ – дія диференціювання за часом; $\theta_A = \theta_B = 0; 1_A = 1_B = 1; \vec{l}_r$ – одиничний орт радіуса-вектора; t – час; q – заряд; \mathbf{E}, \mathbf{H} – напруженості електростатичного та магнітостатичного полів відповідно, \mathbf{D}, \mathbf{B} – індукція електростатичного та магнітостатичного полів відповідно, φ та \mathbf{A} – потенціали електростатичного та магнітостатичного полів; \vec{r} – радіус-вектор заданої точки поля.

Введемо бієкцію $\psi: q \xrightarrow{\psi} q^2; \dot{A} \xrightarrow{\psi} \varphi$ (в деякій системі одиниць);

$$\vec{r} \xrightarrow{\psi} \vec{r}; t \xrightarrow{\psi} t.$$

Використовуючи закони збереження електричного заряду та принцип суперпозиції електростатичних та магнітостатичних полів, неважко переконатись в тому, що відображення ψ зберігає операції $\{+, -, \div, \times, \frac{d}{dt}\}$ між (q, I) та (\mathbf{A}, φ) .

Збереження операції \oplus є тривіальним, так як ψ відображає \vec{r} в \vec{r} та t в t , крім того $\theta_A = \theta_B = 0; 1_A = 1_B = 1$.

Висновок: закони електростатики ізоморфні в термінах відповідності $(q, I) \xrightarrow{\psi} (\dot{A}, \varphi)$ законам магнітостатики.

2. Співвідносність параметрів, які описують електростатичні та магнітостатичні поля

Провівши аналіз на основі викладених вище теоретичних побудов основних законів електро- та магнітостатики, які вивчаються в курсі теоретичної фізики (електродинаміка) студентами фізико-математичного факультету за спеціальністю «Прикладна фізика» встановили співвідносність параметрів електростатичних та магнітостатичних полів, які для зручності та більшої наочності зведемо ці параметри в єдину таблицю.

Таблиця 1. Співвідносність параметрів електростатичних та магнітостатичних полів

№ з/п	Електростатичне поле	Магнітостатичне поле
1.	$\iint_S \dots d\vec{S}$	$\int_l \dots d\vec{l}$
2.	$\int_l \dots d\vec{l}$	$\iint_S \dots d\vec{S}$
3.	$\vec{E}(\vec{r})$	$\vec{B}(\vec{r})$
4.	ϵ_0	$\frac{1}{\mu_0}$
5.	Q	I
6.	$-Q^{нол}$	$I^{нам}$
7.	Q^e	$I^{проe}$
8.	dq	$Id\vec{l}$

9.	$-dq^{пол}$	$I^{нам} d\vec{l}$
10.	dq^B	$I^{пров} d\vec{l}$
11.	\vec{d}	\vec{P}_m
12.	$d\vec{S}$	$d\vec{l}$
13.	$\vec{P}(\vec{r})$	$\vec{J}(\vec{r})$
14.	$\chi(\vec{r})$	$\chi(\vec{r})$
15.	$\sigma_q^{пол}(\vec{r})$	$i^{нам}(\vec{r})$
16.	$\sigma_q^B(\vec{r})$	$i^{пров}(\vec{r})$
17.	$\sigma_q(\vec{r})$	$i(\vec{r})$
18.	$\rho_q(\vec{r})$	$\vec{j}(\vec{r})$
19.	$\frac{d}{dl}$	$\frac{\partial}{\partial a}$
20.	$l\vec{e}$	\vec{n}
21.	$\vec{D}(\vec{r})$	$\vec{H}(\vec{r})$
22.	$\varepsilon(\vec{r})$	$\mu(\vec{r})$
23.	div	rot
24.	rot	div
25.	$\varphi(\vec{r})$	$A(\vec{r})$

Аналіз навчального матеріалу показує, що також є ще й спільні параметри, які відносяться як до електростатичного, так і до магнітостатичного полів. Ці параметри ми наводимо в таблиці 2.

Таблиця 2. Спільні параметри у електро- та магнітостатичного полів

1.	\vec{r}
2.	\vec{F}
3.	\vec{M}
4.	\vec{E}
5.	\vec{l}

В тому, що параметри в таблиці 1 і таблиці 2 співвідносні один до одного легко переко-нати за допомогою таблиці 3.

Таблиця 3. Основні співвідносні між собою формули електростатики та магнітостатики

№ з/п	Електростатика	Магнітостатика
1.	$\oint_l \vec{E}(\vec{r}) d\vec{l} = \mathbf{0}$	$\oiint_S \vec{B}(\vec{r}) d\vec{S} = \mathbf{0}$
2.	$\vec{d} = ql\vec{e}$	$\vec{p}_m = I\vec{S}\vec{n}$
3.	$\vec{F} = \vec{d} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial \vec{l}}$	$\vec{F} = \vec{p}_m \frac{\partial \vec{B}(\vec{r})}{\partial \vec{n}}$
4.	$\vec{\mu} = [\vec{d}, \vec{E}]$	$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}(\vec{r})]$
5.	$\vec{p} = \chi(\vec{r})\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$	$\vec{J}(\vec{r}) = \chi(\vec{r})\vec{H}(\vec{r})$
6.	$\vec{p}_n = \sigma^{\text{HAM}} = \chi(\vec{r})\epsilon_0 \vec{E}_n(\vec{r})$	$\vec{J}_n(\vec{r}) = i^{\text{HAM}}(\vec{r}) = \chi(\vec{r})\vec{H}_n(\vec{r})$
7.	$\epsilon(\vec{r}) = 1 + \chi(\vec{r})$	$\mu(\vec{r}) = 1 + \chi(\vec{r})$
8.	$\oiint_S \vec{D}(\vec{r}) d\vec{S} = Q^{\text{B}}$	$\oint_l \vec{H}(\vec{r}) d\vec{l} = I^{\text{npob}}$
9.	$\nabla \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_q^{\text{B}}(\vec{r})}{\epsilon_0}$	$\text{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}^{\text{npob}}(\vec{r})$
10.	$\nabla \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_q^{\text{B}}(\vec{r}) + \rho_q^{\text{CT}}(\vec{r})}{\epsilon_0}$	$\text{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \mu \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$
11.	$\nabla \vec{D}(\vec{r}) = \rho_q^{\text{CT}}(\vec{r})$	$\text{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \vec{j}^{\text{npob}}(\vec{r})$
12.	$\text{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0$	$\text{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0$
13.	$\text{rot} \vec{D}(\vec{r}) = 0$	$\text{div} \vec{H}(\vec{r}) = 0$
14.	$\oiint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\oint_l \vec{B}(\vec{r}) d\vec{l} = \mu_0 I$
15.	$\oiint_S \vec{E}(\vec{r}) d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\oint_l \vec{B}(\vec{r}) d\vec{l} = \mu \mu_0 (I^{\text{npob}} + I^{\text{HAM}})$
16.	$\oiint_S \vec{D}(\vec{r}) d\vec{S} = Q^{\text{CT}}$	$\oint_l \vec{H}(\vec{r}) d\vec{l} = \mu_0 I^{\text{npob}}$
17.	$\oiint_S \vec{p}(\vec{r}) d\vec{S} = -Q^{\text{HAM}}$	$\oint_l \vec{J}(\vec{r}) d\vec{l} = I^{\text{HAM}}$
18.	$\oint_l \vec{D}(\vec{r}) d\vec{l} = \mathbf{0}$	$\oiint_S \vec{H}(\vec{r}) d\vec{S} = \mathbf{0}$
19.	$w = \frac{\vec{D}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})}{2}$	$w = \frac{\vec{H}(\vec{r})\vec{B}(\vec{r})}{2}$
20.	$W = -\vec{d}\vec{E}(\vec{r})$	$W = -\vec{p}_m\vec{B}(\vec{r})$
21.	$A = \int_1^2 q\vec{E}(\vec{r}) d\vec{l}$	$A = \int_1^2 I\vec{B}(\vec{r}) d\vec{l}$
22.	$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{dq\vec{r}}{r^3}$	$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$

23.	$d\vec{F} = \vec{E}(\vec{r})dq$	$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{r}]$
24.	$\vec{E}_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{\vec{d}}{r^3} \sqrt{1+3\cos^2\Theta}$	$ \vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{p}_m}{r^3} \sqrt{1+3\cos^2\Theta}$
25.	$\vec{E} = \frac{2\vec{d}}{4\pi\epsilon_0\epsilon(R^2+r^2)^{3/2}}$	$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\vec{p}_m}{(R^2+r^2)^{3/2}}$
26.	$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$	$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot}\vec{A}(\vec{r})$
27.	$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0\vec{E}(\vec{r}) + \vec{p}(\vec{r})$	$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\vec{B}(\vec{r})}{\mu_0} - \vec{J}(\vec{r})$

На завершення вкажемо на відмінність розвинутого в статичі математичного формалізму від підходів, які притаманні *теорії подібності*, яка ґрунтується на *π -теоремі* [8].

Теорія подібності оперує *критеріями подібності*, які підкоряються трьом теоремам подібності [8]. Ми ж розвивали інший підхід до встановлення подібності розглядуваних в статичі процесів. Тому метод встановлення ізоморфізму алгебр над фізичними параметрами, які описують процеси є незалежним та взаємо доповнюваним методом до методів теорії подібності. Крім того, метод ізоморфізму алгебр фізичних параметрів, про який йшла мова в цій статті, є більш загальним підходом для вивчення фізичних процесів, адже він може бути застосованим і до аналізу опису процесів, які методами теорії подібності не являються.

Література

1. Вовк Л.І. Роль методу аналогії при викладенні фізики у вузі // Наукові записки: Зб. наук. праць. - Харків: ХДУ, 1998. - с. 129-132.
2. Вовк Л.І. Значення використання аналогій у навчанні для розвитку мислення студентів // Вісник ЧДПУ ім. Т.Г.Шевченка. – Вип. 3. Серія: Педагогічні науки: Збірник: Чернігів: ЧДПУ, – 2000. – № 3. – с. 21-22.
3. Вовк Л.І. Аналогії у навчанні // Матеріали VIII Міжнародної Наукової Конференції імені академіка М. Кравчука. – К.:НТУУ (КПІ), – 2000. – с. 500.
4. Вовк Л.І., Лобань В.П. Метод аналогії як один із шляхів інтенсифікації навчання фізиці у вузі // Інтенсивні технології у навчальному процесі – головна умова покращення якості підготовки фахівців: Матеріали науково-методичної конференції. – Полтава: ПКІ, – 1997. – с.116-117.
5. Вовк Л.І., Михайлик П.Я. Використання аналогії – одна з ефективних форм узагальнення і систематизації знань // Дидактичні проблеми фізичної освіти в Україні: Матеріали науково-практичної конференції. – Чернігів: ЧДПУ, – 1998. – с. 27-30.
6. Закалюжний В.М, Шевчук О.Г. Система порівняльних опорних конспектів тем «Електростатичне поле та його характеристики» і «Гравітаційне поле та його характеристики» // В зб. Вісник Чернігівського державного педагогічного університету. Випуск 89. Серія: педагогічні науки. Чернігів, 2011. - с. 268 – 274.
7. Закалюжний В.М, Шевчук О.Г. Опорні конспекти лекцій з теми «Електростатика» як засіб систематизації та узагальнення знань студентів з фізики // В зб. Вісник Чернігівського державного педагогічного університету. Випуск 109. Серія: педагогічні науки. Чернігів, 2013. - с. 168 – 175.
8. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, 1974. – 560 с.
9. Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В., Шевчук О.Г. Система комплексних завдань при викладанні фізики за програмою рівня "С" в класах ліцею природничого профілю. // Фізико-математичні записки. Зб. наукових праць. Ніжин., 1999, с.91-93.
10. Мельничук О. В., Шевчук О. Г. Використання понятійного апарату абстрактної алгебри для синтетичного викладу студентам університету деяких розділів загальної та теоретичної фізики // В зб. Вісник Чернігівського державного педагогічного університету. Випуск 77. Серія: педагогічні науки. Чернігів, 2010. - с. 237 – 241.

ЗМІСТ

1. МАТЕМАТИКА	3
<i>Віра М.Б.</i> Асимптотика розв'язку крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь	3
<i>Казачков І.В.</i> Сучасний стан проблеми параметричного збудження і пригнічення коливань в суцільних середовищах	7
<i>Чорненька О.В., Богдан В.О.</i> Асимптотика загального розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь з параметром та особливою точкою	24
2. ФІЗИКА ТА АСТРОНОМІЯ	32
<i>Венгер Є.Ф., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В., Семікіна Т.В.</i> Поверхневі поляритонні збудження в плівках ZnO на підкладках з оптичного скла	32
<i>Давиденко С.М., Кнорозок Л.М., Решетицький В.С.</i> Використання тепловізорів для дослідження теплових втрат навчальних і житлових приміщень	40
<i>Руденко М.П., Секереш О.Ю.</i> Вимірювання інтенсивності електромагнітного випромінювання комп'ютера	45
<i>Шевчук О.Г.</i> Еволюційні треки індивідуального ризику небезпек в імовірнісному фазовому просторі	47
3. ІНФОРМАТИКА.....	55
<i>Глушко І.М.</i> Добровільні обчислення на платформі BOINC	55
<i>Фетісов В.С.</i> Проведення однофакторного дисперсійного аналізу за допомогою STATISTICA.....	59
4. МЕТОДИКА	62
<i>Барило Н. А., Шило В.О.</i> Застосування похідної до розв'язування задач з параметрами у шкільному курсі математики	62
<i>Бойко Л.М., Бойко М.П.</i> Міжпредметні зв'язки математики і фізики як складова педагогічної системи	68
<i>Варущик Н.П.</i> Формування соціальних компетентностей у евристичному навчанні математики	71
<i>Головіна Н.О.</i> Ментальні карти	79
<i>Закалюжний В.М., Левицький С.О.</i> Розрахунок та моделювання зигзагоподібних УКХ антен за допомогою програми MMANA –GAL.....	85
<i>Канівець Т.М.</i> Оцінювання як суб'єкт-об'єктна взаємодія у процесі переходу до нових методів навчання	91
<i>Ковальчук Ю.О., Лісова Т.В.</i> Актуальні напрями розвитку освітніх вимірювань в Україні	94
<i>Харченко В.М.</i> До питання використання теорії графів на всеукраїнських олімпіадах з інформатики	104
<i>Чернишова Е.О.</i> Програмування для дітей.....	107
<i>Шевчук О.Г.</i> Застосування методу аналогії в процесі вивчення законів електро- та магнітостатики в курсі теоретичної електродинаміки	109

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

Збірник наукових праць

Відповідальний редаткор – Ковальчук Ю.О.
Технічний редактор – Борис І. П.
Верстка, макетування – Ковальчук Ю.О.

Книга друкується за авторським редагуванням

Підписано до друку	Формат 60x84/8	Папір офсетний
Гарнітура Computer Modern.	Обл.-вид. арк. 10,04	Тираж 10 прим.
Замовлення №	Ум. друк. арк. 13,38	



Ніжинський державний університет
імені Миколи Гоголя.
м. Ніжин, вул. Воздвиженська, 3/4
(04631)7-19-72
E-mail: vidavn_ndu@mail.ru
www.ndu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 2137 від 29.03.05 р.