**Міністерство освіти і науки України**

**Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя**

**Навчально-науковий інститут точних наук і економіки**

**Кафедра математики, фізики та економіки**

*Середня освіта (Математика)*

*014.04 Середня освіта (Математика)*

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**

на здобуття освітнього ступеня ***магістр***

Методичні особливості вивчення многочленів, як основа для організації наукової роботи учнів

студентки **Ковальчук Наталії Сергіївни**

Наукові керівники:

Тарасенко Оксана Володимирівна

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Чорненька Олена Володимирівна,

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензенти:

Віра Марина Борисівна,

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Барило Ніна Андріївна

канд. пед. наук, доцент

Допущено до захисту

В.о. зав. кафедри \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Тарасенко О.В.

Ніжин – 2019 рік

**АНОТАЦІЯ**

**МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ, ЯК ОСНОВА ДЛЯ ОРГАНІЗАЦІЇ НАУКОВОЇ РОБОТИ УЧНІВ**

***Ковальчук Наталія Сергіївна***

Наукові керівники: канд. фіз.-мат. наук, доцент Тарасенко Оксана Володимирівна,

 канд. фіз.-мат. наук, доцент Чорненька Олена Володимирівна.

У роботі розкрито методичні особливості вивчення теми «Многочлени» в шкільному курсі математики та розроблено навчальний матеріал до факультативних занять з метою залучення учнів до науково-дослідницької роботи.

Проаналізовано особливості розкриття теми у діючих підручниках; описано методичні особливості вивчення таких тем, як дії з многочленами, тотожність та тотожні перетворення, стандартний вигляд многочлена, методи розкладання многочленів на множники; розкрито особливості застосування теореми Безу, схеми Горнера, методу невизначених коефіцієнтів, алгоритму Евкліда, як методу знаходження найбільшого спільного дільника многочленів, а також знаходження раціональних коренів многочленів. Розроблено систему задач з метою здобуття практичних навичок школярами.

***Ключові слова:*** многочлени, корінь многочлена, теорема Безу, схема Горнера.

**ANNOTATION**

**METHODICAL FEATURES OF STUDY OF POLYNOMIALS AS BASIS  FOR ORGANIZATION OF THE ADVANCED STUDY OF STUDENTS**

*Kovalchuk Natalia Serhiyivna*

Scientific advisers: candidate of physical and mathematical sciences, docent Tarasenko Oksana Vоlоdymyrіvna; candidate of physical and mathematical sciences, docent Chornenka Olena Vоlоdymyrіvna

The methodological features  of studying the topic of "Polynomials" in the school course of mathematics are revealed in the work and the educational material for optional classes is developed with the purpose of involving students in scientifically-research work.

The peculiarities of the topic disclosure in the current textbooks are analyzed; methodical peculiarities of studying such topics as actions with polynomials, identity and identity transformations, standard appearance of polynomials, methods of decomposition of polynomials by factors are described; the peculiarities of the application of the Bezou theorem, the Horner scheme, the method of uncertain coefficients, the Euclid algorithm as a method of finding the largest common divisor of polynomials, as well as finding rational roots of polynomials are revealed. A system of tasks was developed with the aim of gaining practical skills for students.

**Keywords:** polynomials, polynomial root, Bezou theorem, Horner scheme.

**ЗМІСТ**

ВСТУП……………………………………………………………………………....6

РОЗДІЛ І. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «МНОГОЧЛЕНИ» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ

* 1. Змістовно-методична лінія теми многочлени у шкільному курсі математики…………………………......……………………………..….9
	2. Цілі вивчення теми «Многочлени»……………………………..……...14
	3. Методичні особливості вивчення дій з многочленами……...…….….16
	4. Тотожність. Тотожні перетворення. Формування в учнів основних понять з теми……………………………...……………………………..20
	5. Зведення многочленів до стандартного вигляду…………..…………..25
	6. Способи розкладання многочленів на множники……………..………27
		1. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки…………………….……………..28
		2. Розкладання многочленів на множники способом групування…………………...……………………………………31
		3. Розкладання многочленів на множники із застосуванням формул скороченого множення………………………...………..……......34
		4. Застосування різних способів розкладання многочленів на множники……………..………………...…………………………38
	7. Висновки до розділу І…………………………………………………...40

РОЗДІЛ ІІ. ФОРМУВАННЯ НАУКОВО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ ВМІНЬ ШКОЛЯРІВ

* 1. Організація науково-дослідницької роботи учнів……………..…...…42
	2. Нові поняття для учнів з теми «Многочлени»……………..……...….43
	3. Теорема Безу та наслідки з неї. Схема Горнера, особливості її застосування…………………………………………..………………....47
	4. Метод невизначених коефіцієнтів при розкладанні многочлена на множники…………………………………..…………………………….53
	5. Методика знаходження раціональних коренів многочленів..………...58
	6. Поняття найбільшого спільного дільника многочленів та алгоритм Евкліда…………………..……………………………………………..…62
	7. Поняття кратності коренів многочлена та формули Вієта……..……..66
	8. Висновки до розділу ІІ…………………………………………………..74

ВИСНОВКИ………………………………………………………………………...76

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ………………………..……………..….79

**ВСТУП**

У сучасному світі основним завданням школи є виховати досвідчених громадян, які б в подальшому стали гарними спеціалістами. Математика – предмет складний, але дуже цікавий. Темі «Многочлени» в курсі 7 класу виділено значну кількість годин. Учні вивчають основні поняття та дії з многочленами, застосування різних способів розкладання многочленів на множники, стандартний вигляд многочлена тощо. Дуже важливим є те, як вчитель зможе пояснити матеріал і наскільки влучно підбере задачі до теми.

Ще одним не менш важливим завданням для вчителя є заохочення учнів до науково-дослідницької роботи. Але, нажаль, знань отриманих завдяки програмі для організації такої роботи замало. Тому необхідно проводити факультативні та додаткові заняття, де потрібно підібрати теми, які б були цікавими учням, а також розглянути нестандартні задачі, які допоможуть учням навчитись не тільки застосовувати конкретні формули до очевидних завдань, а й підходити до розв’язання задачі творчо, застосовуючи логіку і знання, які отримали на заняттях. Це і є початок до того, щоб учні почали самостійну науково-дослідницьку діяльність. Саме тому було обрано тему: «Методичні особливості вивчення многочленів, як основа для організації наукової роботи учнів».

Практична значущість даної магістерської роботи полягає в тому, що результати роботи, а саме розгляд деяких питань та задач, можуть бути використані вчителями шкіл при проведенні уроків, а також для розробки факультативних та додаткових занять.

Об’єктом мого дослідження є методичні особливості вивчення алгебри в загальноосвітній школі.

Предметом дослідження є методичні особливості вивчення теми «Многочлени» на уроках алгебри загальноосвітньої школи.

Метою дослідження є виявити зв'язок між методичними особливостями вивчення теми «Многочлени» в шкільному курсі алгебри та організацією наукової роботи учнів.

Основними завданнями дослідження є:

* проаналізувати діючі підручники, в яких розглядається тема «Многочлени», звернувши увагу як на виклад теоретичного матеріалу, так і на підбір задач;
* визначити цілі навчання учнів темі «Многочлени»;
* розглянути методичні особливості вивчення дій з многочленами;
* описати поняття тотожності та тотожних перетворень;
* вивчити методику зведення многочлена до стандартного вигляду;
* розглянути способи розкладання многочлена на множники, а саме: спосіб винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, застосування формул скороченого множення;
* описати можливості застосування різних способів розкладання многочленів на множники;
* описати процес організації науково-дослідницької роботи учнів;
* опрацювати методичні особливості вивчення тем: «Теорема Безу та наслідки з неї», «Схема Горнера»;
* описати метод невизначених коефіцієнтів при розкладанні многочлена на множники;
* опрацювати методику знаходження раціональних коренів многочленів;
* пригадати поняття найбільшого спільного дільника многочленів та розглянути алгоритм Евкліда;
* описати методику вивчення теми «Кратні корені многочлена та формули Вієта».

При проведенні дослідження використано методи аналізу та порівняння методичної літератури і шкільних підручників, навчальних програм, статей журналів та газет; вивчення досвіду вчителів.

Результати магістерської роботи доповідались та обговорювались на 5 конференціях різного рівня:

1. XIV Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання» (м.Ніжин 5-6 грудня 2018 р.);
2. V міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Сучасний рух науки» (м. Дніпро 7-8 лютого 2019 р.);
3. ІІ Всеукраїнська студентська наукова Інтернет - конференції «Новітні інформаційні технології в освіті і науці» (м. Переяслав-Хмельницький 10-12 квітня 2019 р.);
4. Звітна наукова конференція молодих науковців «Молодь у науці» (м. Ніжин 13 – 22 травня 2019 р.);
5. XV Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання» (м.Ніжин 4-5 грудня 2019 р.);

 За результатами проведеного дослідження опубліковано ряд робіт [21], [22], [23], [24].

Також опублікована стаття [20] у Віснику студентського наукового товариства. (Випуск 22. Ніжин 2019 р.)

**РОЗДІЛ І. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «МНОГОЧЛЕНИ» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ**

* 1. **Змістовно-методична лінія теми многочлени у шкільному курсі математики**

Відповідно до навчальної програми для 7 класу для загальноосвітніх навчальних закладів, яка затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 04.06.2017 року №804 виділяється 30 годин для вивчення розділу 1: «Цілі вирази». При вивченні цього розділу учні знайомляться з многочленами. Згідно вимог, вони мають навчитись розрізняти одночлени і многочлени відповідно до їх задання, ознайомитись з поняттям подібних членів многочлена та навчитись їх зводити, навчитись визначати степінь многочлена, також виконувати дії над многочленами (додавання, віднімання та множення), вміти застосовувати до спрощення буквених виразів многочленів формули скороченого множення та розкладати многочлени на множники, застосовуючи різні способи.

Відповідно до постанови Кабінету Міністрів України від 23.11.2011 року №1392 «Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти» та Типових навчальних планів для ІІІ ступеня закладів загальної середньої освіти учні вивчають математику на рівні стандарту 3 години на тиждень або на профільному рівні 9 годин на тиждень.

Тема «Многочлени» у шкільному курсі є однією з головних у 7 класі, оскільки розглянуті поняття і формули будуть застосовуватись при вивченні інших тем з математики в старших класах. Наприклад, при вивченні теми «Раціональні дроби» необхідно вміти виконувати тотожні перетворення та скорочувати дроби, при вивченні квадратних рівнянь необхідно застосовувати вміння розкладати многочлени на множники. При вивченні теми «Функції, властивості функцій» також необхідно застосовувати знання, які отримані при вивченні многочленів.

Розглянемо деякі підручники для 7 класу та зміст матеріалу по темі «Многочлени».

У підручнику [30] многочлени розглянуто у §2 «Цілі вирази», подано теоретичний матеріал з даної теми, яким повинен оволодіти учень, наведено приклади з розв’язанням та поясненнями по кожній темі, а також підібрано вправи та задачі для розв’язання. Оскільки даний підручник передбачає поглиблене вивчення математики, то більшість задач є завданнями підвищеної складності. Зокрема, вивчаються такі питання: поняття многочлена, двочлена і тричлена, зведення подібних членів многочлена, поняття многочлена стандартного вигляду, степінь многочлена стандартного вигляду, коефіцієнти многочлена (поняття старшого коефіцієнта і вільного члена); дії з многочленами (додавання, віднімання, множення); способи розкладання многочлена на множники (винесення спільного множника за дужки, метод групування, розкладання многочленів на множники за допомогою формул скороченого множення); застосування різних способів розкладання многочлена на множники . Окрему увагу надано формулам скороченого множення, а саме розглянуто такі формули: квадрат суми та квадрат різниці двох виразів, квадрат суми кількох виразів, а також наголошено на особливостях перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів, у квадрат суми кількох виразів; сума й різниця кубів двох виразів; куб суми та куб різниці двох виразів; формули для розкладання на множники виразів виду і . Щодо питання про застосування різних способів розкладання многочлена на множники, то у підручнику зазначено, що універсальних рекомендацій щодо вибору способу виконання таких завдань нема, але є поради, що допоможуть учню його обрати.

В підручнику [4] многочлени вивчаються у двох розділах: розділ 1 «Цілі вирази» та розділ 2 «Розкладання многочленів на множники».

В розділі 1 «Цілі вирази» розкрито суть таких питань: поняття многочлена, двочлена і тричлена, розкрито поняття подібних членів многочлена та многочлена стандартного вигляду, дії над многочленами (додавання, віднімання та множення).

В розділі 2 «Розкладання многочлена на множники» учні повинні засвоїти способи розкладання многочлена на множники (винесення спільного множника за дужки, спосіб групування та використання формул скороченого множення). Окрему увагу надано вивченню формул скороченого множення: квадрат двочлена, різниці квадратів, різниця і сума кубів. У підручнику формули скороченого множення зображені геометрично, що доводить їх правильність. Також в цьому розділі учні повинні навчитись застосовувати різні способи розкладання многочленів на множники, доцільним є наведене правило-орієнтир.

У підручнику є багато рубрик «Хочеш знати більше!», у яких наголошено на деяких особливостях, які можуть стати в нагоді учням при вивченні многочленів. Наприклад, те, що в алгебрі вирази прийнято називати відповідно до того, як вони записані, а не до того як їх можна записати [4, с. 47]. Тобто, вираз не є многочленом, хоча – многочлен і вирази тотожні. Якщо, наприклад, перемножити тричлен на двочлен, то отримаємо шестичлен і тільки після зведення подібних доданків кількість членів многочлена може зменшитись. Знаючи це, учень може себе перевірити, чи правильно він помножив многочлен на многочлен, чи виконав інші перетворення.

Після теоретичного матеріалу є приклади з розв’язаннями та поясненнями. Також є задачі та вправи для розв’язування. В кінці кожного розділу є підсумок вивченого, де виокремлено головне в розділі. Є також типові задачі для контрольної роботи, запитання для самоперевірки та історичні відомості.

У підручнику [25] теоретичний матеріал викладено так, як у підручнику [4]. Проте розглядається питання про застосування перетворень виразів, що не згадується в [4]. Вказано 4 способи перетворення виразів: порівняння многочлена з нулем, знаходження найбільшого і найменшого значень виразів, розв’язування задач на подільність, знаходження значень многочлена за допомогою мікрокалькулятора; наведено приклади до кожного способу з поясненням і розв’язанням. До кожної теми підібрано задачі та вправи, які розділені за рівнями А, Б, В, від простішого до складнішого. Також запропоновано задачі підвищеної складності. У підручнику наведено запитання і вправи для повторення, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу.

В підручнику [31] многочлени присвячений §2 «Цілі вирази». Викладена теорія в підручнику майже співпадає з підручником для поглибленого вивчення математики [30]. При вивченні теми щодо формул скороченого множення в цьому підручнику відсутня тема про знаходження квадрату суми кількох виразів, кубу суми і кубу різниці двох виразів, а також не наведено формул для розкладання на множники виразів виду і . Щодо задач та вправ, то в цьому підручнику вони запропоновані не такі складні, але є декілька задач нестандартних та з підвищеною складністю. Також запропоновані тести, щоб учені змогли перевірити свої знання.

В підручнику [42] розділ 3 «Многочлени» присвячений вивченню теми. В ньому наведено матеріал, відповідно до якого учні зможуть засвоїти поняття многочлена, з’ясувати якого вигляду многочлен називають стандартним, поняття степеня многочлена, дії з многочленами, формули скороченого множення, способи розкладання многочлена на множники, а також практичне застосування вивченого. Працюючи з цим підручником учні також можуть ознайомитися з такими поняттями, як симетричний многочлен, алгебраїчна сума чисел, а також дізнатись про видатних математиків Митропольського Ю.О., Калужніна Л.А. та Степанця О.І. Учням запропоновані задачі, розв’язання яких доводить, що многочлени використовуються на практиці. При вивченні дії множення многочленів наголошено на можливості їх ділення, хоча окремої теми не наведено. Вказано, що ділити многочлен на многочлен можна «кутом», наведено відповідний приклад. У кінці теми є тестові завдання та контрольні запитання, а також задачі та вправи.

 Змістова лінія теми многочлени в підручнику [28] розкрита повністю, як й у попередніх підручниках. Слід відмітити, що в [28] наголошено на можливість допущення помилок зі знаками при виконанні дій з многочленами та пояснено, як їх уникнути. У підручнику вказаний алгоритм для розкладання многочлена на множники способом групування та способом винесення спільного множника за дужки. В історичній довідці, яка наведена вкінці теми, учні можуть ознайомитися з повідомленням про Георгія Вороного, який цікавився розкладом многочлена на множники. В кінці кожної теми подано задачі та вправи для самостійного розв’язання, деякі з них підвищеної складності, та вказано запитання для самоперевірки. Також наведено завдання для самоперевірки, які розділені на 5 рівнів від простішого до складнішого.

 Змістова лінія у підручнику [18] повністю відповідає програмі навчання. Всі теми в повній мірі розкриті. Присутні цікаві задачі підвищеної складності. Схематично зображено множення многочлен на многочлен. Саме це, на нашу думку, полегшить сприйняття учнями даної теми. У підручнику наведено короткі історичні відомості, з яких учні можуть дізнатися, коли стали відомі правила скороченого множення, як ці правила в давні часи доводились. До кожної теми підібрано вправи та задачі. В кінці розділу учні мають змогу ознайомитись про фундаторів математичних олімпіад в Україні (М.П.Кравчук, М.М.Боголюбов, М.Й.Ядренко).

 Також многочлени вивчаються в 10 класі на профільному рівні, тобто при поглибленому вивченні математики. Навчальна програма математики рівня стандарту не передбачає вивчення многочленів. Розглянемо деякі підручники, в яких викладена дана тема.

В підручнику [29] на вивчення многочленів виділено §6. В даному параграфі учні вивчають ділення многочленів з остачею та без остачі, а також вивчають теорему Безу. В кінці теми пропонується декілька вправ на закріплення знань з даного матеріалу.

В підручнику [5] в §4 розглядається тема «Ділення многочленів». Змістова лінія підручника відповідає попередньому. В кінці теми пропонується ряд вправ за рівнями А, Б, В. Від простішого до складнішого рівня.

Підручник [19] передбачає вивчення многочленів у §7 Ділення многочленів. Теорема Безу та наслідки з неї. В даному підручнику більш ширше розглянуті многочлени. Більше уваги приділено теоремі Безу. Введено поняття многочлена від однієї змінної – поліном. Є приклади з розв’язаннями, в яких розглядаються різні випадки. Досить досконало розписані також наслідки з теореми Безу та їх доведення. Далі є ряд вправ та задач для закріплення знань та навичок.

Підручник [37] найкраще розкриває суть поняття многочлена, а також дії з многочленами включаючи ділення з остачею та без остачі. Розглядається теорема Безу та наслідки з неї. В даному підручнику розглянуті ще такі теми як схема Горнера та формули Вієта та знаходження раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами. Останні теми більш складніші для учнів, але й даний підручник призначений для поглибленого вивчення. По кожній з тем розписані декілька прикладів з повним розв’язанням та поясненнями, а також запропоновані ряд вправ для самостійного розв’язання.

* 1. **Цілі вивчення теми «Многочлени»**

 Сучасна середня загальноосвітня школа повинна готувати високоосвічених, всебічно розвинених майбутніх спеціалістів різних професій. Таким чином підготовка учнів школи до здобуття різних професій вимагає: освоєння учнями деякого обсягу математичних знань та навичок; формування в процесі навчання високих цінностей; розвиток інтелектуальних здібностей, готовність учнів до майбутньої праці.

 Деякі здобуті знання з математики необхідні учням для застосування їх при вивченні інших предметів, наприклад, фізики чи хімії. Жоден інший предмет, крім рідної мови та літератури, не займає такого місця в шкільному навчанні як математика [8, с.9].

 Головним завданням навчання математики у середній школі є висока підготовка учнів з метою продовження їхнього навчання у вищій школі з спеціальностей, які в подальшому потребують продовження вивчення математики. Ще одним не менш важливим завданням є виховання в учнів прагнення до поповнення своїх знань з напрямку математичної освіти шляхом самоосвіти.

 Враховуючи стрімкий розвиток науки та техніки, економіки вже зараз важко знайти таку область діяльності людини, де б не потрібні були знання з математики. Дитина, яка добре знає математику, в майбутньому буде професіоналом з дуже гарним логічним мисленням, в результаті чого зможе реалізувати можливість застосувати знання в конкретних ситуаціях.

 Символи відіграють головну роль в інтеграції нових знань. Вивчення математики неможливе без використання різних типів літер, які використовуються для позначення змінних. Вивченню многочленів і їх перетворенню відведено в курсі алгебри велику частину навчального часу. Це й зрозуміло, оскільки перетворення многочленів є основою при розв’язанні рівнянь та нерівностей, доведення тотожностей, обчислення значень буквених виразів. Їх також дуже часто використовують у диференціальному та інтегральному численні. Програма 7 класу передбачає повторити та уточнити відомості про числові та буквені вирази, формули, розглянути поняття про тотожно рівні вирази, тотожні перетворення виразів.

 Спираючись на вивчення теми з алгебри «Цілі вирази», можна визначити деякі задачі пошукового та дослідницького характеру, де використовується теорія многочленів.

Задачі на доведення подільності виразу на число, многочлена на многочлен, розв’язання яких ґрунтується на застосуванні методу математичної індукції з врахуванням тотожних перетворень виразів [22, с.325].

Окремим питанням можна виділити завдання пов’язані з розв’язуванням степеневих рівнянь та рівнянь, що до них зводяться [24, с.61].

Наведений перелік тем, розгляд яких потребує знань, отриманих при вивченні многочленів у 7 класі, далеко не остаточний.

У 9 класі тотожні перетворення цілих і дробових виразів використовуються для розв’язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь [41, с.209]. Також вивчається спеціальне перетворення, розкладання квадратного тричлена на множники, яке використовується для виведення загальної формули коренів квадратного рівняння.

Геометричні задачі на визначення координат центра кола та його радіуса, що ґрунтується на аналізі загального рівняння кола, потребують застосування формул скороченого множення та тотожних перетворень многочленів другого порядку [22, с.325].

Вивчаючи фізику, учням доводиться розв’язувати багато задач. При цьому потрібно уміти застосовувати не тільки фізичні закони та теорії, а й уміти виконувати тотожні перетворення деяких виразів, складати та розв’язувати рівняння, розкладати на множники многочлени і т.д.

Отже, на нашу думку, вивченню многочленів у шкільному курсі алгебри необхідно приділяти особливу уваги, оскільки ця тема є основою для вивчення багатьох інших тем як в основній, старшій, так і вищій школі.

* 1. **Методичні особливості вивчення дій з многочленами**

 У підручниках для 7 класу передбачено вивчення таких дій над многочленами: додавання, віднімання, множення (множення одночлена на многочлен, множення многочлена на многочлен).

При вивченні дії додавання та віднімання многочленів необхідно, щоб учні при виконанні практичних задач не допускали помилок. При виконанні таких дій можуть виникнути проблеми з розкриттям дужок. Потрібно наголошувати на правилі розкриття дужок коли стоїть знак «+» або «-». Якщо перед дужками стоїть знак «+», то при розкритті дужок необхідно їх опустити і всі доданки записати зі своїми знаками, якщо перед дужками стоїть знак «-», то при розкритті дужок знаки доданків у дужках зміняться на протилежні. Учні повинні зрозуміти, що розкриття дужок це ще не остаточний результат, необхідно звести подібні доданки, а також записати многочлен у стандартному вигляді. Отже, можна зробити висновок, що сума чи різниця будь-яких многочленів є многочлен, який потрібно записати у стандартному вигляді.

Ще у математиці використовують таке поняття, як алгебраїчна сума. Воно об’єднує два поняття «сума» і «різниця». Тобто різницю можна подати як суму: . То ж в даному випадку вже можна говорити про суму двох одночленів. При вивченні теми можна розглянути питання про те, якою може бути сума двох многочленів, чи завжди, додавши многочлен з многочленом, отримаємо многочлен. Необхідно акцентувати увагу на тому, що, виконуючи такі перетворення, можливі такі варіанти результатів: одночлен, многочлен, деяке число або нуль.

При вивченні теми про множення одночлена на многочлен необхідно пояснити учням, що при виконанні даної дії використовується розподільна властивість множення. Щоб помножити одночлен на многочлен, необхідно помножити одночлен на кожний член цього многочлена і знайдені добутки додати. На нашу думку, можна спонукати учнів до власних висновків, наводячи ряд проблемних запитань. Наприклад, що ми отримаємо при множенні одночлена на многочлен у стандартному вигляді, та прийти до висновку, що це буде також многочлен, який записаний у стандартному вигляді.

 Вивчаючи тему множення многочлена на многочлен, найкраще використати знання з попередньої теми (множення одночлена на многочлен) та навести приклади.

Нехай ми маємо два многочлена та . Нехай многочлен позначимо . Тоді, . У виразі підставимо замість многочлен і скористаємось правилом множення одночлена на многочлен: . Після чого можна зробити висновок, що при множенні многочлена на многочлен, потрібно кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого й отримані добутки додати. Також стає зрозумілим, що при множенні многочлена на многочлен, завжди отримуємо многочлен.

Хоча у шкільній програмі 7 класу при вивченні дій з многочленами не акцентується увага на дію ділення, але варто розглянути ділення многочлена на одночлен, та многочлен. Розгляд даного питання в подальшому може спонукати учнів до більш детального вивчення даної теми, а також розгляд многочленів з наукової точки зору. Отже, спочатку можна пояснити як поділити многочлен на одночлен. Потрібно кожний член многочлена розділити на одночлен і отримані результати додати. Наприклад, . Разом з тим постає питання як поділити многочлен на многочлен. Розглянемо дане питання на конкретному прикладі. Необхідно поділити многочлен на двочлен . Зробимо це за таким алгоритмом:

1. *Спочатку потрібно записати многочлен у іншому вигляді, а саме: ;*
2. *Ділимо перший елемент діленого на старший елемент дільника ;*

|  |
| --- |
|  |
|  |

1. *Помножимо дільник на отриманий вище результат ділення. Результат запишемо під першими двома елементами діленого. ;*

|  |
| --- |
|  |
|  |

1. *Тепер віднімемо, отриманий після множення многочлен від діленого і запишемо результат*

 *;*

|  |
| --- |
|  |
|  |

5) *Повторимо попередні кроки до тих пір поки при відніманні отриманого після множення многочлена від діленого не отримаємо 0 або якесь число.*

|  |
| --- |
|  |
|  |

\_

 Таким чином, ми отримали – частка від ділення, а – остача.

 Розглянемо приклади ділення тричлена на двочлен без остачі. Діємо за попереднім алгоритмом.

|  |
| --- |
|  |
|  |

\_

Доцільно розглянути ще приклад ділення многочлена на двочлен, також застосовуючи вже відомий алгоритм.

|  |
| --- |
|  |
|  |

\_

 0

* 1. **Тотожність. Тотожні перетворення. Формування в учнів основних понять з теми**

 Тотожні перетворення учні повинні виконувати при розв’язуванні рівнянь та нерівностей, при спрощенні виразів та обчисленні значень цих виразів.

Потрібно наголосити що є два поняття: тотожні і рівносильні перетворення. Поняття тотожні перетворення властиве до виразів, а рівносильні перетворення – до формул, рівнянь та нерівностей.

Можна виокремити деякі види тотожних перетворень:

* зведення многочлена до стандартного вигляду, зведення подібних членів многочлена, розкриття дужок;
* розкладання многочлена на множники;
* тотожні перетворення дробових виразів (скорочення дробів, зведення дробів до спільного знаменника, множення та ділення дробів;
* тотожні перетворення трансцендентних виразів (ті, що містять показникові, степеневі, логарифмічні, тригонометричні функції) і т.д.

Важливо наголосити увагу на тому, що тотожні перетворення потрібні для подання запису складних виразів в більш простому вигляді, а саме, зведення многочленів до стандартного вигляду. Саме це, на нашу думку, дозволить учням зрозуміли важливість тотожних перетворень.

Буде доречно проілюструвати ці факти на конкретних прикладах. Наприклад, спростимо вираз.

 (1)

 (2)

 (3)

Спочатку учням запропонуємо знайти значення виразу (3) при .

 .

Потім знайти значення виразів (1) та (2).

 ;

 .

Після цього можна зробити висновок, що всі три вирази при та дорівнюють 10. Тільки у третьому випадку розв’язок знаходимо значно швидше. Отже, всі три вирази є тотожно рівними. Аналізуючи вирази (1) – (3) можна пояснити значення тотожних перетворень виразів. Підкреслюється, що коли спрощували вирази, виконуючи прості арифметичні дії, учні виконували тотожні перетворення.

Не менш важливим є формування у дітей культури тотожних перетворень. Слід наголошувати на правильності запису буквених виразів. Якщо на це не звернути увагу, то учні можуть у подальшому неохайно вести записи, що може призвести до отримання неправильної відповіді та помилок.

Що стосується поняття «вираз», то, на нашу думку, краще сформулювати його описово, наводячи конкретні приклади.

Одразу означення тотожних виразів також краще не давати, а вводити це поняття на конкретних уроках, коли виникне потреба обчислити вираз (використовується конкретно-індуктивний метод).

 Вивчаючи поняття тотожні перетворення в учнів можуть виникати деякі складності. Можливе допущення помилок при розв’язанні поставлених завдань, а саме:

* виконання неправильного порядку дій призведе до отримання неправильної відповіді;
* неправильне застосування формул скороченого множення;
* розкладання многочленів на множники може бути не доведено до кінця;
* виконання неправильного скорочення дробів також дасть неправильну відповідь.

 Таблиця 4.1

**Приклади деяких помилок, які можуть допустити учні**

|  |  |
| --- | --- |
| Неправильне виконання завдання  | Правильне виконання завдання |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Щоб запобігти виникненню перелічених помилок при виконанні тотожних перетворень виразів, важливо повторити порядок дій, повторити формули скороченого множення та навчитись правильно їх застосовувати, повторити правило розкриття дужок і т.д.

Учні на даному етапі повинні зрозуміти, що таке тотожні вирази, тотожність, тотожне перетворення. Також повинні знати які властивості дій над числами використовуються при виконанні тотожних перетворень, а саме переставна, сполучна та розподільна властивості.

Потрібно навчити учнів доводити тотожності. Розглянемо конкретний приклад. Доведіть тотожність

*.*

Розв’язання задачі наведемо у формі бесіди.

Запитання до учнів: «Що потрібно зробити щоб довести цю тотожність?»

Відповідь учнів: «Виконати тотожні перетворення лівої частини виразу і показати, що вона дорівнює правій частині».

Справді в даному прикладі потрібно робити саме так.

Далі вчитель питає: «А як іще можна довести тотожність якщо приклад буде зовсім інший»?

Відповідь учнів: «Перетворити праву частину виразу і показати, що вона рівна лівій, а також ще можна ліву відняти від правої або навпаки і при цьому результат повинен бути нуль».

Отже, разом з учнями дійшли до висновку, що є три способи доведення тотожностей. Важливо навчити дітей обирати, який саме спосіб доцільно використовувати при розв’язанні конкретної вправи. На нашу думку, потрібно давати більше завдань без конкретних вказівок на доцільність того чи іншого способу.

Щоб учні краще засвоїли цю тему, на нашу думку, варто підбирати більше вправ такого типу:

1. Підставити замість і такі числа, щоб виконувалась тотожність.

.

 Щоб виконати таку вправу учень повинен не просто довести тотожність, а й знайти значення і , які є невідомими, що ускладнює виконання цього завдання. Не варто одразу розказувати учням, як розв’язати дане завдання, а дати можливість їм знайти вирішення самостійно.

 Оскільки необхідно, щоб виконувалась тотожність, то при спрощенні виразу з лівої частини (розкриття дужок та зведення подібних доданків) значення виразу повинно бути рівне , а вираз рівний 9. Після цього легко знайти значення і .

 ,

.

,

,

.

Відповідь: , .

2. Твердження записати у вигляді тотожності та довести її.

Сума виразів та дорівнює сумі та .

 Такого типу вправи вчать учнів не тільки правильно здійснювати тотожні перетворення виразів, а й вчать правильно читати їх, що є дуже важливим.

 ,

 .

 Саме це завдання особливої складності не викликає, але якщо б воно звучало так: різниця виразів та дорівнює різниці та 7.

 Учні можуть записати це твердження у такому вигляді:

 ,

 .

 Учень дасть відповідь, що твердження не виконується.

 Помилка в тому, що твердження записано не правильно. Доцільно було записати дане твердження в такому вигляді:

 ,

 ,

 .

 Вираз необхідно брати в дужки, а потім їх розкривати. В цьому випадку твердження доведено і відповідь правильна.

3. Довести тотожність такого виразу:

.

Щоб виконати цю вправу без помилок, потрібно правильно поступово розкривати дужки, застосовуючи розподільний закон множення, та звести подібні доданки.

.

Ми спростили ліву частину виразу і бачимо, що вона рівна правій частині. Отже, тотожність доведено.

 Це основні типи завдань, які допоможуть сформулювати вміння доводити тотожності, розвивають логічне мислення в учнів, наполегливість та творчі здібності в даній темі.

* 1. **Зведення многочленів до стандартного вигляду**

Зведення многочленів до стандартного вигляду тема досить важлива. Метою є навчити учнів акуратності записів, виховати зацікавленість у пізнанні нового. Правильний запис многочлена зводить до мінімуму можливість допустити помилки.

Ознайомившись з поняттям «одночлен», учням поступово необхідно дійти висновку, що при додаванні одночленів, які не є подібними, отримаємо многочлен. Тобто, многочлен – це сума одночленів, а одночлени, з яких складається многочлен, називається членами многочлена.

Досить складно учням дається питання про правильне означення членів многочлена. Під членами многочлена вони можуть сприймати модулі цих виразів. В такому випадку доцільним буде під час формулювання означення многочлена звертати увагу учнів на тому, що многочлен – «алгебраїчна сума».

Учням необхідно пояснити, що означає звести многочлен до стандартного вигляду. Для того щоб многочлен привести до стандартного вигляду потрібно звести подібні доданки. Щоб учні могли легко розрізняти подібні члени многочлена, потрібно звернути увагу, що члени многочлена слід записати у відповідному вигляді, а саме: буквені множники записати в алфавітному порядку, а числові множники на першому місці. Наприклад, , а не .

Отже, разом з учнями дійти до висновку, що кожен член даного многочлена вдалося «стандартизували» або «записали у стандартному вигляді». Після цього виникає необхідність виконання дії, яка називається «зведення многочлена до стандартного вигляду».

Стандартний вигляд многочлена – це запис многочлена, в якому усі члени мають стандартний вигляд і серед них немає подібних.

Учні мають розуміти, що називається степенем многочлена, який зведений до стандартного вигляду. Щоб чітко розібратися в цьому питанні, можна навести приклад многочлена та визначити його степінь. Наприклад, (степінь першого члена 4+2=6, степінь другого члена 3+2=5, степінь третього члена 1+2=3, степінь четвертого члена 1+1=2) – степінь даного многочлена 6.

Усі тотожні перетворення цілих виразів зводяться до перетворення многочлена в многочлен стандартного вигляду. Отже, учням потрібно засвоїти алгоритм перетворення многочлена в многочлен стандартного вигляду, а саме:

* перевірити чи всі члени многочлена записані у стандартному вигляді, якщо необхідно, то звести їх до стандартного вигляду;
* звести подібні доданки;
* записати члени многочлена розміщуючи їх у порядку спадання степенів.
	1. **Способи розкладання многочленів на множники**

Розкласти многочлен на множники означає представити його у вигляді добутку декількох многочленів.

Перше, що необхідно зробити вчителю, переконати учнів в тому, що вміння розкладати многочлени на множники справа необхідна. У статті [12, с.15-17] автор пропонує розглянути деякі приклади, для вирішення яких необхідно застосувати вміння розкладати многочлен на множники. Дійсно, слід визнати таку методику досить доречною. Розглянемо типові приклади:

1. Розв’язати квадратне рівняння (є певний алгоритм вирішення таких рівнянь, але учні 7 класу його поки що не знають, тому застосовуємо вміння розкладати многочлен на множники).

;

;

;

;

 А далі це рівняння дуже легко розв’язати.

; ;

; .

2. Знайти значення числового виразу.

Доцільно в даному випадку розкласти чисельник і знаменник на множники, застосувавши формулу різниці квадратів, що значно полегшить обчислення даного числового виразу.

3. При яких значеннях та вираз набуває значення 0?

На перший погляд важко знайти відповідь, але якщо згрупувати даний многочлен так, щоб спростити його, відповідь стане очевидною.

Тепер легко сказати при яких та даний вираз рівний 0.

;

Оскільки і , то вираз буде рівний нулю лише в такому випадку.

 Важливо не підказувати учням, що вираз спочатку потрібно спростити. Саме самостійне виконання таких задач сприяє створенню ситуаційного успіху, формуванню умінь проводити самостійні дослідження.

Існує три основних способи розкладання многочленів на множники, які вивчаються в шкільній програмі 7 класу:

* розкладання многочленів на множники за допомогою способу винесення спільного множника за дужки;
* розкладання многочленів на множники способом групування;
* розкладання многочленів на множники за допомогою формул скороченого множення.

 Далі розглянемо методичні особливості вивчення способів розкладання многочленів на множники.

* + 1. **Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки**

Основною метою вивчення теми: «Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки» є навчити учнів розкладати многочлени згаданим способом, розвивати в учнів культуру математичних записів, виховувати наполегливість.

В першу чергу необхідно сформулювати визначення, що означає розкласти многочлен на множники. Розкласти многочлен на множники означає подати його у вигляді добутку одночлена на многочлен або декількох многочленів [27, с.111].

Наведемо приклад . Далі пропонуємо перемножити многочлен та і впевнитись, що отриманий результат буде рівний . Тобто, вказана вище рівність є тотожність. Отже, вираз дуже легко розкласти на множники. Хоча учні 7 класу ще не знають, як розв’язувати квадратні рівняння, але, знаючи, як розкласти многочлен на множники, зможуть легко знайти розв’язок такого рівняння.

Розкласти многочлени можна декількома способами. Одним з таких способів є розкладання многочленів на множники за допомогою винесення спільного множника за дужки.

Необхідно подати декілька многочленів та разом з учнями розкласти їх на множники.

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

Після того, як розглянули декілька прикладів, можна разом з учнями сформулювати алгоритм розкладання многочленів на множники:

* знайти спільний множник для всіх одночленів, з яких складається заданий многочлен;
* винести спільний множник за дужки, а саме записати многочлен, як добуток одночлена на многочлен або декількох многочленів, використовуючи при цьому розподільну властивість множення.

Розкладання многочленів на множники застосовують не тільки при розв’язування рівнянь, а й при спрощенні виразів, а також обчисленні їх значень, при доведенні подільності виразів та доведенні тотожностей.

1. Розкласти на множники многочлен .

Щоб виконати це завдання, необхідно визначити найбільший спільний дільник коефіцієнтів одночленів даного многочлена. Потім знайти спільну буквену частину для даного многочлена. Для цього потрібно обрати найменший показник для і . Добуток коефіцієнта 4 та буквеного виразу і є спільним множником для нашого виразу.

.

1. Обчислити значення виразу , якщо

Виконуючи це завдання деякі, учні можуть без спрощення виразу одразу приступити до обчислення його значення. Але без застосування обчислювальної техніки це зробити важко. Якщо ж вираз спростити, обчислити значення цього виразу дуже легко. Саме на цьому слід акцентувати увагу дітей.

 при

.

1. Розв’язати рівняння .

Розклавши многочлен на множники легко знайти розв’язки даного рівняння.

;

Добуток двох виразів дорівнює нулю, коли один з цих виразів дорівнює нулю. Тому далі розв’язок рівняння виглядає так.

або ;

 .

1. Спростити вираз .

Виконати це завдання можна двома способами. Перший, розкрити дужки та звести подібні доданки, тобто звести отриманий многочлен до стандартного вигляду.

.

Розв’язуючи завдання цим способом, потрібно дуже уважно розкривати дужки, враховувати знаки коефіцієнтів.

У заданому виразі можна також помітити, що є спільний множник . Доцільно використати другий спосіб, а саме винести спільний множник за дужки та спростити вираз.

.

1. Довести, що значення виразу ділиться на 21.

Це завдання хоч містить в умові не многочлен а числовий вираз, але все таки для його розв’язання також необхідно вміти виносити спільний множник за дужки. Тоді є можливість вираз спростити і побачити, чи ділиться він на 21.

Отже, спростивши числовий вираз стало очевидним, що він ділиться націло на число 21.

* + 1. **Розкладання многочленів на множники способом групування**

 Не всі многочлени можна розкласти на множники способом винесення спільного множника за дужки. Учням одразу пропонується многочлен , який необхідно розкласти на множники. Оскільки їм відомий поки що тільки один спосіб, вони не зможуть виконати таке завдання. Необхідно застосувати інший спосіб, а саме розкласти цей многочлен на множники способом групування. Учням потрібно запропонувати згрупувати члени многочлена так, щоб у них був спільний множник.

 Перший варіант: .

 Далі з кожної групи потрібно винести спільний множник.

 .

 Тепер потрібно застосувати знання отримані раніше, а саме винести спільний множник за дужки і в результаті отримаємо многочлен розкладений на множники.

.

 Другий варіант: .

 В цьому випадку ми згрупували члени многочлена по іншому.

.

 Оскільки учні вже знають переставний закон множення, робимо висновок, що і в першому і в другому варіанті результат отримали однаковий.

 Далі разом з учнями сформулюємо алгоритм розкладання многочленів на множники способом групування:

* спочатку потрібно об’єднати члени многочлена в групи таким чином, щоб можна було винести спільний множник за дужки;
* винести спільний множник за дужки з кожної сформованої групи;
* винести спільний для всіх груп множник.

Розглянемо та проаналізуємо деякі типові вправи, які допоможуть засвоїти дану тему.

1. Винести за дужки спільний множник.

Знаючи переставний закон додавання, учні мають записати даний вираз в іншому вигляді і після чого стане очевидним, як саме необхідно згрупувати члени многочлена.

.

 Щоб учні не допустили помилку при виконанні цього завдання, потрібно наголосити, що при групуванні многочленів перед групою краще одразу поставити коефіцієнт 1.

1. Розкласти на множники многочлен .

Для виконання цього завдання потрібно, щоб учні правильно згрупували члени многочлена та винесли спільний множник з кожної групи.

.

1. Розкласти многочлен на множники.

Це завдання ілюструє випадок, що не завжди доцільно групувати по два члени многочлена, а в деяких випадках по три і навіть більше.

.

1. Розв’язати рівняння .

Учні в 7 класі ще не знають як розв’язувати квадратні рівняння, але можна розв’язати дане, якщо многочлен розкласти на множники, застосувавши спосіб винесення спільного множника за дужки. Учні одразу можуть не зрозуміти, як саме це зробити, оскільки маємо три члена многочлена і не зрозуміло, як їх згрупувати. Але, якщо учням запропонувати один член записати як суму або різницю одночленів того ж самого степеня, тоді отримаємо чотири члени і зможемо їх згрупувати. Залишилось тільки з’ясувати який член і в якому вигляді записати. Пропонуємо такий варіант.

;

;

;

 Після цього знайдемо розв’язки цього рівняння.

 ; ;

 . .

1. Обчислити значення виразу найзручнішим способом.

Для обчислення значення числового виразу, також необхідно застосовувати спосіб групування. Якщо спробувати виконати обчислення без спрощення виразу, то усно зробити це буде важко.

.

* + 1. **Розкладання многочленів на множники із застосуванням формул скороченого множення**

Вперше з формулами скороченого множення учні зустрічаються в 7 класі, коли вивчають розклад многочленів на множники. Але використовувати їх вони будуть і в старших класах. Спершу потрібно пояснити учням, що існує багато многочленів, які за допомогою способу винесення спільного множника за дужки та групування розкласти на множники не можливо або незручно. В такому випадку можливе застосування формул скороченого множення.

Розглянемо по черзі формули, які вивчаються в шкільній програмі.

1. Перша група формул – квадрат суми або різниці двох виразів.

Спочатку потрібно вивести формулу. Пропонуємо учням знайти добуток двох многочленів та . Учні з легкістю виконають це завдання, оскільки раніше вже вивчали дії з многочленами.

.

Якщо подати у вигляді степеня добуток , отримаємо формулу:

 (6.3.1)

 Це і є формула квадрата суми двох виразів. Важливо щоб учні вміли правильно її читати. Квадрат суми двох виразів дорівнює сумі квадрату першого виразу подвоєного добутку першого та другого виразу та квадрату другого виразу.

Аналогічно можемо вивести формулу квадрату різниці двох виразів. Тобто, знайдемо добуток двох многочленів та .

Отже, отримаємо другу формулу: квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрат першого виразу мінус подвоєний добуток двох виразів та плюс квадрат другого виразу.

 (6.3.2)

Це загальні формули, але якщо замість та підставити будь-який одночлен або, навіть, многочлен ми зможемо також застосовувати ці формули.

Якщо в 7 класі ще не вивчають квадратні рівняння, то в 8 класі при розв’язуванні квадратних рівнянь цілком можливо використовувати формули скороченого множення, зокрема квадрат суми або різниці двох виразів.

Розв’язати рівняння .

Учні 8 класу розв’яжуть дане рівняння застосовуючи формули коренів квадратного рівняння, але його можна розв’язати іншим способом, а саме:

;

;

;

;

.

2. Наступна формула скороченого множення, яку вивчають у 7 класі є формула різниці квадратів двох виразів.

Важливо дати зрозуміти учням те, що є ряд інших формул, які ми також можемо вивести і далі застосовувати для спрощення многочленів.

Виконавши множення

,отримуємо ще одну формулу:

 (6.3.3)

Важливо, на нашу думку, навчити учнів читати формули. Зокрема, для даної: різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їх суму.

Доцільно наголосити, що замість та можна підставляти будь-які одночлени і многочлени.

Знайдемо розв’язок рівняння .

Легко помітити, що задано квадратне рівняння, яке в 7 класі учні ще не вміють розв’язувати, оскільки тема квадратних рівнянь вивчається в 8 класі. Проте, розв’язати його можна двома способами:

Перший спосіб:

;

;

;

; .

Розв’язати рівняння таким способом буде під силу учням 7 і 8 класу. Цей спосіб є значно простішим за інший.

Другий спосіб:

;

;

;

;

;

;

.

Таким способом рівняння учні зможуть розв’язати лише з 8 класу.

3. Наступна група формул, які вивчаються в 7 класі – сума й різниця кубів.

Вивчивши декілька формул скороченого множення, впевнившись, що їх застосування значно спрощує розв’язання задач, пропонуються формули суми та різниці кубів.

Для їх вивчення можна запропонувати перемножити два многочлени, а саме та

. Таким чином, отримали формулу суми кубів двох виразів:

 (6.3.4)

Многочлен , який називається квадратом різниці двох виразів дуже схожий на многочлен . Але вираз не містить коефіцієнта при одночлену . Саме тому такий вираз називають неповний квадрат різниці двох виразів та . Отже, сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів та неповного квадрату їх різниці.

Аналогічно, перемноживши многочлени та ,

, отримуємо формулу різниця кубів двох виразів:

 (6.3.5)

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та неповного квадрату суми двох виразів.

Для поглибленого вивчення формул скороченого множення, можливо на факультативних заняттях з метою розширення знань учнів розглянути формули для розкладання на множники виразів та .

Спочатку розглянемо вираз . Ми вже знаємо як розкласти на множники вираз . Спробуємо розкласти на множники вирах .

Вчитель може запропонувати розкласти цей многочлен, застосувавши тільки ті знання, які учні вже здобули.

Спочатку представимо вираз у вигляді різниці квадратів двох виразів, а саме . Далі застосовуємо формулу скороченого множення, щоб розписати даний вираз та певним чином його спростити.

.

Можливо на цьому етапі учні можуть помітити деяку закономірність, але щоб повністю впевнитись, що ця закономірність існує припустимо, що можна розкласти на множники таким чином.

.

Щоб перевірити, чи це припущення є правильним, потрібно з правої частини виразу помножити многочлени та спростити отриманий вираз. Після цього показати, що він тотожний лівій частині.

.

Отже, закономірність справді виконується і можна записати формулу в загальному вигляді.

 (6.3.6)

 Оскільки учні впевнились, що припущення було зроблено правильно і формула виведена для виразу , можна по аналогії записати формулу скороченого множення для виразу .

 (6.3.7)

* + 1. **Застосування різних способів розкладання многочленів на множники**

Ознайомивши учнів з різними способами розкладання многочленів на множники, важливо розглянути задачі, де необхідно застосувати декілька способів одночасно. Наведемо приклад. Необхідно розкласти многочлен на множники. Разом з учнями поміркуємо, що потрібно зробити. Спочатку, очевидно, потрібно винести спільний множник за дужки.

.

Але на цьому розклад многочлена на множники не закінчено. Далі помічаємо, що в дужках можна застосуватиформулу скороченого множення, а саме різниця квадратів двох виразів.

.

Якщо отримані многочлени-множники не розкладаються над полем дійсних чисел, то вважаємо, що розклад даного многочлена на множники завершено.

Учням спочатку може бути складно одразу зрозуміти, які саме і в якій послідовності способи розкладання многочленів на множники потрібно застосувати до конкретних многочленів.

Розглянемо ще декілька прикладів, після розв’язання яких спробуємо сформулювати деякий алгоритм дій при розкладанні многочленів на множники.

Розкласти на множники многочлени:

1)

Спочатку потрібно винести спільний множник за дужки.

 В дужках застосуємо формулу скороченого множення – різниця квадратів двох виразів.

.

2)

Помічаємо, що вираз - це повний квадрат різниці двох виразів, тому можемо спробувати застосувати формулу скороченого множення.

 .

Тепер можна застосувати ще раз формулу скороченого множення – різниця квадратів двох виразів.

.

3)

Спочатку застосуємо формулу скороченого множення до .

.

Далі застосуємо спосіб групування.

.

4)

Спочатку згрупуємо перші два члени многочлена та винесемо спільний множник за дужки.

.

Згрупуємо два інших члени многочлена та винесемо коефіцієнт за дужки.

 .

Тепер можна винести спільний множник за дужки.

.

Розглянувши приклади, в яких застосовували декілька способів розкладання многочленів на множники, робимо висновок, що доцільно буде використовувати такий алгоритм-аналіз відомих методів:

* якщо можливо, винести спільний множник за дужки;
* спробувати застосувати формули скороченого множення;
* якщо формули скороченого множення застосувати неможливо, застосовуємо спосіб групування.
	1. **Висновки до розділу І**

У розділі І розкрито методичні особливості вивчення теми «Многочлени» у шкільному курсі алгебри. Проведено аналіз підручників для 7 касу, в яких є матеріал по даній темі. Акцентована увага на тому, в яких підручниках задачі запропоновані переважно по рівнях та містять завдання з зірочками. Вказано також, в яких підручниках відсутній матеріал з окремих питань чи понять. Найбільш вдалим підручником, на нашу думку, є підручник з алгебри авторів Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.

Також описані методичні особливості вивчення дій з многочленами. В шкільному курсі математики 7 класу учні вивчають дії з многочленами: додавання, віднімання, множення. Дію ділення програма не передбачає. У першому розділі мною було подано методичні особливості її пояснення. Це питання можна виносити на факультативні та додаткові заняття.

У роботі запропоновано до розгляду такі поняття як тотожність та тотожні перетворення. Ця тема є дуже важливою, оскільки при неправильному розумінні цих понять учні можуть допускати помилки при виконанні певних дій. В роботі представлено та проаналізовано деякі помилки, які можуть допустити учні при здійсненні тотожних перетворень. Поданий матеріал проілюстровано на прикладах.

Наголошено, що зведення многочленів до стандартного вигляду є питання не менш важливе. Адже, вміння правильно записати многочлен в стандартному вигляді привчає учнів, зокрема, до акуратності записів.

В роботі повністю розглянуто методи розкладання многочленів на множники: способом винесення спільного множника за дужки, способом групування, за допомогою формул скороченого множення, а також із застосуванням комбінації різних способів. Наведено приклади.

При написанні першого розділу виникли деякі труднощі, пов’язані з пошуком методичного матеріалу саме по темі многочлени. В підручниках з методики матеріалу було не достатньо. При написанні роботи було використано статті методичних журналів.

**РОЗДІЛ ІІ. ФОРМУВАННЯ НАУКОВО-ДОСЛІДНИЦЬКИХ ВМІНЬ ШКОЛЯРІВ**

* 1. **Організація науково-дослідницької роботи учнів**

Навчаючись у школі учні опановують багато предметів. Математика є одним із складніших, але цей предмет відіграє дуже важливу роль у розвитку логічного мислення та творчого підходу до розв’язання ряду задач. На сучасному етапі вчитель має за мету не тільки навчити дітей базовим знанням, але й дати додаткові знання, які б допомогли учням творчо та нестандартно підійти до розв’язування задач.

 Сформувати науково-дослідницькі вміння в учнів справа нелегка. Головними завданнями вчителя є поступове та методичне формування дослідницьких навичок; контроль над виконанням науково-дослідницьких робіт; аналіз допущених помилок та їх виправлення. Вчителю необхідно заохочувати учнів до такої діяльності мотивуючись тим, що в подальшому її можливо застосувати.

**Можна виділити три основні напрямки науково-дослідницької роботи:**

* розвиток наукового мислення школяра (в такій діяльності повинні бути охоплені майже всі учні та ті діти, які мають здібності повинні отримувати відповідні завдання; для сильних класів можуть бути проведені нестандартні уроки);
* позакласна діяльність учнів, а саме участь у роботі наукових гуртків, олімпіадах , конкурсах тощо (в цій діяльності беруть участь учні, які цього бажають та мають здібності; вчитель повинен розробити методику для поглибленого вивчення окремих тем, які є актуальними для олімпіад, конкурсів, наукових гуртків);
* самостійний напрямок наукової діяльності учнів (в цьому напрямку учні беруть участь в МАН; в цьому напрямку вчитель допомагає учню в дослідженні певної теми, але загалом цей вид діяльності є найвищою індивідуальною науковою діяльністю учнів).

 Першим кроком вчителя повинно бути вивчення пізнавальних інтересів учнів. Потім потрібно обрати напрямок дослідження. Головне щоб учню було цікаво займатися саме в цьому напрямку, оскільки нав’язаний напрям учню не дасть позитивний результат виконання такої роботи. Дуже важливо, щоб учень мав стійкий інтерес до теми та бажав розкрити її по новому.

 Вчителю потрібно навчити учнів методиці дослідження, а також надавати консультації в процесі виконання роботи.

 Науково-дослідницька робота, в першу чергу, допомагає школярам систематизувати отримані знання. Також навчає учнів збирати, аналізувати та систематизувати інформацію, яку вони отримують з багатьох літературних джерел. В кінці учень робить висновки, пропозиції та дає рекомендації. Всі ці вміння в майбутньому дуже допоможуть учням, коли вони будуть навчатись у вищих навчальних закладах.

Далі в моїй роботі я розгляну методичні особливості деяких нових для учнів тем з розділу «Многочлени», що можуть спонукати їх в подальшому брати участь в МАН, а також в олімпіадах та конкурсах. Також розгляну нестандартні задачі та вправи з послідовним поясненням їх розв’язання.

* 1. **Нові поняття для учнів з теми «Многочлени»**

Аналізуючи підручники, в яких викладено матеріал, що стосується многочленів ми зазначили, що у 10 та 11 класі тема многочлени вивчається лише в класах з поглибленим вивченням математики. Рівень стандарту не передбачає вивчення многочленів у 10 класі. Основною проблемою школи є те, що не вистачає годин при вивченні математики на розгляд таких тем, як теорема Безу та наслідки з неї, схема Горнера, ділення многочлена на многочлена з остачею, розкладання многочлена на множники за допомогою методу невизначених коефіцієнтів та багато інших тем. Розгляд даних питань є важливим, оскільки можуть зацікавити учнів займатися в даному напрямі науково-дослідницькою роботою. Оскільки програма не передбачає детального вивчення цих питань, необхідно їх виносити на факультативні та додаткові заняття.

Введемо деякі нові поняття для учнів. Вони вже знають, що таке многочлен. Існує таке поняття як канонічний вид многочлена і має загальний вигляд такий:

, (2.1)

де – коефіцієнти многочлена,

– змінна.

Розглянемо такі випадки:

* якщо , тоді – степінь многочлена, – старший коефіцієнт многочлена;
* якщо всі коефіцієнти многочлена рівні нулю, такий многочлен називається нульовим і записується так . Степінь такого многочлена не визначений.

Школярі вже знають, що таке сума, різниця та добуток многочленів. Тепер сформулюємо такі теореми, в яких показано зв’язок степеня многочлена з виконанням дій над ними.

Теорема 1. Нехай степінь многочлена дорівнює , степінь многочлена дорівнює . Тоді степінь многочлена добутку дорівнює [17, с.3].

Теорема 2. Нехай степінь многочлена дорівнює , степінь многочлена дорівнює . Тоді:

1) Якщо , то степінь многочлена не перевищує ;

2)Якщо , то степінь многочлена дорівнює [17, с.3].

Теорема 3. Вільний член многочлена рівний , а сума коефіцієнтів рівна [17, с.4].

Теорема 4. Нехай – многочлен з цілими коефіцієнтами. Якщо , тоді ділиться на [17, с.4].

Виконуючи операції додавання та множення многочленів використовуємо комутативний, асоціативний та дистрибутивний закони:

* комутативний або переставний закон:

 ;

 ;

* асоціативний або сполучний закон:

;

 ;

* дистрибутивний або розподільний закон:

.

Ці закони вже відомі учням, але в даному випадку ми навчились їх записувати за допомогою символів, які ввели на даному етапі.

Ще є таке поняття, як **зведений многочлен**. Учням потрібно пояснити, що зведеним називається многочлен, старший коефіцієнт якого дорівнює 1.

Отже, ми розглянули основні нові поняття для учнів, які допоможуть у розв’язанні нових нестандартних задач. Розглянемо деякі із них.

1. Нехай – многочлен із цілими коефіцієнтами та . Чи є число 2 коренем цього рівняння?

Розв’язання: За теоремою 4, . Ми припускаємо, що 2 це корінь многочлена , тоді , тоді зрозуміло, що , а . Отже ми довели, що число 2 є коренем многочлена .

2. Знайти будь-який зведений многочлен четвертого степеня , такий, що , , , .

Розв’язання: Розглянемо многочлен , тоді

,

,

,

.

 Тобто числа 1, 2, 3, 4 є коренями многочлену . З умови відомо, що многочлен – це многочлен четвертого степеня. Тоді многочлен – це також многочлен четвертого степеня. Многочлен – зведений, тоді многочлен також зведений. Корені многочлена відомі, тоді можемо записати . Шуканий многочлен буде виглядати так: . Виконавши тотожні перетворення даного многочлена отримаємо шуканий многочлен.

.

3. Знайти суму коефіцієнтів при парних степенях многочлена .

Розв’язання: Спочатку запишемо многочлен в канонічному вигляді: . З умови бачимо що в нас многочлен 6000 степеня. Згідно теореми 3 маємо та . Старший член многочлену має степінь 6000, а отже є парним. Тоді запишемо в такому вигляді. . Далі знайдемо суму .

. Бачимо, що отримали подвоєну суму парних коефіцієнтів. Залишилось знайти половину цього результату. Тепер обчислимо це саме на нашому прикладі.

,

.

Тепер знайдемо суму коефіцієнтів при парних степенях многочлена :

.

3. Знайти суму коефіцієнтів при непарних степенях многочлена .

 Розв’язання: В цьому завданні на відміну від попереднього необхідно знайти суму коефіцієнтів при непарних степенях. Старший член многочлена має степінь 100, тобто він парний. Далі міркуємо як і в попередньому прикладі. Спочатку знайдемо суму всіх коефіцієнтів, тобто обчислимо . Потім знайдемо . Тепер залишилось вияснити як знайти суму коефіцієнтів, що знаходяться при непарних степенях. Спробуємо знайти різницю та .

 .

 .

 . Отже бачимо, що ми знайшли подвоєну суму коефіцієнтів, що знаходяться при непарних степенях. Отже треба знайти .

,

Залишилось тільки знайти .

.

* 1. **Теорема Безу та наслідки з неї. Схема Горнера, особливості її застосування**

**Теорема Безу** стверджує, що остача від ділення многочлена на двочлен дорівнює значенню цього многочлена при , тобто [39, с.8].

Знаючи цю теореми учні зможуть з легкість знайти остачу від ділення многочлена на двочлен не виконуючи дію ділення.

Виходячи з теореми Безу можна сформулювати такі наслідки, які допоможуть у розв’язанні багатьох задач:

Наслідок 1. Многочлен ділиться на тоді і тільки тоді, коли число є коренем многочлена [39, с.9].

Наслідок 2. Якщо – різні корені многочлена , то , де – деякий многочлен [39, с.9].

Наслідок 3. Ненульовий многочлен – го степеня не може мати більше коренів. Якщо многочлен має більше – різних коренів, то він нульовий [17, с.13].

Це основні поняття якими повинен володіти учень, щоб розв’язувати ряд задач. Деякі задачі розглянемо зараз.

1. Знайти остачу від ділення многочлена на .

Розв’язання: І спосіб розв’язання цього завдання – розділити многочлен на двочлен та знайти остачу від ділення. Цей варіант займає більше часу, ніж, якщо застосувати ІІ варіант.

ІІ спосіб: згідно теореми Безу знайдемо остачу від ділення.

.

2. При яких значеннях і многочлен є квадратом деякого іншого многочлена?

Розв’язання. Нехай, , де – деякий многочлен. Степінь многочлена дорівнює 4, степінь многочлена дорівнює 2, тоді буде мати вигляд , тоді .

Ці многочлени будуть рівними тоді і тільки тоді, коли їх коефіцієнти при однакових степенях рівні.

Відповідь: якщо ; або ; , тоді многочлен є квадратом деякого іншого многочлена.

3. Не виконуючи ділення, перевірити чи ділиться націло многочлен , де на многочлен .

Розв’язання: многочлен розкладемо на множники способом винесення спільного множника за дужки. . Корені цього многочлена та . За теоремою Безу знайдемо та .

.

Оскільки степінь завжди парний при тоді .

.

Оскільки і , це означає що многочлен ділиться націло на та . Отже, многочлен ділиться націло і на .

Таким чином показуємо учням, що на перший погляд такі складні задачі можна з легкістю розв’язати застосовуючи теорему Безу.

4. Остача від ділення на та відповідно дорівнює та . Знайти остачу від ділення многочлена на .

Цю задачу можливо розв’язати двома способами.

Розв’язання І способом:

За теоремою Безу та з умови відомо, що , .

Нехай остача від ділення многочлена на дорівнює , а частку позначимо . Отже, можемо здійснити такий запис.

*.* Тепер, якщо в цей вираз підставити , , отримаємо систему рівнянь, яку дуже легко розв’язати.

Отже, остача від ділення многочлена на дорівнює .

Розв’язання ІІ способом.

Нехай многочлен . Тепер знайдемо та та отримаємо систему рівнянь.

Тепер можемо записати многочлен . Залишилось знайти остачу від ділення на .

. Щоб знайти залишок від ділення на потрібно обчислити (два многочлена мають однаковий степінь і коефіцієнт при старшому степені 1). .

5. Знайти остачу від ділення многочлена +1 на многочлен .

Розв’язання: Оскільки дільник степеня 2, то остача повинна бути такого виду . Неповну часту позначимо . Отже, можемо записати .

.

Підставимо в отриманий вираз та і отримаємо систему рівнянь.

Отже, остача від ділення многочлена на многочлен це двочлен .

Щоб розділити деякий многочлен на двочлен можна застосувати **схему Горнера**, яка реалізує ефективний алгоритм виконання дії ділення. Тобто, це деякий алгоритм ділення многочленів.

Щоб застосувати схему Горнера необхідно побудувати таблицю з двох рядків та стовпців. Починаючи з другого стовпчика першого рядка потрібно записати коефіцієнти многочлена (діленого). У другому рядку в першому стовпчику записуємо , а далі заповнюємо все згідно формул.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   |  |  | … |  |  |
|  |  |  | … |  |  |

Коли заповнимо таблицю, отримаємо коефіцієнти частки та остачу . Якщо , тоді многочлен ділиться на двочлен націло.

Розглянемо на конкретному прикладі застосування схеми Горнера.

1. Поділити многочлен на двочлен .

Розв’язання: застосуємо схему Горнера.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

 З таблички бачимо, що отримали неповну частку та остачу .

Тепер час розглянути деякі задачі, для розв’язання яких потрібне застосування схеми Горнера.

7. При яких значеннях остача від ділення многочлена на двочлен дорівнює .

Розв’язання: для розв’язання цієї задачі можна застосувати як схему Горнера так і теорему Безу.

І спосіб: Застосуємо схему Горнера.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

 ;

 .

 Отже, при , остача від ділення многочлена на дорівнює .

 ІІ спосіб: застосуємо теорему Безу.

 За теоремою , а отже , звідси . Отримали ту саму відповідь, але значно швидше і простіше.

8. Довести, що ділиться на при будь-яких і .

Розв’язання:

 І спосіб: За теоремою Безу .

 Очевидно, що всі члени отриманого многочлена взаємознищуються і в результаті отримуємо нуль. А тому які б не були і многочлен завжди ділиться на .

 ІІ спосіб: Тепер спробуємо довести те саме застосувавши схему Горнера.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |   |   |

 З таблиці бачимо, що навіть маючи невідомі і залишок .

 Застосовуючи схему Горнера в даному випадку учні повинні згадати формули скороченого множення і щоб не виконувати лишніх дій, застосувати одну з них. Головне, щоб учні помітили де саме і яку формулу необхідно застосувати.

 9. Розкласти на множники многочлен за допомогою схеми Горнера.

Розв’язання: для початку учням необхідно пояснити, що потрібно знайти корені многочлена, які знаходяться серед дільників вільного члена. В даному випадку дільниками вільного члена є ; ; ; ; ; . Слід перевірити які дільники є коренями даного многочлена. Обов’язково наголошуємо, що потрібно перевіряти дільники зі знаком «+» та «-». В іншому випадку можлива втрата кореня. В нашому випадку коренями даного многочлена є число 1. Далі нам потрібно многочлен поділити на двочлен .

Для цього застосуємо схему Горнера.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

 Отже, нам вдалось розкласти многочлен на множники таким чином.

 .

 Розглянемо многочлен . Аналогічно можемо знайти дільники вільного члена, та розкласти многочлен на множники. Дільники вільного члена: ; ; ; ; ; . Коренем цього многочлена є число .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Многочлен розкладається на множники таким чином:

Далі помічаємо, що вираз над полем дійсних чисел на множники не розкладається. Отже остаточно многочлен розкладається на множники так. .

* 1. **Метод невизначених коефіцієнтів при розкладанні многочлена на множники**

Метод невизначених коефіцієнтів дуже цікавий тим, що особливих нових знань для його застосування учням не потрібно. Лише застосувавши вже відомі знання та деякі міркування можна розв’язувати безліч задач. Головна ідея цього методу полягає у визначенні тотожності двох многочленів.

Наприклад, пропонуємо учням розглянути два многочлени загальний вигляд яких такий:

; (4.1)

. (4.2)

Разом з учнями поміркуємо, коли ці два многочлени будуть рівними.

Многочлени та будуть рівними тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях будуть рівними, а саме:

 (4.3)

 Даний метод доцільно застосовувати при розкладанні многочлена на множники (ділення многочлена на многочлен або ділення многочлена на двочлен, а також при розв’язуванні рівнянь третього степеня та вище.

 При розкладанні многочлена на множники необхідно пам’ятати, що:

* при розкладанні многочлена третього степеня на множники, в результаті отримаємо добуток двочлена та квадратного тричлена;
* при розкладанні многочлена четвертого степеня на множники, в результаті отримаємо добуток двох квадратних тричленів.

Розглянемо деякі задачі, в яких як варіант можливо застосувати метод невизначених коефіцієнтів.

1. Розв’язати кубічне рівняння методом невизначених коефіцієнтів, якщо відомо, що його корені – цілі числа.

Розв’язання: спробуємо розкласти многочлен на множники, після чого зможемо знайти розв’язки даного рівняння.

Оскільки ми ще не знаємо на які два множники розкладеться наш многочлен, але розуміємо їх загальний вигляд, то припустимо, що:

.

 Далі розкриємо дужки та зведемо подібні доданки.

*.*

Отже, маємо:

.

Залишилось прирівняти коефіцієнти при однакових степенях та розв’язати систему рівнянь.

Розв’яжемо систему в цілих числах, для цього розглянемо останнє рівняння і припустимо, що , , тоді .

Отже, .

Спочатку необхідно перевірити чи правильно ми розклали на множники многочлен, бо якщо допущена помилка, отримаємо хибний результат.

Перевірку можна виконати декількома способами.

І спосіб – перемножити ліву частину виразу та впевнитись що вона рівна правій частині.

.

Після цієї перевірки можна з впевненість сказати, що многочлен ми розклали правильно.

ІІ спосіб – для перевірки застосуємо схему Горнера та теорему Безу, при цьому ми з легкість можемо перевірити, що перший множник є дійсно його множником.

Згідно теореми Безу: . Отже, многочлен ділиться на двочлен без остачі.

Далі за схемою Горнера можемо знайти другий множник.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

 – результат отримали такий самий як і в першому способі.

Тепер залишилось лише розв’язати рівняння .

Многочлен можемо розкласти способом групування або якщо дане рівняння розв’язують учні 10 класу, то можна застосувати теорему Вієта.

.

;

;

1. Розділити многочлен на двочлен .

Розв’язання: з умови невідомо націло чи з остачею ділиться многочлен на двочлен . Тому многочлен можна записати в такому вигляді:

*.*

Тепер в правій частині виразу розкриємо дужки та зведемо подібні доданки.

*.*

.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях та розв’яжемо систему рівнянь.

Звідси маємо, .

Отже, при діленні многочлена на двочлен отримаємо частку .

3. Методом невизначених коефіцієнтів знайти частку та остачу від ділення многочлена на многочлена .

Розв’язання:

Нехай – неповна частка, а – остача.

Тепер можемо записати таку рівність:

.

Все що потрібно зробити – розкрити дужки в правій частині, звести подібні доданки та прирівняти коефіцієнти при однакових степенях .

*.*

.

 Підставимо знайдені значення в задану рівність і отримаємо:

.

Отже, частка від ділення многочлена на многочлен , остача .

* 1. **Методика знаходження раціональних коренів многочлена**

При знаходженні коренів многочлена, не завжди вдається знайти цілі розв’язки. Може бути така ситуація, коли корені многочлена – раціональні числа. Постає питання як знайти раціональні корені многочлена.

Нехай ми маємо многочлен з цілими коефіцієнтами, загальний вигляд якого . Припустимо, що – раціональний ненульовий корінь многочлена. При цьому дріб – нескоротний. Тоді – дільник старшого коефіцієнта , – дільник вільного члена [17, с.20].

Якщо маємо зведений многочлен , що має цілі коефіцієнти, тоді .

Тобто, робимо висновок, що зведений многочлен із цілими коефіцієнтами не може мати раціональних коренів.

Щоб знайти раціональні корені многочлена, потрібно перебрати всі можливі значення дробів. Чисельником цих дробів є дільники вільного члена, а знаменник – дільники старшого коефіцієнта. Розглянемо приклади, в яких необхідно знайти раціональні корені рівняння.

1. Знайти раціональні корені рівняння .

Розв’язання: дільники вільного члена: , дільники старшого коефіцієнта: ; . Тоді раціональні корені рівняння потрібно шукати серед чисел ; . Перевірити, яке саме число є коренем многочлена можна за допомогою декількох способів. Розглянемо іх по черзі.

1-й спосіб. Підставимо по черзі числа в вихідне рівняння і переконаємось чи виконується рівність. Якщо вона виконується, це і є розв’язок рівняння.

.

 – не є коренем рівняння.

.

 – корінь рівняння.

2-й спосіб. Для знаходження раціональних коренів рівняння можемо застосувати теорему Безу. Ми вже знаємо, що деяке число є коренем многочлена, якщо . Залишилось лише перевірити це на практиці.

.

Отже, – не є коренем рівняння.

.

 – є коренем рівняння.

3-й спосіб. Щоб знайти раціональні корені рівняння ще можна застосувати схему Горнера. При цьому ми не тільки вияснимо які раціональні числа є коренями даного рівняння, а й зможемо одночасно многочлен розкласти на множники.

Для маємо.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

В даному випадку ми бачимо, що число не є коренем рівняння, оскільки з таблиці видно, що є залишок .

Для маємо.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Отже, – є коренем рівняння, при чому ліва частина рівняння розкладається на множники і ми одразу можемо побачити, які вони.

;

;

Тепер ми бачимо, що у виразі є спільний множник і його можна винести за дужки.

;

Останнім кроком у вирішенні даного завдання є визначити чи нема раціональних коренів у виразі . Ми вже знаємо, що зведений многочлен із цілими коефіцієнтами не може мати раціональних коренів.

Отже, робимо висновок, що рівняння має лише один раціональний корінь .

1. Знайти раціональні корені рівняння .

Розв’язання: дільники вільного члена: , дільники старшого коефіцієнта: ; . Раціональні корені рівняння потрібно шукати серед чисел , , , .

Розглянувши попередню вправу, ми переконались, що в даному випадку доцільніше використовувати схему Горнера для знаходження раціональних коренів.

Для .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Висновок не є раціональним коренем рівняння.

Для .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Висновок також не є раціональним коренем рівняння.

Для .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Висновок є раціональним коренем рівняння.

Для .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Отже, не є раціональним коренем рівняння.

Після того, як ми знайшли один раціональний розв’язок рівняння можна записати в такому вигляді . Винесемо спільний множник за дужки і маємо . – це зведений многочлен з цілими коефіцієнтами, а тому не має раціональних коренів.

Отже, рівняння має лише один раціональний корінь .

* 1. **Поняття найбільшого спільного дільника многочленів та алгоритм Евкліда**

Для початку необхідно розібратись, що називається спільним дільником декількох многочленів. Спільний дільник многочленів – це такий многочлен, на який ділиться кожен з многочленів. Але існує ще таке поняття, як найбільший спільний дільник.

Наприклад, маємо деякі два многочлени та . Необхідно зрозуміти, який многочлен для них буде найбільшим спільним дільником. Це деякий многочлен найбільшого степеня, на який одночасно діляться многочлени та . Найбільший спільний дільник будемо позначати .

Розглянемо деякий приклад для того, щоб зрозуміти чи однозначно визначається найбільший спільний дільник.

1. Маємо многочлени та . Визначити найбільший спільний дільник. Зробимо це таким способом. Розкладемо обидва многочлени на множники і після цього визначимо найбільший спільний дільник.

Розв’язання: многочлен можна розкласти на множники декількома способами. Можемо застосувати спосіб групування.

.

Многочлен розкладемо на множники застосувавши формулу скороченого множення, а саме різниця квадратів двох виразів.

.

Очевидно, що .

Поміркуємо ще трохи. Якщо взяти многочлен . Виходячи з означення найбільшого спільного дільника ми бачимо, що також . Аналогічно також .

В такому випадку варто найбільший спільний дільник обирати таким чином, що старший коефіцієнт його дорівнював одиниці.

Тепер з’ясуємо яким же чином необхідно знаходити найбільший спільний дільник многочленів. Це можна зробити двома способами. Перший із них ми вже розглянули, а саме кожен многочлен можна розкласти на множники, але на такі, що не зводяться, після цього легко визначити найбільший спільний дільник. Але якщо потрібно знайти найбільший спільний дільник многочленів, які швидко розкласти на множники не вдається, можна застосувати інший варіант.

Другий спосіб знаходження найбільшого спільного дільника многочленів за *алгоритмом Евкліда.* Розберемось у процесі знаходження найбільшого спільного дільника за алгоритмом Евкліда.

1. нехай – степінь многочлена , а – степінь многочлена , тоді необхідно щоб ;
2. поділимо многочлен на многочлен і отримаємо деяку остачу ;
3. поділимо многочлен на остачу та отримаємо остачу ;
4. поділимо остачу на остачу і отримаємо остачу ;
5. повторюємо даний алгоритм до тих пір поки на деякому кроці при діленні отримаємо 0;
6. отже, останній дільник і є найбільший спільний дільник многочленів та .

Взагалі теорія може здаватись не дуже зрозумілою на перший погляд, тому необхідно теоретичний матеріал закріпити на практиці. Розглянемо деякі приклади на знаходження найбільшого спільного дільника многочленів.

2. Знайти .

,

.

Розв’язання: застосуємо алгоритм Евкліда.

Перим кроком є ділення многочлена с на .

|  |
| --- |
|  |
|  |

\_

 Отримали залишок . Винесемо спільний множник за дужки та далі будемо здійснювати наступну операцію з многочленом . Найбільший спільний дільник в такому разі не зміниться.

Наступним кроком буде розділити многочлен на залишок .

|  |
| --- |
|  |
|  |

\_

 Найбільший спільний дільник це останній дільник, а саме .

1. Знайти .

,

.

 Розв’язання: перший крок – розділити многочлен на .

|  |
| --- |
|  |
|  |

\_

Отримали залишок .

 Тепер многочлен поділимо на залишок .

|  |
| --- |
|  |
|  |

\_

 На цьому кроці ми також отримали залишок . Це означає, що алгоритм необхідно продовжити. Поділимо на . Далі після проведення операції бачимо, що залишок від ділення нуль.

 Отже, .

|  |
| --- |
|  |
|  |

\_

 Алгоритм Евкліда, це спосіб швидко і легко знайти найбільший спільний дільник многочленів.

* 1. **Поняття кратності коренів многочлена та формули Вієта**

Розглянемо поняття кратності кореня многочлена. Для того, щоб зрозуміти суть цього поняття, розглянемо такий приклад. Маємо многочлен . Знайдемо корені даного многочлена. Нам необхідно розкласти многочлен на множники. В даному випадку це можна зробити за допомогою схеми Горнера. Визначимо всі дільники вільного члена: ; ; . Підставивши ці дільники до заданого многочлена знайдемо, що коренями є ; . Далі розкладемо многочлен на множники.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Вихідний многочлен розкладається на множник таким чином: .

Очевидно, що коренями даного многочлена є числа та двічі число . Тобто число – це двократний корінь. Корінь кратності один називається простим. В нашому випадку простий корінь .

Ми розглянули приклад, а зараз спробуємо сформулювати теоретичну частину.

Якщо деяке число є коренем многочлена , тобто за теоремою Безу , то можемо зробити висновок, що многочлен ділиться на двочлен . Але може виникнути така ситуація, що многочлен ділиться не тільки на , а і на . Тобто, може знайтися таке натуральне число , що многочлен ділиться націло на , але не ділиться на .

Все, що ми описали словами можна записати математично так: , де – деякий многочлен.

Розглянемо деякі вправи на знаходження кратності коренів многочлена.

1. Знайти усі кратні корені многочлена .

Розв’язання: знайдемо всі дільники вільного члена: ; ; ; . Далі використовуючи теорему Безу, визначимо корені многочлена.

 ;

 ;

 ;

 ;

 ;

 ;

 ;

 .

Отже, коренями многочлена є та . Перевіримо, якої кратності знайдені корені. Будемо застосовувати схему Горнера.

Для .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Отже, маємо , де .

Перевіримо чи є число коренем многочлена .

.

Число є коренем многочлена .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

, де .

Перевіримо чи є число коренем многочлена .

.

Робимо висновок, що не э коренем многочлена , тоді перевіримо чи є число коренем многочлена .

.

Число є коренем многочлена .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

, де .

Перевіримо чи є число 2 коренем многочлена .

.

Число 2 є коренем многочлена .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

, де .

Отже, .

 – двократний корінь; – трикратний корінь.

2. Знайдіть значення і , при яких є коренем кратності многочлена .

Розв’язання:

Для розв’язання цієї вправи доцільно застосувати схему Горнера.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Нам необхідно знайти корінь кратності . Тому справедливою буде система рівнянь.

При та є коренем кратності многочлена .

Розглянемо **теорему Вієта**. Припустимо, що та – це корені многочлена . Тоді справедливі такі формули Вієта: ; .

Ми можемо перевірити чи дійсно це так. Якщо ми припустимо, що та – це корені многочлена , тоді за наслідком з теореми Безу маємо:

.

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, маємо ; . Що і треба було довести.

В такому випадку буде справедливою і обернена теорема Вієта.

Якщо ми маємо деякі числа та і виконується співвідношення ; , тоді і є коренями многочлена .

Але співвідношення ; справедливі тільки для зведених многочленів.

Якщо квадратний тричлен має два корені, тоді можемо визначити коли обидва корені будуть додатними, та коли вони будуть від’ємними:

* корені будуть додатними тоді і тільки тоді, коли , ;
* корені будуть від’ємними тоді і тільки тоді, коли , .

Якщо взяти загальний випадок, наприклад маємо многочлен . Щоб застосувати формули Вієта до цього многочлена можемо представити його у вигляді , тоді аналогічно можемо визначити ; .

Ця теорема Вієта може бути застосована лише для квадратного тричена. Чи можливо застосувати теорему Вієта до многочленів третього чи вищих степенів. Можливо, і саме зараз ми сформулюємо **формули Вієта.** Нехай - корені многочлена . Формули Вієта для даного многочлена будуть такими:

,

,

, (7.1)

………………….

.

Також можна сформулювати обернену теорему. Якщо задовольняють співвідношення (7.1), тоді вони є коренями многочлена .

Якщо многочлен має кратні корені, то кожен корінь потрібно рахувати в теоремі стільки разів, яка його кратність.

Розглянемо деякі приклади на застосування формул Вієта.

3. Нехай та – корені рівняння . Не розв’язуючи рівняння, обчислити:

а) ; б) ; в) ; г) .

Розв’язання: щоб розв’язати таке завдання, необхідно застосувати теорему Вієта, згідно якої ми можемо знайти: , .

а) Щоб знайти можна праву і ліву частину виразу піднести до квадрату.

;

;

Далі з лівої частини рівняння залишимо , а все інше перенесемо в праву частину та замість підставимо .

.

б) Знайдемо значення . Для цього необхідно праву і ліву частину рівності піднести до куба.

;

;

В цьому випадку в лівій частині рівняння залишимо вираз , а все інше перенесемо в праву частину і одночасно замість підставимо , а замість підставимо значення .

.

в) Для знаходження значення виразу необхідно діяти трохи інакше. Можна цей вираз розкласти на множники способом винесення спільного множника за дужки, а далі підставити відомі значення і обчислити остаточне значення виразу.

.

г) Щоб знайти значення виразу , потрібно виконати деякі перетворення саме цього виразу. Спробуємо звести даний вираз до спільного знаменника:

.

Ми вже знаємо, що , а . Значить легко можна знайти значення виразу .

.

4. Многочлен має 3 корені , , . Відомо, що ; . Необхідно знайти та вказати значення невідомих і .

Розв’язання: скористаємось формулами Вієта та отримаємо систему рівнянь.

Тепер можемо підставити і та розв’язати систему рівнянь.

Отже, , а значення невідомих , .

5. Розв’язати систему рівнянь

Цю систему можна розв’язати стандартним шляхом. Тобто з першого рівняння виразити або та підставити у друге рівняння. В результаті отримаємо квадратне рівняння.

Але, можливий другий спосіб розв’язання із застосуванням формул Вієта.

Розв’язання: спробуємо перше рівняння піднести до квадрату і від нього відняти друге рівняння.

Не розв’язуючи квадратне рівняння ми перетворили систему рівнянь таким чином, що отримали ті самі формули Вієта. Тепер залишилось підібрати та , в даному випадку це зробити не важко. Розв’язками будуть ; .

6. Числа , , є коренями рівняння . Необхідно скласти рівняння, коренями якого будуть числа , , .

Розв’язання: складемо систему рівнянь за формулами Вієта.

Піднесемо до квадрату праву і ліву частину кожного рівняння.

Далі потрібно розкрити дужки та знайти значення виразів ; ; .

Згідно формул Вієта ми можемо легко скласти нове рівняння коренями якого будуть числа , , .

.

* 1. **Висновки до розділу ІІ**

Для заохочення учнів до науково-дослідницької діяльності на нашу думку, тих знань, що можна отримати при вивченні в шкільного курсу математики, досить мало. Навіть в класах з поглибленим вивчення математики тема «Многочлени» вивчається не досить широко. Відповідно цього не достатньо для того, щоб залучати учнів до наукової роботи.

Тому, для початку в даній роботі наголошено, що необхідно розглянути деякі нові загальні поняття, щоб в подальшому не виникало проблем з засвоєнням нового більш складнішого матеріалу.

В роботі розглядається теорема Безу та схема Горнера. Можна ці теми виносити на факультативні та додаткові заняття, але класи з поглибленим вивченням математики вивчають ці теми в 10 класі. В роботі наведено також кілька нестандартних задач, для розв’язання яких запропоновано застосовувати теорему Безу та схему Горнера. Це сприяє розвитку математичного мислення, логіки, також ілюструє застосування конкретних формул та методів розв’язання.

Окремим питанням винесено метод невизначених коефіцієнтів при розкладанні многочлена на множники. Розгляд цього методу побудований виключно на логічних перетвореннях. Проте розв’язування деякий задач неможливе без його застосування.

При розкладанні многочлена на множники за схемою Горнера не завжди многочлен має цілі корені. Якщо їх нема, дуже важко вгадати чи підібрати раціональні корені. В роботі описана методика знаходження раціональних коренів та наведені приклади з детальним поясненням.

У даній роботі також описано методи знаходження найбільшого спільного дільника многочленів. Одним з них є Алгоритм Евкліда. Знаючи цей алгоритм, учні з легкість можуть виконувати ряд задач.

Існує поняття кратності коренів та формули Вієта. Учні загальноосвітніх шкіл вивчають теорему Вієта і вміють її застосувати до квадратних рівнянь. В даній роботі основна увага сконцентрована на застосуванні формул Вієта до рівнянь вищих степенів.

В другому розділі підібрано нестандартні задачі, для вирішення яких необхідно застосовувати знання з нових тем.

Основним завданням вчителя є доступно пояснити учням всі нові поняття, вдало підібрати практичні вправи та навчати учнів логічного мислення.

**ВИСНОВКИ**

Згідно поставлених завдань у вступі до магістерської роботи повністю розкрито особливості методики навчання учнів окремим питанням, що стосуються теми «Многочлени». В Першому розділі магістерської роботи досить детально описано методику навчання з питань: дії з многочленами, розкладання многочленів на множники, стандартний вигляд многочлена та тотожні перетворення з многочленами і т.д. Правильне розуміння всіх цих понять учнями попередить допущення помилок при розв’язуванні вправ та задач. Також це базові знання, які дають змогу продовжити вивчення многочленів, перейти до більш складних питань та розв’язувати нестандартні задачі.

Велику увагу звернула на попередження допущення учнями помилок при розв’язуванні вправ з многочленами. Наголошено на питаннях чіткості, правильності та послідовності подання матеріалу, оскільки це є першим кроком для успішної співпраці вчителя та учнів.

В роботі вказано, що досить важливо учнів залучати до науково-дослідницької роботи. Така діяльність розвиває в них додаткові вміння та навички, вміння нестандартно, логічно мислити та розвиває уяву. Займаючись науковою діяльністю учні навчаються самостійно працювати з додатковою літературою, знаходити та обробляти інформацію. Для таких учнів необхідно підбирати більш складніші, можливо навіть дещо відмінні від програми, завдання. Такі діти переважно є обдарованими, можуть приймати участь у різних олімпіадах та конкурсах, а також готувати роботи для Малої академії наук.

Тема даної магістерської роботи досить актуальна, оскільки сучасне суспільство потребує високоосвічених професіоналів, майстрів своєї справи. Вивчення многочленів є чи не найголовнішою темою в шкільній програмі. Застосовувати здобуті знання учні будуть не тільки при вивченні інших тема з математики, але й при вивченні інших предметів. Велика ймовірність того, що дитина, яка в шкільні роки займалась науковою роботою саме в сфері математики, далі продовжить навчання в вищих навчальних закладах зі спеціальностей, які пов’язані з вивченням цього предмету.

Під час написання магістерської роботи, було детально вивчено методику навчання темі «Многочлени», усвідомлено особливості організації та проведення учнівської наукової роботи. Результатом цієї роботи є готовність навчати дітей в школі.

При вивченні теми «Многочлени» в учнів можуть виникати деякі **проблеми**, на які необхідно звернути увагу, а саме:

* при вивченні дій з многочленами можливе допущення помилок зі знаками, в результаті чого відповідь буде неправильна;
* неправильне застосування формул скороченого множення;
* неправильне виконання порядку дій з многочленами;
* при здійсненні тотожних перетворень з многочленами неправильне скорочення дробів;
* розкриття дужок при здійсненні тотожних перетворень в неправильній послідовності;
* виникають труднощі з вибором способу розкладання многочленів на множники;
* застосування методу невизначених коефіцієнтів до розв’язання вправ для учнів може бути не завжди зрозумілим, оскільки при його використанні потрібні не тільки знання, а ще й логічні міркування;
* неправильне застосування схеми Горнера та теореми Безу до нестандартних задач;
* знаходження шляху вирішення задач підвищеної складності.

**Для вирішення всіх цих проблем необхідно виконувати такі рекомендації:**

* акцентування уваги на учнів на понятті «алгебраїчна сума»;
* постійне повторення формул скороченого множення у вигляді усного опитування чи письмової самостійної роботи;
* повторення порядку дій та правила розкриття дужок;
* підбір завдань за рівнями для сильніших та слабших учнів.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Ачкан В.В. Інноваційний педагогічний досвід шкільної математичної освіти у країнах Європейського союзу. *Український педагогічний журнал.* 2016. №2. С. 112-119.
2. Бабій Н. Розкладання многочленів на множники. *Математика.* 2006. 387 жовтень (№39). С. 6-8.
3. Бараболя М.М., Матяш О.І. Педагогічний довідник вчителя математики: посібник для самоосвіти вчителя математики. Вінниця, 2017. 128 с.
4. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. Для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Видавництво «Відродження», 2015. 288 с.
5. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Агебра і початки аналізу: профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів заг. сер. освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
6. Бевз Д.В. Система задач, розв’язання яких базується на методі виділення повного квадрату: матеріали І Всеукраїнської дистанційної науково-практичної конференції, м. Вінниця, 16 березня 2017 р. Вінниця, 2017. С.9-12.
7. Бєкрєшева Л.О. Сучасні підходи до визначення поняття «Науково-дослідницька робота школяра». *Вісник ЛДУ БЖД.* 2011. №5. С. 25-30.
8. Блок О.Я., Канін С.Є., Килина Н.Г. та ін. Методика викладання математики в середній школі: навч. посіб. для пед. ін-тів за спец. «Математика»/ упоряд. Р.С.Черкасов, А.А.Столяр. Харків: Видавництво «Основа», 1992. 304 с.
9. Бородін О.І., Потьомкін Л.В., Сліпенко А.К. Основні поняття сучасної алгебри: посібник для самоосвіти вчителів: 2-е вид. перероб. Київ: Рад. школа, 1983. 112 с.
10. Вишневський О. Теоретичні основи сучасної української педагогіки. Самостійна діяльність учнів. Дрогобич: Коло, 2006. 326 с.
11. Вороний О.М. Функціональні рівняння в олімпіадній математиці: методичний посібник. Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2010. 68 с.
12. Гожа Г.В. Розкладання многочленів на множники різними способами. *Математика в школах України.* 2009. 229 січень (№1). С. 15-17.
13. Дегтяренко Л.І. Застосування різних способів розкладання многочленів на множники. *Математика в школах України.* 2007. 162 лютий (№6). С. 30-31.
14. Дубинчук О.С., Мальований Ю.І., Дичек Н.П. Методика викладання алгебри в 7-9 класах: посібник для вчителя. Київ: Рад. Школа, 1991. 254 с.
15. Загирняк О. Вибори мера алгебраїчних міст. Розкладання многочленів на множники. *Математика.* 2007. 438 жовтень (№38). С. 10.
16. Ізюмченко Л.В., Лутченко Л.І., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. Вирази та тотожні перетворення: методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів: навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. Кіровоград: РВВ КДПУ ім. Винниченка, 2008. 22 с.
17. Ізюмченко Л.В., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. Многочлени: методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів: навч. матер. для учнів заочної фізико-математичної школи. Кіровоград: : РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. 50 с.
18. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2015. 256 с.
19. Істер О.С., Єргіна О.В. Алгебра і початки аналізу: профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів заг. сер. освіти. Київ: Генеза, 2018. 448 с.
20. Ковальчук Н.С. Многочлени при вивченні алгебри в загальноосвітній школі. Вісник студентського наукового товариства: збірник наукових праць студентів, магістрантів і аспірантів. Випуск 22. Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2019. С. 18-21.
21. Ковальчук Н.С. Організація наукової роботи учнів. *Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання:* матеріали Всеукраїнської студентської наукової конференції, м. Ніжин, 5-6 грудня 2018 р. Ніжин, 2018. С. 135-137.
22. Ковальчук Н.С. Організація наукової роботи школярів. *Сучасний рух науки:* матеріали міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Дніпро, 7-8 лютого 2019 р. Дніпро, 2019. С. 323-326.
23. Ковальчук Н.С. Формування науково-дослідницьких вмінь школярів. *Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання:* матеріали Всеукраїнської студентської наукової конференції, м. Ніжин, 4-5 грудня 2019 р. Ніжин, 2019. С.
24. Ковальчук Н.С., Чорненька О.В. Дослідницька діяльність школярів при вивченні математики. *Новітні інформаційні технології у світі і науці:* Збірник наукових праць ІІ Всеукраїнської наукової Інтернет-конференції молодих вчених. м. Переяслав-Хмельницький (10-12 квітня 2019 р.). Переяслав- Хмельницький, 2019. С. 59-61.
25. Кравчук В.Р., Підручна М.В., Янченко Г.М. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль: Підручники і посібники, 2014. 224 с.
26. Кривошлюк Ю. Розкладання многочленів на множники. *Математика в школах України.* 2013. №32. С. 9-13.
27. Кушнір Л.Д. Алгебра 7 клас: розробки уроків. Харків: Видавництво «Ранок», 2015. 272 с.
28. Мальований Ю.І., Литвиненко Г.М., Бойко Г.М. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2015 256 с.
29. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.В., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів заг. сер. освіти. Харків: Гімназія, 2018. 400 с.
30. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра, Препедевтика поглибленого вивчення: навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики. Харків: Гімназія, 2015. 240 с.
31. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Аллгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Гімназія, 2015. 256 с.
32. Митрошенко І. Розкладання многочленів на множники. *Математика.* 2009. 494 січень (№2). С. 7-11.
33. Модягіна Н.В. Інноваційні засоби навчання математики. *Український педагогічний журнал.* 2016. №4. С. 106-109.
34. Москаленко О.А., Черкаська Л.П. Шкільний курс математики і методика його викладання: програмно-дидактичне забезпечення модульного підходу до вивчення дисципліни: навчально-методичний посібник. Полтава: КДПУ, 2006. 68 с.
35. Моторіна В.Г. Технологія підготовки вчителя математики до уроку: навч. посібн. для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних навчальних закладів. 2-ге доповн. і виправл. видання. Харків: Видавець Іванченко В.С., 2012. 318 с.
36. Назаренко С. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники. *Математика.* 2007. 438 жовтень (№38). С. 9.
37. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: академічний рівень: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Гімназія, 2010. 416 с.
38. Попадюк І. Многочлени, рівняння, нерівності. *Математика.* 2009. 506 квітень (№14). С. 18-24.
39. Сільвестрова А.І., Фурман М.С. Многочлени. Раціональні рівняння і нерівності: бібліотека журналу «Математика в школах України». Харків: Видавнича група «Основа», 2004. 128 с.
40. Славич Л.Є., Смик Н.Л. Залік з теми «Многочлени від однієї змінної». *Математика в школах України.* 2007. 184 жовт. (№28). С. 10-14.
41. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник – 2-ге вид., доповн. і переробл. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.
42. Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Коломієць О.М., Сердюк З.О. Математика: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2015. 288 с.
43. Тимків Ю. Додавання та віднімання многочленів. *Математика.* 2006. 385 жовтень (№37). С. 14-17.
44. Флорчук О. Тотожні перетворення виразів і творчість І.Франка. Інтегрований урок з алгебри та української літератури, 7 клас. *Математика.* 2006. 387 жовтень (№39). С. 11-14.
45. Хряпак О. Квадратні рівняння. Теорема Вієта. *Математика.* 2009. 502 березень (№10). С. 19-21.
46. Математика: навчальна програма для учнів 5 – 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів URL: <http://media.ippo.kubg.edu.ua/wp-content/uploads/2016/08/programa_dlia_9_klasu_matematyka.pdf>
47. Математика: навчальні програми для 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
48. Барчунова Ф.М., Бесчинская А.А., Денищева Л.О.и др. Алгебра в 6-8 классах: пособие для учителя/ сост. Ю.Н.Макарычев, Н.Г. Миндюк. Москва, 1988. 384 с.
49. Барыбин К.С. Методика преподавания алгебры: пособие для учителей восьмилетней школы. Москва: Издательство «Просвещение», 1965. 346 с.
50. Гусева В.А., Мордкович А.Г. Математика: справоч. материалы: кн. Для учащихся. Москва: Просвещение, 1988. 416 с.
51. Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С. Математическая шкатулка: 5-е издание: пособие для учащихся 4-8 кл. сред. шк. Москва, 1988. 160 с.
52. Попов В.В., Мазепа Е.А., Безверхов В.А. Практикум по алгебре. Часть 1. Многочлены и их корни: учебно-методическое пособие для студентов математических специальностей университетов. Волгоград: Издательство ВолГу, 2004. 34 с.
53. Поташник М.М. Управление развитием творчества. Педагогическое творчество: проблемы развития и опыт. Киев: Знание, 1988. 136 с.
54. Прасолов В.В. Многочлены: 3-е изд., исправленое. Москва: НЦНМО, 2003. 336 с.
55. Проскуряков М.В. Числа и многочлены: второе издание. Москва: Издательство «Просвещение», 1965. 284 с.
56. Числа и многочлены/ составитель А.А.Егоров. Москва: Бюро Квантум, 2000. 128 с.
57. Яремчук Ф.П., Рудченко П.А. Алгебра и элементарные функции: справоч. для поступающих в вузы. Киев: «Наукова думка», 1971. 479 с.