Міністерство освіти і науки України

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

Факультет природничо-географічних і точних наук

Кафедра математики, фізики та економіки

Середня освіта (Математика)

014.04 Середня освіта (Математика)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня ***магістр***

Нестандартні способи розв'язування рівнянь і нерівностей

студентки **Костюченко Наталії Вікторівни**

Науковий керівник:

Тарасенко Оксана Володимирівна,

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензенти:

Віра Марина Борисівна,

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Барило Ніна Андріївна,

канд. пед. наук, доцент

Допущено до захисту

В.о. зав. кафедри _______ Тарасенко О.В.

Ніжин – 2020 рік

АНОТАЦІЯ

НЕСТАНДАРТНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

Костюченко Наталія Вікторівна

У роботі розглянуто нестандартні методи розв'язання рівнянь та нерівностей, а саме: використання властивостей функцій, формул скороченого множення, похідних, теореми Веєрштраса, формули відстані між двома точками координатної прямої, схеми Горнера і т.д. Розкрито особливості застосування штучних прийомів.

Запропоновано добірку завдань практичного змісту, які ілюструють застосування кожного з методів розв'язання. Висвітлено історичний аспект розвитку стандартних методів розв'язання рівнянь.

Ключові слова: рівняння, нерівності, нестандартні методи розв'язання.

ANNOTATION

NON-STANDARD WAYS OF SOLUTION EQUATIONS AND INEQUALITIES

Kostiuchenko Natalia Victorivna

The paper considers non-standard methods for solving equations and inequalities, namely: the use of properties of functions, reduced multiplication formulas, derivatives, Weierstrass theorem, the formula for the distance between two points of a coordinate line, the Horner scheme, etc. Features of application of artificial receptions are opened.

A selection of practical tasks is offered, which illustrate the application of each of the methods of solution. The historical aspect of the development of standard methods for solving equations is highlighted.

Keywords: equations, inequalities, non-standard methods of solution.

ЗМІСТ

ВСТУП

Заглянувши у перше тисячоліття до н. е., можна побачити, як древні вавілоняни та єгиптяни знали як знайти невідому змінну у рівнянні, також у IX ст. відомий узбецький математик Мухаммед аль Хорезмі у творі «Кітаб ал-джебр ал-мукабела» (книга про відновлення і протиставлення) упорядкував і докладно описав відомі йому методи розв'язування рівнянь. Що ж означають ці слова? Операцією «ал-джабра» називали перенесення членів із однієї частини рівняння в другу, а слово «ал-мукабала» розуміли як зведення подібних доданків. Для прикладу, розв'язуючи рівняння $5x + 4 = 2x - 3$, виконаємо заміну правої та лівої частин рівняння на $5x - 2x == -3 - 4$, тобто виконується операція «ал-джабра», а якщо потім змінюємо ліву частину $5x - 2x$ на $3x$, та праву $-3 - 4$ на -7, то виконуємо «ал-мукабалу» (в наш час це зветься зведенням подібних доданків). Вислів «ал-джабра», перетворилося на слово «алгебра», а вислів «ал-мукабала» залишилось в пам'яті лише істориків. Впродовж віків наука «алгебра» розглядалась як наука про способи розв'язання рівнянь. Велике значення рівнянням надавав А. Ейнштейн. Він казав: «Мені доводилось ділити свій час між політикою і рівняннями. Проте рівняння, на мій погляд, набагато важливіші, тому що політика існує тільки для даного часу, а рівняння будуть існувати вічно» [17].

Рівняння не завжди в результаті перетворень або при вдалій заміні змінної можна звести до рівняння деякого стандартного вигляду, для якого описано відомий алгоритм розв'язання. Тому виявляється доцільним скористатися іншими нестандартними методами розв'язання, мова про які й піде в ході даної роботи.

Вище сказане визначає **актуальність дипломної роботи**.

Об'єкт дослідження - рівняння й нерівності, що не можна розв'язати за допомогою стандартних методів, або що відрізняються громіздкістю стандартного розв'язку.

Предметом дослідження є нестандартні способи розв’язування рівнянь і нерівностей.

Метою даної роботи є огляд нестандартних методів розв’язання рівнянь і нерівностей.

Щоб досягти вказаної мети в дипломній роботі опрацьовуватимуться такі **задачі**:

- ✓ подати історичні відомості з математики про розв’язання рівнянь і нерівностей;
- ✓ описати нестандартні прийоми розв'язування рівнянь і нерівностей;
- ✓ описати та застосувати на практиці досліджені методи розв’язання рівнянь і нерівностей, засновані на застосуванні властивостей функції.
- ✓ описати та застосувати на практиці додаткові штучні методи розв’язання рівнянь і нерівностей.
- ✓ розглянути приклади розв’язування рівнянь вищих порядків методом Горнера.

Практична цінність роботи полягає в тому, що не кожного разу, розв’язуючи складні рівняння чи нерівності, доцільно використовувати стандартні алгоритми, для знаходження коренів рівняння буває достатньо знайти зачіпку просто розглянувши запис рівняння, що призведе до уникнення досить кропітких перетворень та обчислень.

Апробація результатів

Результати магістерського дослідження доповідались та обговорювались на:

- звітній науковій конференції молодих науковців «Молодь у науці» (травень 2020 р., м. Ніжин);
- XI Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції «Сучасний рух науки» (8-9 жовтня 2020 р., Дніпро).

Публікації

Костюченко Н.В. Нестандартні способи розв’язання рівнянь та їх методичні особливості. Сучасний рух науки: тези доп. XI Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, 8-9 жовтня 2020 р. Дніпро, 2020. Т.1. 336-339 с.

Структура та обсяг роботи

Магістерська робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі містяться історичні відомості з математики про стандартні способи розв'язування рівнянь та нерівностей. Другий розділ присвячений розгляду методів розв'язання, які базуються на застосуванні властивостей функцій. У третьому розділі розглянуто схему Горнера для розв'язування рівнянь вищих порядків. У четвертому розділі описано додаткові (штучні) методи розв'язання рівнянь та нерівностей.

РОЗДІЛ 1
ІСТОРИЧНА ДОВІДКА.
СТАНДАРТНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Знаходженням розв’язків рівнянь та систем рівнянь переймались математики всіх часів. В «Арифметиці» грецького математика з Олександрії Діофанта (III ст.) знання з алгебри ще не були систематизовані, та в ній містився опис ряду задач, які розв'язувались використовуючи метод складання рівнянь. Робота містить таку задачу:

«Знайти два числа по їхній сумі 20 і добутку 96» [7].

Так як, на той час, розв’язувати квадратні рівняння не вміли, адже з позначення одного із чисел буквою випливає отримання саме квадратного рівняння загального виду, Діофант позначав невідомі числа $10 + x$ і $10 - x$ (у сучасному записі) і одержував неповне квадратне рівняння $100 - x^2 = 96$, і звертав увагу тільки на додатній корінь 2.

Вже в V ст.н.е. в роботах індійських математиків ми можемо бачити задачі на квадратні рівняння.

Квадратні рівняння описуються в трактаті «Коротка книга про вирахування алгебри й алмукабали» Мухаммеда аль-Хорезмі (787 - 850). В даній праці описані й знайдені розв’язки (у геометричній формі) квадратних рівнянь шести типів, які мають у правій і лівій сторонах лише додатні члени. Також брались до уваги лише додатні корені рівнянь [7].

У працях математиків із Європи XIII – XVI ст. подаються лише деякі методи розв’язування різних видів квадратних рівнянь. Узагальнення даних методів у одне правило зробив німецький математик Михаель Штифель (1487 – 1567 р.), взявши до уваги від’ємні корені також [17].

У найпоширенішому російському підручнику «Арифметика» Леонтія Пилиповича Магницького (1669-1739 р.) було наведено для прикладу досить багато задач на використання квадратних рівнянь. От одна з них:

«Якийсь генерал хоче з 5000 чоловік баталію вчинити, і щоб та була в особі вдвічі, ніж осторонь. Кілько баталія буде мати в особі й осторонь?», тобто скільки солдатів треба поставити по фронті й скільки їм у тил, щоб число солдатів по фронту було в 2 рази більше числа солдат, розташованих їм «у тилу»? [17].

Із текстів древніх вавілонян (3000 - 2000 років до н.е.) ми отримали види задач, які в наш час можна розв'язати з використанням системи рівнянь, що включають в себе і рівняння другого ступеня. Ось одна із задач:

«Площі двох своїх квадратів я склав: $25\frac{5}{12}$. Сторона другого квадрата дорівнює $\frac{2}{3}$ сторони першого й ще 5».

Сучасний вигляд відповідної системи:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\frac{5}{12} \\ y = \frac{2}{3}x + 5 \end{cases}$$

Автор розв’язує дану задачу вірно методом, який в наш час зветься методом підстановки, але алгебраїчна символіка ще не використовується [13].

У XVI ст. французький математик Франсуа Вієт (1540 – 1603 р.), який займав посаду шифрувальника при французькому королі, першим використав буквені символи для позначення не тільки невідомих величин, а також для позначення коефіцієнтів рівнянь. При розшифровуванні повідомлень супротивника Ф. Вієт використовував для невизначених символів такі букви латинського алфавіту як *x, y* і *z,* які рідко застосовувались, що призвело до започаткування практики позначати невідомі значення у рівняннях літерами *x, y* і *z*.

Надзвичайно цінними для Вієта були виведені ним формули, що зараз мають назву формули Вієта. Хоча Вієт брав до уваги лише додатні корені.

Лише в XVII ст. в роботах Декарта, Ньютона та деяких інших математиків розв'язок квадратних рівнянь набув сучасного вигляду [17].

Початок XVI ст. в математиці ознаменувався виведенням алгебраїчного розв'язання кубічного рівняння професором математики болонського університету Сципіоном дель Ферро (1465-1526):

$$x^3 + px = q, \tag{1.1}$$

де p і q - числа додатні.

За звичаями тих часів такі винаходи трималися у великому секреті, для подальшого використання їх у так званих математичних диспутах-двобоях, де перед багатолюдною публікої опоненти пропонували один одному задачі для розв'язання зразу ж або через деякий час. Найпоширенішими були завдання з алгебри. Перемогу отримував той, котрий розв'язував більшу кількість задач, при чому переможець нагороджувавася грошовим призом і також отримати місце при університетській кафедрі, а той що потерпів поразку ішов із займаної посади. Таким чином формулою розв'язання кубічного рівняння, крім дель Ферро, володіли його учні-послідовники, одним з яких був Фіоре, бо учасникові диспуту надзвичайно важливо було мати новий спосіб розв'язування поставлених задач [17].

Коли професор дель Ферро помер, один із його учнів – Фіоре, який сам не мав глибоких знань з математики, надіслав виклик на публічний математичний диспут одному з найшанованіших знавців математики того часу Нікколо Тартальї (1499-1557). Під час підготовки до диспуту, Тарталья вивів формулу для визначення коренів рівнянь третього ступеня у радикалах, бо допускав, що Фіоре вже отримав ці знання. Потім Тарталья напише: «Я приклав всю свою запопадливість, ретельність і уміння, щоб знайти правило для розв'язання кубічних рівнянь, і, завдяки благословенній долі, мені вдалося це зробити за 8 днів до строку».

Математичний диспут відбувся 20 лютого 1535 р. Тарталья за дві години розв'язав 30 задач, які запропонував опонент, а Фіоре ж не розв'язав ні однієї з 30 задач, поданих Тартальєю. Цей математичний двобій прославив Тарталью на всю Італію, та відкрита формула трималася в таємниці.

Один із італійських математиків Джерол (1501 - 1576) дізнався у Тартальї формулу розв'язування рівняння третього ступеня (1.1) і дав «священну клятву», що ні з ким не поділиться цим секретом. Хоча, Тарталья неповністю передав свою формулу, та Кардано, вивчивши рукописи покійного професора дель Ферро, вивів формулу для розв'язування рівняння. Кардано представив світу виконану ним роботу «Про велике мистецтво, або про алгебраїчні речі, в одній книзі» у 1545 р., в якій було опубліковано формулу для розв'язку рівняння (1.1) вперше, а рівняння третього ступеня у загальному вигляді пропонувалося перетворити на рівняння (1.1).

Хоча після опублікування праці Тарталья звинуватив Кардано у недотриманні обітниці, та закономірність, винайдена Тартальєю й дель Ферро, і понині має назву формула Кардано.

Також робота Кардано містила опис алгебраїчного розв'язоку рівняння четвертого степеня. Представлене рівняння було розв'язане його учнем Людовіко Феррарі (1522 - 1565). Це відкриття започаткувало еру наполегливих пошуків формул, що приводили б розв'язок рівнянь вищих степенів до знаходження коренів («Розв'язок в радикалах»). Більше трьох сторіч тривали ці пошуки, аж поки на початку XIX ст. учений норвежець Нільс Хенрік Абель (1802 -1829) та вчений француз Еварист Галуа (1811 -1832) не довели, що рівняння вище четвертої степені в радикалах в загальному випадку не розв'язуються [17].

Великий філософ і математик Рене Декарт (1596 -1650) став першим, хто сформулював головну теорему алгебри про кількість коренів рівняння n-ого степеня, у праці «Геометрія». До того ж Декарт допускав, що існують не тільки щирі (додатні) і помилкові (менші, чим нічого, тобто менші нуля – від'ємні) корені, а й уявні (у Декарта - imaginaires), тобто комплексні корені [17].

Ще в стародавні часи математики під час розв’язання рівнянь стикалися з проблемою добування кореня квадратного з від’ємного числа – в такому випадку вважалося, що задача розв’язків не мала. Та з часом з’ясувалося, що розв’язування великої кількості задач, які задаються в дійсних числах, легко пояснюється з використанням виразів $a + bi$, де $i^2 = -1$, що в той же час почали носити ім’я чисел, але тільки комплексних. Найпершим математиком, який обґрунтував найпростіші дій над комплексними числами, являвся італієць Раффаеле Бомбеллі (1530 -1572) в 1572 р., та комплексні числа ще довгий час сприймалися як щось дивне [17].

Леонард Ейлер (1707 -1783), академік Петербурзької академії наук, зробив великий внесок у вдосконалення теорії комплексних чисел. Завдяки його роботам було забезпечено місце комплексним числам як предмету та засобу вивчення. Також була запропонована безпосередньо назва «комплексне число» німецьким математиком Карлом Фрідріхом Гаусом (1777 - 1855) в 1831 р.

З цього періоду комплексні числа набули широкого використання у різних галузях техніки та фізики.

Також розглядалися алгебраїчні рівняння виду $f(x) = 0$, де $f(x)$ – являється багаточленом що до x.

Великий розділ математики займають трансцендентні рівняння: логарифмічні, тригонометричні, показникові й ін. Розв’язок трансцендентних рівнянь та нерівностей ґрунтується на таких властивостях функцій, що підлягають вивченню в математиці не так давно.

Одне з головних місць в сімействі алгебраїчних рівнянь належить так званим діофантовим рівнянням, тобто рівнянням, у яких міститься більше однієї невідомої.

Найбільш поширеними серед них є лінійні діофантові рівняння. Задачі, які зводяться до лінійних діофантових рівнянь, можна побачити у збірнику задач ченця Алькуїна, який в 795 р. завдяки запрошенню Карла Великого викладав у першій з відомих шкіл у м. Аахен. Ось це завдання:

«100 шеффелей (грошових одиниць) розділили між чоловіками, жінками й дітьми (число персон 100) і дали при цьому чоловікам по 3 шеффеля, жінкам по 2 і дітям по $\frac{1}{2}$ шеффеля. Скільки було чоловіків, жінок і дітей?» [13].

Прийнявши, що x число чоловіків, за y - кількість жінок, отримаємо рівняння виду:

$$3x + 2y + (1/2)\cdot(x - y) = 100$$

У той час ще не знали загального розв'язку лінійних діофантових рівнянь та брали до уваги тільки декілька розв'язків, що задовольняли умову задачі. Алькуін мав тільки один розв'язок цієї задачі: чоловіків було 11, жінок – 15, і дітей – 74, в той час коли задача має 784 розв'язки в натуральних числах.

У Леонардо Пізанського (Фібоначчі) (1180 - 1240) та в «Арифметиці» Л. Ф. Магницького були описані задачі, що зводяться до лінійних діофантових рівнянь.

Широко відоме рівняння Піфагора (VI ст. до н.е.) $x^2 + y^2 = z^2$ розв'язують у натуральних числах. Розв'язками йому служать групи із трьох чисел $(x;\ y;\ z)$:

$$x = (m^2 - n^2)l, \qquad y = 2mnl, \qquad z = (m^2 + n^2)l,$$

де n, m, l – є будь-якими натуральними числами $(n > m)$. За допомогою цих формул розв'язують прямокутні трикутники, адже їх довжини сторін є натуральними числами [17].

1630 р. ознаменувався формулюванням гіпотези знаменитого французького математика Пьєра Ферма (1601 — 1665), що отримала назву великої теореми Ферма: «Рівняння $x^n + y^n = z^n$ для натурального $n \geq 3$ не має розв'язків у натуральних числах». Хоча Ферма не довелося довести свою теорему для загального випадку, але широкому загалу став відомий його запис на полях «Арифметики» Діофанта: «...неможливо куб записати у вигляді суми двох кубів, або парний степінь у вигляді суми таких же степенів, або взагалі будь-яке число, що є степенем більшої, ніж друга, не можна записати у вигляді суми двох таких же степенів. У мене є воістину дивний доказ цього твердження, але поля ці занадто вузькі, щоб його вмістити» [17]. Через деякий час після смерті Ферма в його записах було знайдено доказ його теореми для $n = 4$. Впродовж майже 300 років математики всього світу намагалися довести велику теорему Ферма. Довів теорему Ферма для $n = 3$ в 1770 р. Л.Ейлер, а для $n = 5$ в 1825 р. Адріен Лежандр (1752 1833) і Петер Дирихле (1805 - 1859).

Лише в 1995 р. Ендрю Вайлс довів цю теорему в загальному випадку [17].

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

Математика є однією з найдавніших наук у світі. Найперші математичні уявлення і поняття людини формувались у сивій давнині, при розв'язуванні найпростіших задач практичного характеру. При ускладненні форм труда, як наслідок – людині потрібно було вирішувати складніші задачі, і щоб знайти на них відповідь потрібно було формувати нові поняття в математиці, створювати математичні теорії. Тому, розвиток математики відбувався під тиском двох головних стимулів: потреб практичної діяльності людини та логіки розвитку самої математики.

Видатний математик Колмогоров А.М. запропонував використовувати таку періодизацію розвитку математики, як науки:

1. Зародження математики – від глибокої давнини до VI – V ст. до н. е.
2. Елементарна математика – від VI – V ст. до н.е. до кінця XVI ст. У цей час формувалися основні теорії, що стосуються математики сталих величин.
3. Створення математики змінних величин – кінець XVI – середина XIX ст.. На початку цього періоду французький учений Декарт створює аналітичну геометрію, а англійський учений Ньютон і німецький учений Лейбніц – аналіз нескінченно малих. За невеликий проміжок часу до середини XIX ст. були описані всі математичні теорії, які нині називають класичними основами сучасної вищої математики.
4. Сучасна математика характеризується швидким зростом об'єму просторових форм і кількісних відношень. Виникло багато математичних теорій, які привели до створення електронних обчислювальних машин [17].

РОЗДІЛ 2
НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

2.1. Розв’язок рівнянь та нерівностей із застосуванням властивостей функції

Зовсім не будь-яке рівняння або нерівність виду $f(x) = g(x)$ за допомогою вдалої заміни змінної, або у результаті перетворень, отримає вигляд стандартного рівняння або нерівності, що дозволить знайти розв’язок з використанням певного алгоритму. Тому є доречним скористатися такими властивостями функцій, як обмеженість, періодичність, монотонність, парність та інші [6].

2.1.1. Властивість монотонності функції

Функція $f\ (x)$ називається зростаючою на проміжку D, якщо для будь-яких чисел x_1 і x_2 із проміжку D таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f\ (x_1) < f\ (x_2)$.

Функція $f\ (x)$ називається спадною на проміжку D, якщо для будь-яких чисел x_1 і x_2 із проміжку D таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f\ (x_1) > f\ (x_2)$ (рис. 2.1).

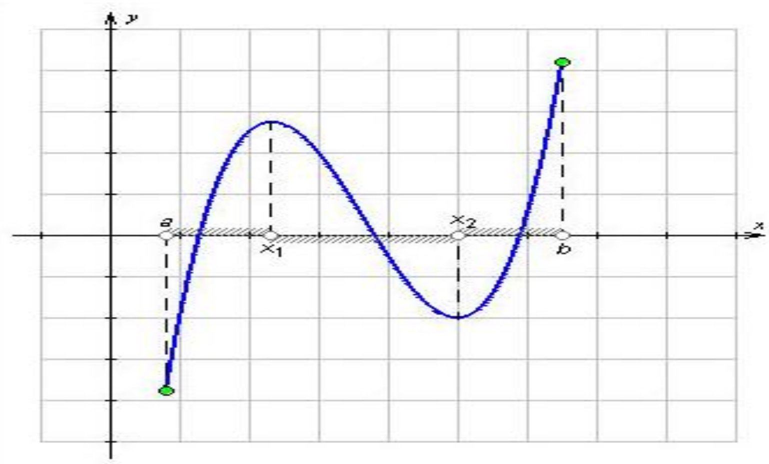


Рис. 2.1

Функція $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, зростає на кожному із проміжків $[a; x_1)$ і $(x_2; b]$ і спадає на проміжку $(x_1; x_2)$. Зверніть увагу, що функція зростає на кожному із проміжків $[a; x_1)$ і $(x_2; b]$, але не на об'єднанні проміжків $[a, x_1) \cup (x_2, b]$.

Якщо функція зростає або спадає на деякому проміжку, то вона називається монотонною на цьому проміжку.

Помітимо, що якщо $f(x)$ – монотонна функція на проміжку $D(f(x))$, то рівняння $f(x) = const$ не може мати більше одного кореня на цьому проміжку.

Дійсно, якщо $x_1 < x_2$ – корінь цього рівняння на проміжку $D(f(x))$, де $f(x_1) = f(x_2) = 0$, що суперечить умові монотонності.

Перелічимо властивості монотонних функцій (передбачається, що всі функції визначені на деякому проміжку D).

- Сума зростаючих (спадних) функцій є зростаючою (спадною) функцією на їх спільній області визначення.
- Добуток двох зростаючих (спадних) функцій, які набувають тільки невід’ємних значень, є зростаючою функцією.
- Добуток двох спадних функцій, які набувають тільки додатних значень, є спадною функцією.
- Різниця зростаючої і спадної (спадної і зростаючої) функцій, є функцією зростаючою (спадною) на їх спільній області визначення.
- Якщо функція $f(x)$ зростає, то функції $cf(x)$, $(c > 0)$ і $f(x) + c$ також зростають, а функція $cf(x)$, $(c < 0)$ спадає. Тут $c = const$ – деяка константа.
- Якщо функція $f(x)$ зростає й зберігає знак, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ спадає.
- Якщо функція $f(x)$ зростає та від’ємна, то $f(x)n$, де $n \in N$, також зростає.

- Якщо функція $f(x)$ зростає й n – непарне число, то $f(x)\,n$ також зростає.
- Якщо функції $y = f(x)$; $y = g(x)$ – обидві зростаючі або обидві спадні, то функція $y = f(g(x))$ – зростаюча. Якщо одна із функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ – зростаюча, а друга спадна, то функція $y = f(g(x))$ – спадна [12]

Зауваження. Різниця двох зростаючих функцій може не являтися функцією, що зростає. Наприклад, різниця функцій $y = x$ і $y = 2x$ – є функція $y = -x$ – спадна. Різниця значень функцій $y = x^3$ і $y = x$ не є функцією, що спадає, та функцією, що зростає по всій області визначення.

Розв'язки подібних рівнянь зручно знаходити за таким алгоритмом:

1. Знаходимо розв'язки рівнянь чи нерівностей;
2. Виконуємо доведення, де рівняння чи нерівність не мають більше ніяких коренів, застосовуючи такі теореми про корені рівнянь:

Теорема 1. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Теорема 2. Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш, ніж один корінь на цьому проміжку [12].

Справджується твердження, для функції $f(x)$, яка є монотонною, розв'язок рівняння може містити лише один корінь, адже нерівним значенням аргументу для монотонної функції відповідають нерівні значення функції. На графіку (рис. 2.2) видно, що графіком константи є пряма, яка паралельна до осі абсцис, має лише одну точку перетину з графіком монотонної функції.

Точкою максимуму функції $f(x)$ називається така точка a, якщо існує така $\varepsilon -$ околиця точки a, що для будь-якого x із цієї околиці виконується нерівність $f\,(a) \geq f\,(x)$.

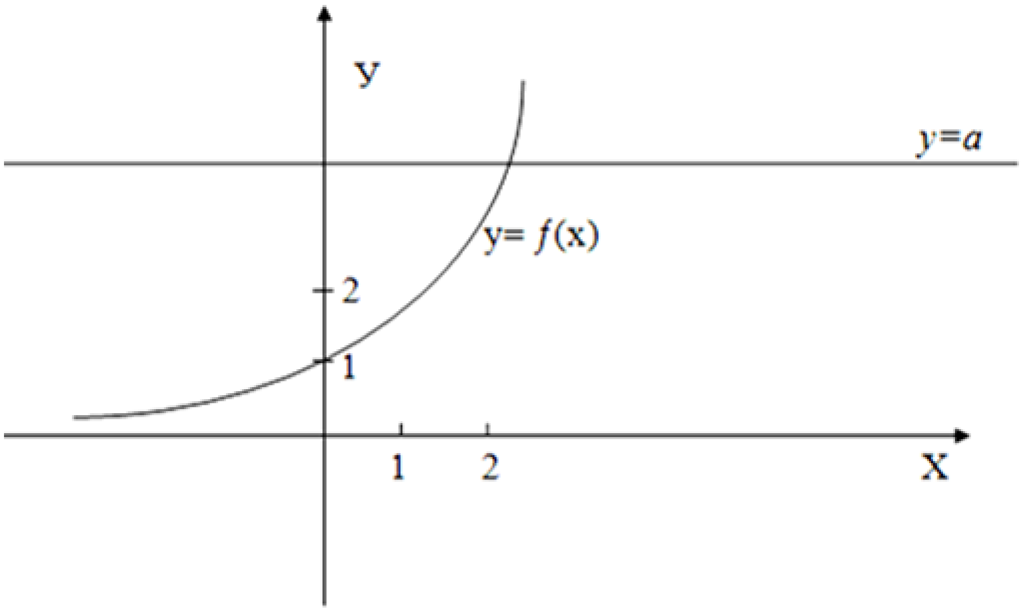


Рис. 2.2

Точкою мінімуму функції $f(x)$ називається така точка a, якщо існує така ε-околиця точки a, що для будь-якого x із цієї околиці виконується нерівність $f\,(a)\ \le\ f\,(x)$.

Точки екстремуму це точки, у яких досягається максимальне або мінімальне значення функції.

Зміна характеру монотонності функції відбувається у точці екстремуму. Тому, праворуч від точки екстремуму функція може зростати, а ліворуч - спадати. Відповідно до визначення, точка екстремуму повинна бути внутрішньою точкою області визначення.

Якщо для кожного $x \in D,\ (x\ \neq\ a)$ виконується нерівність $f\,(x)\ \le\ f\,(a,)\ x \in D,$ де точка a називається точкою найбільшого значення функції на множині D:

$$\max_{x \in D} f\big(x\big) = f(a)$$

Якщо для кожного $x \in D$, $(x \neq b)$ виконується нерівність $f(x) > f(b)$, $b \in D$, де точка b називається точкою найменшого значення функції на множині D.

$$\min_{x \in D} f(x) = f(b)$$

Точка найбільшого або найменшого значення функції на множині D може бути екстремумом функції, та не завжди є ним.

На відрізку функції варто шукати серед екстремумів цієї функції і її значень на кінцях відрізка, точку найбільшого (найменшого) значення безперервної функції [12].

На таких законах базується розв’язок рівнянь і нерівностей із застосуванням властивостей монотонності функцій.

1. Нехай $f(x)$ - функція строго монотонна й безперервна на проміжку Т, тому рівняння $f(x) = 3$, де 3 – стала величина, має лише один корінь на проміжку Т.

2. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ - функції безперервні на проміжку Т, $g(x)$ строго спадає, а $f(x)$ строго зростає на цьому проміжку, тоді рівняння $f(x) = g(x)$ матиме лише один розв’язок на проміжку Т. Зазаначимо, що за проміжок Т можна взяти нескінченний проміжок $(-\infty; +\infty)$, проміжки $(a; +\infty)$, $(-\infty;$ a), $[a; +\infty)$, $(-\infty;\ b]$, інтервали й напівінтервали, відрізки [6].

Приклад 2.1. Знайти розв’язок рівняння:

$$x^3 + x = 10.$$

Розв’язання: Ліва частина $y = x^3 + x$ даного рівняння – зростаюча функція на всій числовій прямій. Тому, за теоремою 1 у рівняння є однин корінь. Коли $x = 2$ рівність виконується.

Відповідь: $x = 2$ [8].

Приклад 2.2. Знайти корені рівняння:

$$\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt{3}$$

Розв'язання: Визначимо ОДЗ x поданого рівняння:

$$\begin{cases} x^2-2x+3\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \begin{cases} D=4-12=-8<0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

$a=1>0$, то вітки параболи напрямлені вгору;

$D<0$, тому рівняння є нерозв'язне в дійсних числах.

При отриманих значеннях квадратний тричлен x^2-2x+3 – функція зростаюча (при чому, координата вершини параболи на графіку квадратного тричлена, має абсцису $x=1$). Тому ліва частина рівняння – є зростаюча функція, як сума трьох зростаючих функцій на проміжку $[1;\infty)$. За теоремою 1 рівняння має одного кореня. Виконавши підстановку $x=2$ в рівняння, матимемо:

$$\sqrt{2^2-2\cdot 2+3}+\sqrt{2-1}+\sqrt[3]{2-3}=\sqrt{3};$$

$\sqrt{3}+1-1=\sqrt{3}$ - вірна числова рівність при $x=2$.

Відповідь: $x = 2$ [1].

Приклад 2.3. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x}+\frac{2x+1}{x+2}=2$.

Розв'язання:

$$\sqrt{x}=2-\frac{2x+1}{x+2};\quad \sqrt{x}=\frac{3}{x+2};\quad \text{ОДЗ: } x\geq 0.$$

Функція $f(x) = \sqrt{x}$ - зростаюча на проміжку $[0; \infty+)$, а $g(x) = \frac{3}{x+2}$ - спадна на проміжку $[0; \infty+)$. Визначимо, що $x = 1$ – є єдиним коренем рівняння. Відповідь: $x = 1$.

Приклад 2.4. Розв'язати рівняння:

$$x^2 - x + 2 = \sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}.$$

Розв'язання: Розглянувши уважно рівняння можна стверджувати, що правою частиною даного рівняння $f(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}$ - є спадна функція на всій ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 7 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -7 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\sqrt{x+7}\sqrt{x-1} = \frac{\left(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1}} = \frac{x + 7 - (x-1)}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1}}$$

Якщо у звичайному дробі чисельник сталий, а знаменник зростає, то значення дробу спадає.

При $x \geq 1$, значення квадратного тричлену $x^2 - x + 2$ є зростаючим, вершиною параболи є координата $x = 0{,}5$, вітки параболи напрямлені вгору. Оскільки це рівняння за теоремою 1 має лише один корінь і при $x = 2$ рівність виконується, то $x = 2$ і буде розв'язком рівняння.

Відповідь: $x = 2$ [6].

Приклад 2.5. Розв'язати рівняння:

$$\log_5(x+3) = 3 - x.$$

Розв'язання:

$f(x) = log_5(x+3)$ – зростаюча функція;

$f(x) = 3 - x$ – спадна

Рівність правильна при $x = 2$.

Перевірка: $\log_5 5 = 3 - 2; 1 = 1$.

$x = 2$ – корінь.

Відповідь: $x = 2$.

Приклад 2.6. Розв'язати рівняння

$$x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64.$$

Розв'язання: Можна стверджувати, що $x \leq 0$ не є розв'язокм запропонованого рівняння, бо в такому випадку $x \cdot 2^{x^2+2x+3} \leq 0$. Для $x > 0$ функція $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ є безперервною і строго зростаючою, як значення добутку двох безперервних, додатних, строго зростаючих для даних x функцій $f(x) = x$ та $g(x) = 2^{x^2+2x+3}$. Тому, в межах $x > 0$ функція $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ набуває кожного свого значення чітко в одній точці. Тому можна стверджувати, що $x = 1$ являється єдиним розв'язокм вказаного рівняння.

Відповідь: {1} [8].

Приклад 2.7. Знайти значення нерівності:

$$2^x + 3^x + 4^x < 3\,.$$

Розв'язання: Оскільки кожна з функцій $b = 2x, b = 3x, b = 4x$ є безперервною й строго зростаючою на всій осі, тому такими ж самими характеристиками володіє й початкова функція $y = 2^x + 3^x + 4^x$. Розглянувши цю рівність можна стверджувати, коли $x = 0$ функція $y = 2^x + 3^x + 4^x$ набуває значення 3. Оскільки функція є безперервною та строго монотонною при $x > 0$ отримаємо $2^x + 3^x + 4^x > 3$, а при $x < 0$ отримаємо $2^x + 3^x + 4^x < 3$. Тому, розв'язками поданої нерівності є всі $x < 0$.

Відповідь: $(-\infty;\ 0)$.

Приклад 2.8. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[4]{8-x}-\sqrt[8]{x-2}=2.$$

Розв'язання. ОДЗ нашого рівняння лежить у межах $2 \le x \le 18$. На ОДЗ функції $f(x)=-\sqrt[8]{x-2}$ і $g(x)=\sqrt[4]{18-x}$ являються безперервними й строго спадними, тому, безперервною та спадною є функція $h(x)=\sqrt[4]{18-x}-$ $-\sqrt[8]{x-2}$. Таким чином кожного свого значення функція $h(x)$ набуває лише в єдиній точці. Оскільки $h(2)=2,$ де $x=2$, тому це значення і буде значенням єдиного кореня початкового рівняння.

Відповідь: $\{2\}$[1].

2.1.2 Використання обмеженості функції. Оцінка лівої і правої частин рівнянь.

Розв'язуючи рівняння і нерівності, використання властивості обмеженості знизу чи зверху функції у деяких межах приводить до досить простого знаходження коренів рівнянь.

Якщо існує число C таке, що для кожного $x \in D$ виконується нерівність

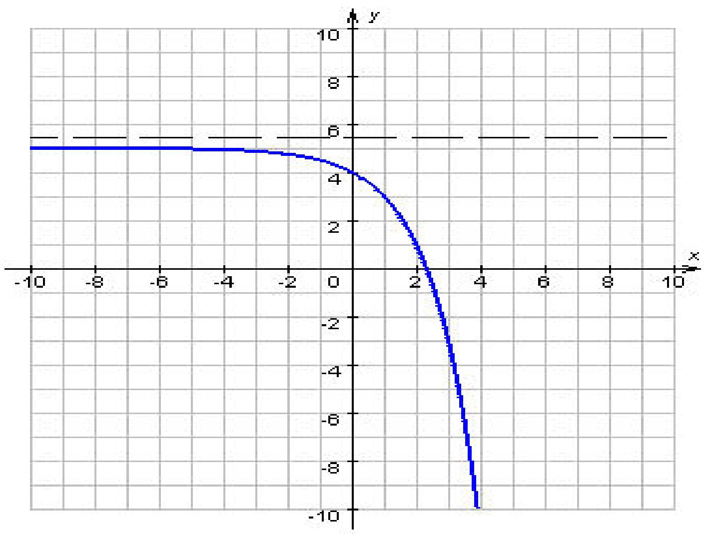


Рис. 2.3

$f\ (x)\ \leq\ C$, функція $f(x)$ називається обмеженою зверху на множині D (рис. 2.3).

Якщо існує число C таке, що для кожного $x \in D$ виконується нерівність $f\ (x)\ \geq\ C,$ функція $f(x)$ називається обмежено. знизу на множині D (Рис. 2.4).

Функція, обмежена й зверху, і знизу, називається обмеженою на множині D. Геометрично обмеженість функції $f(x)$ на множині D означає, що графік функції $y\ =\ f\ (x), x \in D$ лежить у смузі $c\ \leq\ y\ \leq\ C$ (рис. 2.5).

Якщо функція не є обмеженою на множині, то говорять, що вона не обмежена.

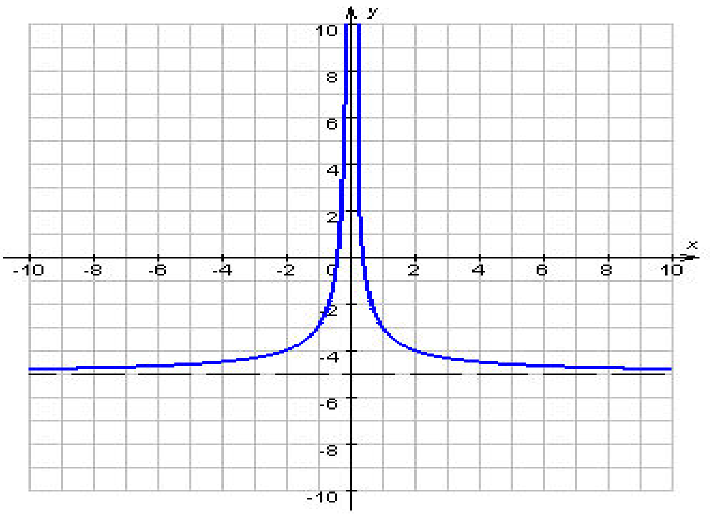


Рис. 2.4

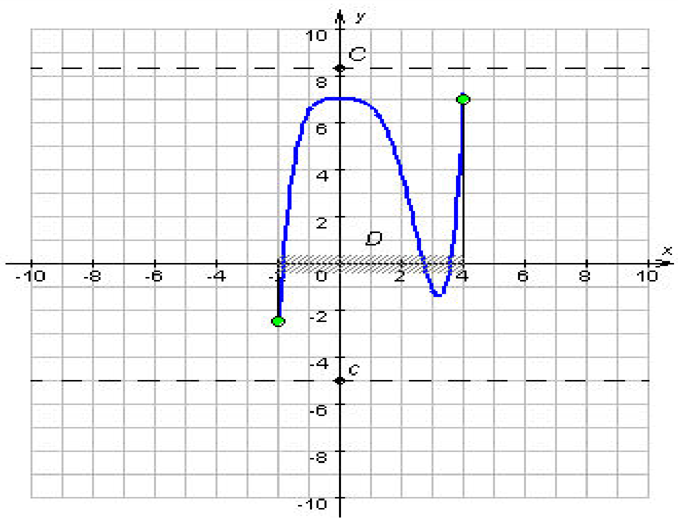


Рис. 2.5

Прикладом функції, обмеженої знизу на всій числовій осі, є функція $y = x^2$. Прикладом функції, обмеженої зверху на множині $(-\infty;\ 0)$ є функція $y = 1/x$. Прикладом функції, обмеженої на всій числовій осі, є функція $y = sin\, x$.

Деякі рівняння можна розв'язати за допомогою оцінки лівої та правої частин рівняння. Даний прийом базується на такій властивості: нехай потрібно розв'язати рівняння виду $f(x) = \varphi(x)$ і з'ясувалося, що $f(x) \geq a, \varphi(x) \leq a$, то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді і тільки тоді, коли $f(x) i \varphi(x)$ одночасно дорівнюють a. Тобто

якщо $\begin{cases} f(x) \geq a, \\ \varphi(x) \leq a, \end{cases}$ то $\begin{cases} f(x) = a, \\ \varphi(x) = a \end{cases}$.

Приклад 2.9. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^4 + x^2 - 2} = 2x - 1 - x^{2.}.$$

Розв'язання: В даному рівнянні множина значень функції, що стоїть у лівій частині – множина невід'ємних чисел, а множина значень функції, що стоїть в правій частині – множина не додатних чисел: $2x - 1 - x^2 = -(x-1)^2 \leq 0$

Тому це рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^4 + x^2 - 2 = 0, \\ 2x - 1 - x^2 = 0. \end{cases}$

Звідси одержуємо єдиний корінь рівняння $x = 1$ [3].

Приклад 2.10. Розв'язати рівняння:

$$2^{sin^2 x} = \cos x.$$

Розв'язання: Очевидно, що звичайними методами розв'язати це рівняння неможливо, тому використаємо обмеженість правої та лівої части рівняння.

Так як $sin^2 x \geq 0$, то ліва частина рівняння обмежена знизу числом 1. Права частина також обмежена числом 1, але вже зверху, тому задане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2^{\sin^2 x} = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi\kappa, \kappa \in \mathrm{Z} \\ x = 2\pi n, n \in \mathrm{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathrm{Z}.$$

Відповідь: *2πn.*

Аналогічно розв’язується рівняння виду $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = 0,$ в якому всі функції-доданки невід’ємні. Очевидно, що в цьому випадку рівність $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = 0,$ обов’язково буде виконуватись, лише коли всі функції-доданки дорівнюють нулю. Тобто, сума кількох невід’ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю. Розглянемо приклади.

Приклад 2.11. Розв'язати рівняння

$$\log_2(1 + \sqrt{x^2 + x^4}) + \log_2(1 + x^6) = 0.$$

Розв’язання:

ОДЗ: $x \in R$.

$$\log_2(1 + \sqrt{x^2 + x^4}) \geq 0, \log_2\left(1 + x^6\right) \geq 0.$$

Маємо: $\begin{cases} \log_2\left(1 + \sqrt{x^2 + x^4}\right) = 0, \\ \log_2\left(1 + x^6\right) = 0 \end{cases}$

Звідси, $x = 0$ [4].

Приклад 2.12. Розв’язати рівняння

$$\left|x^2-7x+12\right|+\left|x^2-9\right|+\left|6-2x\right|=0.$$

Розв’язання:

Задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2-7x+12=0, \\ x^2-9=0, \\ 6-2x=0. \end{cases}$

З третього рівняння одержуємо $x = 3$, що задовольняє і всій системі.

Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x = 3$ [9].

Приклад 2.13. Розв’язати рівняння

$$2\sin x=\cos x+4.$$

Розв’язання:

Множина значень функції $f(x)=2\sin x$ є інтервал $[-2;2]$, а функції $g(x)=\cos x+4$ є інтервал $[3;5]$.

Оскільки спільні значення відсутні, то рівняння розв’язку не має [3].

Приклад 2.14. Розв’язати рівняння

$$\sin(x^3+2x^2+1)=x^2+2x+2$$

Розв’язання: Для будь-якого дійсного числа x маємо $\sin(x^3+2x^2+1)\le 1$, $x^2+2x+2=(x+1)^2\ge 1$. Оскільки для будь-якого значення x ліва частина рівняння не перевершує одиниці, а права частина завжди не менше одиниці, то дане рівняння може мати розв’язок тільки при $x=-1$.

При $x=-1$ $x^2+2x+2=1$, $\sin(-1+2\cdot 1+1)=\sin 2\neq 1$, тобто при $x=-1$ дане рівняння так само коренів не має .

Відповідь: 0 [4].

Приклад 2.15. Розв’язати рівняння

$$x^3 - x - \sin \pi x = 0.$$

Розв’язання: Очевидно, що $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ є розв’язками даного рівняння. Для знаходження інших розв’язків у силу непарності функції $f(x) = x^3 - x - sin\pi x$ досить знайти його розв’язок в області $x > 0, x \neq 1$, оскільки, якщо $x_0 > 0$ є його розв’язокм, де й *(-x₀)* також є його розв’язокм.

Розіб'ємо множину $x > 0$, $x = 1$, на два проміжки: $(0;\ 1)$ і $(1;\ +\infty)$

Перепишемо початкове рівняння у вигляді $x^3 - x = sin\,\pi x$. На проміжку (0;1) функція $g(x) = x^3 - x$ приймає тільки від’ємні значення, оскільки $x^3 < x$, а функція $h(x) = sin\pi x$ тільки додатні. Отже, на цьому проміжку рівняння не має розв’язків.

Нехай x належить проміжку (1;+∞). Для кожного з таких значень x функція $g(x) = x^3 - x$ приймає додатні значення, функція $h(x) = sin\pi x$ приймає значення різних знаків, причому на проміжку (1; 2] функція $h(x) = sin\pi x$ недодатна. Отже, на проміжку (1; 2] рівняння розв’язків не має.

Якщо ж $x > 2$, то $|sin\,\pi x| \leq 1, x^3 - x = x(x^2 - 1) > 2 \cdot 3 = 6$, а це означає, що й на проміжку (1;+∞) рівняння також не має розв’язків.

Отже, $x = 0$, $x = 1$ і $x = -1$ і тільки вони є розв’язками вихідного рівняння.

Відповідь: {-1; 0; 1} [16].

Приклад 2.16. Розв’язати нерівність

$$\frac{1-x}{1+x} < 2^x.$$

Розв’язання: ОДЗ нерівності є всі дійсні x, крім $x = -1$. Розіб'ємо ОДЗ нерівності на три множини: $-\infty < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < +\infty$ і розглянемо нерівність на кожному із цих проміжків.

Нехай $-\infty < x < -1$. Для кожного із цих x маємо $g(x) = \frac{1-x}{1+x} < 0$, а $f(x) = 2^x > 0$. Отже, всі ці x є розв'язками нерівності.

Нехай $-1 < x \le 0$. Для кожного із цих x маємо $g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} \ge 1$, а $f(x) = 2^x \le 1$. Отже, жодне із цих x не є розв'язком даної нерівності.

Нехай $0 < x < +\infty$. Для кожного із цих x маємо $g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} < 1$, а $f(x) = 2^x > 1$. Отже, всі ці x є розв'язками вихідної нерівності.

Відповідь: $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ [8].

2.1.3 Використання періодичності функції

Функція *f (x)* називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо виконуються дві умови:

якщо $x \in D$, то $x + T$ і $x - T$ також належать області визначення D *(f (x));*
для кожного $x \in D$ виконана рівність

$$f\,(x + T) = f\,(x).$$

Оскільки $x - T \in D$ то з наведеного визначення видно, що

$$f\,(x - T) = f\,(x).$$

Якщо T – період функції *f (x),* то очевидно, що кожне число nT, де $n \in Z$, $n \neq 0$, також є періодом цієї функції.

Найменшим додатним періодом функції називається найменше з додатних чисел T, що є періодом даної функції.

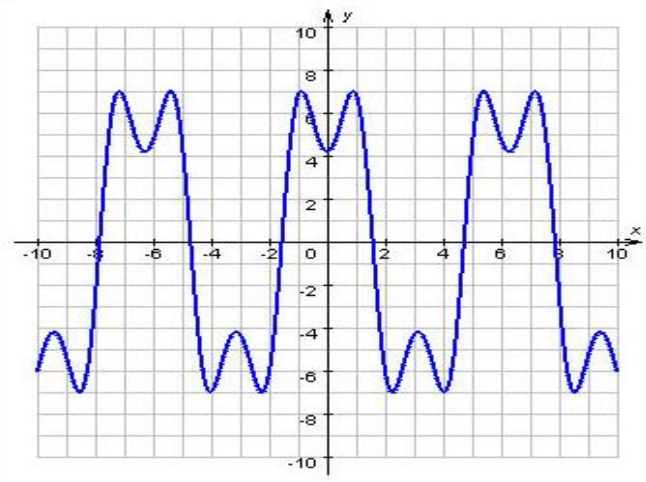


Рис. 2.6. Графік періодичної функції

$$y = 7\sin\left(\frac{5}{2}\cos x\right)$$

Графік періодичної функції спочатку будують на проміжку $[x_0; x_0 + T)$, а потім повторюють на всю область визначення.

Найпоширенішим прикладом періодичних функцій служать тригонометричні функції $y = sin\, x$, $y = cos\, x$ (період цих функцій дорівнює 2π), $y = tg\, x$ (період дорівнює π) і інші. Функція $y = const$ також є періодичною. Для неї періодом є будь-яке число $T \neq 0$ [6].

Підсумовуючи вище викладене відзначимо властивості періодичних функцій:

- Якщо $f(x)$ – періодична функція з періодом T, то функція

$$g(x) = A \cdot f(kx + b),$$

де $k \neq 0$ також є періодичною з періодом $T_1 = \dfrac{T}{k}$.

- Нехай функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ визначені на всій числовій осі і є періодичними з періодами $T_1 > 0$ і $T_2 > 0$. Тоді якщо $\dfrac{T_2}{T_1} \in Q$, то функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ періодична з періодом T, рівним найменшому загальному кратному чисел T_1 і T_2 [12].

Приклад 2.17. Функція *f(x)* періодична з періодом *T*=5. Відомо, що $f(1)=4;\ f(-2)=1$. Знайдіть

$$f(11)-3f(-7)+f(3)$$

Розв’язання. Перетворимо окремо кожний доданок:

$$f(11)=f(1+2\cdot 5)=f(1)=4$$
$$f(-7)=f(-2-5)=f(-2)=1$$
$$f(3)=f(2+5)=f(-2)=1$$

Тоді

$$f(11)-3f(-7)+f(3)=4-3\cdot 1+1=2$$

Відповідь: 2 [8].

Приклад 2.18. Знайдіть період функції

$$f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\left\{\frac{x}{\pi}\right\}$$

Розв’язання. Перетворимо даний вираз:

$$f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\left\{\frac{x}{\pi}\right\}=1-2\sin^2 x+\left\{\frac{x}{\pi}\right\}=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\left\{\frac{x}{\pi}\right\}=$$
$$=1-\frac{1}{4}(1+\cos 4x)+\left\{\frac{x}{\pi}\right\}.$$

$f_1(x)=\cos 4x$ має період $T_1=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$;

$f_2(x)=\left\{\frac{x}{\pi}\right\}$ має період $T_2={}^{1}\!\big/_{\frac{1}{\pi}}=\pi$.

Тоді функція *f(x)* має період

$$T = HOK(T_1; T_2) = HOK\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) = \pi$$

Відповідь: π. [11].

Приклад 2.18. Нехай *f(x)* - періодична функція з періодом 3, така, що

$$f(x) = x^2;\ 0 \le x < 3.$$

Розв'язати рівняння:

$$f(2x+6) + 3f(x) = 9$$

Графік функції $f(x) = x^2$ на множині [0;3) зображений на рис.2.7

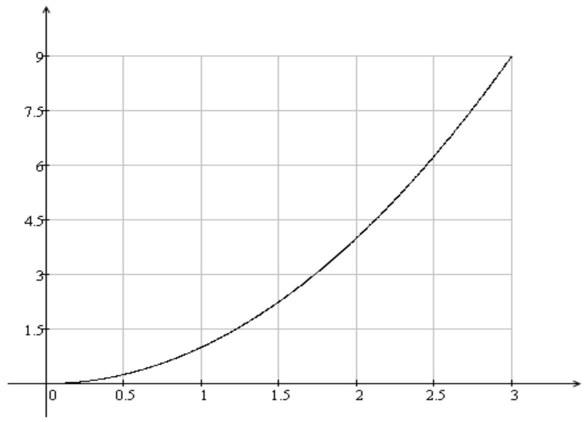


Рис.2.7

Таким чином 3 - період функції $f(x)$, те $f(2x+6) = f(2x+3) = f(2x)$, тоді дане рівняння прийме вид $f(2x) + 3f(x) = 9$, розглянемо два випадки.

1) нехай $\begin{cases} 0 \le x < 3 \\ 0 \le 2x < 3 \end{cases}$, тобто $0 \le x < \frac{3}{2}$, тоді рівняння прийме вид:

$$\begin{cases} 4x^2+3x^2-9=0 \\ 0\le x<\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{9}{7} \\ 0\le x<\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{7}} \\ 0\le x<\dfrac{3}{2} \end{cases},$$ звідси $x=\dfrac{3}{\sqrt{7}}<\dfrac{3}{2}$ і

отримуємо $x_1=\frac{3}{\sqrt{7}}+3n,\ n\in Z$

2) нехай $\begin{cases} 0\le x<3 \\ 3\le 2x<6 \end{cases}$ те $\dfrac{3}{2}\le x<3$, тоді $0\le 2x-3<3$ рівняння перетвориться на:

$$\begin{cases} (2x-3)^2+3x^2-9=0 \\ \dfrac{3}{2}\le x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_2-12x=0 \\ \dfrac{3}{2}\le x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{12}{7} \end{array}\right. \\ \dfrac{3}{2}\le x<3 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{12}{7};$$

отже $x=\dfrac{12}{7}$, $(\dfrac{3}{2}<\dfrac{12}{7}<3)$

таким чином $x_2=\dfrac{12}{7}+3k$, $(k\in Z)$.

Відповідь: $\left\{\frac{3}{\sqrt{7}}+3n, n\in Z; \frac{12}{7}+3k, k\in Z\right\}$[9].

2.1.4 Використання парності функції

Функція $f(x)$ називається парною, якщо для кожного $x\in D$ виконуються рівності:

1) $-x\in D$,

2) $f(-x) = f(x)$.

Графік парної функції (рис .2.8) на всій області визначення симетричний щодо осі OY. Прикладами парних функцій можуть служити $y = cos\,x$, $y = |x|, y = x2 + |x|$

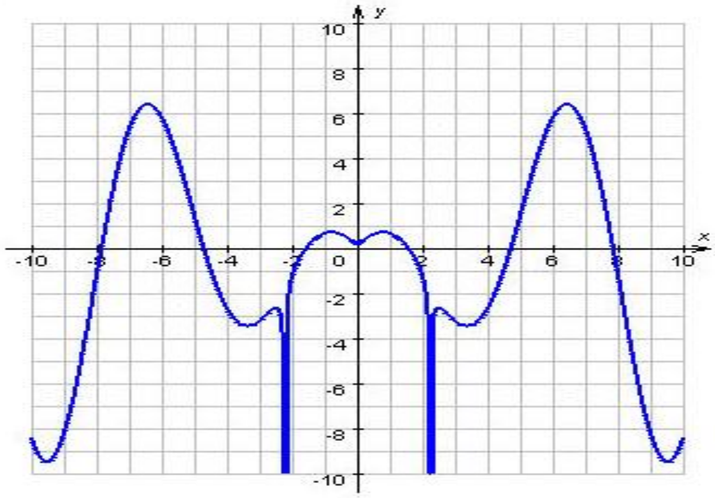


Рис. 2.8 Графік парної функції $y = |x|\cos x + \dfrac{\cos x}{|x^2 - 5|}$

Функція *f(x)* називається непарною, якщо для кожного $x \in D$ виконуються рівності:

1) $x \in D$,

2) $f(-x) = -f(x)$.

Іншими словами функція називається непарною, якщо її графік на всій області визначення симетричний відносно початку координат. Прикладами непарних функцій є $y = \sin x$, $y = x^3$ (рис. 2.9).

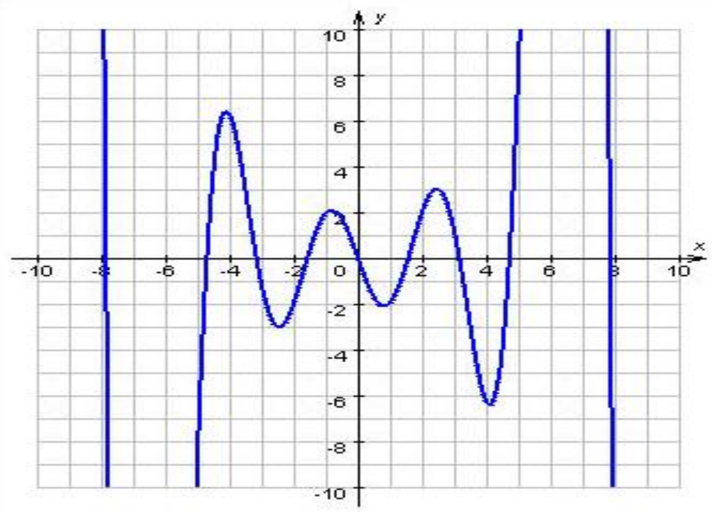


Рис. 2.9 Графік непарної функції $y = (0{,}4x^2 - 4x)\cos x$

Не слід думати, що будь-яка функція є або парною, або непарною. Так, функція $y = \sqrt{x+1}$ не є ні парною, ні непарною, тому що її область визначення $D = [-1;\infty)$ несиметрична відносно початку координат. Область визначення функції $y = x^3 + 1$ охоплює всю числову вісь і тому симетрична відносно початку координат, однак $f(-1) \neq f(1)$. А це значить, що функція не є ні парною, ні непарною, тобто є функцією загального виду (ФЗВ).

Якщо область визначення функції симетрична відносно початку координат, то цю функцію можна представити у вигляді суми парної й непарної функцій.

Такою сумою є функція

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x - f(-x))}{2}$$

Перший доданок є парною функцією, другий - непарною.

Порівняльна ілюстрація функцій різної парності зображена на рис. 2.10

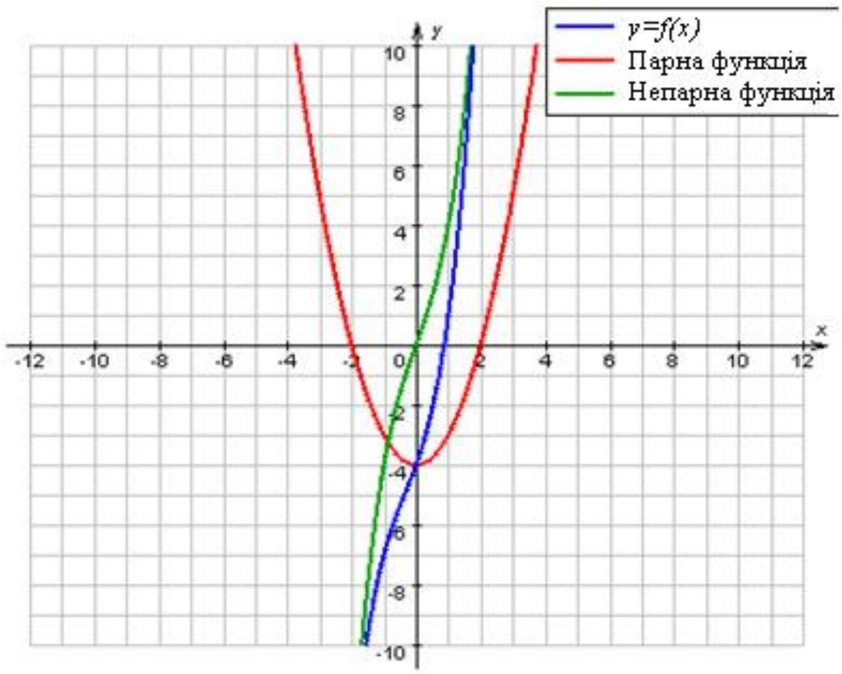


Рис. 2.10

Дослідження функцій на парність полегшується наступними твердженнями.

Сума парних (непарних) функцій є парною (непарної) функцією.

Добуток двох парних або двох непарних функцій є парною функцією.

Добуток парної й непарної функції є непарною функцією.

Якщо функція f(x) парна (непарна), то й функція 1/f(x) парна (непарна) [12].

Приклад 2.19. Чи може при якому-небудь значенні *a* рівняння

$$2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5$$

мати 5 коренів?

Розв'язання: Позначимо *f(x)* = $2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2$. *f(x)* – функція парна, тому, якщо x_0 – корінь даного рівняння, то $-x_0$ – теж. x = 0 не є коренем даного рівняння. Отже, число коренів у цього рівняння при будь-якому дійсному *a* парне, тому 5 коренів воно мати не може.

Відповідь: не може [9].

Приклад 2.20. При якому a рівняння $2ax^4 - |x| + x^2 = a^2 - 1$ має єдиний корінь?

Розв'язання: Розглядаємо функцію *f(x)* = $2ax^4 - |x| + x^2 - a^2 + 1$, яка є парною, тому $x_0 = -x_0 = 0$. Тоді при $x = 0$, $a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$.

Перевірка: 1) при $a = 1$, $x = 0$; 2) при $a = -1$, $x = 0$, $x = 1$, і т. д. Отже, при а = 1 рівняння має один корінь.

Відповідь: так [10].

2.1.5 Використання області визначення функції (ОДЗ)

Область визначення функції - це множина всіх припустимих дійсних значень аргументу x (змінної x), при яких функція *y=f(x)* визначена. Область визначення ще називають областю допустимих значень функції (ОДЗ). Для знаходження ОДЗ функції потрібно проаналізувати дану відповідність і визначити операції, які не можна виконувати над певним видом функцій чи над усіма функціями (ділення на нуль, піднесення в раціональний степінь від'ємного числа, логарифмічні операції над від'ємними числами й т.п.).

Бувають випадки коли визначення ОДЗ дозволяє довести, що рівняння (або нерівність) розв'язків не має, а іноді дозволяє знайти розв'язок рівняння (або нерівності) безпосередньою підстановкою чисел з ОДЗ [12].

Приклад 2.21. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3-x} = \log_5(x-3)$$

Розв'язання: ОДЗ цього рівняння складається із всіх x, які одночасно задовольняють умовам $3-x \geq 0$ і $x-3 \leq 0$, тобто ОДЗ є порожня множина. Цим розв'язок рівняння й завершується, тому що встановлено, що жодне число не може бути розв'язком, тобто що рівняння не має коренів.

Відповідь: Ø [11].

Приклад 2.22. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{|\sin x|} = \sqrt[4]{-|\sin x|} + \tan x$$

Розв'язання: ОДЗ цього рівняння складається із всіх x, які одночасно задовольняють умовам $|\sin x| \geq 0$, $-|\sin x| \geq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, тобто ОДЗ є $x = \pi k, k \in Z$. Підставляючи ці значення x у рівняння, одержуємо, що його ліва й права частини рівні 0, а це означає, що всі $x = \pi k, k \in Z$, є його розв'язками.

Відповідь: $\{\pi k, k \in Z\}$.

Приклад 2.23 Розв'язати нерівність

$$\log_5 x < \sqrt{1-x^4}$$

Розв’язання: ОДЗ нерівності є всі *x,* що задовольняють умові $0 < x \leq 1$. Ясно, що x=1 не є розв’язком нерівності. Для x із проміжку $0 < x < 1$ маємо $\log_5 x < 0$, а $\sqrt{1 - x^4} > 0$. Отже, всі x із проміжку $0 < x < 1$ є розв’язками нерівності.

Відповідь: (0;1).

Приклад 2.24 Розв’язати нерівність

$$\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$$

Розв’язання: ОДЗ нерівності є всі x із проміжку$-3 \leq x \leq 9$. Розіб'ємо цю множину на два проміжки $-3 \leq x \leq 0$ й $0 < x \leq 9$.

Для x із проміжку $-3 \leq x \leq 0$ маємо $\sqrt{x+3} \geq 0$, $\sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$. Отже, $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt{3}$ на цьому проміжку, і тому нерівність не має розв’язків на цьому проміжку.

Нехай x належить проміжку$0 < x \leq 9$, тоді $\sqrt{x+3} \geq \sqrt{3}$ й $\sqrt[4]{9-x} \geq 0$. Отже, $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$ для таких x, виходить, на цьому проміжку нерівність також не має розв’язків.

Отже, нерівність розв’язків не має.

Відповідь: Ø. [5]

Приклад 2.25 Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x-10} - 4x^2 = \sqrt[4]{4-2x}\,.$$

Його ОДЗ задається системою$\begin{cases} x-10 \geq 0, \\ 4-2x \geq 0, \end{cases} \begin{cases} x \geq 10, \\ x \leq 2, \end{cases}$ яка не має розв’язків.

Тобто, ОДЗ заданого рівняння не містить жодного числа, і тому це рівняння не має коренів.

Приклад 2.26. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x-2}+x^2=\sqrt{4-2x}+x+2.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-2\geq 0, \\ 4-2x\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ 2x\leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ x\leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Область допустимих значень для змінної x складається тільки з числа 2. Легко перевірити, що x = 2 – корінь рівняння.

Перевірка

$$\sqrt{x-2}+x^2=\sqrt{2-2}+2^2=4.$$
$$\sqrt{4-2x}+x+24=4=\sqrt{4-2\cdot 2}+2+2=4.$$
$$4=4$$

Отже, x = 2 – корінь рівняння.

Аналогічно розв’язуються рівняння:

1) $\sqrt{x-3}+2x^2=\sqrt[4]{6-2x}+18$ (Відповідь: 3);

2) $\sqrt{x-3}=\sqrt[6]{2-x}+5x$ (Відповідь: $\emptyset$);

3) $\sqrt[6]{x^2-1}+x^2=\sqrt[4]{2-2x^2}+x+2$ (Відповідь: -1). [4].

2.2. Введення параметра

Спосіб введення параметра полягає в тому, що константу, що входить до складу рівняння, приймають за параметр і знаходять корені рівняння відносно параметра.

Наприклад маємо рівняння виду $x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$.

Нехай $\sqrt{2}=a$.

Отримаємо рівняння $x^3-(a+1)x^2+a^2=0$

Знайдемо розв’язки рівняння відносно параметра a: $a^2-x^2a+x^3-x^2=0,$

$$a^2 - x^2 a + x(x^2 - x) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} a = x, \\ a = x^2 - x. \end{array}\right.$$

Отримано один із коренів рівняння: $x = \sqrt{2}$.

Наступні корені знайдемо з рівняння $x^2 - x = \sqrt{2}$.

Тому , коренями рівняння будуть числа: $\frac{1-\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{1+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$.

Такий самий метод застосовують для розв'язання наступних рівнянь:

1) x^4 - $2\sqrt{3}x^{\ 2} - x + 3$ - $\sqrt{3} = 0$; Заміна $\sqrt{3} = a$.

Відповідь: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}+1}}{2}$.

2) $x^4 - 2\sqrt{7}x^2 + x + 7 - \sqrt{7} = 0$; Заміна $\sqrt{7} = a$.

Відповідь: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{7}+1}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}$.

3) $x^3 - (3\sqrt{5} + 1)x^2 + 45 = 0$; Заміна $\sqrt{7} = a$.

Відповідь: $x_1 = 3\sqrt{5}$, $x_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{12\sqrt{5}+1}}{2}$.

4) $x^4 + \mathrm{x}^2 - 2\sqrt{5}x^2 - 2\sqrt{5} + 2\mathrm{x} + 5 = 0$; Заміна $\sqrt{5} = a$.

Відповідь: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{5}+1}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{5}-7}}{2}$ [2].

2.3. Розв'язування рівнянь із застосуванням формул скороченого множення.

До формул скороченого множення відносяться:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$$

Для розв’язання поданих нижче рівнянь застосуємо формулу:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$$

Приклад 2.27. Розв’язати рівняння $\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{x+1} = 3$.

Розв’язання: Використавши формулу куба суми, маємо: $\sqrt[3]{(8-x)(x+1)} = 2$,

$$x^2 - 7x = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 7.$$

Відповідь: 0 і 7.

Приклад 2.28. $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-7} = 2$

Відповідь: -1 і 7.

Приклад 2.29. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x} = 1$

Відповідь: 0.

Приклад 2.30. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2} = \sqrt[3]{x-2}$

Відповідь: 0.

Приклад 2.31. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{9x+1}$

Відповідь: $-1; -\frac{1}{10}$; 0.

2.4. Тригонометричні рівняння

При знаходженні розв’язків деяких тригонометричних рівнянь можна використати одиничне коло. Так розв’язувати можна не тільки рівняння виду $\sin x = 0; \sin x = \pm 1; \cos x = 0; \cos x = \pm 1$, та й рівняння $\pm \sin x \pm \cos x = \pm 1$.

При розв’язуванні тригонометричних рівнянь застосовують декілька стандартних алгоритмів, та розв’язування саме цього рівняння з використанням одиничного кола – це спосіб, що дозволяє побачити розв'язок усно. Для будь-якого з рівнянь $\pm\sin x \pm \cos x = \pm 1$ на проміжку $[0;2\pi)$ є розв'язком два з чотирьох чисел: $-\frac{\pi}{2};0;\frac{\pi}{2};\pi,$ що є точками $P_{-\frac{\pi}{2}}, P_0, P_{\frac{\pi}{2}}, P_\pi$ одиничного кола. Визначивши ці числа за допомогою усної перевірки, можна записати загальний розв'язок. При чому інших розв'язків рівняння не має, бо для будь-якої другої точки P_α, що відрізняється від зазначених , $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ за модулем дорівнюють довжинам катетів трикутника, розмір гіпотенузи якого є 1, і ніяка з рівностей $\pm\sin x \pm \cos x = \pm 1$неможлива за властивістю сторін [11].

Розглянемо рівняння $\sin x - \cos x = -1$: визначимо підстановкою, що на проміжку $[0;2\pi)$ розв'язками є числа $-\frac{\pi}{2}$ і 0.

Відповідь. $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\pi n; n\in Z\right\}$.

Описаний метод можна використати і для розв'язання більш складніші рівняння, наприклад,

$\cos nx = \pm\sin nx,$ де $n \in N$ [11].

2.5. Застосування похідних до розв'язування рівнянь

Розглянемо декілька типів рівнянь, в яких використовуються похідні. Серед них рівняння, в яких потрібно з'ясувати, чи має розв'язок те чи інше рівняння. Ці рівняння зводяться до знаходження екстремальних значень функції або до знаходження їх областей значень [4].

Приклад 2.32. При якому значенні $a \in R$ має розв'язки рівняння

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{8-2x}=a.$$

Розв'язання: Область визначення даного рівняння – інтервал $[2;4]$. Розглянемо на ній функцію *f(x)*:

$$f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x}.$$

Тоді на інтервалі $(2;4)$

$$f'(x) > 0 \ \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{\sqrt{8-2x}} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{8-2x} > 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow 3x < 8 \Leftrightarrow x < \frac{8}{3},$$

так що 8/3 єдина критична точка функції *f(x)*, яка є до того ж точкою максимум, оскільки f (2) = 2, f (4) = $\sqrt{2}$, f (8/3) = $\sqrt{6}$. Отже, *f(x)* приймає найбільше значення при x=8/3, а найменше значення – при x=4. Так як функція *f(x)* неперервна, то її область значень є інтервал $[\sqrt{2};\sqrt{6}]$ між її найбільшим і найменшим значенням, тобто дане рівняння має розв'язок , якщо $a \in [\sqrt{2};\sqrt{6}]$.

Відповідь. $a \in [\sqrt{2};\sqrt{6}]$ [5].

Приклад 2.33. Скільки розв'язків має рівняння

$$\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-1} = 4$$

Розв'язання: Область визначення даного рівняння – інтервал $\left[\frac{2}{3};\infty\right)$. Розглянемо на цьому інтервалі функцію *f (x)*

$$f(x) = \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-1}.$$

Тоді $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

$$f'(x) > 0, якщо \frac{3}{\sqrt{3x-2}} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0,$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3x-2}} > \frac{1}{\sqrt{2x-1}},$$
$$3\sqrt{2x-1} > 2\sqrt{3x-2},$$
$$9(2x-1) > 4(3x-2),$$
$$18x-9 > 12x-8,$$
$$6x > 1,$$
$$x > \frac{1}{6}.$$

Враховуючи область визначення, маємо $x > \frac{2}{3}$. Таким чином, функція *f(x)* зростаюча, так що дане рівняння не може мати більше одного розв’язку.

З іншого боку, взявши будь – яке велике значення *x*, наприклад, *x* = 200, маємо $f(200) = \sqrt{598} - \sqrt{399} > 24 - 19 > 4,$ так що *f(x)* як неперервна функція приймає всі значення між $f(1) = 0$ і $f(200)$, в тому числі і значення 4.

Відповідь. Рівняння має лише 1 корінь [11].

Приклад 2.34. Розв’язати рівняння

$$3x^4 - 4x^3 + 2 = 0.$$

Дослідимо функцію *f(x)* = $3x^4 - 4x^3 + 2$.

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1) = 0, x_1 = 0, x_2 = 1.$$

На проміжках $(-\infty; 0]$ i $[0; 1]$ функція спадає, а на проміжку [1; +∞) – зростає. *f(0) = 2, f(1) = 1*- найменше значення функції, тому дорівнювати нулю функція не може.

Відповідь: рівняння не має розв’язків [5].

2.6. Рівняння з нескінченним числом квадратних радикалів.

В шкільному курсі алгебри і початків аналізу проходить знайомство з теоремою Вейєрштраса: якщо послідовність монотонна і обмежена, то вона має границю.

Розглянемо як дана теорема застосовується до розв'язування рівнянь з нескінченним числом квадратних коренів.

Приклад 2.35. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}=7.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності : $x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}=49.$

Так як другий доданок співпадає з лівою частиною початкового рівняння, то

$x+7=49; x=42.$ Відповідь. 42

Приклад 2.36. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x+\ldots}}}}}}=3.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності, одержимо

$$1+\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x+\ldots}}}}}=9; \sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x+\ldots}}}}}=8;$$

Ще раз підносимо до квадрата $x+\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x+\ldots}}}}=64.$

Оскільки другий доданок дорівнює 3, знайдемо

$x+3=64;$

$x=61.$

Можна також чергувати корені різного порядку. Наведемо приклади такого роду [11].

Приклад 2.37.

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x+\sqrt[3]{1+\sqrt{x+\ldots}}}}=2.$$

$$\begin{aligned}
&1+\sqrt{x+\sqrt[3]{1+\sqrt{x+\ldots}}}=8,\\
&x+\sqrt[3]{1+\sqrt{x+\ldots}}=49,\\
&x+2=49,\\
&x=47.
\end{aligned}$$

[5].

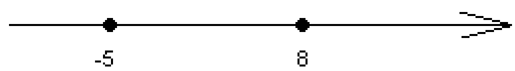
2.7. Розв’язування рівнянь, що містять змінну під знаком модуля

Для розв’язування рівнянь, що містять змінну під знаком модуля, найчастіше використовуються такі методи: за означенням модуля, піднесенням до квадрату лівої і правої частини, метод інтервалів. Але можна розв’язувати ці рівняння, використовуючи формулу відстані між двома точками координатної прямої.

Приклад 2.38.

$$|x+5|+|x-8|=16.$$

Розв’язання: На числовій прямій потрібно знайти точки, сума відстаней яких від точок x = - 5 і x = 8 дорівнює 16. Позначимо через y відстань, на якій знаходиться точка зліва від точки x = -5, одержимо допоміжне рівняння y + (y + 13) = 16 або y = 1,5, тобто x_1 = - 6,5.



В середині інтервалу $[-5;8]$ точок, що задовольняють рівняння, немає. Справа від точки $x = 8$ на відстані, що дорівнює 1,5, знаходиться друга точка, що задовольняє рівняння : $x_2 = 9{,}5$.

Відповідь. $\{-6{,}5;9{,}5\}$ [5].

Використовуючи числову пряму можна встановити, що рівняння виду $|x-a|+|x-b|=c$, де $c \geq 0$, якщо $|a-b|<c$ має 2 корені, причому ці корені знаходяться поза інтервалом $[a;b]$. Якщо $|a-b|=c$ рівняння має нескінченну множину коренів, причому розв'язком є інтервал $[a;b]$. Якщо $|a-b|>c$ рівняння коренів не має.

Порівнюючи відстань між точками числової прямої, легко встановити, що рівняння виду $|x-a|-|x-b|=c$ має один розв'язок, якщо $|a-b|>|c|$; в цьому випадку шукана точка знаходиться всередині інтервалу $(a;b)$. Якщо $|a-b|=|c|$ рівняння має нескінченну множину коренів. Якщо $|a-b|<|c|$ рівняння коренів не має.

В тих випадках, коли коефіцієнти при x відмінні від 1, їх можна винести за знак модуля, а потім розв'язувати рівняння прийомом, поданим вище. Приклад 2.38. Розв'язати рівняння

$$|10-2x|-|8x-24|=0.$$

Розв'язання: Запишемо рівняння у вигляді

$$2|x-5|-8|x-3|=0;$$
$$|x-5|-4|x-3|=0;$$
$$|x-5|=4|x-3|.$$

На числовій прямій потрібно знайти точки, відстань яких від точки

$x = 3$ були в 4 рази менші, ніж від $x = 5$.

1) Нехай шукана точка знаходиться поза інтервалом $[3;5]$ зліва від точки $x = 3$ на відстані y, тоді маємо рівняння $4y = y + 2$, $y = 2/3$, тобто $x = 2\frac{1}{3}$.

2) Нехай шукана точка знаходиться всередині інтервалу $[3;5]$ на відстані z від точки 3, тоді маємо рівняння: $4z = 2 - z$, звідки $z = 2/5$, а $x = 3\frac{2}{5}$.

Поза інтервалом $[3;5]$ справа від $x = 5$ рівняння коренів не має.

Відповідь. $\left\{2\frac{1}{2};3\frac{2}{5}\right\}$

Отже, розв'язуючи рівняння , що містять змінну під знаком модуля, вже на початковому етапі, склавши допоміжне рівняння, ми ще до розв'язання рівняння встановлюємо, в яких проміжках потрібно шукати корені і скільки коренів має рівняння [11].

Приклад 2.39.

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 3.$$

Розв'язання: Рівняння можна переписати так :

$$|x - 1| + |x + 2| = 3.$$

Так як $|-2-1| = 3$, то розв'язком рівняння є весь інтервал $[-2;1]$.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Спираючись на розглянуті вище розділи роботи, можна зробити висновки, що кожен метод знаходження розв'язків рівнянь та нерівностей доцільно застосовувати до визначеного виду рівнянь. Коли, при аналізі області допустимих значень (ОДЗ) рівняння, з'ясувалось, що дана область містить скінченне число значень, то для визначення коренів досить виконати перевірку всіх цих значення. Якщо ОДЗ функції – є порожньою множиною, то можна зразу ж сказати, що рівняння не має розв'язків. Тому, приступивши до розв'язку рівняння, насамперед треба виконати аналіз рівняння, та дослідити поведінку кожного із членів рівняння для допустимих значень шуканої змінної. Коли виявляється, що звичайними методами розв'язати рівняння чи нерівність неможливо, доцільним є використання обмеженості правої та лівої сторін рівняння. Використовуючи постійну сталу, яка являється частиною рівняння, як параметр, з'являється можливість розв'язати рівняння відносно параметра.

Розв'язуючи деякі види тригонометричних рівнянь доречно скористатися одиничним колом. Даний вид рівнянь можна розв'язати декількома способами, та знаходячи розв'язок з використанням одиничного кола – це спосіб, який дає можливість усно вказати корені рівняння.

При розв'язуванні рівнянь і нерівностей з використанням похідних, знаходяться екстремальні значення функції або їх області значень, що дозволяє також дати відповідь на питання: чи має дане рівняння розв'язки.

Для розв'язування рівнянь з нескінченним числом квадратних коренів зручно використовувати теорему Вейєрштраса.

Розв'язуючи рівнянь і нерівності, із змінною під знаком модуля, найпоширеніше використання таких методів: метод інтервалів, за означенням модуля, піднесенням до квадрату лівої і правої частини. Та в роботі описаний метод розв'язування цих рівнянь, з використанням формул відстані між двома точками координатної прямої.

РОЗДІЛ 3. СХЕМА ГОРНЕРА

Одним із способів розв’язування рівнянь вищих степенів є спосіб розкладання на множники многочлена, що стоїть в лівій частині рівняння.

Якщо число α є коренем многочлена $P(x)$ степеня n, то цей многочлен можна представити у вигляді $P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$, де $Q(x)$ – частка від ділення P(x) на $(x - \alpha)$, многочлен степеня $n - 1$.

<u>Теорема Безу:</u> Остача від ділення многочлена P(x) на двочлен $(x - \alpha)$, дорівнює P(α) [8].

Приклад 3.1. Доведемо, що $x^4 - 6x^3 + 7x + 18$ ділиться без остачі на $x - 2$.

Підставивши в $x^4 - 6x^3 + 7x + 18$, $x = 2$, отримуємо $2^4 - 6 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2 + 18 =$ 16 – 48 + 14 + 18 = 0, тобто P(2) = 0.

Означення. Число α називається коренем многочлена P(x), якщо P(α) = 0.

Якщо число α не є коренем многочлена P(x), то $P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) + b_n$.

Обчислення коефіцієнтів многочлена $Q(x)$ і сталі b_n записують у вигляді табл. 3.1, яка називається схемою Горнера:

Таблиця 3.1

a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + \alpha b_0$	$b_2 = a_2 + \alpha b_1$	…	$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}$	$b_n = a_n + \alpha b_{n-1}$

Приклад 3.2. Обчислити P(3), де $P(x) = 4x^5 - 7x^4 + 5x^3 - 2x + 1$.

Таблиця 3.2

	4	-7	5	0	-2	1
3	4	5	20	60	178	535

Отже P(3) = 535.

Будь-який цілий корінь рівняння з цілими коефіцієнтами є дільником його вільного члена.

Якщо старший коефіцієнт рівняння з цілими коефіцієнтами дорівнює 1, то всі раціональні корені рівняння, якщо вони існують, цілі.

Приклад 3.3. Розкласти на множники з цілими коефіцієнтами многочлен

$$P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 5x - 1.$$

Шукаємо цілі корені серед дільників вільного члена (-1). Це числа ± 1.

Таблиця 3.3

	2	-7	-3	5	-1
1	2	-5	-8	-3	-4
-1	2	-9	6	-1	0

$$P(x) = (x + 1)(2x^3 - 9x^2 + 6x - 1).$$

Нехай нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем рівняння

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x^{n-2} + a_n = 0$ з цілими коефіцієнтами. Тоді число p є дільником вільного члена a_n, а q – дільником старшого коефіцієнта a_0.

Повернемося до прикладу 3.3.

Таблиця 3.4

	2	-9	6	-1
$\frac{1}{2}$	2	-8	2	0

$$P(x) = (x + 1)(2x^3 - 9x^2 + 6x - 1) = (x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 8x + 2) =$$

$$= (x + 1)(2x - 1)(x^2 - 4x + 1).$$

Приклад 3.4. Розв’язати рівняння

$$x^3 - 5x + 4 = 0.$$

Дільники числа 4: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4$.

Таблиця 3.5

	1	0	-5	4
1	1	1	-4	0

$(x-1)(x^2 + \ x - 4) = 0$, дискримінант квадратного тричлена

D = 1 + 16 = 17, тоді $x_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Відповідь: 1; $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Приклад 3.5. Розв’язати рівняння

$$2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0.$$

Дільники числа -2: $\pm 1;\ \pm 2$. Тоді

Таблиця 3.6

	2	-5	5	0	-2
1	2	-3	2	2	0

$(x-1)(2x^3 - 3x^2 + 2x + 2) = 0$.

Таблиця 3.8

	2	-3	2	2
1	2	-1	1	3
-1	2	-5	7	-5
2	2	1	4	10
-2	2	-7	16	-30

Жодне з чисел ± 1; ± 2 не є коренем многочлена третього степеня $2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$. Перевіряємо числа $\pm\frac{1}{2}$.

Таблиця 3.9

	2	-3	2	2
$\frac{1}{2}$	2	-2	1	$2\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	2	-4	4	0

$$(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$(x-1)(2x+1)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

D = 4 – 8 = -4, квадратний тричлен дійсних коренів не має.

Відповідь: $-\frac{1}{2}$; 1.

Аналогічно розв’язуються рівняння

1) $x^3 - 3x + 2 = 0$;

Відповідь: -2; 1.

2) $2x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$.

Відповідь: $-\frac{1}{2}$; 1, $1\pm\sqrt{2}$ [6,8].

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

Для знаходження розв'язку алгебраїчних рівнянь степінь яких перевищує два з цілими коефіцієнтами зручно та доцільно використовувати схему Горнера. Схема Горнера – це спосіб ділення многочлена n–го степеня $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ на лінійний двочлен x-a, який ґрунтується на тому, що коефіцієнти неповної частки $b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}$ та остача r пов'язані з коефіцієнтами многочлена формулами $b_0=a_0$, $b_k=ab_{k-1}+a_k$, $k=1, 2,\ldots, n-1$ і $r=ab_{n-1}+a_n$. Обчислення за схемою Горнера розміщують у таблицю.

Таблиця 3.10

	a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
a	$b_0= a_0$	$b_1=ab_0+ a_1$	$b_2=ab_1+ a_2$		$b_{n-1}=ab_{n-2}+ a_{n-1}$	$r=a\, b_{n-1}+ a_n$

Схема Горнера дає змогу швидко обчислити коефіцієнти неповної частки й остачу.

РОЗДІЛ 4. ШТУЧНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Також на практиці доречно використовувати штучні методи розв'язування рівнянь і нерівностей, крім використання властивостей функції. Матеріал даного розділу описує такі методи розв'язування рівнянь і нерівностей як:

1. Множення рівняння на функцію.
2. Угадування кореня рівняння.
3. Використання симетричності рівняння.
4. Дослідження рівняння на проміжках дійсної осі.

4.1 Множення рівняння на функцію

Розв'язування алгебраїчного рівняння достатньо спрощується, якщо помножити обидві його частини на деяку функцію - багаточлен від невідомої. При цьому треба брати до уваги можливість появи зайвих коренів - коренів багаточлена, на який множили рівняння. Тому треба або множити на багаточлен, що не має коренів, і одержувати рівносильне рівняння, або множити на багаточлен, що має корінь, і тоді кожний з таких коренів треба обов'язково підставити у вихідне рівняння й установити, чи є це число його коренем.

Приклад 4.1. Розв'язати рівняння

$$x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0 \qquad (4.1)$$

Розв'язання: Помноживши обидві частини рівняння на багаточлен, $x^2 + 1$ що не має коренів, одержимо рівняння

$$(x^2 + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) = 0, \qquad (4.2)$$

рівносильне рівнянню (4.1). Рівняння (4.2) можна записати у вигляді

$$x^{10} + 1 = 0 \qquad (4.3)$$

Ясно, що рівняння (4.3) не має дійсних коренів, тому й рівняння (4.1) їх не має.

Відповідь: Ø.

Приклад 4.2 Розв'язати рівняння

$$6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0 \qquad (4.4)$$

Розв'язання: Помноживши обидві частини цього рівняння на багаточлен $x+1/2$, одержимо рівняння

$$6x^4 + 2x^3 - \frac{41}{2}x^2 + 2x + 6 = 0, \qquad (4.5)$$

Є наслідком рівняння (4.4), тому що рівняння (4.5) має корінь $x = -{}^{1}/_{2}$, що не є коренем рівняння (4.4).

Рівняння (4.5) є симетричне рівняння четвертого степеня. Оскільки $x=1$ не є коренем рівняння (4.5), то, розділивши обидві його частини на $2x^2$ й перегрупувавши його члени, одержимо рівняння

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(\mathrm{x} + \frac{1}{\mathrm{x}}\right) - \frac{41}{4} = 0 \qquad (4.6)$$

рівносильне рівнянню (4.5). Позначивши $\mathrm{y} = \mathrm{x} + \frac{1}{\mathrm{x}}$, перепишемо рівняння (4.6) у вигляді

$$3\mathrm{y}^2 + \mathrm{y} - \frac{65}{4} = 0 \qquad (4.7)$$

Рівняння (4.7) має два корені: $y_1 = -\frac{5}{2}$ і $y_2 = \frac{13}{6}$. Тому рівняння (4.6) рівносильне сукупності рівнянь

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6} \text{ і } x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$$

Розв'язавши кожне із цих рівнянь, знайдемо чотири корені рівняння (4.6), а тим самим і рівняння (4.5):

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_2 = \frac{3}{2}, \qquad x_3 = -2, \qquad x_4 = -\frac{1}{2}$$

Тому що корінь $x_4 = -\frac{1}{2}$ є стороннім для рівняння (4.4), то звідси одержуємо, що рівняння (4.4) має три корені: x_1, x_2, x_3.

Відповідь: $\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -2\right\}$ [2].

4.2 Угадування кореня рівняння

Бувають випадки, коли зовнішній вигляд рівняння підказує, яке число є коренем рівняння.

Приклад 4.3. Розв'язати рівняння

$$x^3 + 3x - 36 = 12^3 \qquad (4.8)$$

Розв'язання: Перепишемо рівняння (4.8) у вигляді:

$$x^3 + 3x - 12^3 - 12 \cdot 3 = 0 \qquad (4.9)$$

Із зовнішнього вигляду цього рівняння очевидно, що $x = 12$ є його корінь. Для знаходження інших коренів перетворимо багаточлен

$$x^3 + 3x - (12^3 + 3 \cdot 12) = (x^3 - 12^3) + 3(x - 12) =$$
$$= (x - 12)(x^2 + 12x + 12^2 + 3) = (x - 12)(x^2 + 12x + 147).$$

Так як багаточлен $(x^2 + 12x + 147)$ не має коренів, то вихідне рівняння має єдиний корінь $x = 12$.

Відповідь: $\{12\}$.

Приклад 4.4. Розв'язати рівняння

$$x(x+1) + (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) + (x+3)(x+4) +$$
$$+(x+4)(x+5) + (x+5)(x+6) + (x+6)(x+7) + (x+7)(x+8) +$$
$$+(x+8)(x+9) + (x+9)(x+10) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 +$$
$$+7 \cdot 8 + 8 \cdot 9 + 9 \cdot 10. \tag{4.10}$$

Розв'язання: Легко помітити, що $x_1 = 0$ і $x_2 = -10$ є розв'язками цього рівняння. Після розкриття дужок це рівняння перепишеться як квадратне. А це означає, що воно може мати не більше двох коренів.

Відповідь: $\{-10; 0\}$ [9].

4.3 Використання симетричності рівняння

Іноді зовнішній вигляд рівняння - деяка його симетричність - підказує спосіб розв'язування рівняння.

Приклад 4.5. Розв'язати рівняння

$$\frac{\left(x^2-x+1\right)^3}{(5-\sqrt{5}+1)^3} = \frac{x^2(x-1)^2}{5\left(\sqrt{5}-1\right)^2} \tag{4.11}$$

Розв'язання: Очевидно, що зовнішній вигляд рівняння підказує, що одним з коренів рівняння (4.11) є $x_1 = \sqrt{5}$. Однак знайти інші корені цього рівняння не так просто. Перепишемо рівняння (4.11) у трохи іншому виді.

Оскільки справедливі тотожні рівності

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$x(x-1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

то рівняння (4.11) можна переписати так:

$$\frac{\left[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]^3}{\left(5-\sqrt{5}+1\right)^3} = \frac{\left[(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\right]^2}{5\left(\sqrt{5}-1\right)^2} \qquad (4.12)$$

Тепер очевидно, що, якщо x_0 — корінь рівняння (4.12), то $x_1 = 1 - x_0$ також корінь рівняння (4.12), оскільки

$$\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 \qquad (4.13)$$

Покажемо, що якщо $x_1, x_1 \neq 0, x_1 \neq 1$ є корінь рівняння (4.11), то $x_2 = \frac{1}{x_1}$ також є корінь цього рівняння.

Дійсно, тому що

$$\frac{(x_2^2 - x_2 + 1)^3}{x_2^2(x_2 - 1)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_1} + 1\right)^3}{\frac{1}{x_1^2}\left(\frac{1}{x_1} - 1\right)^2} = \frac{(1 - x_1 + x_1^2)^3}{x_1^6 \frac{1}{x_1^4}(1 - x_1)^2} = \frac{(x_1^2 - x_1 + 1)^3}{x_1^2(x_1 - 1)^2}$$

то звідси й випливає це твердження.

Отже, якщо $x_1, x_1 \neq 0, x_1 \neq 1$, — корінь рівняння (4.11), то воно має ще корені

$$\frac{1}{x_1}, \qquad 1-x_1, \qquad \frac{1}{1-x_1}, \qquad \frac{1}{1-\frac{1}{x_1}}$$

тобто рівняння (4.11) має корені

$$x_1=\sqrt{5}, \quad x_2=\frac{1}{\sqrt{5}},\ x_3=1-\sqrt{5},\ x_4=\frac{1}{1-\sqrt{5}},\ x_5=1-\frac{1}{\sqrt{5}},\ x_6=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Оскільки рівняння (4.11) є алгебраїчне рівняння шостого степеня, то воно має не більше шести коренів. Таким чином, ми знайшли всі корені рівняння (4.11).

Відповідь: $\left\{\sqrt{5}; \frac{1}{\sqrt{5}};\ 1-\sqrt{5};\ \frac{1}{1-\sqrt{5}};\ 1-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}\right\}$

4.4 Дослідження рівняння на проміжках дійсної осі

Часто корені рівняння можна знайти, досліджуючи його на різних числових проміжках.

Приклад 4.6. Розв’язати рівняння

$$2x^9-x^5+x-2=0 \qquad (4.14)$$

Розв’язання: Перепишемо рівняння у вигляді $2(x^9-1)-x(x^4-1)=0$ або, використовуючи формулу різниці

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}), \qquad (4.15)$$

у вигляді

$$(x-1)(2x^8+2x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3+x^2+x+2)=0 \qquad (4.16)$$

Звідси видно, що один з коренів даного рівняння є $x = 1$. Доведемо, що рівняння

$$2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0 \qquad (4.17)$$

розв'язків не має.

Розіб'ємо числову вісь на проміжки $(-\infty; -1], (-1; 0] \cup [0; +\infty)$

Для будь-якого x із проміжку $[0; +\infty)$ маємо, що ліва частина рівняння (4.17) додатна, тому на цьому проміжку рівняння розв'язків не має.

Оскільки

$$2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 =$$
$$= 2x^8 + 2x^6(x + 1) + 2x^4(x + 1) + x^2(x + 1) + (x + 1) + (1 - x^4),$$

де для будь-якого x із проміжку $(-1; 0]$ цей багаточлен додатній. Це означає, що на проміжку $(-1; 0]$ рівняння (4.17) також не має розв'язків.

Оскільки

$$2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 =$$
$$= 2x^7(x + 1) + 2x^5(x + 1) + x^3(x + 1) + x\,(x + 1) + 2,$$

де для будь-якого x із проміжку $(-\infty; -1]$ цей багаточлен додатній. Отже, і на проміжку $(-\infty; -1]$ рівняння (4.17) не має розв'язків.

Отже, дане рівняння (4.17) має єдиний розв'язок x=1.

Відповідь: {1}.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

Також на практиці доречно використовувати штучні способи розв’язання рівнянь і нерівностей. Матеріал даного розділу описує такі способи розв’язання рівнянь і нерівностей як:

1. Множення рівняння на функцію.
2. Угадування кореня рівняння.
3. Використання симетричності рівняння.
4. Дослідження рівняння на проміжках дійсної осі.

Проаналізувавши члени рівняння можна помітити деяку закономірність чи симетричність і використавши цю особливість швидко вказати розв’язки. При чому, при множенні рівняння на функцію потрібно враховувати те, що можуть з’явитися додаткові корені – корені функції, на яку виконували множення рівняння та перевіряти ці корені для вихідного рівняння. При дослідженні рівнянь на деяких числових проміжках також можна визначити чи справджується рівність при підстановці змінних на цьому проміжку.

ВИСНОВКИ

Під час виконання завдань мета дипломної роботи досягнута, поставлені задачі вирішені в повному обсязій та отримані наступні результати й висновки:

Досліджено історичні відомості що до давнини постановки проблеми розв’язання рівнянь і нерівностей перед людством.

Описані і застосовані для розв’язання практичних завдань методи, що базуються на застосуванні властивостей функції.

Докладно описані та використані для практичного розв’язання додаткові (нестандартні) способи розв’язання рівнянь і нерівностей.

Шляхи для продовження досліджень використання нестандартних методів розв’язання можуть полягати у розгляді використання властивостей синуса й косинуса, використанні похідної, застосуванні нерівностей, використанні графіків та нових нестандартних способів розв’язування рівнянь і нерівностей.

Розв’язуючи рівняння і нерівності ми дійшли висновку, що їх розв’язки знаходяться за стандартними давно відомими алгоритмами. Навчитися використовувати ці алгоритми є важливою задачею всіх учнів. Думка вчених полягає в тому, що «нема кращого способу створити умови для творчої діяльності як бездоганне знання стандартних алгоритмів розв’язання рівнянь» [13]. І це правда, адже яким би способом не починали розв’язувати нестандартні рівняння, все одно їх вигляд приводиться до відомого, типового рівняння із заздалегідь відомими формулами для відшукання їх коренів. Та в 20 роках XX століття знаменитим Н.Х. Абелем було доведено, що формули для розв’язку рівнянь n – ого степеня при n > 5 знайти неможливо. Хоч він не виключав можливості того, що корені деяких конкретних многочленів з числовими коефіцієнтами все таки можна визначити через коефіцієнти, що пізніше і відбулося. Тому, можна сказати, що використання нетрадиційних способів при розв’язуванні рівняння дають можливість відкрити шлях до віднайдення невідомого допоки алгоритму для знаходження коренів таких рівнянь як трансцендентно-алгебраїчні.

Історичні відомості доводять, що наука математика, як і будь-яка інша розвивається не сама, а саме люди, завдяки своїй допитливості та наполегливості роблять в ній нові відкриття. Неоціненним є внесок у розвиток вчення про рівняння О.Хайяма, Діофанта, Евкліда, аль-Хорезмі, Ф.Вієта та інших знаменитих науковців. При чому всі ці люди були високоосвіченими і всебічно розвиненими, та не обмежувалися лише математикою, до чого повинна прагнути кожна людина.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. М: ИЛЕКСА, 2007. 252 с.

2. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. К.: РИА «Текст»; МП «ОКО», 1992. 290 с.

3. Егерев В.К., Зайцев В.В. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы . Минск : «Высшая школа» 1990. 312с.

4. Иванов О.А. Практикум по елементарной математике: Алгебро-аналитические методы : науч пособ. Москва : МЦНМО, 2001. 116с.

5. Івлєв Б. М., Абрамов А. М., Дудницин Ю. П., Швардцбурд С. І. Задачі підвищених труднощів по алгебрі й початкам аналізу : учеб. пособие. М.: Просвещение, 1990. 48 с.

6. Ковалева Г.И., Конкина Е.В. Функциональный метод решения уравнений и неравенств. М.: Чистые пруды, 2008. 32 с.

7. Кольман Э.Я. История математики в древности. Уч.-изд. л. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 235 с.

8. Кравцов С. В., Макаров Ю.Л., Максимов М.И., Нараленков М.И., Чирский В.Г. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. М.: Экзамен, 2001. 544с.

9. Куланин Е.Д., Норин В.П., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. 3000 конкурсных задач по математике: науч. пособ. 5-е изд., испр. М.: Айрис-пресс, 2003. 624с.

10. Кушнир, И. А. Математическая энциклопедия : для школьников, абитуриентов, преподавателей шк., лицеев, колледжей и вузов . К. : АСТАРТА, 1995. 768 с.

11. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по елементарній математиці. Алгебра. Тригонометрія. М.: «ABF», 1995 . 352 с.

12. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : підруч. Для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень. Харків : Гімназія, 2010. 416 с.

13. Рыбников К.А. Возникновение и развитие математической науки. Уч.-изд. л. М.: Изд-во "Просвещение", 1987. 159 с.

14. Слєпкань З.І. Методика навчання математики : підруч. 2-ге вид., доп. і переробл. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.

15. Титаренко О.М., Роганін О.М. Математика. Форсований курс. навч. пос. Харків „ Торсінг Плюс”, 2011. 608с

16. Яковлева Л.В. Розв’язування рівнянь вищих степенів: методичний посібник. Умань: Поліграфічний центр “Візаві”, 2009. 46 с.

17. Юшкевич А.П. История математики в средние века. Уч.-изд. л. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 448с.

18. https://www.timetoast.com/timelines/5367736e-ab49-4474-9e9e-9b99a3c6989c