Міністерство освіти і науки України
Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

Факультет природничо-географічних і точних наук
Кафедра інформаційних технологій та аналізу даних

Освітня програма: Середня освіта (Математика)
Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

КВАЛІФІКАЦІЙНА МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня *магістр*

Граничні теореми теорії ймовірностей і асимптотика сумарних виплат для портфелю страхових договорів

студентки **Остренко Аліни Олександрівни**

Науковий керівник:
Зінченко Надія Мусіївна,
доктор фізико-математичних наук, професор

Рецензенти:
Казачков Іван Васильович,
доктор технічних наук, професор

Яблочніков Сергій Леонтійович,
доктор педагогічних наук, професор

Допущено до захисту: ___ ________2020 р.
Завідувач кафедри
проф.___________________Казачков І.В.

Ніжин - 2020

АНОТАЦІЯ

Остренко А.О. Граничні теореми теорії ймовірностей і асимптотика сумарних виплат для портфелю страхових договорів.-Рукопис.

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня магістра за спеціальністю 014.04 – Середня освіта (Математика). – Ніжинський державний університет імені М. Гоголя. Ніжин, 2020.

Проаналізовано основні граничні теореми теорії ймовірностей та їх застосування для асимптотичної поведінки в страховій справі. Основна увага зосереджена на центральній граничній теоремі та її використанні при обчисленні ймовірності банкрутства, страхової премії, визначення тарифної ставки. Особливості її застосування розглянуто на конкретних прикладах з актуарної математики.

Ключові слова: центральна гранична теорема, закон великих чисел, розподіл Пуассона, гауссівський розподіл, Пуассонівська та Г-апроксимація.

ANNOTATION

Ostrenko A.O. Limit theorems of probability theory and asymptotics of total payments of the portfolio of insurance contracts.-Manuscript.

Qualifying work for a master’s degree in specialty 014.04 – Secondary education (Mathematics). – Nizhyn Gogol State University. Nizhyn.2020.

Main limit theorems of probability theory and their usage for asymptotic behavior in insurance sphere are analyzed. Main attention is paid to the central limit theorem and its usage for calculating the possibility of bankruptcy, insurance award, determination of the tariff rate. The specifics of its application are discussed using concrete examples from actuarial mathematics.

Key words: central limit theorem, law of large numbers, Poisson's disjunction, Gaussian disjunction, Poisson's and G-approximation.

ЗМІСТ

ВСТУП

Величезний досвід, набутий людством, вчить нас тому, що явища, які мають ймовірність, близьку до одиниці, майже завжди будуть відбуватися. Аналогічно можна сказати й про події, можливість настання яких дуже мала (близька до нуля), відбуваються дуже рідко. Така подія відіграє основну роль для всіх практичних висновків із теорії ймовірностей, так як цей факт дає право на практиці вважати недостовірні події практично неможливими, а події, що відбуваються з імовірностями, дуже близькими до одиниці, практично достовірними. При цьому на запитання, якою має бути ймовірність, щоб ми могли подію вважати практично неможливою (практично достовірною), надати однозначної відповіді не можна. І це зрозуміло, тому що на практиці необхідно враховувати значущість тих подій, з якими доводиться мати справу.

З наведеного можна зробити висновок, що як на практиці, так і взагалі в загально-теоретичних завданнях, велике значення мають події з ймовірностями, близькими до одиниці чи нулю. Звідси й випливає, що однією з основних задач теорії ймовірностей має бути встановлення закономірностей, що відбуваються з імовірностями близькими до одиниці: при цьому особливу роль відіграють закономірності, які виникають внаслідок накладання великого числа незалежних або мало залежних випадкових факторів. Більш формально це означає, що в теорії ймовірностей важливу роль має дослідження сум асимптотичної поведінки асимптотичних величин.

Для практики дуже важливо знання умов, при виконанні яких сума всіх випадкових ймовірностей призводить до результату, майже незалежному від випадку, так як дозволяє передбачити хід явищ. Ці умови і висвітлено в ряді граничних теорем, одна група яких названа «Закон великих чисел», інша - «Центральна гранична теорема».

Дана робота присвячена дослідженню закону великих чисел і центральної граничної теореми (ЦГТ) та можливості їх застосування в страховій (актуарній) математиці.

Мета роботи – проаналізувати та систематизувати знання про граничні теореми теорії ймовірностей, розглянути методи апроксимації сумарних виплат портфелю страхових договорів та деякі їх застосування для розв’язання конкретних задач.

Основним завданням цієї роботи є показати застосування граничних теорем для вивчення асимптотики страхової компанії та її виплат.

Об’єкт дослідження – місце закону великих чисел і центральної граничної теореми та інших граничних теорем в теорії ймовірності та прикладних дослідженнях.

Предмет дослідження – застосування граничних теорем для дослідження асимптотичної поведінки страховій (актуарній) математиці.

Методи дослідження – аналітичний(аналіз і систематизація результатів стосовно граничних теорем, необхідних і достатніх умов для їх виконання та методів доведення, а також особливості їх застосування для розв’язання конкретних задач).

Гіпотеза – граничні теореми, зокрема центральна гранична теорема виявляються дуже корисним для вивчення асимптотики як бази для планування страхової компанії та визначення тарифної політики.

Дана робота зі вступу, 3 розділів, висновку та списку використаної літератури.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, сформульовані мета та завдання роботи, наведено загальну характеристику роботи.

В першому розділі подано огляд набільш важливих граничних теорем, а саме закон великих чисел, центральна гранична теорема, теорема Пуассона та інші.

В другому розділі розглядаються моделі короткотермінових договорів страхування, їх характеристики. Для їх дослідження можна застосовувати апарат теорії ймовірності і математичної статистики.

В третьому розділі увага зосереджена на класичних методах оцінювання параметрів розподілу індивідуального та колективного ризиків.

РОЗДІЛ 1
ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Закон великих чисел і центральна гранична теорема складають дві основні групи граничних теорем теорії ймовірностей, які в сумі дають право цілком обгрунтовано виконувати прогнози в області випадкових явищ, даючи при цьому оцінку точності вироблених прогнозів.

Далі будемо позначати:

$\sigma_i^2 = D(x_i)$ - дисперсія випадкової величини x_i;

$m_i = Ex_i = Mx_i$ - математичне сподівання випадкової величини x_i;

$S_n = \sum x_i$ – сума випадкових величин x_i.

1.1. Закон великих чисел

Закон великих чисел є одним з важливих для аналізу й обґрунтування висновків стосовно результатів дослідження різних процесів і явищ. Він, можна сказати, є основою практичних застосувань методів теорії ймовірностей і математичної статистики.

Суть закону великих чисел полягає в тому, що узагальнений результат великої серії випробувань може бути з великою мірою впевненості майже точно передбачений заздалегідь, хоча й результат кожного окремого випробування наперед неможливо передбачити.

До закону великих чисел відносять ті твердження, в яких йдеться про те, що з ймовірністю, наближеною до одиниці, відбувається подія, суть якої полягає в тому, що середнє арифметичне результатів великої серії випробувань, які виконуються в приблизно однакових умовах прямує до деякої константи, відхилення від якої дуже маленьке. Іншими словами, одне з основних тверджень закону великих чисел полягає в тому, що значення середнього арифметичного великого числа випадкових величин мало відрізняється від середнього арифметичного їх математичних сподівань.

Наступне твердження було сформульовано Чебишевим.

<u>Теорема 1.</u> Нехай $X_1, X_2, ..., X_n$ - випадкові величини, задані в деякому просторі мають скінченні математичні сподівання та дисперсії

$M[X_n] = \overline{X}_n \in R, D[X_n] = \sigma_n^2 \leq \sigma^2 \in R$ для всіх $n \in N$.

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується рівність: $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M[X_1] + M[X_2] + ... + M[X_n]}{n}| < \varepsilon\} = 1.$

Ця теорема Чебишева має досить велике практичне значення. Наприклад, вимірюється певна фізична величина чи характеристика якогось процесу, шуканим значенням якої є середнє арифметичне результатів декількох вимірювань, тому що результат окремого вимірювання є випадковим, так як на нього можуть впливати різні фактори: температура повітря, похибка вимірювального приладу, освітлення та багато інших. Тому теорема Чебишева дає нам теоретичне обгрунтування правомірності такого підходу до вимірювання значень величин на практиці.[7]

Із закону великих чисел Чебишева випливає:

<u>Наслідок 1.</u> Якщо незалежні випадкові величини мають обмежені дисперсії і всі випадкові величини X_n мають рівні математичні сподівання $M[X_n] = \mu \in R$, то для довільного $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \mu| < \varepsilon\} = 1. \qquad (1.1)$$

<u>Наслідок 2.</u> Нехай X_i незалежні однаково розподілені випадкові величини (н.о.р.в.в.) зі скінченним математичним сподіванням, тобто $MX_1 < \infty$. Тоді має місце (1.1).

Ці дві рівності означають збіжність за ймовірністю.[17]

1.2. Посилений закон великих чисел

Стосовно збіжності $\frac{S_n}{n}$ можна довести і більш сильне твердження, яке стосується збіжності з ймовірністю 1, тоді кажуть, що має місце посилений закон великих чисел.

Нехай маємо нескінченну послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Позначимо суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n \geq 1. \tag{1.2}$$

Означення. Будемо говорити, що послідовність $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє посилений закон великих чисел, якщо існує послідовність дійсних чисел $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ неспадна необмежена послідовність додатних чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, що

$$P\left(\frac{S_n - d_n}{a_n} \to 0\right) = 1. \tag{1.3}$$

Перші теореми про посилений закон великих чисел для послідовностей випадкових величин були отримані за умови незалежності з класичним нормуванням $(a_n = n, n \geq 1)$. Подальші дослідження пов'язані з пошуком нових достатніх умов застосування посиленого закону великих чисел до послідовностей незалежних випадкових величин.

Класичними результатами про посилений закон великих чисел є наступні теореми Колмогорова:

<u>Теорема 2.</u> Нехай $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ - послідовність незалежних випадкових величин з скінченними дисперсіями $DX_n, n \geq 1$. Якщо виконується умова, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < \infty, \tag{1.4}$$

то з ймовірністю 1 має місце співвідношення

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \to 0. \qquad (1.5)$$

<u>Теорема 3.</u> Нехай $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин така, що $E|X_1| < \infty$ і

$$P(\frac{S_n - d_n}{a_n} \to 0) = 1$$
.

Тоді

$$\frac{S_n}{n} \to EX_1.$$

Умова (1.4) буде оптимальною в тому сенсі, що якщо $\{\sigma_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ - послідовність додатних чисел така, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \infty$, то існує послідовність незалежних випадкових величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, що $DX_n = \sigma_n^2, n \geq 1$, але умова (1.5) виконуватися не буде.

Для незалежних і однаково розподілених випадкових величин справедливий остаточний результат:

<u>Теорема 4</u>. Необхідною і достатньою умовою для застосування посиленого закону великих чисел до послідовності незалежних величин є існування математичного сподівання.[12]

1.3. Центральна гранична теорема

Центральна гранична теорема (ЦГТ) - одна з найважливіших граничних теорем теорії ймовірності.

Закон великих чисел стверджує, що арифметичне середнє збігається до константи з ймовірністю 1, а ЦГТ каже, що відхилення від середнього арифметичного має гауссівський (нормальний) розподіл.

Термін центральна гранична теорема означає будь-яке твердження про те, що при виконанні певних умов функція розподілу суми малих випадкових величин з ростом числа доданків збігається до нормальної функції розподілу. Важливість цієї теореми в тому, що вона дає теоретичне пояснення наступного багаторазово підтвердженим практикою факту: якщо результат випадкового експерименту визначається великим числом випадкових факторів, вплив кожного із яких дуже малий, то розподіл результату такого експерименту добре апроксимується нормальним законом з відповідними чітко підібраними математичним сподіванням і дисперсією. Ця теорема була встановлена у 1890 році російським вченим О. М. Ляпуновим. [7]

Будемо використовувати такі позначення: функцію розподілу та щільність стандартного нормального розподілу будемо позначати $\Phi(x)$ та $f(x)$, де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad (1.6)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (1.7)$$

<u>**Теорема 5**</u>**(Центральна гранична теорема Ляпунова).** Нехай $X_1, X_2, ..., X_n, ...$- незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу $\Phi(x)$ та скінченними третіми абсолютними центральними моментами $c_i^3 = M[|X_i - M[X_i[|^3], i = 1,2,...$. Функцію розподілу нормованої суми $S_n^* = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ позначимо $F_n(x) = F^{*n}(x\sigma\sqrt{n})$.

Тоді, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{c_1^3 + c_2^3 + ... + c_n^3}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2}} = 0, \qquad (1.8)$$

то при $n \to \infty$ для довільного $x\epsilon(-\infty;+\infty)$ виконується співвідношення

$$\widetilde{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} M[X_i]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2[X_i]}} \epsilon(-\infty; x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (1.9)$$

Це співвідношення свідчить, що при досить великому n наближено можна вважати, що розподіл випадкової величини $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ є нормальний з параметрами $M[S_n] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i]$ та $\sigma^2[S_n] = (\sum_{i=1}^{n} \sigma^2[X_i]).[5]$

Якщо розподіли ймовірностей випадкових величин X_i однакові з математичним сподіванням $M[X_i] = M$ і дисперсією $D[X_i] = \sigma^2[X_i] = \sigma^2$, причому існує абсолютний центральний момент $M[|X_i - M[X_i]|^3] = c^3$, то з (1.9) отримаємо

$$\widetilde{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nM}{\sigma\sqrt{n}} \epsilon(-\infty; x)\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

так як $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c\sqrt[3]{n}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{c}{\sigma} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} = 0$, тому умова (1.8) виконується.

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ мають однакові розподіли ймовірностей, то умову обмеженості третього центрального моменту можна зняти. При цьому достатньо обмеженості $D[X_i] < \infty$.Таким чином можна зробити висновок, що для випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ з однаковими розподілами ймовірностей виконується центральна гранична теорема у такому вигляді:

Теорема 6. Нехай $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ -незалежні випадкові величини з однаковими розподілами ймовірностей, тобто зі спільним математичним сподіванням M та скінченною дисперсією σ^2 . При $n \to \infty$ для довільних $x\epsilon(-\infty; \infty)$

$$F_{Z_n}(x) = \widetilde{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nM}{\sigma\sqrt{n}} \epsilon(-\infty; x)\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (1.10)$$

У 1900 р. О. М. Ляпуновим була доведена одна з форм центральної граничної теореми. Для її доведення вчений розробив спеціальний метод характеристичних функцій (перетворення Фур’є). [11]

1.4. Теорема Ліндеберга

Найзагальнішим формулюванням центральної граничної теореми є теорема Ліндеберга, яка стверджує, що необхідною і достатньою умовою збіжності сум випадкових величин до нормального розподілу є умова Ліндеберга:

при будь-якому $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|>\tau B_n} |\, x - m_k \,|^2 \; f_{X_k}(x) dx = 0,$$

де $m_k = M[X_k], B_n = (\sum_{k=1}^{n} D[X_k])^{1/2}, f_{X_k}(x)$ щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X_k.

При виконанні цієї умови ймовірність

$$P\left(\frac{S_n - \sum_{i=1}^{n} Ex_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(x_i)}} < x\right) \Rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

За допомогою формули (1.10) можна при як завгодно великих n наближено обраховувати ймовірності різноманітних подій, які пов’язані з сумою n незалежних випадкових величин з однаковими розподілами ймовірностей, використовуючи нормальний розподіл ймовірностей.[15]

Якщо ж взяти за ймовірнісну подію $(\sum_{i=1}^{n} X_i \in [a,b])$, то в умовах теореми 6 отримаємо

$$\widetilde{P}\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nM}{\sigma\sqrt{n}}\right)\epsilon[a;b]\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Якщо ж зробити перехід від випадкової величини $\sum_{i=1}^{n} X_i$ до нормованої випадкової величини $(m = 0$ і $\sigma = 1)$,то отримаємо

$$\widetilde{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \in [a,b]\right) = \widetilde{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nM}{\sigma\sqrt{n}} \in \left[\frac{a-nM}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{b-nM}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-nM}{\sigma\sqrt{n}}}^{\frac{b-nM}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (1.11)$$

Цей інтеграл можна подати у наступному вигляді

$\Phi\left(\frac{b-nM}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{a-nM}{\sigma\sqrt{n}}\right)$, де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}dt}$ - функція розподілу ймовірностей нормованої випадкової величини з нормальним розподілом ймовірностей з параметрами $m = 0$ і $\sigma = 1$.

Якщо у випадкових величинах різні математичні сподівання і дисперсії, то їх теж можна нормувати, при цьому виконавши лінійне перетворення так, щоб математичні сподівання і дисперсія в результаті перетворень були однаковими, причому $M = 0, \sigma = 1$. [7]

1.5. Нерівність Беррі-Ессена

На практиці центральна гранична теорема застосовується в якості обґрунтування можливості апроксимації розподілу випадкової величини, що має адитивну структуру, тобто допускає подання до вигляду суми (незалежних) випадкових величин, нормальним законом. При цьому для практичних потреб, особливо в задачах оцінювання ризику, велике значення має оцінка точності нормальної апроксимації для розподілу суми.[9]

$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ незалежних випадкових величин. Параметрами такої оцінки розумно вважати число доданків n і найпростіші інтегральні характеристики розподілу доданків, наприклад, моменти. Відомо, що без додаткових припущень збіжність розподілів нормованих сум до нормального закону має місце, але може бути як завгодно повільною. Тому для побудови нетривіальних оцінок швидкості збіжності в центральній граничній теоремі необхідні додаткові умови і додаткова інформація. Найпростішим додатковою умовою такого роду може стати вимога існування абсолютного моменту $\beta^{2+\delta} = E[X_1]^{2+\sigma} < \infty$, де $0 < \delta \le 1$, а додатковою інформацією – конкретне значення $\beta^{2+\delta}$.

Для початку розглянемо випадок, коли $\sigma = 1$. Множина функцій розподілу з нульовим середнім, одиничною дисперсією і кінцевими третім абсолютним моментом β_3 позначимо F_3.

Першу оцінку швидкості збіжності в центральній граничній теоремі навів О. М. Ляпунов. Оцінка Ляпунова має наступний вигляд: існує не залежна від n функція ψ аргументів σ і β така, що для досить великих n справедлива нерівність $\rho(F_n, \Phi) < \frac{\psi \log n}{\sqrt{n}}$, причому $\psi = \frac{C \cdot \beta_3}{\sigma^3}$, де C — абсолютна кінцева позитивна константа, β_3 – сума всіх . Завдяки спільній роботі Е. Беррі та К. Г. Ессена людство отримало всім відому нерівність Беррі-Ессена. Вона має таке формулювання: існує абсолютна кінцева константа C_0 така, що для всіх $n \ge 1$ маємо: $\rho(F_n, \Phi) \le C_0 \cdot \frac{\beta_3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$.

У разі $\delta = 1$, тобто за умови існування третього моменту доданків, ця нерівність встановлює правильну швидкість збіжності (правильний порядок спадання $\rho(F_n, \phi)$ з ростом n), характерну, наприклад, для будь-якого гратчастого розподілу. Однак, щоб застосувати нерівність на практиці для оцінювання точності нормальної апроксимації, необхідно мати конкретну численну оцінку абсолютної константи C_0.

Отже, нерівність Беррі - Ессена - нерівність, що дозволяє оцінити швидкість збіжності суми незалежних випадкових величин до випадкової величиною з нормальним розподілом.

У деяких прикладних задачах (зокрема, в теорії управління запасами, фінансової і страхової математики) обсяг наявної вибірки n фіксований, тому при оцінюванні точності нормальної апроксимації вирішальну роль для остаточного результату грає значення абсолютної константи в нерівності Беррі-Ессена.[11]

Одним із наслідків ЦГТ є ***інтегральна асимптоматична теорема Муавра -Лапласа*** (мабуть, найперше твердження з класу центральної граничної теореми, яка була доведена в першій половині XIX століття).

Нехай $\mu_n = \mu_n(A) -$ це кількість відбувань події A в серії з n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність події A однакова та дорівнює $P(A) = p \in (0;1), q = 1 - p = P(\overline{A})$. І тоді при $n \to \infty$ і будь-якому довільному $y \in (-\infty; \infty)$ маємо

$$F_n(y) = \widetilde{P}\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < y \right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2} dt,$$

тож для будь-яких чисел a і b, причому $a < b$

$$\widetilde{P}\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b \right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-t^2/2} dt \text{ при } (n \to \infty).$$

Маємо рівність $\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k - p}{\sqrt{pq}}$, де I_k - індикатор події A у k-му випробуванні, тому випадкові величини $X_k = \frac{I_k - p}{\sqrt{pq}}$ є незалежними, $M(X_k) = 0$ і

$D(X_k) = 1$. Тож виконуються всі умови центральної граничної теореми, в результаті якої

$$\widetilde{P}\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < y\right) = \widetilde{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_n < y\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\,dt, (n \to \infty).$$

З вищевказаної інтегральної теореми Муавра-Лапласа випливають такі дві рівності:

$$\widetilde{P}\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < y\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}dt \text{ і } \widetilde{P}\left(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b} e^{-t^2/2}dt.$$

Якщо n достатньо велике, то абсолютна похибка цих наближень не залежить відповідно від y та a і b. [7]

1.6. Інші граничні теореми

1.6.1. Теорема Пуассона

Теорема Пуассона. Якщо ймовірність настання події близька до нуля або одиниці, то для знаходження $P_n(k)$ в цьому випадку застосовують наближену формулу, що одержується із теореми Пуассона.

Теорема. Якщо в серії із n незалежних випробувань ймовірність настання події A є сталою в серії і рівною p_n, і при $n \to \infty$, $p_n \to 0$ так, що $np_n \to \lambda, 0 < \lambda < \infty$, то при довільному сталому k, де $k = 0,1,2,...,$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = e^{-\pi}\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{1.12}$$

Теорема Пуассона використовується для обчислення ймовірностей таких подій, коли число випробувань достатньо велике, а ймовірність настання події в кожному випробуванні досить мала. Таким чином, при великих n і малих p можна використовувати наближену формулу:

$$P_n(k) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad (1.12)$$

причому $\lambda = np.$[15]

Розлянемо приклад на застосування теореми Пуассона.

Нехай проводиться серія з 10000 випробувань, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю $p = 0{,}0001$. Знайти ймовірність того, що в цій серії випробувань подія A відбудеться 4 рази.

Задача відповідає усім законам Пуассонівського розподілу:

- кількість випробувань n велика;
- ймовірність $p = 0{,}0001$ близька до нуля;
- добуток $\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0001 = 1.$

Тому можна обчислити ймовірність події, яка відбудеться 4 рази.

$$P_n(k=5) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \approx e^{-1}\frac{1^4}{4!} \approx 0{,}015.$$

$P_n = 0{,}015$ - це ймовірність того, що зі всієї серії випробувань подія А відбудеться 4 рази.

1.6.2. Збіжність до стійких законів , залежні доданки, випадкові суми

Якщо проаналізувати умови виконання ЦГТ для сум незалежних однаково розподілених випадкових величин, то можна побачити, що необхідною і достатньою умовою є існування(скінченність) дисперсії $\sigma^2 < \infty$.

Що ж буде коли ця умова не виконується? В цьому випадку також можна отримати збіжність певним чином нормованих сум, проте в якості граничного з'являється інший клас розподілів, а саме «стійкі розподіли»; а у випадку рівнорозподілених доданків – безмежно подільні розподіли. Перші фундаментальні результати в цьому напрямку отримали П. Леві, А. Колмогоров, А. Хінчин, Б. Гнєденко.

Інший напрямок досліджень - розгляд залежних доданків. Варіанти закону великих чисел і ЦГТ для різних типів залежності були доведені в другій половині XX сторіччя, дослідження в цьому напрямку продовжуються і нині.

Ще один напрямок досліджень, який інтенсивно розробляють в останні роки, - це граничні теореми для так званих «випадкових» сум випадкових величин $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, де кількість доданків $N = N_n$ - це зростаюча послідовність випадкових величин.

Виявилося, що формулювання і умови виконання ЦГТ для випадкових сум на загал аналогічні відповідним твердженням для «звичайних» сум. Одні з перших результатів в цьому напрямку отримав Б. Гнеденко зі своїми учнями, див. [11] .

Висновок до розділу 1

Теорія великих чисел відіграє важливу роль в усіх галузях, а найбільше в тих, які застосовують теорію ймовірності та статистику постійно.

На практиці під час вивчення закономірностей масових випадкових подій, які залежать від великого числа випадкових факторів, ми використовуємо так звані граничні теореми. До них відносять ЦГТ, теореми Пуассона, Муавра-Лапласа та інші. З усього вищесказаного в першому розділі можна зробити такий висновок: якщо розподіли доданків незалежних випадкових величин різні, то збіжність розподілів нормованих сум незалежних випадкових доданків до нормального закону має місце, якщо вклад кожного доданка в суму малий у порівнянні з самої сумою, тобто жодне з доданків не грає головної ролі, якщо ж розподіли однакові, то достатньо скінченності дисперсії.

РОЗДІЛ 2
МОДЕЛІ ПОРТФЕЛЮ КОРОТКОТЕРМІНОВИХ ДОГОВОРІВ СТРАХУВАННЯ

Історія страхування в цілому нараховує близько 2000 років. Проте воно могло одержати значний розвиток лише з початком застосування основних положень математичної теорії і накопичення надійних статистичних даних. Лише після появи цих передумов стало можливим розробка техніки страхових розрахунків за довгостроковими і короткостроковими операціями страхування життя та майна (актуарних розрахунків).[6]

Всю страхову математику можна поділити умовно на дві частини: теорія ризику, яка вивчає ризикові види страхування(короткотермінове страхування, майнове страхування) і теорію страхування життя. Ми ж зупинимось на теорії ризику.

Страховик (страхова компанія/ організація) — це фінансова установа, яка в установленому порядку отримала ліцензію на здійснення страхової діяльності.

Основними компонентами в страхуванні є:

- тарифна ставка – ціна страхового ризику та інших витрат; адекватне грошове вираження зобов'язань страховика з укладеного договору страхування;
- брутто-ставка – тарифна ставка, за якою укладають договір страхування (складається з нетто-ставки та навантаження);
- нетто-ставка - частина страхового внеску, необхідна для покриття страхових платежів за визначений проміжок часу по даному виду страхування;
- навантаження - частина страхової ставки, призначена для покриття витрат страховика на організацію процесу страхування, веденню страхової справи, на відрахування в запасні фонди страховика, покриття витрат;
- страхова премія – вартість страхового полісу.

В основу побудови нетто-ставки за будь-яким видом страхування покладено ймовірність настання страхової події.

Отже, імовірність страхової події знаходиться в межах від 0 до 1. Якщо вона досягає своїх крайніх меж, то страхування на випадок настання цієї події проводитися не може. Страхові відносини укладають лише тоді, коли завчасно невідомо, відбудеться в цьому періоді та чи інша подія чи ні, тобто має місце страховий випадок.[10]

З точки зору математичних методів, які застосовуються в страховій справі, всі види страхування діляться на 2 види: довгострокове страхування життя та всі інші види страхування. Далі будемо розглядати випадок короткотермінового страхування (умовно- «страхування майна», кращий термін – «ризикове страхування», а в Україні офіційно використовують термін «всі інші види страхування»).

Базовими поняттями, якими ми будемо користуватись, будуть такі: *ризик, індивідуальний позов, кількість позовів, сумарні позови, ймовірність банкрутства та розмір страхової премії (вартість страхового полісу)*.

Елементарною складовою ризику страховика є індивідуальний позов, рівний кінцевій сумі коштів, виплачених страховиком по деякому договору страхування, тобто випадкова величина, яка приймає нульове значення, якщо по даному договору страхування виплати страховика не виконались (не відбулась страхова подія), і відмінне від нуля значення , рівне сумі всіх страхових виплат по договору, якщо хоч одна страхова подія відбулася.

В існуючій літературі теорії ризиків наведена наступна класифікація моделей ризику:

- *статична модель індивідуального ризику* описує ситуацію, в якій розглядається страховий портфель, тобто сукупність об'єктів страхування або сукупність страхових полісів/ контрактів страхування, що сформована одночасно, страхові премії зібрані в момент формування портфелю, термін дії всіх договорів однаковий, і на протязі цього терміну відбуваються страхові події, які призводять до страхових виплат-позовів;

в рамках такої моделі кількість договорів страхування є фіксованою і постійною, крім того чітко фіксується, що відбувається з кожним договором страхування: чи була страхова подія, чи ні, і які були збитки і позови/виплати на відшкодування збитків по кожному з них;

- *статична модель колективного ризику, яка описує* портфель в цілому, а не в термінах окремих договорів страхування; її основні характеристики – це загальна кількість N позовів від портфелю за вибраний проміжок часу (N - випадкова величина) і послідовність випадкових величин X_i, $i > 1$, що описують послідовні виплати в рамках портфелю;

- *динамічна модель колективного ризику*, в якій пропонується, що договори страхування заключаються страховиком в різні моменти часу, які утворюють деякий випадковий процес, кожен із договорів має свій час, на протязі якого можуть відбуватися події, що призводять до збитків страхової компанії. При розгляді цієї моделі застосовують методи теорії випадкових процесів.[14]

В зв'язку з цими моделями найчастіше розв'язуються дві основні задачі:

1) розрахунок сумарного позову, тобто суми всіх виплат страховика;
2) розрахунок або оцінка страхових премій/вартостей страхових полісів, які забезпечують задану ймовірність не банкрутства страхової компанії.[4]

Розглянемо ширше перші дві моделі короткотермінових договорів страхування.

2.1. Модель індивідуальних ризиків

Загальною базою актуарних розрахунків у ризиковому страхуванні є моделі страхового ризику. Однією з таких моделей є модель індивідуального ризику, яка грунтується на таких положеннях:

- вивчається портфель договорів страхування, укладених на один і той самий термін одночасно;
- ризики всіх договорів однакові, а страховий випадок для кожного з портфеля договорів може виконуватись за час дії договору не більше як один раз;
- вважається, що договір страхування діє протягом фіксованого проміжку часу, достатньо малого, щоб можна було знехтувати депозитними та інфляційними процентами;
- кількість договорів фіксована і не випадкова;
- плата за страхування вноситься на початку періоду, що аналізується, і ніяких додаткових надходжень протягом періоду немає;
- страхова сума виплачується повністю одразу після надходження запиту.[2]

Таким чином, ми розглядатимемо портфель, який складається з договорів страхування, укладених на однаковий термін. За час своєї дії договір може призвести до появи не більш як одного запиту, а виплата за ним складає будь-яку величину в межах страхової суми.

Модель індивідуальних ризиків відображає сумарні втрати у вигляді фіксованої суми незалежних випадкових величин.

Позначимо через S сумарні виплати (позови) від цього портфелю. Тож $S = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$,

де Y_i –величина позову від $j-$ го ризику, а $n-$ кількість ризиків/ страхових полісів.

Не становить виключення й те, що деякі ризики не призведуть до позовів. Тому деякі з отримуваних значень $\{Y_i\}_{i=1}^{n}$ можуть дорівнювати 0.

Відносно кожного ризику роблять такі гіпотези:

а) Число позовів від $j-$го ризику N_j дорівнює 0 або 1.

б) Ймовірність позову від $j-$го ризику дорівнює q_j, тобто $P(N_j = 1) = q_j$.

Якщо поява позову зумовлена $j-$м ризиком, то величину збитків позначають $X_j, F_j(x), \mu_j, \sigma_j^2$–відповідно функцію розподілу, середнє та дисперсія випадкової величини X_j.

З гіпотези а маємо, що від кожного ризику може виникнути не більше ніж один позов. Це стосується страхування життя, в якому ймовірність настання смерті $j-$ої особи протягом одного року дорівнюватиме q_j.[3]

Існують три основні відмінності між цією моделлю та моделлю колективного ризику:

1) Кількість позовів від кожного індивідуального поліса обмежена на відміну від моделі колективного ризику.

2) Кількість ризиків у портфелі точно фіксована. Щодо моделей колективного ризику, то там немає необхідності точно визначати цю кількість або вважати, що вона залишається фіксованою протягом усього терміну дії страхового покриття.

3) Вважається за можливе, що індивідуальні ризики незалежні, а у моделях колективного ризику незалежними є величини індивідуальних позовів.

Легко бачити

$$E[Y_j] = q_j \mu_j, \tag{2.1}$$

і дисперсія

$$V[Y_j] = q_j \sigma_j^2 + q_j (1 - q_j) \mu_j^2. \tag{2.2}$$

Випадкова величина S є сумою n незалежних випадкових величин з вказаними вище середнім та дисперсією. Тож можна порахувати функцію розподілу S та легко обчислити середнє й дисперсію. Середнє дорівнює

$$E[S] = E\left[\sum_{j=1}^{n} Y_i\right] = \sum_{j=1}^{n} E[Y_j] = \sum_{j=1}^{n} q_i \mu_j. \tag{2.3}$$

Гіпотеза щодо незалежності ризиків дозволяє записати для дисперсії

$$V[S] = V[\sum_{j=1}^{n} Y_j] = \sum_{j=1}^{n} V[Y_j] = \sum_{j=1}^{n} (q_j \sigma_j^2 + q_j(1-q_j)\mu_j^2). \tag{2.4}$$

Якщо $\{Y_i\}$ послідовність н.о.р.в.в., значення q_i, μ_i, σ_j^2 однакові для всіх полісів. З (2.3) і (2.4) маємо $E[S] = nq\mu$, $V[S] = nq\sigma^2 + nq(1-q)\mu^2$.[8]

2.2. Модель колективних ризиків

Так само, як в моделі індивідуального ризику, розглядається відносно короткий проміжок часу та допускається, що плата за страховку повністю надходить на початку періоду, що розглядається. Проте у моделі колективного ризику весь портфель укладених угод страхування розглядається як єдине ціле. Отже, модель колективного ризику базується на таких гіпотезах:

- аналізується фіксований, відносно короткий проміжок часу (отже, можна нехтувати інфляцією і не враховувати дохід від інвестування);
- плата за страховку повністю вноситься на початку аналізованого періоду; ніяких нових надходжень протягом даного періоду немає;
- позови $X_1, X_2, ..$, що надходять, не пов'язуються з конкретними договорами, а розглядаються як результат сумарного ризику компанії. Тобто X_i — це не позов від $i-$ої угоди, а $i-$ий за черговістю позов, що реально надійшов; випадкові величини, X_i — незалежні і однаково розподілені;
- як основну характеристику портфеля розглядають не кількість укладених угод N, а загальну кількість позовів n за період, що розглядається. Випадкова величина S та величини $X_1, X_2, ..$ — незалежні.

Велика кількість досліджень показала, що реальні дані з практики страхування про кількість позовів за фіксований проміжок часу гарно описуються за допомогою пуассонівського та від'ємного біноміального розподілу. [2]

Не менш важливою відмінністю від моделі індивідуальних ризиків є те, що випадкові величини $X_1, X_2, \ldots$ є однаково розподіленими. Така гіпотеза означає деяку рівноцінність позовів, яка пов'язана з тим, що позови розглядають як результат загального ризику компанії, а не індивідуальних угод з їх незвичними особливостями. До того ж задані випадкові величини описують тільки ті позови, які насправді надійшли і є строго додатними.

Нехай S зображує суму N н.о.р.в.в. X_i, де X_i означає величину $i-$го позову. Тоді $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, де $S = 0$ при $N = 0$.

Розглядають саме число позовів N, викликаних портфельним ризиком. У рамках цієї моделі можна вивести загальні формули для функції розподілу, середнього, дисперсії і генератриси моментів для випадкової величин S.

Функція розподілу для S має вигляд

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n^*}(x) P(N = n). \tag{2.5}$$

Формула (2.5) дає загальний вираз для функції розподілу S без припущень стосовно N або X_i.

Якщо X_i задана дискретна величина, яка набуває цілих додатних значень, то можна порахувати $P(S = k)$ для $k = 1,2,3,\ldots,$ оскільки

$$P(S = k) = G(k) - G(k-1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n)\{F^{n^*}(k) - F^{n^*}(k-1)\},$$

інакше $P(S = K) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) f_k^{n^*},$

де $f_k^{n^*} = F^{n^*}(k) - F^{n^*}(k-1) = P(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)$ і отримуємо дискретний розподіл $\sum_{i=1}^{n} X_i$. [8]

Для знаходження моментів S використаємо тотожність $E[S]=E[E[S\mid N]]$.

Отримаємо:

$$E[S]N=n]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=nm_1.$$

Значить, $E[S\mid N]=Nm_1$ та

математичне сподівання (середнє) для S дорівнює

$$E[S]=E[Nm_1]=E[N]m_1=E[N]E[X_1], \quad (2.6)$$

а дисперсія

$$V[S]=E[N](m_2-m_1^2)+V[N]m_1^2=E[N]V[X_1]+V[N]m_1^2. \quad (2.7)$$

Генератрису моментів для S можна теж знайти за допомогою умовних сподівань. За означенням $M_s(t)=E(\exp\{tS\})$, отже

$$M_S(t)=E[E[\exp\{tS\}\mid N]]. \quad (2.8)$$

Так як $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ є однаково розподіленими, то вони мають спільну генератрису моментів $M_X(t)$, звідки випливає, що $\prod_{i=n}^{n}E[\exp\{tX_i\}]=\prod_{i=1}^{n}M_X(t)=[M_X(t)]^n$.

Значить,

$$E[\exp\{tS\}\mid N]=[M_X(t)]^N. \quad (2.9)$$

Підставивши (2.8) у (2.7) маємо

$$M_S(t)=E(M_X(t)^N)=E[\exp\{N\log M_X(t)\}]=M_N(\log M_X(t)). \quad (2.10)$$

Розглянемо один спеціальний випадок, який становить певний інтерес. Це випадок, коли всі виплати (позови) мають одну й ту саму фіксовану величину.

Нехай, наприклад, існує портфель договорів страхування на одну й ту саму суму терміном на один рік. Припустимо, що величина виплат є B з ймовірністю 1, тобто $P(X_i=B)=1$, звідки $m_1=B$ і $m_2=B^2$. Тоді S приймає значення $0,B,2B,...$. Оскільки $S=BN$, то $P(S\le Bx)=P(N\le x)$ і розподіл S такий самий, як розподіл N.[8]

2.3. Складний розподіл Пуассона (compound Poisson distribution)

Розглянемо сумарні позови, коли N має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, який позначають $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Тоді говорять, що S має *складний розподіл Пуассона* з параметрами λ і $F(x)$.[2]

З властивостей розподілу Пуассона ми вже знаємо, що

$E[N] = V[N] = \lambda$, $M_N(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$.

Поєднуючи це з (2.6), (2.7) і (2.10) маємо:

$$E[S] = \lambda m_1, \tag{2.11}$$

$$V[S] = \lambda m_2, \tag{2.12}$$

$$M_S(t) = \exp\{\lambda(M_X(t) - 1)\}, \tag{2.13}$$

де $m_k = EX_1^k, k = 1,2,...,$ а $M_X(t)$ - генератриса моментів для X_1.

Отже, формули середнього та дисперсії дужі прості. Дисперсія S виражається з другого моменту $m_2 = EX_i^2$.

Важливою характеристикою складного пуассонівського розподілу є той факт, що сума незалежних випадкових величин зі складним розподілом Пуассона, теж розподілена за складним пуассонівським законом. Сформулюємо це так:

Теорема. Нехай $S_1, S_2, ..., S_n$ - незалежні випадкові величини, S_i має складний розподіл Пуассона з параметрами λ_i та $F_i(x)$. Введемо позначення $A = S_1 + S_2 + ... + S_n$. Так як A має складний розподіл Пуассона з параметрами Λ і $F(x)$, маємо:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad F(x) = \frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x).[8]$$

Розглянемо такий приклад.

Число нещасних випадків на заводі протягом року має розподіл Пуассона з середнім 30. Число постраждалих в результаті нещасного випадку може бути дорівнює 1, 2 або 5 з вірогідністю 1/2, 1/5, 1/6 відповідно. Необхідно порахувати середнє дисперсію загального числа постраждалих в результаті нещасних випадків на протязі року.

Загальне число постраждалих в результаті нещасних випадків можна подати у такому вигляді:

$S = Y_1 + ... + Y_\upsilon$, де υ - число нещасних випадків на протязі року, $Y_1,...,Y_n$ - число постраждалих в результаті відповідних нещасних випадків.

Тоді, випадкова величина S має пуассонівський розподіл, і його середнє $E[S] = \lambda m_1$.

В цій задачі $\lambda = 30$, тому

$E[S] = \lambda m_1 = \dfrac{30(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{5}{6})}{30} = 26$, а дисперсія обчислюється за формулою:

$VarS = \lambda \cdot EY_i^2$.

Оскільки $\lambda = 30$:

$$EY_i^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{5} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} = 1 + \frac{4}{5} + \frac{25}{6} = ... = \frac{179}{30}.$$

Маємо: $VarS = \lambda \cdot EY_i^2 = 30 \cdot \dfrac{179}{30} = 179.$

Висновок до розділу 2

Наведені вище моделі портфелів короткотермінових договорів страхування досить прості з математичної точки зору і не викликають особливих складнощів у застосуванні. В рамках цих моделей легко знайти математичне сподівання і дисперсію для сумарних виплат, особливо легко це зробити , коли кількість позовів має розподіл Пуассона. Проте знайти явний / точний вигляд для розподілу сумарних виплат в багатьох випадках не вдається, на допомогу тут приходять наближені формули, які випливають з граничних теорем, наведених в Розділі 1.

РОЗДІЛ 3
АСИМПТОТИКА РОЗПОДІЛУ СУМАРНИХ ВИПЛАТ ДЛЯ ПОРТФЕЛЮ СТРАХОВИХ ДОГОВОРІВ

Теоретичною основою для розв'язування задач на знаходження апроксимаційних формул для розподілу сумарних виплат є граничні теореми для сум випадкових величин, найголовнішою з яких є центральна гранична теорема(ЦГТ).

3.1. Гауссівська (нормальна) апроксимація розподілу сумарних виплат для моделі індивідуальних ризиків

Нехай маємо фіксовану кількість страхових полісів, тоді сумарні виплати за ними змоделюються сумою

$$S = S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \tag{3.1}$$

де Y_i - виплати за і-м договором, причому $i = 1,...,n$ - незалежні випадкові величини з функцією розподілу $F_i(x)$, математичним сподіванням $m_1^{(i)} = EY_i$, дисперсією $\sigma_i^2 = VarY_i$. Тому функція розподілу сумарних виплат шукається за допомогою згортки

$$F_S(x) = P(S_n \le x) = F_1(x) * F_2(x) * ... * F_n(x), \tag{3.2}$$

де згортка 2-х функцій розподілу це $F_1(x) * F_2(x) = \sum F_1(x-u)dF_2(x)$.

Якщо Y_i однаково розподілені з функцією розподілу $F(x)$, $EY_i = m_1$, $VarY_i = \sigma^2$,

$$F_S(x) = F^{n*}(x), \tag{3.3}$$

де $F^{n*}(x)$ - n-кратна згортка $F(x)$.[8]

Теоретичною основою для розв'язування задач на знаходження апроксимаційних формул є граничні теореми розподілу сум випадкових величин, найголовнішою є центральна гранична теорема.

Гаусівська (нормальна) апроксимація розподілу сумарних витрат для моделі індивідуальних ризиків.

Із ЦГТ для сум н.о.р.в.в. випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - nm_1}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \lim_{n\to\infty}(S_n \le nm_1 + \sigma\sqrt{nx}) = \Phi(x), \qquad (3.4)$$

де $\Phi(x) = \Phi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$ - функція розподілу стандартного нормального закону.

Тож як апроксимацію для $\Phi_S(x)$ розглядають

$$F_S(x) = P(S_n \le x) \approx \Phi_{ES,VarS}(x), \qquad (3.5)$$

де $\Phi_{a,b}(x)$ – функція розподілу нормального закону з параметрами a і дисперсією b; $ES = nm_1, VarS = n\sigma^2$, або еквівалентну формулу

$$\Phi_S(x) = \Phi_{0,1}\left(\frac{x - ES}{\sqrt{VarS}}\right). \qquad (3.6)$$

За формулою (3.6) маємо $F_S(x) = \Phi\left(\frac{x - ES}{\sqrt{\sigma_s^2}}\right) = \Phi(x-1)$.[16]

3.2. Пуасонівська і Г-апроксимація розподілу сумарних виплат для моделі індивідуальних ризиків

Пуассонівська апроксимація. Нехай n (кількість договорів) велике, і в разі настання страхової події за кожним договором виплачується однакова сума b , а ймовірність настання страхової події p мала. Тоді для апроксимації розподілу S_n має сенс розглядати розподіл Пуассона з параметром pn, тобто

$$E_S(x) \approx Pois(x; pn). \qquad (3.7)$$

Теоретичною основою для цієї апроксимації є граничні теореми стосовно збіжності до розподілу Пуассона (см. П. 1.3.1.)

Наблизимо розподіл суми S_n пуассонівським розподілом з параметром $\lambda = np$, тоді

$P(S_n > 3{,}5) = 1 - P(S_n \le 3{,}5) \approx 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3$, де $P_K = \frac{(np)^k}{k!}\exp(-np)$ - ймовірність того, що величина з розподілом Пуассона $Pois(np)$ прийматиме значення $k, k = 0,1,2,3$.

Г-апроксимація. Розподіл сумарних витрат має багато спільного з Г-розподілом: він виявляється одномодальним, носій-невід'ємна піввісь, коефіцієнт асиметрії $\gamma > 0$. Тому доречним виявиться підхід, при якому $\Phi_S(x)$ наближають за допомогою Г-розподілу зі зсувом, тобто $F_S(x) \approx G(x - x_0; \alpha, \beta)$,

де $G(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x y^{\alpha-1}\beta^\alpha e^{-\beta y}dy$, а параметри α, β і x_0 підбирають так, щоб перші три моменти суми S_n (тобто ES, дисперсія σ_S^2 і коефіцієнт асиметрії γ_S дорівнювали відповідним моментам апроксимуючого Г-розподілу.

Для Г-розподілу середнє $m_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, дисперсія $\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$, коефіцієнт асиметрії $\gamma = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$.

Тому α, β і x_0 знаходимо з рівнянь: $ES = \frac{x_0 + \alpha}{\beta}, \sigma_S^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}, \gamma_S = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$.

Звідси для знаходження α, β і x_0 маємо співвідношення:

$$\alpha = \frac{4}{\gamma_S^2},\ \beta = \frac{2}{\gamma_S\sigma_S},\ x_0 = m_1 - \frac{2\sigma_S}{\gamma_S}. \text{ [8]} \qquad (3.8)$$

Розглянемо такий приклад.

Нехай $n = 1000$ *людей придбали поліси страхування життя на один рік. Ймовірність смерті застрахованого* $p = 0{,}001$ *і виплати в разі його смерті* $b = 1$. *Скориставшись усіма вищеописаними видами апроксимації, знайти ймовірність того, що сумарні виплати для такого портфелю полісів будуть більшими за 3,5.*

Підрахуємо математичне сподівання та дисперсію сумарних виплат:

$ES = ES_n = np = 100 \cdot 0{,}001 = 1;$

$\sigma_S^2 = VarS_n = np(1-p) = 1000 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}999 = 0{,}999 \approx 1; \ \sigma_S \approx 1.$

Гауссівська апроксимація дає

$P(S_n > 3{,}5) = 1 - P(S_n \leq 3{,}5) \approx 1 - \Phi(3{,}5-1) = 1 - \Phi(2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$,

пуассонівська:

$P(S_n \geq 3{,}5) \approx 1 - e^{-1} - e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{6}e^{-2} \approx 0{,}01899$,

Г – апроксимація: P(S > 3.5) = 0.0212.

В цьому прикладі можна знайти точне значення для P(S > 3.5) = 0.01893.

Отже, в цьому випадку пуассонівська апроксимація –найкраща, а Г – апроксимація – краща за гауссівську.[13]

3.3. Гауссівська (нормальна) апроксимація розподілу сумарних виплат для моделі колективних ризиків

Сумарні виплати моделюються сумою випадкового числа випадкових величин, а саме

$$S = S_N = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{3.9}$$

де $\{X_i, i \geq 1\}$ - н.о.р.в.в. з функцією розподілу $F(x)$; $EX_i = m_i,\ EX_i^2 = m_2$, $Var(X_i) = \sigma^2$, $E(X_i^k) = m_k, k \geq 3$, $M_X(t)$ - генератриса моментів, N - випадкова величина, яка набуває невід'ємних цілих значень, N та $\{X_i\}$ - незалежні.[17]

Для апроксимації $F_S(x) = P(S_N \leq x)$ можна використати співвідношення, які аналогічні для нормальної апроксимації (3.6), (3.7) – для пуассонівської, (3.8) для Г-апроксимації.

У цих апроксимаціях ES, $VarS$, γ_S знаходять за правилом обчислення моментів для сум випадкового числа випадкових величин, тобто:

$$ES = ES_N = m_1 E(N), \tag{3.10}$$

$$VarS = Var(S_n) = Var(N)m_1^2 + E(N)Var(X_i), \tag{3.11}$$

а $E(S-ES)^3$ знаходимо як похідну третього порядку в нулі генератриси моментів S_n.

3.4. Пуассонівська і Г-апроксимація розподілу сумарних виплат для моделі колективних ризиків

За Г-апроксимацією практично не стоїть якась гранична теорема, це майже емпіричний підхід, але в деяких випадках він теж виявляється доречним.

Формули (3.6), (3.8) , (3.10) і (3.11) дещо спрощуються в тому випадку, коли N має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, тобто коли S_n теж має складний розподіл Пуассона.

1) Нормальна апроксимація:

$$F_S(x) \approx \Phi\left(\frac{x-\lambda m_1}{\sqrt{\lambda m_2}}\right).$$

2) Г-апроксимація:

$F_S(x) \approx G(x-x_0,\alpha,\beta)$, де $\alpha = 4\lambda m_2^3 / m_3^2$, $\beta = 2m_2 / m_3$, $x_0 = \lambda\left(m_1 - \dfrac{2m_2^2}{m_3}\right)$.[8]

3.5. Приклади застосування центральної граничної теореми в актуарній практиці

Приклад 1. *Нехай в компанії застраховано* 2000 *осіб з ймовірністю смерті протягом року* 0.2%. *Компанія виплачує суму* 150000 *гривень в разі смерті застрахованого протягом року і не платить нічого, якщо людина доживе до кінця року. Розрахуємо сумарну премію, якої буде достатньо, щоб забезпечити вірогідність банкрутства близько* 5%.

Приймемо величину страхової суми в якості одиниці виміру грошової суми. В цьому випадку виплати по i-му договору X_i приймають два значення: 0 і 1 з ймовірностями $1-q$ і q відповідно. Тоді

$$EX_i = (1-q)\cdot 0 + q \cdot 1 = q = 0{,}002,$$

$$EX_i^2 = (1-q)\cdot 0^2 + q\cdot 1^2 = q,$$

$VarX_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = q - q^2 = 0{,}002 - 0{,}002^2 \approx 0{,}002$.

Для середнього значення та дисперсії сумарних виплат $S = X_1 + ... + X_N$ маємо:

$ES = NEX_i = 2000 \cdot 0{,}002 = 4$,

$VarS = NVarX_i \approx 2000 \cdot 0{,}002 = 4$.

Застосовуючи гауссівське наближення для нормованої величини сумарних виплат, ми можемо подати ймовірність не банкрутства компанії в наступному вигляді:

$$P(S \le u) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} \le \frac{u - ES}{\sqrt{VarS}}\right) \approx P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} \le \frac{u-4}{2}\right) \approx \Phi\left(\frac{u-4}{2}\right). [1]$$

Якщо потрібно, щоб ймовірність банкрутства була 5%, величина $\frac{u-4}{2}$ повинна бути рівною 95%, $x_{95\%} = 1.645.$

Тоді $u = 1.645 \cdot 2 + 4 \approx 7.29$ (величина страхової суми). Переведемо в грошові одиниці приблизно 1093500 гривень.

Отже, сумарна премія рівна 1093500 гривень.

Приклад 2. *Страховик заключив* $N = 10000$ *договорів страхування життя терміном на один рік за наступними умовами: у випадку смерті застрахованого на протязі року від нещасного випадку компанія виплачує вигодонабувачу* 100000 *грн., а у випадку смерті від природних причин -* 25000 *грн. Компанія не виплачує нічого, якщо застрахований не помре на протязі року. Ймовірність смерті від нещасного випадку одна й та ж сама для всіх застрахованих та дорівнює* 0.0005. *Ймовірність смерті від природніх причин залежить від віку застрахованого. Усіх застрахованих можна розбити на дві вікові групи, які містять* $N_1 = 4000$ *і* $N_2 = 6000$ *чоловік, з ймовірністю смерті на протязі року* $q_1 = 0.0040$ *і* $q_2 = 0.0020$ *відповідно.*

Треба підрахувати премію, достатню для виконання компанією своїх обов'язків з ймовірністю 95% *без залучення додаткових коштів. Захисна надбавка для індивідуального договору береться пропорційно нетто-премії.*

Для розв’язання цієї проблеми приймемо суму 25000 грн. в якості одиниці вимірювання грошової суми.

Тоді для першої групи договорів індивідуальний збиток приймає три значення: 0, 1 і 4 з ймовірностями 0.9955, 0.0040 і 0.0005 відповідно. Середнє значення та дисперсія величини індивідуального збитку

$$m_1 = 1 \cdot 0.0040 + 4 \cdot 0.0005 = 0.0060,$$

$$\sigma_1^2 = 1^2 \cdot 0.0040 + 4^2 \cdot 0.0005 - m_1^2 \approx 0.0120.$$

Для другої групи договорів індивідуальний збиток приймає ті ж три значення 0, 1 і 4, але з іншими ймовірностями: 0.9975, 0.0020 і 0.0005. В цій групі середнє значення та дисперсія індивідуального збитку є

$$m_2 = 1 \cdot 0.0020 + 4 \cdot 0.0005 = 0.0040,$$

$$\sigma_2^2 = 1^2 \cdot 0.0020 + 4^2 \cdot 0.0005 - m_2^2 \approx 0.0100.$$

Таким чином, для договорів першої групи нетто-премія $m_1 = 0.006$, а для договору другої групи нетто-премія складає $m_2 = 0.004$.

Перейдемо до захисних надбавок.

Середнє значення та дисперсія сумарних виплат по всьому портфелю договорів дорівнюють:

$$ES = N_1 \cdot m_1 + N_2 \cdot m_2 = 4000 \cdot 0.006 + 6000 \cdot 0.0004 = 48,$$

$$VarS = N_1 \cdot \sigma_1^2 + N_2 \cdot \sigma_2^2 \approx 4000 \cdot 0.012 + 6000 \cdot 0.010 = 108.$$

Нехай тепер сумарна премія дорівнює u. Використовуючи гаусівське наближення для центрованої та нормованої величини сумарних виплат, мі можемо представити ймовірність не банкрутства компанії наступним чином:

$$P(S \le u) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} \le \frac{u - ES}{\sqrt{VarS}}\right) \approx \Phi\left(\frac{u - ES}{\sqrt{VarS}}\right).$$

Якщо ми хочемо, щоб ймовірність банкрутства була 5%, величина $\frac{u - ES}{\sqrt{VarS}}$ повинна бути рівною $x_{95\%} = 1.645$. Тобто сумарна премія повинна бути рівною $u = ES + x_{95\%}\sqrt{VarS}$. Перший доданок $ES = N_1 \cdot m_1 + N_2 \cdot m_2$ є сумарною нетто-премією, а другий дає загальну захисну добавку l:

$l = x_{95\%} \cdot \sqrt{VarS} \approx 1.645 \cdot \sqrt{108} \approx 17.095$.

Щодо індивідуальних захисних надбавок l_1 і l_2 для договорів з першої та другої груп відповідно ми знаємо лиш те, що

$N_1 \cdot l_1 + N_2 \cdot l_2 = l$.

Якщо індивідуальні захисні надбавки пропорційні нетто-преміям, то

$l_1 = \theta m_1$, $l_2 = \theta m_2$,

то відносна страхова надбавка θ одна й та ж сама для всіх договорів і дорівнює

$$\theta = \frac{l}{ES} \approx 35.6\% .$$

Тому для договорів з першої групи премія дорівнює

$p_1 = m_1 \cdot (1+\theta) \approx 0{,}00814 = 0{,}00814 \cdot 25000 = 203{,}5$ грн.

Для договорів з другої групи премія дорівнює

$p_2 = m_2 \cdot (1+\theta) \approx 0{,}00542 = 0{,}00542 \cdot 25000 = 135{,}5$ грн.

Отже, враховані премії будуть рівними 203,5 та 135,5 грн відповідно.

Приклад 3. *Щороку страхова компанія підписує ряд договорів страхування домашнього майна, кожному з яких відповідає страхова премія у 70$. Сумарні річні позови від кожного поліса мають складний розподіл Пуассона; пуассонівський параметр дорівнює 0,3, а індивідуальні позови мають Г-розподіл з параметрами* α *і* λ.

Накладні витрати, які включаються у позов, є випадковою величиною, рівномірно розподіленою між 40$ і b$ $(b > 50)$. *Величина накладних витрат не залежить від величини позову. Випадкова величина* S *зображує сумарні позови і накладні витрати від портфелю протягом одного року. Будемо вважати, що* S *має нормальний розподіл.*

$\alpha = 1$; $\lambda = 0{,}01$; $b = 100$.

Знайдемо кількість полісів, які компанія має продати, щоб досягти як мінімум 99% впевненості, що надходження премій перевищить видатки на покриття позовів і накладні витрати.

Нехай X_i - величина i -го позову, Y_i - величина накладних витрат. N - загальна кількість позовів від портфелю, n - кількість полісів у портфелі. Тому N має розподіл Пуассона з параметром 0,3 n, S можна записати $S = \sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)$,

де $\{X_i + Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ - послідовність н.о.р.в.в., незалежних від N . Тож S має розподіл Пуассона. Запишемо формули для моментів S:

$E[S] = 0{,}3nE(X_i + Y_i)$,

$V[S] = 0{,}3nE[(X_i + Y_i)]^2 = 0{,}3n(E[X_i^2] + 2E[X_iY_i] + E[Y_i]^2)$.

У заданих термінах α, λ і b моменти X_i і Y_i дорівнюють:

$E[X_i] = \alpha / \lambda$, $E[Y_i] = (b + 50)/2$, $E[X_i^2] = \alpha(\alpha + 1)/\lambda^2$,

$E[Y_i^2] = (b^2 + 50b + 2500)/3$, $E[X_iY_i] = E(X_i)E(Y_i)$.

Останнє співвідношення випливає з незалежності X_i і Y_i.

Підставимо $\alpha = 1$, $\lambda = 0{,}01$, $b = 100$ у вищезадані формули:

$E[S] = 0{,}3nE(X_i + Y_i) = 0{,}3n(100 + 75) = 52.5n$

$E[X_i] = \alpha / \lambda = 1/0{,}01 = 100$,

$E[Y_i] = (b + 50)/2 = (100 + 50)/2 = 75$,

$E[X_i^2] = \alpha(\alpha + 1)/\lambda^2 = \dfrac{2}{0{,}01^2} = 20000$,

$E[Y_i^2] = (b^2 + 50b + 2500)/3 = \dfrac{100^2 + 50 \cdot 100 + 2500}{3} = 5833$,

$E[X_iY_i] = E(X_i)E(Y_i) = 100 \cdot 75 = 7500$,

$2E[X_iY_i] = 2 \cdot 7500 = 15000$,

$V[S] = 0{,}3nE[(X_i + Y_i)]^2 = 0{,}3n(E[X_i^2] + 2E[X_iY_i] + E[Y_i]^2) =$

$= 0{,}3n(20000 + 15000 + 5833) = 12249{,}9n$

Тобто

$E[S] = 52.5n$, $V[S] = (110,7)^2 n$.

Отже, S має приблизно нормальний розподіл з середнім $52.5n$ і стандартним відхиленням $110,7\sqrt{n}$. Надходження премій складає $70n$, найменше значення n повинно задовольняти нерівність:

$P(S < 70n) \geq 0,99$.

Стандартизуючи S для нормального розподілу, маємо:

$$P\left[\frac{S - 52,5n}{110,7\sqrt{n}} < \frac{70n - 52,5n}{110,7\sqrt{n}}\right] \geq 0,99.$$

Верхня 99% точка для стандартного нормального розподілу дорівнює 2,326, так що умова для n має вигляд:

$$\frac{(70n - 52,5n)}{110,7\sqrt{n}} \geq 2,326.$$

Звідси випливає, що $n \geq 216,5$ або $n \geq 217$ - найближчого цілого числа.

Висновок до розділу 3

Наведені вище методи апроксимації розподілу сумарних виплат є досить простими і можуть застосовуватися при досить широких апріорних припущеннях щодо величини « малих» виплат/ збитків. Найбільш універсальною є гауссівська апроксимація, проте не завжди вона виявляється найточнішою. Отже завжди, за можливості, слід ретельно проаналізувати умови застосування того чи іншого методу, доповнивши це аналізом попередньої фінансової звітності.

ВИСНОВКИ

Важливу роль в управлінні роботою страхової компанії відіграють математичні моделі, які ставлять за мету опис різноманітних видів діяльності страхової компанії. Вивчення таких моделей та проведення на їх основі розрахунків важливих характеристик роботи страхової компанії (таких як тарифна ставка, ймовірність банкрутства, величина страхового резерву у вибрані моменти часу, величина страхової премії та ін.) дозволяє пропонувати приклади управлінських рішень, згідно з якими керівники компанією можуть здійснювати свій остаточний вибір.

Отже, застосування математичних методів в страховій справі є дуже важливим. Це в першу чергу стосується методів теорії ймовірностей, оскільки страховики мають справу з випадковими подіями.

Серед всієї кількості напрямків теорії ймовірностей особливу роль відіграють граничні теореми, які знаходять своє застосування в страховій математиці. Перш за все для оцінки ймовірності банкрутства, планування резерву та визначення страхових тарифів.

Базою для вирішення всіх цих задач являється розподіл сумарних виплат по портфелю страхових договорів, знайти його точно дуже важко, проте легко знайти його приблизне значення застосовуючи апроксимаційні формули, які базуються на граничних теоремах, насамперед, на центральній граничній теоремі. Такий підхід є більш-менш простим, результативним, хоч і не завжди виявляється найкращим. Тому в реальній ситуації актуарію(математику, який працює в страховій сфері) варто скористатися декількома прийомами і вибрати більш оптимальний.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж. Актуарная математика. Уч. Пос. Москва: Янус-К, 200. 656с.
2. Бондаренко Я.С., Турчин В.М., Турчин Є.В. Теорія ризику в страхуванні. Основні поняття, приклади, задачі: навч. посіб. Д.:РВВ ДНУ, 2010. 180с.
3. Базилевич В.Д. Страхування: Підручник (за ред.В. Д. Базилевича). Київ:Знання, 208. 1019 с.
4. Баранов А.И. Управління страховим портфелем. Вісник Київського національного університету ім.Т.Шевченка.2007.(№94-95). С.78-135.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. 6-е изд. перед. и доп. Москва: Наука, 1988. 448 с.
6. Дрібноход А.О. Підхід до моделювання ризику банкрутства у страхуванні. *Науковий журнал. 2012. (№9). С.5.*
7. Жалдак М.І., Кузьменко Н.М., Михалін Г.О. Теорія ймовірностей й математична статистика: Підручник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів, 2-ге вид., перероб. і доп. Полтава: «Довкілля-К», 2009. 500с.
8. Зінченко Н.М. Математичні моделі теорії ризику: навч. посіб. Київ: Вид.-пол. центр «Київський університет», 2007. 95с.
9. Карташов М.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: пос. Київ, 2004. 504с.
10. Кінаш О.М., Сороківський В.М., Папка М.В. Основи актуарних розрахунків: навч.-метод.посіб. Львів, 2012. 188с. (вступ про страх)
11. Королев В.Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я. Математические основы теории риска: учебн. пособ. 2-е изд., перерад. и доп. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 620 с.
12. Корчевский В. М. Усиленный закон больших чисел для последовательностей зависимых случайных величин. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.05. С Петербург, 2013. 70 с.

13. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: уч. пособ. Москва: Наука, 1986. 328 с.
14. Роженко Н. О. Модель індивідуальних ризиків: метод. посіб. Одеса.: Одеський національний університет, 2012. 34с.
15. Слюсарчук П.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. пос.Ужгород: Вид-во, 2005. 178 с.
16. Фалин Г.И., Фалин А.И. Актуарная математика в задачах: уч. пос.2-е изд. Москва: ФИЗМАТЛИТ,2003. 192с.
17. Фалин Г.И., Фалин А. И. Теория риска для актуариев в задачах: уч. пособ: Москва: Мир, «Научный мир», 2004. 240 с.
18. Kaas R., Goovarts M., Dhane J., Denuit M. Morden Actuarial Risk Theory: Kluver.2003.185c.