Міністерство освіти і науки України
Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

Факультет природничо-географічних і точних наук
Кафедра математики, фізики та економіки

Освітня програма: Середня освіта (Математика)
Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

КВАЛІФІКАЦІЙНА МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня *магістр*

Елементи теорії многочленів у шкільній алгебрі

студентки **Олексієнко Юлії Олександрівни**

Науковий керівник:
Тарасенко Оксана Володимирівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензенти:

Барило Ніна Андріївна,
кандидат педагогічних наук, доцент
Лисенко Ірина Миколаївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Допущено до захисту
В.о. зав. кафедри ____________ Віра М.Б.

Ніжин – 2021

АНОТАЦІЯ

Елементи теорії многочленів у шкільній алгебрі
Олексієнко Юлія Олександрівна

У роботі розглянуто поняття «многочлена», його види та застосування, операції, які виконуються над многочленами, алгоритм Евкліда, теорема Безу, схема Горнера, симетричні многочлени, застосування многочленів 1-ої змінної та симетричних многочленів.

Підібрано добірку завдань практичного змісту, які надають зразок застосування кожного з методів розв’язання.

Ключові слова: многочлен, операції над многочленами, похідна многочлена, симетричні многочлени.

ANNOTATION

Elements of polynomial theory in the school course of algebra
Oleksienko Yuliya Oleksandrivna

The paper considers the concept of "polynomial", its types and applications, operations performed on polynomials, Euclidean algorithm, Bez's theorem, Horner's scheme, symmetric polynomials, application of polynomials of the 1st variable and symmetric polynomials.

A selection of practical tasks has been selected, which provide an example of the application of each of the methods of solution.

Keywords: polynomial, operations on polynomials, derivative of polynomial, symmetric polynomials.

Зміст

ВСТУП

Зазначимо, що з вивченням многочленів пов'язана ціла низка важливих перетворень у математиці. Основою розвитку класичної алгебри протягом кількох століть було дослідження поліноміальних рівнянь та їх розв’язання.

Многочлени в шкільному курсі розглядаються у сьомому класі, після вивчення алгебраїчних виразів: числові вирази, вирази зі змінними; лінійних рівнянь; тотожно рівних виразів; степенів з натуральним показником та їх властивостей; одночленів. Одне з понять многочлена походить від значення одночлена. Одночлен – це алгебраїчний вираз, який складається із добутку числа на одну або декілька змінних, кожна з яких взята у натуральному степені. Многочленом називають добуток кількох одночленів.

Застосування елементів теорії многочленів можна зустріти в багатьох розділах вищої математики. Теорія многочленів застосовується в курсах лінійної алгебри, математичного аналізу, теорії ймовірностей, методах наближених обчислень та інших розділах теоретичної і прикладної математики. Відомий математик-обчислювач Р. В. Хеммінгпішет: «Оскільки з многочленами легко поводитися, велика частина класичного чисельного аналізу ґрунтується на наближенні многочленами». Зазначимо, що з вивченням многочленів пов'язаний цілий ряд важливих перетворень у математиці, дослідження поліноміальних рівнянь та їх розв'язків. Оскільки многочлени є досить прості функції та їх диференціювання, інтегрування не представляють складності, то будь-яку безперервну функцію на заданому відрізку можна наблизити многочленом, що дає можливість аналізувати поведінку та характер функції, в околі фіксованої точки цього відрізка.

Дослідженням даної теми займалося безліч науковців, серед яких варто відмітити: А.Г.Курош, В.Б.Винберг, С.В.Ларина, Р.В.Хеммінг, С.Я.Гриншпон, І.Є.Гриншпон та багато інших.

Об’єкт дослідження: теорія многочленів в шкільному курсі алгебри.

Предмет: многочлени.

Мета дослідження: обґрунтувати основні теоретичні засади теорії многочленів та симетричних многочленів, науково узагальнити і систематизувати методи розв'язування задач з використанням теореми Безу, її наслідків, похідної многочлена та симетричних многочленів, розглянути задачі, що розкривають практичні аспекти застосування конкретних методів розв'язання.

Для висвітлення мети дослідження варто знайти відповіді на наступні завдання:

1. Розкрити теоретичні особливості многочленів однієї та багатьох змінних.
2. Проаналізувати етапи вивчення поняття «многочлени» у шкільному курсі математики.
3. Продемонструвати розв'язання практичних завдань.

Під час написання роботи було використано наступні наукові методи дослідження: аналіз, синтез, зіставлення, порівняння, узагальнення та ін.

Апробація результатів

Результати магістерського дослідження доповідались та обговорювались на:

- VI Всеукраїнській конференції молодих науковців «Сучасні проблеми природничих і точних наук»;
- щорічній конференції «Молодь у науці».

Структура роботи: вступ, чотири розділи, що в свою чергу поділяються на підрозділи, висновки та список використаних джерел в кількості 20 шт.

Загальний обсяг роботи становить 57 сторінок тексту.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО МНОГОЧЛЕНИ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1.1 Поняття многочлена однієї змінної

Розглянемо многочлени від однієї змінної в стандартному вигляді.

Многочлен $P_1(x) = ax + b$, де $a \neq 0$, a, b – числа, x – змінна, називається многочленом першого степеня [1,с.34; 2,с.61].

Многочлен $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, a, b, c – числа, x – змінна, називається многочленом другого степеня (квадратним тричленом, квадратичною функцією).

Многочлен $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, де $a \neq 0$, a, b, c, d – числа, x – змінна, називається многочленом третього степеня.

Взагалі, многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

де $a \neq 0$, a_k, *k=0,1,2,3,...*, n – числа, x –- змінна, називається многочленом *n*-ного степеня.

Традиційно a_n називається старшим коефіцієнтом, а a_0 – вільним членом многочлена.

Справжнє число a називається коренем многочлена $P_n(x)$, якщо

$P_n(a) = 0$ [2,с.40].

Корінь многочлена першого степеня легко вгадується: $x = -\frac{b}{a}$. Справді: $a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$.

Корінь квадратного тричлена можна знайти за формулами $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, вираз $D = b^2 - 4ac$ називається дискримінантом квадратного тричлена , причому лише за $D > 0$ квадратний тричлен має корінь.

Тоді останнє розкладання квадратного тричлена має вигляд:

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)\ .$$

Звідси безпосередньо видно, що числа x_1 і x_2 є корінь квадратного тричлена $P_2(x) = ax^2 + bx + c$.

Отримана формула через свою важливість називається формулою розкладання квадратного тричлена на множники [3,с.14].

1.2 Тотожно рівні многочлени

Поняття тотожно рівних многочленів зазвичай вивчається разом із самим поняттям тотожності у межах шкільного курсу алгебри.

Тотожно рівними один одному будуть такі многочлени, значення яких будуть однакові за будь-яких можливих значень змінних, що входять до їх складу. Наприклад, $P_1(x) = a - (b + c)$ та $P_1(x) = a - b - c$.

Рівність, яка є правильною при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають **тотожністю**. З попереднього прикладу легко отримати тотожність: $a - (b + c) = a - b - c$.

Фраза «при будь-яких можливих значеннях змінних» свідчить про всі ті значення змінних, у яких обидва висловлювання матимуть сенс. Це положення ми пояснимо пізніше, коли наведемо приклади тотожно рівних виразів.

Тотожним перетворенням виразу називають заміну одного виразу іншим, тотожно рівним йому.

Приклади виразів, тотожно рівних один одному.

Використовуючи визначення, наведені вище, розглянемо кілька прикладів таких виразів.

Приклад 1. Тотожно рівними будуть $a + b$ і $b + a$, причому від значень змінних це не залежить (рівність виразів у даному випадку визначається переміщувальною властивістю додавання).

Ще один приклад тотожно рівних виразів з літерами – $0 \cdot x \cdot y \cdot z$ та 0. Якими б не були значення змінних у цьому випадку, будучи помноженими на

0, вони дадуть 0. Нерівні вирази $-6 \cdot x$ та $8 \cdot x$, оскільки вони не будуть рівні за будь-якого x.

Тотожний сенс рівності многочленів: многочлени рівні, якщо рівні їх значення за всіх значень змінних, що входять у цей многочлен.

Перевірити тотожну рівність многочленів за таким визначенням неможливо, оскільки довелося б підставляти нескінченну кількість значень літер і на це не вистачило б цілого життя.

Приклад 2. Доведіть тотожність:

1)$2(3a+4b)+3(a-7b)-7(2a-7b)=-5a+36b$;

Розв’язання. Спростимо ліву частину рівності:

$$2(3a+4b)+3(a-7b)-7(2a-7b)$$
$$=6a+8b+3a-21b-14a+49b=-5a+36b.$$

Тотожність доведено.

2) $a(b-c)+b(c-a)=c(b-a)$;

Розглянемо різницю лівої і правої частин рівності:

$$a(b-c)+b(c-a)=ab-ac+bc-ab-bc+ac=0.$$

Тотожність доведено.

Який же зв'язок між поняттями алгебраїчної та тотожної рівності многочленів?

З одного боку зв'язок очевидний: якщо многочлени рівні алгебраїчно, то вони рівні і тотожно, тому що обидва многочлени складаються з одних і тих же членів, і, підставляючи в них будь-які значення, ми матимемо числові вирази, що збігаються.

Теорема про тотожність. Для алгебраїчної рівності двох многочленів від однієї змінної достатньо перевірити рівність значень двох многочленів, підставляючи замість змінної числа у кількості, більшій, ніж рівень цих многочленів.

Наприклад, два многочлени першого степеня збігаються, якщо рівні їх значення при двох значеннях змінної; для квадратних многочленів достатньо перевірити збіг за трьох значень змінних; для кубічних – при чотирьох тощо [8,с.91].

1.3 Операції над многочленами

Для кожного многочлена

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

і многочлена

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

визначено такі операції:

1)Множення многочленів на число $c \in R$:

$cP_n(x) = ca_n x^n + ca_{n-1}x^{n-1} + \cdots + ca_1 x + ca_0$;

2) Додавання (віднімання) многочленів:

$P_n(x) \pm Q_n(x) = (a_n \pm b_n)x^n + \cdots + (a_1 \pm b_1)x + (a_0 \pm b_0)$;

3) Множення многочленів здійснюють за таким правилом: кожен член одного многочлена множать на кожен член другого многочлена, отримані результати додають подібні доданки;

4) ділення многочленів (за умови, що степінь дільника менший або дорівнює степеню діленого) виконується за правилом «ділення кутом» [9,с.75].

Результат ділення записується у вигляді:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{чи } P(x) = Q(x)S(x) + R(x), \qquad (1.1)$$

де – S(x) частка; R(x) - остача (степінь остачі менший за степінь дільника).

Многочлен - R(x) ділиться націло на Q(x) ($Q(x) \neq 0$), якщо $\frac{R(x)}{Q(x)} = S(x)$ або $P(x) = Q(x)S(x)$.

Якщо $Q(x) = x - x_0$, де $x_0 \in R$, то результати ділення многочлена P(x) на (x-x_0), відповідно до формули (1.1.), можна записати в вигляді рівності

$$P_n(x) = (x - x_0)S_{n-1}(x) + R_0 \text{ ,} \qquad (1.2)$$

де R_0- число .

Коефіцієнт многочлена

$$S_{n-1}(x) = C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \dots + C_1 x + b_0$$

і остачу R_0 у рівності (1.2) можна обчислити за допомогою схеми Горнера:

$$C_{n-1} = a_n \ ; C_{n-2} = a_{n-1} + x_0 C_{n-1} \ ; C_{n-3} = a_{n-2} + x_0 C_{n-2} \ ; \dots$$

$$C_0 = a_1 + x_0 C_1 \ ; R = a_0 + x_0 C_0 \ . \qquad (1.3)$$

При обчисленні коефіцієнтів (1.3) використовують таблицю:

x	A_n	A_{n-1}	A_{n-2}	$\dots$	A_1	A_0
x_0	C_{n-1}	C_{n-2}	C_{n-3}	$\dots$	C_0	R_0

Верхній рядок заповнюється коефіцієнтами заданого многочлена, нижній – числами, які обчислюють за формулами (1.3).

Число x_0 , $x_0 \in R$ називається коренем многочлена $P(x)$, якщо $P(x_0) = 0$.

Число x_0 , називається коренем кратності *k* многочлена $P_n(x)$, якщо

$$P_n(x) = (x - x_0)^k S_{n-k}(x) \text{ та } S_{n-k}(x_0) \neq 0 \ .$$

Розв'язання задачі за схемою Горнера:

<u>Приклад 3</u>. *Кут повороту тіла навколо осі змінюється в залежності від часу по закону* $\varphi(t) = 0{,}4t^2 - 0{,}1t + 0{,}2$. *Знайти кутову швидкість (в рад/с) обертання в момент часу t=5 с.*

<u>Розв’язання.</u> Як відомо з курсу фізики, кутова швидкість в момент часу $t = t_0$ є значенням похідної кутового переміщення від часу при $t = t_0$. Для обчислення похідної скористаємося схемою Горнера:

	0,4	-0,1	0,2
5	0,4	1,9	9,7
5	0,4	3,9	

Отже, кутова швидкість 3,9 *рад/с* .

Теорема 1. (Безу) Число x_0 є коренем многочлена $P(x)$ тоді і тільки тоді, коли $P(x)$ ділиться націло на *(x-x₀)* [10,с.39].

Теорема 2. Число R_0 є залишком від ділення многочлена $P(x)$ на $(x-x_0)$ тоді і тільки тоді, коли $R_0 = P(x_0)$.

Теорема 3. Нехай $P(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами. Якщо він має цілі корні, то вони знаходяться серед цілих дільників вільного члена.

Представлення многочлена $P_n(x)$ в вигляді двох або кількох многочленів (якщо це можливо) називається розкладанням $P_n(x)$ на множники.

Загальний вигляд розкладання $P_n(x)$ на множники:

$$P_n(x) = A(x - x_1)^n \cdot (x - x_2)^n \cdot \dots \cdot (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^n \cdot \dots \cdot (a_m x^2 + b_m x + c_m)^n \ ;$$

де $a, a_1, \cdots, a_m; b_1, \cdots, b_m \ ; c_1, \cdots, c_m \in R$ *(const)*;

$x_1, x_2, \cdots, x_k$-корені многочлена $P_n(x)$;

$n_1; n_2; \cdots; n_k; r_1 \cdots r_m \in N$;

$n_1 + n_2 + \cdots + n_r + 2r_1 + \cdots 2r_m = n.$

Квадратні тричлени не мають дійсних коренів.

Основні методи розкладання:

1) винесення спільного множника за дужки;

2) метод групування:

- безпосередньо;

- з попередніми перетвореннями доданків;

3) використання формул скороченого множення;

4) використання формул розкладання квадратного тричлена на множники

$$ax^2 + bx + c = \begin{cases} a(x - x_1)(x - x_2), & \text{якщо } D > 0 \text{ і } x_1, x_2 - \text{корені}, \\ a(x - x_0)^2, & \text{якщо } D = 0 \text{ і } x_0 - \text{корінь} \ ; \end{cases}$$

5) виділення повного квадрата та зведення до різниці квадратів;

6) введення нової змінної;

7) пошук кореня многочлена серед дільників вільного члена, використання теореми Безу [11,с.30].

Многочлен може залежати не тільки від однієї змінної, а й від двох ($P_n(x;y)$), трьох ($P_n(x;y;z)$) і так далі.

Дані многочлени називаються многочленами від декількох змінних. Тоді їх одночленом називають вираз, що є добуток чисел і змінних у деяких степенях. Степенем одночлена називають суму показників степенів всіх змінних, що входять до нього. Старший степінь многочлена кількох змінних визначається старшим степенем його одночлена.

Многочлен від двох змінних $\mathrm{P}(x;y)$, називається симетричним, якщо при заміні змінних *x* на *y* та *y* на *x* вираз $\mathrm{P}(x;y)$ не змінюється.

Над многочленами від кількох змінних можна виконувати дії, аналогічні до дій над многочленами від однієї змінної. Для розкладання даних многочленів на множники застосовуються такі самі методи, як і для многочленів від однієї змінної.

Приклад 4. Записати многочлен у стандартному вигляді, визначити його степінь:

1) $(x-4)^3+3x^2(2-x)+2x^3$;

2) $-3x^2y(7y^2+3x-8)$;

Розв'язання. 1) Розкриємо дужки :

$$(x-4)^3+3x^2(2-x)+2x^3=x^3-12x^2+48x-64+6x^2-3x^3+2x^3=-6x^2+48x-64.$$

Цей вираз є многочленом 2-го степеня відносно змінної *x*.

3)Помножимо многочлен на одночлен

$$-3x^2y(7y^2+3x-8)=3x^2y\cdot 7y^2-3x^2y\cdot 3x+3x^2y\cdot 8.$$

Наведемо подібні та отримаємо многочлен

$$-21x^2y^3-9x^3y+24x^2y,$$

Який многочлен 5-го степеня від двох змінних *x*, *y* (найбільше сумарне значення показників маємо в першому одночлені: 2 + 3 = 5).

Приклад 5. Знайти частку та остачу від подільності многочлена

$P(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 7$ на многочлен $Q(x) = x^2 + x - 4$.

Розв'язання. Скористаємося правилом «ділення кутом»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;3x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 7 & x^2 + x - 4 \\
\underline{3x^4 + 3x^3 - 12x^2} \qquad\qquad & \overline{3x^2 - 4x + 18} \\
-\;-4x^3 + 14x^2 - 5x - 7 & \\
\underline{-4x^3 - 4x^2 + 16x} \qquad & \\
-\;-18x^2 - 21x - 7 & \\
\underline{-18x^2 + 18x - 72} & \\
-39x + 65 &
\end{array}
$$

Отримуємо:

$3x^2 - 4x + 18$ – частка (ціла частина).

$-39x + 65$ – остача (многочлен 1-й степені).

Тоді

$$\frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 7}{x^2 + x - 4} = 3x^2 - 4x + 18 - \frac{39x - 65}{x^2 + x - 4}.$$

Приклад 6. Перевірити, чи ділиться многочлен $P(x) = x^3 + 4x^2 - 3$ націло на $x - 5$. Якщо ні, то знайти остачу (не проводячи ділення).

Розв'язання. У даного многочлена $P(x)$ вільний член є число $a_0 = -3$.

Оскільки число 5 не є дільником числа -3, то $x = 5$ – не є коренем многочлена $P(x)$. Відповідно $P(x)$ не розділяє націло на $x - 5$.

Остачу знаходимо за теоремою 2.

$$R = P(5) = 5^3 + 4 \cdot 5^2 - 3 = 222.$$

Приклад 7. Розкласти многочлени на множники.

1)$7x^3 + 7x^2 + 14x$;

2)$-x^5 + x^4 - 4x + 4$;

3)$x^3 - 11x^2 + 12$;

4)$8x^9 - x^6$;

5)$x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$;

6)$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$;

7)$x^4 - 2x^2 - 8$.

Розв’язання. 1) Використовуємо метод винесення спільного множника за дужки:

$$7x^3 + 7x^2 + 14x = 7x(x^2 + x + 2).$$

Оскільки у квадратного тричлена $D < 0$, то отримано відповідь.

4)Скористаємось методом групування.

$$-x^5 + x^4 - 4x + 4 = (x^4 - x^5) + (4 - 4x) = x^4 \cdot (1 - x) + 4 \cdot (1 - x) = (1 - x) \cdot (x^4 + 4).$$

Для подальшого розкладу виділимо повний квадрат і зведемо $(x^4 + 4)$ до різності квадратів:

$$(1 - x) \cdot (x^4 + 4) = (1 - x) \cdot \left((x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2\right) = (1 - x) \cdot ((x^2 + 2)^2 - (2x)^2) = (1 - x) \cdot (x^2 + 2 - 2x) \cdot (x^2 + 2 + 2x).$$

Оскільки дискримінанти квадратних тричленів негативні, остаточно отримуємо розклад

$$-(x - 1) \cdot (x^2 + 2 - 2x) \cdot (x^2 + 2 + 2x).$$

3)Спочатку переформуємо даний вираз, а потім використаємо метод групування та формулу різниці квадратів:

$$x^3 - 11x^2 + 12 = x^3 - 12x^2 + x^2 + 12 = (x^3 + x^2) - 12 \cdot (x^2 - 1) = x^2 \cdot (x + 1) - 12 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = (x + 1) \cdot (x^2 - 12x + 12).$$

Вираховуємо корні отриманого квадратного тричлена:

$$x_1 = \frac{12+4\sqrt{6}}{2} = 6 + 2\sqrt{6}, x_2 = \frac{12-4\sqrt{6}}{2} = 6 - 2\sqrt{6}.$$

Тому

$$P(x) = (x + 1) \cdot (x + 6 + 2\sqrt{6}) \cdot (x + 6 - 2\sqrt{6}).$$

4) Винесемо спільний множник за дужки і скористаємось формулою різниці кубів:

$$8x^9 - x^6 = x^6 \cdot (2x - 1) \cdot (4x^2 + 2x + 1).$$

Отримали шукане розкладання.

5)Для многочлена $P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$ запишемо цілі дільники вільного многочлена $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$. Підставимо дані значення замість $P(x)$, переконаємося, що $x_0 = -1$ є коренем, так як

$P(-1) = 1 + 6 + 9 - 4 - 12 = 0.$

Розділяємо заданий многочлен на $x+1$:

$$
\begin{array}{l|l}
-\, x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12 & x + 1 \\
\quad \underline{x^4 + x^3} & \overline{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} \\
\qquad -\, -7x^3 + 9x^2 + 4x - 12 & \\
\qquad\quad \underline{-7x^3 - 7x^2 \qquad\qquad} & \\
\qquad\qquad -\, 16x^2 + 4x - 12 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{16x^2 + 16x \quad} & \\
\qquad\qquad\qquad -\, -12x - 12 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-12x - 12} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Отримуємо $P(x) = (x + 1) \cdot (x^3 - 7x^2 + 16x - 12)$.

Для многочлена $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ проведемо аналогічні дії.

Знаходимо корінь 2 від вільного члена.

Ділимо:

$$
\begin{array}{l|l}
-\, x^3 - 7x^2 + 16x - 12 & x - 2 \\
\quad \underline{x^3 - 2x^2} & \overline{x^2 - 5x + 6} \\
\qquad -\, -5x^2 + 16x - 12 & \\
\qquad\quad \underline{-5x^2 + 10x \qquad} & \\
\qquad\qquad -\, 6x - 12 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{6x - 12} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Тоді $P(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 - 5x + 6)$.

Квадратний тричлен $x^2 - 5x + 6$ розкладаємо на множники, використовуємо формулу коренів. В кінці отримуємо:

$P(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = (x - 1) \cdot (x - 2)^2 \cdot (x - 3).$

6) Знайти найменше спільне кратне многочленів $f(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 10x - 2$ та $g(x) = x^3 - 2x + 7$:

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{r} 2x^5 + x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 10x - 2 \\ \underline{2x^5 \qquad - 4x^3 + 14x^2 \qquad\qquad\quad} \end{array} & \begin{array}{l} x^3 - 2x + 7 \\ \hline 2x^2 + x - 1 = q(x) \end{array} \\
\qquad -\begin{array}{r} x^4 - x^3 - 2x^2 + 10x - 2 \\ \underline{x^4 \qquad - 2x^2 + 7x \qquad\;\;} \end{array} & \\
\qquad\qquad -\begin{array}{r} - x^3 \qquad + 3x - 2 \\ \underline{- x^3 \qquad + 2x - 7} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x + 5 = r(x) &
\end{array}
$$

Відповідь : $f(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 10x - 2 = (x^3 - 2x + 7)(2x^2 + x - 1) + x + 5$;

$g(x) = \frac{x^3-2x+7}{x+5} = (x+5)(x^2 - 5x + 23) - 108.$

7) Для многочлена $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ знайдемо цілий корінь серед дільників вільного члена $a_0 = 6; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$ це число -1. Для подальшого розкладу використаємо схему Горнера:

x^3	x^2	x^1	x^0
1	6	11	6
1	5	6	0

Таким чином $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1) \cdot (x^2 + 5x + 6)$ квадратний тричлен $x^2 + 5x + 6$ має корні $x_1 = -2$ та $x_2 = -3$, а тому в кінці отримуємо: $P(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$.

8) Для розкладу многочлена $x^4 - 2x^2 - 8$ скористаємось методом введення нової змінної. Нехай $x^2 = y$ тоді маємо $y^2 - 2y - 8$. Корені даного многочлена- числа 4 та -2. Тому $y^2 - 2y - 8 = (y-4) \cdot (y+2)$. Повертаючись до старої змінної, маємо $x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 2) = (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 2)$.

<u>Приклад 8.</u> Знайти *a* та *b* з заданої рівності та довести, що *a+b=0*:

$$\frac{2}{7x^2-7x-140} = \frac{a}{7\cdot(x+4)} + \frac{b}{7\cdot(x-5)}.$$

Розв'язання: приведемо першу частину заданої рівності до спільного знаменника:

$\frac{2}{7x^2-7x-140} = \frac{a\cdot(x-5)+b\cdot(x+4)}{7\cdot(x+4)\cdot(x-5)}$ або $\frac{2}{7x^2-7x-140} = \frac{ax-5a+bx+4b}{7x^2-7x-140}$.

Оскільки знаменники дробів рівні, прирівняємо чисельники та згрупуємо у правій частині коефіцієнти при x. Многочлен у правій частині запишемо у стандартному вигляді:

$$2 = (a + b) \cdot x + (4b - 5a).$$

З визначення рівності многочленів отримуємо систему та вирішуємо її:

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ 4b - 5a = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -b, \\ 4b + 5b = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -b, \\ b = \frac{2}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{2}{9}, \\ b = \frac{2}{9}. \end{cases}$$

Знаходимо суму

$$a + b = -\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0.$$

Доказ завершено [12,с.61].

1.4 Алгоритм Евкліда

Алгоритм Евкліда використовують для обчислення НСД – найбільшого спільного дільника (англ. GCD – greatest common divisor) двох цілих многочленів [13,с.51].

Алгоритм заснований на тому факті, що для будь-яких двох многочленів від однієї змінної, f(x) і g(x), існують такі многочлени q(x) та r(x), називаються відповідно частка та остача, що:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) , \tag{1.4}$$

У цьому випадку остача, що залишається, є многочлен дільника остачі менший, ніж $g(x)$, також частка і остача, задані многочленами f (x) і g (x). Якщо r (x), що залишиться в рівнянні (1.4) дорівнює многочлену 0 (0), то многочлен f (x) ділиться на g (x) без остачі.

Алгоритм складається з послідовного ділення заданого многочлена f (x) на g (x):

$$f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x), \tag{1.5}$$

Якщо $r_1(x) \neq 0$, то перша остача та многочлен $r_1(x)$ є другим многочленом g(x), заданим α.

$$g(x) = r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x) \,, \qquad (1.6)$$

Крім того, якщо $r_2(x) \neq 0$, це один з перших, що залишилися $r_1(x)$ для других, що залишилися $r_2(x)$.

$$r_1(x) = r_2(x) \cdot q_3(x) + r_3(x) \,, \qquad (1.7)$$

Якщо $r_3(x) \neq 0$ - другий залишок на третій:

$$r_2(x) = r_3(x) \cdot q_4(x) + r_4(x) \,, \qquad (1.8)$$

та ін. Процес не може продовжуватися нескінченно через зменшення степеня, що залишилися на кожному етапі, наступний n + 1 залишок r_{n+1} рівний 0.

$r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x) \cdot q_n(x) + r_n(x)$, (n)

$r_{n-1}(x) = r_{n-1}(x) \cdot q_{n+1}(x) + r_{n+1}(x)$, $(n+1)$

$r_{n+1}(x) = 0$. $(n+2)$

Тоді останній не дорівнює нулю залишок r_n і буде найбільшим спільним дільником вихідної пари многочленів f(x) та g(x).

Висновки до розділу 1

Історія появи нових математичних теорій нерозривно пов’язана з історією епохи. Нові методи, що виникали на стиках кількох наук, цілком відображали потреби суспільства. Тому вивчаючи чергову теорему чи метод не менш важливо пояснити причини виникнення цих знань, їх вплив на хід історії математики. Використання фактів з історії математики на уроках наповнює саму математику гуманітарним та естетичним змістом, є додатковим мотивуючим важелем для її опанування.

Математична наука вивчає різні структури, послідовності чисел, відносин між ними, за допомогою рівнянь і їх рішення. Це формальний мова, якою можна чітко описати наближені до ідеальних властивості реальних об'єктів, що вивчаються в інших областях науки. Однією з таких структур є многочлен.

У розділі розглянуто поняття «многочлен», дії над многочленами, алгоритм Евкліда знаходження найбільшого спільного дільника многочленів.

РОЗДІЛ 2. ПОНЯТТЯ ПРО ТЕОРЕМУ БЕЗУ ТА ПОХІДНУ МНОГОЧЛЕНА

2.1 Корені многочлена. Теорема Безу

Корінь многочлена (не рівного тотожному нулю) $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ над полем k - це елемент $c \in k$ (або елемент розширення поля k) такий, що виконуються дві наступні рівносильні умови:

• цей многочлен ділиться на многочлен *x*-*c*;

• підстановка елемента перетворює обернене рівняння

$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$ у тотожність, тобто значення многочлена стає рівним нулю.

Рівносильність двох формулювань випливає із теореми Безу. У різних джерелах будь-яка одна з двох формулювань вибирається як визначення, а інша виводиться як теорема [20,с.19].

Говорять, що корінь c має кратність m, якщо аналізований многочлен $(x-c)^m$ ділиться на і не ділиться на $(x-c)^{m+1}$. Наприклад, многочлен $x^2 - 2x + 1$ має єдиний корінь, рівний 1 кратності 2. Вираз «кратний корінь» означає, що кратність кореня більша за одиницю.

Говорять, що многочлен має *n* корінь без урахування кратності, якщо кожен його корінь враховується при підрахунку один раз. Якщо кожен корінь враховується кількість разів, рівне його кратності, то кажуть, що підрахунок ведеться з урахуванням кратності.

Властивості.

• Кількість коренів многочлена з урахуванням кратності не менша, ніж без урахування кратності.

• Число коренів n многочлена ступеня не перевищує навіть n у тому випадку, якщо кратне кореня рахувати з урахуванням кратності.

• Кожен многочлен *p(x)* із комплексними коефіцієнтами має принаймні один комплексний корінь (основна теорема алгебри).

- Аналогічне твердження правильне будь-якого алгебраїчно замкнутого поля дома поля комплексних чисел (за визначенням).
- Більше того, многочлен з речовими коефіцієнтами p(x) можна записати у вигляді

$$p(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

де $c_1, c_2, \cdots, c_n$— (загалом комплексні) кореня многочлена $p(x)$, можливо з повтореннями, у своїй якщо серед коренів $c_1, c_2, \cdots, c_n$ многочлена $p(x)$ зустрічаються рівні, їх загальне значення називається кратним коренем, а кількість — кратністю цього кореня.

• Число комплексного кореня многочлена з комплексними коефіцієнтами степеня n з урахуванням кратності дорівнює n. При цьому комплексний корінь многочлена (якщо він є) з речовими коефіцієнтами можна розбити на пари сполучених однакової кратності. Таким чином, многочлен парного степеня з речовими коефіцієнтами може мати з урахуванням кратності лише парне число речових коренів, а непарної — лише непарне.

• Корені многочлена пов'язані з його коефіцієнтами за формулою Вієта.

Спосіб знаходження коренів лінійних і квадратичних многочленів у загальному вигляді, тобто спосіб розв'язання лінійних та квадратних рівнянь, був відомий ще у стародавньому світі. Пошуки формули для точного вирішення загального рівняння третього степеня тривали довгий час, доки не увінчалися успіхом у першій половині XVI століття у працях Сципіона дель Ферро, Нікколо Тарталья та Джероламо Кардано. Формули для кореня квадратних і кубічних рівнянь дозволили порівняно легко отримати формули для корінь рівняння четвертого степеня.

Те, що корінь загального рівняння п'ятого степеня і вище не виражаються за допомогою раціональних функцій і радикалів від коефіцієнтів (тобто те, що самі рівняння є розв'язними в радикалах), було доведено норвезьким математиком Нільсом Абелем в 1826 [1]. Це зовсім не означає, що корінь такого рівняння може бути не знайдено. По-перше, при деяких особливих комбінаціях коефіцієнтів кореня рівняння все ж таки можуть бути визначені (див., наприклад, зворотне рівняння). По-друге, існують формули для кореня рівнянь 5-го степеня і вище, які використовують спеціальні функції - еліптичні або гіпергеометричні (див., наприклад, корінь Брінга).

У разі, якщо всі коефіцієнти многочлена раціональні, то знаходження його кореня призводить до знаходження кореня многочлена з цілими коефіцієнтами. Для раціональних коренів таких многочленів існують алгоритми знаходження підбором кандидатів з використанням схеми Горнера, причому при знаходженні цілих коренів підбір може бути істотно зменшений прийомом чищення коренів. Також у цьому випадку можна використовувати поліноміальний LLL-алгоритм.

Для приблизного знаходження (з будь-якою необхідною точністю) речових коренів многочлена з речовими коефіцієнтами використовуються ітераційні методи, наприклад метод січних, метод бісекції, метод Ньютона, Метод Лобачевського - Греффе. Кількість речових коренів многочлена на інтервалі може бути визначено за допомогою теореми Штурму.

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена ***P(x)*** на двочлен ***x-a*** дорівнює значенню цього многочлена при ***x=a***, тобто ***P(a)***.

Наслідок: Якщо ***a*** – корінь многочлена, то многочлен ділиться на ***x-a*** без остачі.

Перш ніж доводити теорему, зробимо кілька попередніх пояснень.

1. У формулюванні теореми не випадково сказано: «розташованого за спадаючим степенем *x*».

Якщо виробляти розподіл, розташувавши ділене і дільник за зростаючими степенями *x*, то тоді не можна стверджувати, що остача завжди буде дорівнювати значенню дільника при $x = a$.

Наприклад, якщо многочлен розташувати за зростаючими степенями х і поділити його на $2 + x$, тобто ділити так:

$$\begin{array}{l|l} -10+x+x^4 & 2+x \\ \hline \pm 10 \pm 5x & -5+3x, \\ \hline \quad 6x+x^4 & \\ \quad \mp 6x \mp 3x^2 & \\ \hline \quad -3x^2+x^4 & \end{array}$$

то ми ніколи не отримаємо остачу, що дорівнює числу 4, тобто значенню поділеного при $x = -2$.

2. Ми знаємо, що існують такі вирази алгебри, які втрачають сенс при деяких окремих значеннях букв, що входять до нього. Наприклад, $\frac{1}{x}$ втрачає сенс за $x = 0$; вираз $\frac{1}{x2-25}$ втрачає сенс за $x = 5$ і за $x = -5$.

Зауважимо, що многочлен будь-якого цілого позитивного степеня ніколи не втрачає сенсу. При кожному значенні змінної він набуває певного значення.

3. Приклад двох множників, з яких один обертається в нуль, а інший набуває певного значення, завжди дорівнює нулю. Якщо ж один множник звертається в нуль, а інший втрачає сенс, то про такий добуток не можна говорити, що він дорівнює нулю. Про такий добуток нічого певного сказати не можна. У кожному окремому випадку потрібне особливе дослідження [21,с.42].

Доказ теореми Безу.

Нехай $f(x)$ позначає собою довільний многочлен n-го степеня щодо змінної x, розташований по спадних степенях x, і нехай при розподілі на двочлен $x - a$ вийшла частка $q(x)$, а остача - R (див. схему поділу) :

$$\begin{array}{c|c} f(x) & x-a \\ \hline R & q(x) \end{array}.$$

Очевидно, що $q(x)$ буде деякий многочлен $(n - 1)$-го степеня щодо x, а остача R буде величиною постійної, тобто не залежить від x.

Якби залишок R був многочленом хоча б першого степеня щодо x, це означало б, що процес розподілу не доведений до кінця. Отже, R від x не залежить.

За якістю розподілу (ділене і дільник на частку плюс остача) отримаємо тотожність

$$F(x) = (x - a)q(x) = R.$$

Ця рівність справедлива при будь-якому значенні x, значить, вона буде справедливою і при $x = a$.

Підставляючи в ліву та праву частини цієї рівності замість змінної x число a, отримаємо:

$$F(a) = (a - a)q(a) = R.$$

Тут символ $f(a)$ позначає собою не $f(x)$ тобто, не многочлен щодо x, а значення цього многочлена за $x = a$.

$q(a)$ означає значення $q(x)$ при $x = a$.

Залишок R залишився таким, яким він був раніше, тому що R від x не залежить.

$(a - a)\ q\ (a)$ дорівнює нулю, так як множник $(a - a)$ дорівнює нулю, а множник $q\ (a)$ є певне число. (Многочлен $q(x)$ ні за якого певного значення x не втрачає сенсу.)

Тому з цієї рівності отримаємо:

$F(a)=R.$

Що й необхідно було довести.

Приклад 8. При діленні многочлена x^3+x^2+x+1 на x —i остаток рівний i^3+i^2+i+1 тобто нулю.

Наслідки з теореми Безу

Наслідок 1. Залишок від ділення многочлена f (x) на двочлен (ax + b) дорівнює значенню цього многочлена при $x =- b / a$, тобто $R = f\ (-b / a)$.

Наслідок 2. Якщо a є коренем якого-небудь многочлена, то ця умова буде достатньою для ділимості цього многочлена без залишку на $x - a$.

Застосування теореми Безу.

Поцікавимося подільністю виразів виду $a^n \pm b^n$ на двочлени вида $a\pm b$ (тут n – натуральне число).

В виразі $a^n \pm b^n$ приймемо a за незалежну змінну, а b за постійну. Тоді вираз $a^n \pm b^n$ буде многочленом n-ої степені відносно змінної a, яка розташована за спадними степенями цієї змінної.

А) При діленні $a^n + b^n$ *на* $a + b$ залишок буде рівний:

$$R = (-b)^n + b^n = \begin{cases} 0, \text{при не кратному } n, \\ 2b^n, \text{при краному } n. \end{cases}$$

Отже, $a^n + b^n$ ділиться без залишку на $a + b$ тоді і тільки тоді, коли n-число не парне.

Б) При діленні $a^n + b^n$ на $a — b$ маємо

$$R = b^n + b^n = 2b^n \neq 0.$$

Отже, $a^n + b^n$ не ділится на $a — b$.

в) При діленні $a^n + b^n$ на $a+b$ маємо

$$R = (-b)^n - b^n = \begin{cases} 0, \text{при кратному } n; \\ -2b^n, \text{при не кратному } n. \end{cases}$$

Отже, $a^n + b^n$ ділиться на $a + b$ тоді і тільки, коли n — число парне.

г) При діленні $a^n + b^n$ на $a — b$ отримуємо

R= b^n - b^n=*0.*

Отже, $a^n + b^n$ завжди ділиться на $a — b$.

2.2 Похідна многочлена

Многочлен степеня n має вигляд:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

де a_n - вільний член, а a_0, a_1, ..., a_{n-1} - коефіцієнти при

x^n, x^{n-1},..., x (відповідно), причому $a_0 \neq 0$. [22,с.35]. Такий вираз можна розглядати як суму (n+ 1) функцій: a_0x^n, a_1x^{n-1}, a_2x^{n-2}, ... , $a_{n-1}x$, a_n. Тому похідна многочлена дорівнює сумі похідних цих функцій:

$$P_n'(x) = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + (a_2x^{n-2})' + \cdots + (a_{n-1}x)' + (a_n)'.$$

Похідна від a_n , як похідна від константи, дорівнює нулю. Інші похідні легко знайти, використовуючи те, що постійний множник можна виносити за знак похідної і за будь-якого натурального k $(x^k)' = k\,x^{k-1}$. Таким чином, отримуємо:

$$(a_0x^n)' = a_0(x^n)' = a_0nx^{n-1};$$
$$(a_1x^{n-1})' = a_1(x^{n-1})' = a_1(n-1)x^{n-2};$$
$$(a_{n-1}x)' = a_{n-1}(x)' = a_{n-1}\ ;$$
$$(a_n)' = 0.$$

Звідси

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)' = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

Приклад 9.

1) $(3x^2 - 5x - 7)' = 3 \cdot 2x - 5 = 6x - 5;$

2) $(10x^6 - 4x^3 + x)' = 10 \cdot 6x^5 - 4 \cdot 3x^2 + 1 = 60x^5 - 12x^2 + 1.$

Вправи.

Знайти похідні наступних функцій:

1. $y = 2x^5 - x$.
2. $y = 3x^7 - 6x^6 - 4x^3 + 5x^2 + 17$.
3. $y = -x^3 - 3x^2 + 6x - 100$.
4. $y = (x^3 - 1 - 2x)(x^2 - 5)$.
5. $y = (x^7 + x)^2$.
6. $y = (2x - 6x^5)^3$. [23,с.19].

Відповіді:

1. $10x^4 - 1$
2. $21x^6 - 36x^5 - 12x^2 + 10x$
3. $-3x^2 - 6x + 6$
4. $-6 + 68x^3$
5. $5x^4 - 21x^2 - 2x + 10$
6. $24x^2(1 - 3x^4)^2(1 - 15x^4)$.

Висновок до розділу 2

Одним із важливих вмінь, що набувають учні в процесі вивчення математики, є вміння розв'язувати алгебраїчні рівняння вищих степенів.

Цьому разом з теоремою Вієта, формулами Кардано і Тарталья, сприяє й теорема Безу та наслідки з неї.

В курсі алгебри дев'ятого класу учні знайомляться з теоремою Безу та наслідками з неї. Можливості, які відкриває перед дев'ятикласниками ця теорема, дозволяють одразу братися за розв'язання таких рівнянь, про які раніше годі було й думати. Еволюція знань українського дев'ятикласника є аналогічною до еволюції завоювань в алгебраїчній царині XVII-XIX ст., з тією різницею, що пару століть вдається вкласти в пару місяців. Від лінійних до квадратних рівнянь, через теорему Вієта, формули Кардано і Тартальї аж до теореми Безу та основної теореми алгебри – такий шлях долає шкільна програма з алгебри 8-9 класу. Тому в кінці 9 і на початку 10 класу учні можуть розв'язувати рівняння вищих степенів, аналізувати, використовувати параметр під час дослідження відповідних алгебраїчних функцій. Цей методичний матеріал є невичерпним джерелом для підвищення інтересу до вивчення математики, проведення досліджень, порівнянь, наукових експериментів тощо.

РОЗДІЛ 3. ПОНЯТТЯ ПРО СИМЕТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ

3.1 Поняття многочлена багатьох змінних

Многочлен *P(x;y)* називають однорідним многочленом n-го степеня, якщо сума показників степенів змінних у кожному члені многочлена дорівнює n. Якщо *P(x;y)* — однорідний многочлен, то рівняння *P(x;y) = 0* називають однорідним рівнянням.

Многочлен *P(x;y)* називають симетричним, якщо він зберігає свій вигляд при одночасній заміні *x* на *y* і *y* на *x*.

Рівняння *P(x;y) = a*, де $a \in R$ називають симетричним, якщо *P (x;y)* - симетричний многочлен.

Многочлени від кількох змінних можна додавати, віднімати, множити, зводити до натурального степеня, розкладати на множники – дану тему школярі вивчають з 7 по 9 класи. Розглянемо це більш детально.

Приклад 10. Розкласти на множники многочлени: $2x^2$-$5xy$+$2y^2$.

Скористаємося методом зведення спільних знаменників

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 2x^2 - 4xy - xy + 2y^2 = 2x(x - 2y) - y(x - 2y) = (x - 2y)(2x + 2y).$$

Приклад 11. Виведемо формулу скороченого множення для квадрата суми $(x+y+z+u)^2$.

$(x+y+z+u)^2=((x+y)+(z+u))^2= (x+y)^2+2(x+y)(z+u)+(z+u)^2=$ $x^2+y^2+z^2+u^2+2(xy+xz+xu+yz+yu+zu)$.

Отже, ми отримали $(x+y+z+u)^2= x^2+y^2+z^2+u^2+2(xy+xz+xu+yz+yu+zu)$.

Серед многочленів від двох змінних виділяють однорідні та симетричні многочлени.

Многочлен *P(x;y)* називають однорідним многочленом n-го степеня, якщо сума показників степенів змінних у кожному члені многочлена дорівнює n. Якщо *P(x; y)* — однорідний многочлен, то рівняння *P(x; y) = 0* називають однорідним рівнянням.

Наведемо приклади.

1) $p\ (x; y) = 2x + 3y$ - однорідний многочлен першого ступеня; відповідно $2x+3y=0$ – однорідне рівняння першого ступеня.

2) $p\ (x; y) = p(x; y)=3x^2+5xy-7y^2$ - однорідний многочлен другого степеня; відповідно $3x^2+5xy-7y^2 =0$ - однорідне рівняння другого степеня.

3) $p(x; y)= x^3+4xy^2-5y^3$ - однорідний многочлен третього степеня; $x^3+4xy^2-5y^3 =0$ відповідно - однорідне рівняння третього степеня.

4) $p(x; y)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}y+a_{n-2}x^{n-2}y^2+\ldots+a_1xy^{n-1}+a_0y^n$ — загальний вигляд однорідного многочлена n-го степеня.

Розглянемо ще один метод розкладання многочленів на множники.

Метод невизначених коефіцієнтів. Метод, який використовують у математиці для знаходження коефіцієнтів виразів, вигляд яких завчасно відомий [24,с.49].

1. Два многочлени рівні тоді і лише тоді, коли рівні їхні коефіцієнти.

2. Будь-який многочлен третього степеня має хоча б один дійсний корінь, а тому розкладається у витвір лінійного та квадратичного множника.

3. Будь-який многочлен четвертого степеня розкладається на добуток многочленів другого степеня.

Приклад 12. Розкласти на множники многочлен

$$3x^3 - x^2 - 3x + 1.$$

Розв’язання. Оскільки многочлен третього степеня розкладається у добуток лінійних та квадратичних множників, то будемо шукати многочлени $x - p$ та $ax^2 + bx + c$ такі, що справедлива рівність $3x^3 - x^2 - 3x + 1 = (x - p)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - ap)x^2 + (c - bp)x - pc$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях у лівій та правій частинах цієї рівності, отримуємо систему чотирьох рівнянь для визначення чотирьох невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b - ap = -1 \\ c - bp = -3 \\ -pc = 1 \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему, отримуємо: $a = 3$, $p = -1$, $b = 2$, $c = -1$. Отже, многочлен $3x^3 - x^2 - 3x + 1$ розкладається на множники: $3x^3 - x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(3x^2 + 2x - 1)$.

Слід зазначити, що є досить витончений спосіб розв'язання однорідних рівнянь. Пояснимо його суть на прикладі.

<u>Приклад 13.</u> Розв'яжемо рівняння $x^3+4xy^2-5y^3=0$

Зауважимо, що й у заданому рівнянні якщо взяти, що $x=0$, то вийде $y=0$; це означає, що пара $(0; 0)$ є розв'язком однорідного рівняння. Нехай тепер $x\neq 0$. Поділимо почленно обидві частини заданого однорідного рівняння на x^3, отримаємо:

$$1 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0.$$

Вводимо нову змінну. Тоді рівняння набуде вигляду $1+4z^2-5z^3=0$.

Далі послідовно знаходимо:

$5z^3-4z^2-1=0$

$(5z^3-5z^2)+(z^2-1)=0$

$5z^2(z-1)+(z-1)(z+1)=0$

$(z-1)(5z^2+z+1)=0$

З рівняння $z-1=0$ знаходимо $z=1$, рівняння $5z^3-4z^2-1=0$ дійсних коренів немає.

Якщо $z=1$, то $\frac{y}{x} = 1$, тобто $y = x$. Це означає, будь-яка пара виду $(t; t)$ є рішенням заданого однорідного рівняння. До речі, і зазначена нами раніше пара $(0; 0)$ також входить до зазначеного переліку рішень.

Відповідь: $(t; t)$, де t-будь-яке дійсне число.

Тепер поговоримо про симетричні многочлени. Наприклад, симетричним є двочлен x^2y+xy^2. Справді, при одночасної заміні x на y і y на x вийде двочлен y^2x+yx^2, але це те саме, що x^2y+xy^2. Інші приклади симетричних многочленів: xy, $x+y$, x^2+y^2, x^3+y^3, x^4+y^4 тощо. Перші два із записаних многочленів вважаються основними в тому сенсі, що будь-які інші симетричні багаточлени можна представити у вигляді деякої комбінації багаточленів $x + y$ і xy.

Теорема. Будь-який симетричний многочлен $P(x;y)$ можна як записати у вигляді многочлена від xy і $x+y$.

Наприклад,

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$x^4+y^4= 2xy(x^2+y^2)-(x^4+y^4)+3(xy)^2$ тощо.

Рівняння $P(x;\ y)\ =\ a \in R$, називають симетричним, якщо $P\ (x;\ y)$ - симетричний многочлен. Ми з вами розглядали його на попередньому уроці.

А тепер перейдемо до такого поняття, як біном Ньютона.

Слово біном означає "Два числа". У математиці біномом називають «формулу для розкладання деякі складові цілої не від’ємного степеня суми двох змінних». Біном Ньютона - назва формули, що виражає степінь двочлена як суми одночленів.

Давайте за Ньютоном спробуємо її вивести, щоб потім застосовувати.

Формула скороченого множення для квадрата і куба суми двох доданків (така сума називається «біном», російською – двочлен).

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Їх можна отримати безпосередньо, розкривши дужки у очевидних рівностях

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$

Чи можна (без комп'ютера) отримати формули типу для біномів четвертого ступеня, п'ятого, десятого – будь-якого?

Давайте спробуємо дійти безпосередньо хоча б до п'ятого ступеня, а там, можливо, виявиться «рояль в кущах» (для порядку будемо розміщувати доданки в правій частині за спаданням ступеня а, вона зменшується від максимуму до нуля):

$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=(a+b)^4(a+b)=(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)(a+b)=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

Тепер окремо випишемо чисельні коефіцієнти у правих частинах формул при зведенні бінома в заданий рівень:

n=2 1,2,1

n=3 1,3,3,1

n=4 1,4,6,4,1

n=5 1,5,10,5,1

Легко перевірити, що виписані на чисельні коефіцієнти це рядки трикутника Паскаля, починаючи з третього. Цей «усічений трикутник», у якому не вистачає перших двох рядків, легко зробити повним (отримати рядки при $n=0$ та $n=1$):

n=0, (a+b)0=1

n=1, (a+b)1=a+b

Остаточно отримаємо:

n=0 1

n=1 1,1

n=2 1,2,1

n=3 1,3,3,1

n=4 1,4,6,4,1

n=5 1,5,10,5,1

Загальна формула бінома Ньютона:

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^na^0b^n.$$

Права частина формули називається розкладанням ступеня бінома.

●C_n^k називається біноміальними коефіцієнтами, а всі складові членами бінома.

Трикутник Паскаля – нескінченна таблиця біноміальних коефіцієнтів, що має трикутну форму. У цьому трикутнику на вершині та з боків стоять одиниці. Кожне число дорівнює сумі двох розташованих над ним чисел. Рядки трикутника симетричні щодо вертикальної осі. Названо на честь Блеза Паскаля [24,с.92].

Насправді, про трикутник Паскаля було відомо задовго до Паскаля - його знав той, хто жив у XI-XII ст. середньоазіатський математик і поет Омар Хайям (на жаль, його твір про це до нас не дійшов). Перше, що дійшло до нас опис формули бінома Ньютона міститься в книзі середньоазіатського математика ат-Тусі, що з'явилася в 1265 р., де дана таблиця чисел C_n^k (біноміальних коефіцієнтів) до n=12 включно.

Європейські вчені познайомилися з формулою бінома Ньютона, мабуть, через східних математиків. Детальне вивчення властивостей біноміальних коефіцієнтів провів французький математик та філософ Б. Паскаль у 1654 р.

Приклад 14.

№1

З цих многочленів виділіть симетричні:

1. $2x^2-5xy+2y^2-6$
2. $6x^4-16xy^2-6y^3+19$
3. $-3xy+6x^2-5y^2+8$
4. $16x^4y^2+16x^2y^4-x^4-y^4$

Розв'язання: до цього завдання застосуємо визначення симетричних багаточленів (Многочлен *P(x;y)* називають симетричним, якщо він зберігає свій вигляд при одночасній заміні *x* на *y* і *y* на *x*). Отримаємо, що нам підходять 1 та 4 пункти.

Правильна відповідь:

1. $2x^2-5xy+2y^2-6$
2. $6x^4-16xy^2-6y^3+19$
3. $-3xy+6x^2-5y^2+8$
4. $16x^4y^2+16x^2y^4-x^4-y^4$

№2

$(a+b)^5=$ __a^5 +___a^4b+___a^3b^2+___a^2b^3+___ab^4+__b^5

Розв’язання: для вирішення цього завдання скористаємося трикутником Паскаля

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Нас цікавить останній рядок.

Застосувавши її, отримаємо відповідь:

$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

3.2 Поняття перестановки

У математиці, многочлен перестановок- це многочлен, який діє як перестановка елементів кільця, тобто карта $x \mapsto g(x)$ - це бієкція. У випадку, якщо кільце є кінцевим полем, многочлени Діксона, які тісно пов'язані з многочленами Чебишева, надають приклади. Над кінцевим полем кожна функція, зокрема, кожна перестановка елементів цього поля, може бути записана як поліноміальна функція [25,с.64].

У випадку кінцевих кілець Z/nZ такі многочлени також вивчалися і застосовувалися в компоненті множення алгоритмів виявлення та виправлення помилок.

Нехай $F_q = GF(q)$ буде кінцевим полем характеристики p, тобто поле, що містить елементів q, де $q = p$ для деякого простого числа p. Многочлен f з коефіцієнтами F_q(символічно записаний як $f \in F_q[x]$) є многочленом перестановки від F_q, якщо функція від F_q до самої себе визначається як $c \mapsto f(c)$- це перестановка F_q.

Через кінцівку F_q це визначення може бути виражене кількома еквівалентними способами:

функція $c \mapsto e\ (c)$ $c \mapsto f(c)$ знаходиться на (сюр'єктивному);

функції $c \mapsto f(c)$ $c \mapsto f(c)$ взаємно однозначно (injective);

$f\ (x) = a$ має рішення F_q для кожного $a\ F_q$;

$f\ (x) = a$ має єдине рішення F_q для кожного $a\ F_q$.

Характеристика того, які поліноми є поліномами з перестановками, надається критерієм (Ерміта) $f \in F_q[x]$ є перестановкою багаточлену від F_q тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

1. f має рівно один корінь F_q;
2. для кожного цілого числа t з $1 \leq t \leq q - 2$ і $t \not\equiv 0$, редукція $f\ (x)\ (x - x)$ має рівень $\leq q - 2$.

Якщо $f(x)$ - многочлен перестановки, визначений над кінцевим полем $GF(q)$, то так і $g(x) = af(x + b) + c$ для всіх $a \neq 0$, b та c у $GF(q)$. Поліном перестановки $g\ (x)$ знаходиться в нормалізованій формі , якщо a, b і c обрані так, що $g\ (x)$, g (0) = 0 і (за умови характеристика p не ділить ступінь n полінома) коефіцієнт при x дорівнює 0.

Є багато відкритих питань, що стосуються многочленів з перестановками, визначених над кінцевими полями.

Мінімальна степінь

Критерій Ерміту вимагає великих обчислень і може бути важким для використання під час теоретичних висновків. Однак Діксон зміг використати його, щоб знайти всі многочлени перестановки степеня не вище п'яти по всіх кінцевих полях.

Деякі класи многочленів із перестановками

Крім наведених вище прикладів, такі Список g, хоч і не вичерпний, містить майже всі відомі основні класи многочленів з перестановками над кінцевими полями.

x переставляє *GF (q)* і тоді, коли *n* і *q - 1* є взаємно простими (умовно , *(n, q - 1) = 1*).

Якщо а знаходиться у *GF (q)* і $n \geq 1$, то многочлен Діксона (першого роду) $D_n (x, a)$ визначається як:

$$D_n(x,a) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} (-a)^j x^{n-2j}.$$

Виняткові многочлени.

Винятковий многочлен над *GF (q)* є багаточленом від *Fq[x],* який є перестановним многочленом *GF (q)* для нескінченного числа *m*.

Підстановковий многочлен над *GF (q)* степеня не вище *q* є винятковим над *GF (q)* .

Якщо многочлен з цілими коефіцієнтами (тобто від [*x*]) є перестановним многочленом над *GF (p)* для нескінченного числа простих чисел *p*, це композиція лінійних многочленів і многочленів Діксона. (Див. Гіпотезу Шура нижче).

Геометричні приклади

У геометрії опис координат певних наборів точок можуть надавати приклади перестановочних поліномів більш високого ступеня. Зокрема, точки, що утворюють овал кінцевої проективної площини , *PG (2, q)* за ступенем 2, можуть бути скоординовані таким чином, щоб співвідношення між координати задаються *о*-поліномом , який є спеціальним типом многочлена перестановки над кінцевим полем *GF (q).*

Обчислювальна складність

Проблема перевірки того, чи даний багаточлен над кінцевим полем перестановочним многочленом, може бути вирішена за поліноміальний час.

Гіпотеза Шура

Нехай *K* буде полем алгебраїчних чисел з *R* кільце цілих чисел. Термін «гіпотеза Шура» відноситься до твердження, що, якщо многочлен f, визначений над *K*, є многочленом перестановки на *R / P* для нескінченного числа простих ідеалів *P*, то *f* є композицією многочленів Діксона, ступінь одного многочлену є многочленом виду *x*. Фактично, Шур не робив жодних припущень у цьому напрямі. Ідея, що він зробив, належить Фріду, який дав хибний доказ хибної версії результату. Правильні докази були надані Тернвальдом і Мюллером.

3.3 Симетричні многочлени. Основна теорема про симетричні многочлени

Одним із найскладніших для школярів розділів алгебри є розв'язання систем рівнянь вищих степенів.

Для квадратного рівняння з одним невідомим

$x^2 + px + q = 0$

виводиться формула

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}} - q,$

що вказує стандартний шлях розв'язання. Для систем рівнянь першого ступеня також є стандартні прийоми рішення (виняток невідомих, зрівняння коефіцієнтів і т. д.). Однак для систем рівнянь вищих ступенів справа складніша.

Найбільш загальним способом вирішення таких систем є метод виключення невідомих. Ми пояснимо його на прикладі наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x^2 + y^2 = 19. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння щодо невідомого *у*. Ми бачимо *у* = *4х*. Підставивши отриманий для у вираз у друге рівняння, отримуємо нове рівняння, що містить лише одне невідоме х:

$2x^2 + (4x)^2 = 19.$

Після очевидних спрощень приходимо до рівняння

$3x^2 - 8x + 3 = 0$.

Вирішуючи яке, знаходимо два кореня

$x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{3}.$

Кожному з цих коренів відповідає певне значення у (яке ми знаходимо за допомогою рівності у = 4 х):

$$y_1 = 1,\ y_2 = \frac{13}{3}.$$

Перевірка показує, що обидва знайдені рішення

$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{3}, \\ y_2 = \frac{13}{3}. \end{cases}$

задовольняють заданій системі рівнянь.

Метод виключення невідомих є дуже загальним. Теоретично з будь-якої системи двох рівнях алгебри з двома невідомими можна, крім одного невідомого, отримати рівняння щодо другого невідомого. Однак не завжди процес винятки є настільки простим, як у розібраному вище прикладі. Найбільшою ж незручністю методу виключення є те, що він часто призводить до рівняння дуже високого ступеня. У вищій алгебри доводиться, що якщо одне рівняння системи (що містить два невідомих) має ступінь n, а друге - ступінь m, то після винятки, зазвичай, виходить рівняння степеня mn[26,с.39].

Візьмемо, наприклад, систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо: $x^2 = 5y^2$, і тому

$x^2 = (5y^2)^3 = 12^5\ \ 75y^2 + 15y^4y^6.$

Так само з другого рівняння отримаємо: $x^3 = 9y^3$, і тому

$$x^6 = 81 - 18y^3 + y^6.$$

Прирівнюючи знайдені значення для x^6, отримаємо рівняння, що містить лише одне невідоме у:

$2y^6 15y^4 18y^3 + 75y^2 - 44 = 0.$

Однак це рівняння має шість ступінь (2* 3 = 6 - в повному відповідно до згаданої теореми вищої алгебри), а формули для вирішення рівнянь шостого ступеня у школяра) немає. Таким чином, метод виключення завів нас у безвихідь.

Через ці недоліки метод виключення (при вирішенні систем рівнянь вищих ступенів) використовують у школі досить рідко.

Зазвичай намагаються вирішити систему за допомогою якогось штучного прийому. Але загальних правил відшукання таких прийомів ні. Кожна система вирішується своїм методом і досвід, отриманий при вирішенні однієї системи мало допомагає при вирішенні іншої. В результаті цей розділ шкільної математики перетворюється на набір головоломок та окремих кустарних методів їх вирішення.

Він настільки універсальний, як спосіб виключення, оскільки можливо застосований не до будь-якої системи. Однак цей метод застосовується до більшості систем, з якими стикається школяр. Істотно, що, на відміну від методу виключення, він призводить не до підвищення, а до по н іж е нню ступеня рівнянь.

Метод, про який йдеться, заснований на використанні теорії так званих симетричних многочленів. Сама теорія дуже проста і що вона дозволяє вирішувати не тільки багато яких систем алгебраїчних рівнянь, але й різні інші завдання алгебри (рішення ірраціональних рівнянь, доказ тотожностей і нерівностей, розкладання на множники тощо. буд.).

Серед цих завдань є дуже важкі; деякі з них пропонувалися на математичних олімпіадах. За допомогою теорії симетричних многочленів вирішення цих завдань помітно спрощується і, що саме головне, проводиться стандартним прийомом.

Приклади симетричних многочленів. Розкриємо книгу В. Б. Лідського, Л. В. Овсяннікова, А. Н. Тулайкова та М. І. Шабуніна «Завдання з елементарної математики» (М., 1960). Серед найважчих завдань на вирішення систем рівнянь найвищих степенів ми знаходимо там (на стор. 11-12) наступні:

1) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4, \\ x+xy+y=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=a+b, \\ x^2+y^2=a^2+b^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3+y^3=5a^3, \\ x^2y+xy^2=a^3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2-xy+y^2=7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2(x+y)=5xy, \\ 8(x^3+y^3)=65; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^4+y^4=7; \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10, \\ (x+y)(xy-1)=3; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+y^2=axy, \\ x^4+y^4=bx^2y^2. \end{cases}$

Всі ці системи мають одну загальну властивість - ліві частини рівнянь є многочленами, які x і y входять однаковим чином.

Саме для таких систем рівнянь і застосовні викладені далі методи розв'язання.

Многочлен x^2y+xy^2 – симетричний. Навпаки, многочлен $x^3 3y^2$ не є симетричним: при заміні x на y, а y на x він перетворюється на многочлен y3 3x2, який не збігається з первісним.

Наведемо найважливіші приклади симетричних многочленів.

Як відомо з арифметики, сума двох чисел не змінюється при перестановці доданків, тобто.

$$x+y=y+x$$

для будь-яких чисел x та y. Ця рівність показує, що многочлен $x+y$ є симетричним.

Так само із закону комутативності множення $xy=yx$ слід, що добуток xy є симетричним многочленом.

Симетричні многочлени $x+y$ та xy є найпростішими. Їх називають елементарними симетричними многочленами від x та y. Для них використовують спеціальні позначення*):

$\sigma_1=x+y, \sigma_2=xy.$

Крім s^1 та s^2, нам часто будуть зустрічатися так звані статечні суми, тобто многочлени $x^2+y^2, x^3+y^3, \cdots, xn+yn.$

Прийнято позначати багаточлен x^n+y^n через s_n. Таким чином,

$s_1=x+y,$

$s_2 = x^2 + y^2$,

$s_3 = x^3 + y^3$,

$s_4 = x^4 + y^4$,

3.4 Симетричні многочлени двох змінних. Теорема Вієта для зведених квадратних рівнянь

Основна теорема про симетричні многочлени від двох перемінних. Існує простий прийом, що дозволяє отримувати симетричні многочлени. Візьмемо будь-який (взагалі кажучи, не симетричний) многочлен від s_1 і s_2 і підставимо в нього замість s_1 і s_2 їх вирази через x та y. Зрозуміло, що ми отримаємо симетричний многочлен від x і y (адже ні $s_1 = x + y$, ні $s_2 = xy$ не змінюються при перестановці місцями x і y, а тому не змінюється і весь многочлен, що виявляється через $x = y$ і xy). Наприклад, з многочлена s_1^3 $s_1 s_2$ отримуємо симетричний многочлен $(x + y)^3 - (x + y)x = x^3 + 2x^2 y + 2xy^2 + y^3$. [27,с.44].

Отже, якщо взяти будь-який многочлен від s_1 і s_2 і підставити в нього замість s_1і s_2 їх вирази $s_1 = x + y$, $s_2 = xy$, то вийде симетричний многочлен від x та y.

Виникає питання, чи є цей прийом побудови симетричних многочленів загальним, тобто можна з його допомогою отримати будь-який симетричний многочлен?

Розгляд прикладів робить це припущення можливим.

Наприклад, статечні суми s_1, s_2, s_3, s_4 легко виражаються через s_1 та s_2:

$s_1 = x + y = \sigma_1$;

$s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$;

$$s_3 = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$= (x + y)\left((x + y)^2 - 3xy\right) = \sigma_{1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2);}$$

$s_4 = x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2$.

Як наступний приклад візьмемо симетричний многочлен $x^3y + xy^3$. Ми маємо:

$$x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2).$$

Розбір подальших прикладів дає той самий результат: який би симетричний многочлен ми не взяли, після більш менш складних викладок його вдається виразити через елементарні симетричні многочлени s_1 та s_2. Таким чином, приклади призводять до припущення про справедливість наступної теореми:

Т е о р е м а. Будь-який симетричний многочлен від x та y можна у вигляді многочлена від. $s_1 = x + y$ і $s_2 = xy$.

Зрозуміло, що навіть мільйон розібраних прикладів не може замінити докази) — завжди залишається небезпека, що знайдеться мільйон перший симетричний многочлен, що не виражається через s_1 та s_2.

Історія математики знає кілька яскравих випадків хибності тверджень, помічених на прикладах. Французький математик П'єр Ферма, розглядаючи числа виду $2^{2n}+ 1$, знайшов, що за n = 1, 2, 3 і 4 ці числа є простими. Він вважав, що при будь-якому натуральному n число 22^{n+1} буде простим. Але це не так: Леонард Ейлер показав, що вже за n = 5 виходить десятизначне число $2^{32} + 1$, не є простим (воно поділяється на 641).

Інший приклад (також вказаний Ейлер). Якщо в тричлен $n^2 + n + 41$ підставити замість n більше 0, то отримаємо просте число. При n= 1 також отримуємо просте число 43. Підставляючи в тричлен послідовно числа n = 2, 3, 4, 5, . . ., продовжуємо в якості значень тричлену весь час отримувати прості числа.

Напрошується висновок: тричлен $n^2 + n + 41$ за будь-якого цілого n 0 дає просте число. Але це не так! За n = 0, 1, 2, . . ., 38, 39 дійсно виходять прості числа. Але вже при n = 40 тричлен приймає значення 402 + 40 + 41 = 1681 = 412 , що є складеним числом. Ці приклади показують, що перевірка передбачуваної закономірності з прикладів неспроможна замінити загального докази.

Вираз статичних сум через σ_1 та σ_2. Спочатку ми доведемо теорему не для будь-яких симетричних багаточленів, а лише для статечних сум. Іншими словами, ми встановимо, що кожну статичну суму $s^n = x^n + y^n$ можна подати у вигляді багаточлена від s_1 та s_2.

З цією метою ми помножимо обидві частини рівності $s_{k1} = x^{k1} + y^{k1}$ на $q_1 = x+y$. Отримаємо:

$$\sigma_1 s_{k-1} = (x+y)\left(x^{k-1} + y^{k-1}\right) = x^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + y^k = \\ = x^k + y^k + xy\left(x^{k-2} + y^{k-2}\right) = s_k + \sigma_2 s_{k-2}.$$

Таким чином:

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}.$$

З цієї формули випливає справедливість нашого твердження. Справді, раніше ми вже перевірили, що статечні суми s_1 та s_2 подаються у вигляді багаточленів від s_1 та s_2.

Але якщо нам вже відомо, що статечні суми s_1, s_2, . . ., s_{k-2}, s_{k-1} виражаються як многочленів від q_2 і q_2, то, підставляючи ці висловлювання у формулу, ми отримаємо вираз статичної суми s_k через s_1 та s_2. Іншими словами, ми можемо послідовно знаходити вирази статечних сум через s_1 та s_2: знаючи s_1 та s_2, знаходимо по формулі s_3, потім s_4, s_5 іт. д.

Ясно, що рано чи пізно ми отримаємо вираз будь-якої статичної суми s_n через s_1 та s_2. Отже, наше твердження доведене*).

Формула, що становить основу викладеного доказу, дозволяє не тільки стверджувати, що s_n якось виражається через s_1 і s_2, але також дозволяє послідовно вичисляти вирази статечних сум s_n через s_1 та s_2. Так, за допомогою формули ми послідовно знаходимо:

$$s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2;$$
$$s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 = \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2;$$
$$s_5 = \sigma_1 s_4 - \sigma_2 s_3 = \sigma_1(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) - \sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

іт. д. У табл. 3.1 зведені вирази статечних сум s_1, s_2, ..., s_{10} через s_1 та s_2; цівирази будуть нам корисні при вирішенні завдань.

Таблиця 3.1

Вирази степеневих сум $s_n = x^n + y^n$ через $s_1 = x + y$ та $s_2 = xy$

s_1	σ_1	s_6	$\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$
s_2	$\sigma_1^2 - 2\sigma_2$	s_7	$\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$
s_3	$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$	s_8	$\sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$
s_4	$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$	s_9	$\sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4$
s_5	$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$	s_{10}	$\sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 -$

Доведення основної теореми. Тепер неважко завершити доведення теореми, сформульованої вище. Будь-який симетричний многочлен від x та y містить (після приведення подібних членів) складові двох видів.

По-перше, можуть зустрітися одночлени, які x і y входять в однакових степенях, тобто одночлени виду ax^ky^k. Зрозуміло, що $ax^ky^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k,$ тобто одночлени цього виду безпосередньо виражаються через q_2.

По-друге, можуть зустрітися одночлени, що мають різні ступені щодо x і y, тобто одночлени виду bx^ky^l, Де $k \neq l$. Зрозуміло, що разом з одночленом bx^ky^l симетричний многочлен містить також і одночлен bx^ly^k, що отримується з bx^ly^k перестановкою букв x та y. Іншими словами, в симетричний многочлен входить двочлен виду $b(x^ky^l + x^ly^k)$. Припускаючи для визначеності $k < l$ ми зможемо переписати цей двочлен так:

$$b(x^ky^l + x^ly^k) = bx^ky^k(y^{l-k} + x^{l-k}) = b\sigma_2^k s_{l-k}.$$

Оскільки по наведеному статична сума s_{l-k} представляється як многочлена від q_1 і q_2, то і двочлен, що розглядається, виражається через q_1 і q_2.

Отже, кожен симетричний многочлен представляється як суми одночленів виду ax^ky^k і вивчених виду $b(x^kyl + x^ly^k)$, кожен з яких виражається через q_1 і q_2. Отже, будь-який симетричний многочлен, представляється як многочлена від q_1 і q_2.

Теорема повністю підтверджена.

Розглянемо приклад. Нехай дано симетричний многочлен

$$f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 - x^3y^3 + 2xy^4 - 7x^2y^2 + y^5 + 3x^2y^3 - 5xy^3 - 5x^3y + 2x^4y.$$

Розбиваючи його на одночлени та двочлени, як зазначено у доведенні, отримуємо:

$$f(x, y) = -x^3y^3 - 7x^2y^2 + (x^5 + y^5) + 3(x^3y^2 + x^2y^3) + \\ + 2(xy^4 + x^4y) - 5(xy^3 + x^3y),$$

або інакше,

$$f(x, y) = -x^3y^3 - 7x^2y^2 + (x^5 + y^5) + 3x^2y^2(x + y) + \\ + 2xy(x^3 + y^3) - 5xy(x^2 + y^2) = \\ = -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + s_5 + 3\sigma_2^2\sigma_1 + 2\sigma_2 s_3 - 5\sigma_2 s_2.$$

Підставляючи, нарешті, вирази статистичних сум через q_1 та q_2, отримуємо остаточно:

$$f(x, y) = -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) + 3\sigma_1\sigma_2^2 + \\ + 2\sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - 5\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \\ = \sigma_1^5 - 3\sigma_1^3\sigma_2 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2.$$

Якщо у шкільній геометрії найчастіше використовується теорема Піфагора, то у шкільній алгебрі провідну роль займають формули Вієта. Теорема звучить так:

Теорема Вієта.

Сума коренів $x^2 + bx + c = 0$ дорівнює другому коефіцієнту з протилежним знаком, а добуток кореня дорівнює вільному члену.

Якщо дано $x^2 + bx + c = 0$, де x_1 і x_2 є коренем, то справедливі дві рівності:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \times x_2 = c \end{cases}$$

Знак системи, який прийнято позначати фігурною дужкою, означає, що значення x_1 та x_2 задовольняють обох рівностей.

Розглянемо теорему Вієта з прикладу: $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Поки невідомо, який корінь має дане рівняння. Але відповідно до теореми можна записати, що сума цього кореня дорівнює другому коефіцієнту з протилежним знаком. Він дорівнює чотирьом, значить використовуватимемо мінус чотири:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ \end{cases}$$

Добуток кореня по теоремі відповідає вільному члену. У разі вільним членом є число три. Значить:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \times x_2 = 3 \end{cases}$$

Необхідно перевірити, чи дорівнює сума коренів −4, а добуток 3. Для цього знайдемо коріння рівняння $x^2 + 4x + 3 = 0$. Скористаємося формулами для парного другого коефіцієнта:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$a = 1,\ k = 2,\ c = 3$$

$$D_1 = -k^2 - ac = 2^2 - 1 \times 3 = 4 - 3 = 1$$

$$x_1 = \frac{-k + \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-2 + \sqrt{1}}{1} = \frac{-2 + 1}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$x_2 = \frac{-k - \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-2 - \sqrt{1}}{1} = \frac{-2 - 1}{1} = \frac{-3}{1} = -3$$

Вийшло, що коренем рівняння є числа −1 та −3. Їхня сума дорівнює другому коефіцієнту з протилежним знаком, а значить рішення правильне.

$$x_1 + x_2 = -4$$

$$-1 + (-3) = -4$$

Твір коренів −1 і −3 за теоремою Вієта має дорівнювати вільному члену, тобто числу 3. Ця умова також виконується:

$$x_1 \times x_2 = 3$$

$$-1 \times (-3) = 3$$

Результат виконаних обчислень у тому, що ми переконалися у справедливості висловлювання:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \times x_2 = 3 \end{cases}$$

Доведення теореми Вієта

Дано квадратне рівняння $x^2 + bx + c = 0$. Якщо його дискримінант більший за нуль, то воно має два корені, сума яких дорівнює другому коефіцієнту з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \times x_2 = c \end{cases}$$

Доведемо, що наступні рівності вірні

$x_1 + x_2 = -b$,

$x_1 * x_2 = c$.

Формули кореня

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad\qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Щоб знайти суму коренів x^1 та x^2 підставимо замість них те, що відповідає їм із правої частини формул коренів. Нагадаємо, що в даному квадратному рівнянні $x_2 + bx + c = 0$ старший коефіцієнт дорівнює одиниці. Значить після підстановки знаменник дорівнюватиме 2.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2}$$

Об'єднаємо чисельник та знаменник у правій частині.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2} = \frac{-b + \sqrt{D} + (-b - \sqrt{D})}{2}$$

Розкриємо дужки і наведемо таких членів:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2} = \frac{-b + \sqrt{D} + (-b - \sqrt{D})}{2} =$$

$$= \frac{-b + \cancel{\sqrt{D}} - b - \cancel{\sqrt{D}}}{2} = \frac{-2b}{2}$$

Скоротимо дріб отриманий дріб на 2, залишається −b:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2} = \frac{-b+\sqrt{D}+(-b-\sqrt{D})}{2} =$$

$$= \frac{-b+\cancel{\sqrt{D}}-b-\cancel{\sqrt{D}}}{2} = \frac{\overset{-1}{\cancel{-2}}b}{\underset{1}{\cancel{2}}} = -b$$

Ми довели: $x_1 + x_2 = -b$.

Далі зробимо аналогічні дії, щоб довести рівність $x_1 * x_2$ вільному члену c.

Підставимо замість x_1 та x_2 відповідні частини із формул коренів квадратного рівняння:

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2} \times \frac{-b-\sqrt{D}}{2}$$

Перемножимо чисельники та знаменники між собою:

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2} \times \frac{-b-\sqrt{D}}{2} = \frac{(-b+\sqrt{D})(-b-\sqrt{D})}{2\times 2}$$

Вочевидь, у чисельнику міститься добуток суми та різниці двох виразів. Тому скористаємось тотожністю $(a + b) * (a - b) = a^2 - b^2$. Отримуємо:

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2} \times \frac{-b-\sqrt{D}}{2} = \frac{(-b+\sqrt{D})(-b-\sqrt{D})}{2\times 2} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4}$$

Далі зробимо трансформації в чисельнику:

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2} \times \frac{-b-\sqrt{D}}{2} = \frac{(-b+\sqrt{D})(-b-\sqrt{D})}{2\times 2} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4} =$$

$$= \frac{b^2-D}{4}$$

Нам відомо, що $D = b^2 - 4ac$. Підставимо цей вираз замість D.

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2} \times \frac{-b-\sqrt{D}}{2} = \frac{(-b+\sqrt{D})(-b-\sqrt{D})}{2\times 2} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4} =$$

$$= \frac{b^2-D}{4} = \frac{b^2-(b^2-4c)}{4}$$

Далі розкриємо дужки і наведемо таких членів:

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2} \times \frac{-b-\sqrt{D}}{2} = \frac{(-b+\sqrt{D})(-b-\sqrt{D})}{2\times 2} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4} =$$

$$= \frac{b^2-D}{4} = \frac{b^2-(b^2-4c)}{4} = \frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4c}{4} = \frac{4c}{4}$$

Скоротимо:

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2} \times \frac{-b-\sqrt{D}}{2} = \frac{(-b+\sqrt{D})(-b-\sqrt{D})}{2\times 2} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4} =$$

$$= \frac{b^2-D}{4} = \frac{b^2-(b^2-4c)}{4} = \frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4c}{4} = \frac{\cancel{4}c}{\cancel{4}} = c$$

Ми довели: $x_1 * x_2 = c$.

Значить сума коренів наведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$ дорівнює другому коефіцієнту з протилежним знаком ($x_1 + x_2 = -b$), а добуток коріння дорівнює вільному члену ($x_1 * x_2 = c$). Теорему доведено.

Зворотня теорема Вієта.

Коли дана сума та добуток коренів квадратного рівняння, прийнято починати підбір відповідного коріння. Теорема, обернена до теореми Вієта, за таких умов може бути головним помічником. Вона формулюється так:

Якщо числа x_1 і x_2 такі, що їх сума дорівнює другому коефіцієнту рівняння $x^2 + bx + c = 0$, взятому з протилежним знаком, а їх добуток дорівнює вільному члену, то ці числа є корінням $x^2 + bx + c = 0$.

Зворотні теореми найчастіше сформульовані отже їх твердженням є висновок першої теореми. Так, за підтвердженням теореми Вієта стало зрозуміло, що сума x_1 і x_2 дорівнює $-b$, а їх добуток дорівнює c. У зворотній теоремі це є твердженням.

Доведемо теорему, обернену до теореми Вієта [28,с.58].

Коріння x_1 та x_2 позначимо як m та n. Тоді твердження звучатиме так: якщо сума чисел m і n дорівнює другому коефіцієнту $x^2 + bx + c = 0$, взятому з протилежним знаком, а добуток дорівнює вільному члену, то числа m і n є корінням $x^2 + bx + c = 0$.

Зафіксуємо, що сума m і n дорівнює b, а добуток дорівнює c.

$$\begin{cases} m+n=-b \\ mn=c \end{cases}$$

Зворотня теорема Вієта

Щоб довести, що числа m та n є коренем рівняння, потрібно по черзі підставити літери m та n замість x, потім виконати можливі тотожні перетворення. Якщо в результаті перетворень ліва частина дорівнюватиме нулю, то це означатиме, що числа m і n є корінням $x^2 + bx + c = 0$.

Виразимо b із рівності $m + n = -b$. Це можна зробити, помноживши обидві частини на -1:

$$m+n=-b \;\Big|\; \times(-1)$$

$$-m-n=b$$

$$b=-m-n$$

Підставимо m до рівняння замість x, вираз $-m-n$ підставимо замість b, а вираз mn – замість c:

$$x^2+bx+c=0$$

$$m^2+(-m-n)m+mn=0$$

$$m^2+(-m^2-mn)+mn=0$$

$$\cancel{m^2}-\cancel{m^2}-\cancel{mn}+\cancel{mn}=0$$

$$0=0$$

При $x = m$ виходить правильна рівність. Значить число m є коренем.

Аналогічно доведемо, що *n* є коренем рівняння. Підставимо замість *x* букву n, а замість *c* підставимо *m***n*, оскільки *c* = *m***n*.

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$n^2 + (-m - n)n + mn = 0$$

$$\cancel{n^2} - \cancel{mn} - \cancel{n^2} + \cancel{mn} = 0$$

$$0 = 0$$

При $x = n$ виходить правильна рівність. Значить число *n* є коренем.

Ми довели: числа *m* та *n* є коренем рівняння $x^2 + bx + c = 0$.

Розглянемо приклади розв'язання рівнянь по теоремі, зворотній теоремі Вієта.

Дано: $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Для початку запишемо суму та добуток коренів рівняння. Сума дорівнюватиме 6, тому що другий коефіцієнт дорівнює −6. А добуток коріння дорівнює 8.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \times x_2 = 8 \end{cases}$$

Маючи ці дві рівності можна підібрати відповідний корінь, який задовольнятиме рівність обох рівностей системи.

Підбір коренів зручніше виконувати за допомогою їхнього твору.

Число 8 можна отримати шляхом добутку чисел 4 і 2 або 1 і 8. Але значення x_1 і x_2 треба підбирати так, щоб вони задовольняли і другу рівність теж.

Можна зробити висновок, що значення 1 і 8 не підходять, тому що вони не задовольняють рівності $x_1 + x_2 = 6$. Значення 4 та 2 підходять обом рівностям:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \times x_2 = 8 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 4 + 2 = 6 \\ 4 \times 2 = 8 \end{cases}$$

Значить, числа 4 і 2 є коренем рівняння $x^2 - 6x + 8 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Ненаведене квадратне рівняння

Теорема Вієта виконується лише тоді, коли квадратне рівняння є наведеним, тобто його перший коефіцієнт дорівнює одиниці:

$ax^2 + bx + c = 0$, де $a = 1$.

Якщо квадратне рівняння не є наведеним, але завдання пов'язане із застосуванням теореми, потрібно обидві частини розділити на коефіцієнт, що розташовується перед x^2.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Вийшло таке наведене рівняння:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Виходить, коефіцієнт при x дорівнює $\frac{b}{a}$, вільний член - $\frac{c}{a}$. Значить сума та добуток коренів матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Розглянемо приклад ненаведеного рівняння: $4x^2 + 5x + 1 = 0$. Розділимо обидві його частини коефіцієнт перед x^2, тобто на 4.

$$4x^2+5x+1=0$$

$$\frac{4x^2+5x+1}{4}=\frac{0}{4}$$

$$\frac{4x^2}{4}+\frac{5x}{4}+\frac{1}{4}=0$$

$$x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}=0$$

Вийшло наведене квадратне рівняння. Другий коефіцієнт якого дорівнює $\frac{5}{4}$, а вільний член – $\frac{1}{4}$.

Тоді відповідно до теореми Вієта отримуємо:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{5}{4} \\ x_1\times x_2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Метод підбору допомагає знайти коріння: -1 та $-\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Висновки до розділу 3

В даному розділі розглянуто: загальні поняття про симетричні многочлени, їх основні властивості, основну теорему теорії симетричних многочленів та застосування симетричних многочленів при розв’язуванні рівнянь, систем рівнянь, вилучення коренів, доведення тотожностей тощо.

РОЗДІЛ 4. ЗАСТОСУВАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ

Добавлено примечание ([RbD1]): Цей розділ має містити задачі

4.1 Застосування многочленів 1-ої змінної до розв’язання задач

Приклад 15. Поділити з остачею многочлен:

$$f(x) = 6x^5 + 13x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 2$$

на многочлен

$g(x) = 2x^3 + x^2 - 1.$

Розв’язання. Поділити з остачею многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ – це означає знайти два таких многочлени $q(x)$ (частка) і $r(x)$ (остача), що:

1)$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$;

2) або r(x)=0, або степінь $r(x) <$ степеня $g(x)$.

Алгоритм ділення многочленів з остачею відомий з шкільного курсу алгебри. Це так звана «ділення кутом». Використаємо цю схему для розв'язку нашої задачі.

$$\begin{array}{l|l}
\,6x^5 + 13x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 2 & \underline{2x^3 + x^2 - 1} \\
-\ \underline{6x^5 + 3x^4 \qquad\quad - 3x^2 \qquad\qquad} & 3x^2 + 5x - 4 \\
\,10x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x + 2 & \\
- & \\
\,\underline{10x^4 + 5x^3 \qquad\quad - 5x\ \ } & \\
\,-8x^3 - 4x^2 + 11x + 2 & \\
- & \\
\,\underline{-8x^3 - 4x^2 \qquad\quad + 4} & \\
\qquad\qquad\qquad 11x - 2 &
\end{array}$$

Отже, частка $q(x) = 3x^2 + 5x - 4$ і остача $r(x) = 11x - 2$.

Приклад 16. Відомо ділене $f(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 1$, частка $q(x) = 2x^2 + 3x + 2$ і остача $r(x) = -4x - 3$. Знайдіть дільник $\varphi(x)$.

Розв’язання. За визначенням ділення з остачею маємо:

$$f(x) = \varphi(x)q(x) = r(x). \tag{1.9}$$

Із співвідношення (1.9) випливає, що степінь невідомого многочлена

$\varphi(x)$ дорівнює 2. Крім цього, легко побачити, що старший коефіцієнт многочлена $\varphi(x)$ дорівнює 1. Це означає,

$$\varphi(x) = x^2 + ax + b,$$

де a і b – невизначені коефіцієнти. Підставивши відомі многочлени і многочлен $\varphi(x)$ з невизначеними коефіцієнтами, отримаємо:

$$2x^4 + x^3 + 3x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(2x^2 + 3x + 2) + (-4x - 3) =$$
$$= 2x^4 + (3 + 2a)x^3 + (2 + 3a + 2b)x^2 + (2a + 3b - 4)x +$$
$$+(2b - 3)\ .$$

Так як два многочлени рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх коефіцієнти при однакових степенях невідомого, то, прирівнюючи відповідні коефіцієнти многочленів лівої і правої частини останньої рівності, отримаємо систему рівнянь відносно a і b:

$$3 + 2a = 1,$$
$$2 + 3a + 2b = 3,$$
$$2a + 3b - 4 = 0,$$
$$2b - 3 = 1.$$

Ця система має єдине рішення: $a = -1$; $b = 2$. Отже, $\varphi(x) = x^2 - x + 2$.

Зауваження. Легко бачити, що $\varphi(x)$ можна було б отримати так само, розділивши $f(x)$ на $q(x)$.

<u>Приклад 17.</u> Знайти найменше спільне кратне многочленів $f(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 10x - 2$ та $g(x) = x^3 - 2x + 7$:

$$\begin{array}{l|l}
-\,2x^5 + x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 10x - 2 & x^3 - 2x + 7 \\
\underline{\ \ 2x^5 \qquad\ \ - 4x^3 + 14x^2} & \overline{2x^2 + x - 1 = q(x)} \\
\qquad\quad -\,x^4 - x^3 - 2x^2 + 10x - 2 & \\
\qquad\quad \underline{\ \ x^4 \qquad\ \ - 2x^2 + 7x} & \\
\qquad\qquad -\,-x^3 \qquad\ + 3x - 2 & \\
\qquad\qquad \underline{\ \ -x^3 \qquad\ + 2x - 7} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x + 5 = r(x) &
\end{array}$$

Відповідь : $f(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 10x - 2 = (x^3 - 2x + 7)(2x^2 + x - 1) + x + 5$;

$g(x) = \frac{x^3 - 2x + 7}{x+5} = (x + 5)(x^2 - 5x + 23) - 108.$

Приклад 18. Знайти залишок від ділення многочлена f(x) = 6x2 − 4x + 3 на двочлен x − 1.

Розв'язування. Згідно теореми Безу, шуканий залишок рівний значенню многочлена в точці a = 1. Знайдемо тоді f(1), для цього значення a = 1 підставимо у вираз для многочлена f(x) замість x. Отримаємо:

f(1) = 6 · 12 − 4 · 1 + 3 = 6 − 4 + 3 = 5.

Отже, залишок рівний 5.

Приклад 19. Користуючись схемою Горнера, поділити з остачею многочлен

$$f(x) = x^6 + 4x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$$

на двочлен: a) $x - 2$; b) $x + 3$.

Розв'язання. a) Тут $a = 2$ і коефіцієнти частки $q(x)$ і остачі r можна знайти по схемі:

2	1	4	-5	3	-4	2	-1
	1	6	7	17	30	62	123

Відповідно, в цьому випадку

$$q(x) = x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 30x + 62, \qquad r = 123.$$

b) Так як $x + 3 = x - (-3)$, то в цьому випадку $a = -3$ і схема ділення запишеться наступним чином:

-3	1	4	-5	3	-4	2	-1
	1	1	-8	27	-85	257	-772

Звідси отримаємо:

частка $q(x) = x^5 + x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 85x + 257$;

остача $r(x) = -772$.

Приклад 20. Розподілити по степеням x многочлен

$$(x - 4)^4 - 3(x - 4)^3 + 2(x - 4) - 5.$$

Розв'язання.

-4	1	-3	0	2	-5
	1	-7	28	-110	435
	1	-11	72	-398	
	1	-15	132		
	1	-19			
	1				

Відповідь: $(x-4)^4-3(x-4)^3+2(x-4)-5=x^4-19x^3+132x^2-$
$-398x+435.$

Приклад 21. *Тіло, маса якого m=2,5 кг, рухається прямолінійно по закону* $x(t)=0{,}5t^2+t+3$*(м). Знайти кінетичну енергію тіла через 2 с після початку руху.*

Розв'язання. Як відомо, швидкість є похідна від переміщення. Знайдемо значення похідної функції $x(t)$ при t=2 за схемою Горнера:

	0,5	1	3
2	0,5	2	7
2	0,5	3	

Тобто, $v=3$ (*м/с*). Тоді кінетична енергія $E=\frac{m\cdot v^2}{2}$, $E=\frac{2{,}5\cdot 3^2}{2}=11{,}25$*(Дж).*

4.2 Застосування симетричних многочленів

Приклад 22. Виразити многочлен

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3+5x_1x_2x_3$$

Через основні симетричні многочлени.

Розв'язання. Легко побачити, що даний многочлен симетричний. Вищий член многочлена $f(x_1,x_2,x_3)$ дорівнює x_1^3 . Йому відповідає система показників 3 0 0 ($x_1^3x_2^0x_3^0$).

Такий же вищий член має многочлен

$$\sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0 = \sigma_1^3 = (x_1+x_2+x_3)^3 =$$
$$= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_3^2 + 3x_2^2x_3 +$$
$$+3x_2x_3^2 + 6x_1x_2x_3.$$

Знайдемо різницю:

$$f - \sigma_1^3 = -3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - 3x_1^2x_3 - 3x_1x_3^2 - 3x_2^2x_3 - 3x_2x_3^2 - x_1x_2x_3.$$

Вищий член отриманого многочлену дорівнює $-3x_1^2x_2$. Йому відповідає система показників 2 1 0 ($x_1^2x_2^1x_3^0$). Такий же вищий член буде і у многочлена

$$-3\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = -3\sigma_1\sigma_2 =$$
$$= -3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3).$$

Віднімаючи з $f - \sigma_1^3$ многочлен -3$\sigma_1\sigma_2$, отримаємо:

$$f - \sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 = 8x_1x_2x_3 = 8\sigma_3.$$

Звідси випливає, що

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3.$$

<u>Приклад 23.</u> Знайти суму кубів коренів рівняння

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3 = 0.$$

Розв'язання. Позначимо корені нашого рівняння через x_1, x_2, x_3, x_4. Нам необхідно знайти $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$, не знаходячи самих коренів x_1, x_2, x_3, x_4. За формулою Вієта знайдемо значення основних симетричних многочленів від коренів нашого рівняння: $\sigma_1 = -2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = -5, \sigma_4 = 3$. Отже, для розв'язання нашої задачі досить однорідний симетричний многочлен $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ висловити через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Знайдемо:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Підставляючи сюди наші значення для $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, отримаємо: сума коренів даного рівняння рівна

$$(-2)^3 - 3(-2)\cdot 1 + 3(-5) = -17.$$

Задача 3. Розкласти на множники многочлен

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Розв'язання. Виразимо многочлен $f(x, y, z)$ через основні симетричні многочлени від змінних x, y, z:

$$f(x, y, z) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

Виносячи σ_1 за дужки и підставляючи σ_1, σ_2 їх вирази через x, y, z, отримаємо:

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Висновок до розділу 4

В даному розділі було розглянуто основні методи розв’язування прикладів та задач з многочленами, з них задачі на подільність многочленів, знаходження найменшого спільного кратного, схема Горнера та симетричні многочлени.

Також було розглянуто способи розв’язувань систем рівнянь і приклади їх розв’язання; було виражено степеневі суми $s_k = x^k + y^k + z^k$ через σ_2, σ_3 при умові $\sigma_1 = 0$; були розглянуті випадки, коли для звільнення від ірраціональностей необхідно застосовувати симетричні многочлени; було розглянуто спосіб побудови послідовних наближень, пов'язаний з симетричними многочленами.

ВИСНОВКИ

Отже, теорія многочленів має багато цікавих аспектів та займає значну частину математики, завдяки чому є гарним інструментом розв'язування багатьох як алгебраїчних так і геометричних задач. Свого часу не одне покоління математиків намагалось розв'язати задачі теорії многочленів, зокрема теорії чисел, яка вабить всіх своєю простотою. Значні результати були отримані та ще цілий ряд потребують розв'язань, нових підходів та методів.

Зокрема, в нашій роботі під час дослідження було обґрунтовано основні теоретичні засади теорії многочленів; науково узагальнено і систематизовано методи розв'язування задач з використанням теореми Безу, її наслідків, похідної многочлена та симетричних многочленів; розглянуто задачі, що розкривають практичні аспекти застосування конкретних методів розв'язання.

У процесі виконання роботи поставлена мета була досягнута, а відповідні завдання виконані. Матеріали цього дослідження можуть використовуватися на уроках з поглибленим вивченням математики, гурткових заняттях, факультативах, освітніх форумах, фестивалях, олімпіадах тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Винберг Э. Б. Алгебра многочленов. М.: Просвещение, 1980. 176 с.
2. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокіцький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. К.: Вища школа, 1986. Ч. 2. 264 с.
3. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. К.: Вища школа, 1974. Ч.1. 464 с.
4. Збірник задач з математики з рішеннями. Під ред. М. І. Сканаві: Видавничий дім Онікс 1999. 624стор.
5. Збірник задач з алгебри. За редакцією Рокіцького І.О. Вінниця.: ВДПУ, 2002. Ч.1. 176 с.
6. Збірник задач з алгебри. За редакцією Рокіцького І.О. Вінниця.: ВДПУ, 2003. Ч.2. 200 с.
7. Збірник задач з теорії многочленів. [Навчальний посібник для студентів фізико-математичного факультету] За редакцією І.О.Рокіцького, Вінниця, 2004. 139 с.
8. Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. М.: Факториал, 1995. 454 с.
9. Микільський С.М. Алгебра на початку математичного аналізу. М.: Просвітництво. 2015. 362 с.
10. Муравін Г.К. Алгебра на початку математичного аналізу. / Муравіна О.В. М.: Дрофа. 2015. 375 с.
11. Огородников І.Т. Оптимальне засвоєння учнями знань та порівняльна ефективність окремих методів навчання у школі., 1998. 196 с.
12. Олексієнко Ю.О. Елементи теорії многочленів у шкільному курсі алгебри. Вісник студентського наукового товариства. Збірник наукових праць студентів, магістрантів і аспірантів. Ніжин, 2021. Випуск 25. С. 13-15.
13. Олексієнко Ю.О. Елементи теорії многочленів у курсі алгебри. *Сучасні проблеми природничих і точних наук*: матеріали VI Всеукраїнської онлайн-конференції молодих науковців. Ніжин: Наука-сервіс. С. 72.

14. Потоскуєв Є.В. Алгебра та початку математичного аналізу./Зравіч Л.І.: Дрофа. 2015. 380 с.
15. Прасолов В. В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003. 336 с.
16. Пратусевич М.Я. Алгебра та початку математичного аналізу. Столбов К.М., Головін О.М. М.: Просвітництво. 2014. 369 с.
17. Стефанова Н.Л. Методика та технологія навчання математики. Курс лекцій. Н.С. Підходова.: Дрофа. 2005. 167 с.
18. Столяр О.О. Педагогика математики. Минск, 1986. 407 с.
19. Хабіб Р.А. Активізація пізнавальної діяльності учнів під час уроків математики.: Метод. посібник. К.: Рад. шк., 1999. 203 с.
20. Шамова І.Т. Активізація вчення школярів. М: Педагогіка. 1999. 180 с.
21. Шаригін І.Ф. Алгебра та початки математичного аналізу. М.: Дрофа. 2014. 377 с.
22. Шабунин М.И., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. Дидактические материалы. Алгебра и начало математического анализа (базовый и профильный уровни) 10 кл. М.: Просвещение, 2017.