Міністерство освіти і науки України

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

Факультет природничо-географічних та точних наук

Кафедра математики, фізики та економіки

Середня освіта (Математика)

014.04 Середня освіта (Математика)

<u>КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА</u>

на здобуття освітнього ступеня ***магістра***

Реалізація прикладної спрямованості вивчення теми «Диференціальні рівняння» у шкільному курсі математики

Студентки **Оксимець Тетяни Вадимівни**

Науковий керівник:

Пузирьов Володимир Євгенович,

доктор фіз.-мат. наук, професор

Рецензенти:

Віра М. Б. ________________

Фетісов В. С. _____________

Допущено до захисту

В.о. зав. кафедри _______________ Віра М.Б.

Ніжин – 2021 рік

Зміст

ВСТУП

Актуальність дослідження. Процеси, що відбуваються в суспільстві потребують нових вимог до професіоналізму спеціалістів. На ринку праці сьогодні має попит спеціаліст компетентний, мобільний, здатний моделювати свою професійну діяльність, приймати певні рішення та оцінюванні їх ефективність. Тому система освіти вимагає вдосконалення форм, засобів, методів навчання шкільної освіти у цілому й математичної освіти зокрема. Шляхом до реалізації нових вимог може бути розвиток математичної компетентності школярів старших класів через математичне моделювання життєвих процесів як системної сукупності стійких знаннях з математики та вміння застосувати їх у практичних ситуаціях. Досягнення таких результатів можливо, на нашу думку, через введення в процес навчання математики практично-прикладної складової.

Математика, як і будь-яка наука, еволюціонує. І, якщо раніше, заняття математикою було долею обраних, то промислове та інформаційне зростання зумовили подальший розвиток та значущість математичної освіти у суспільстві. Саме використання математичних моделей використовували багато учених різних галузей знань. Наприклад, внесок у моделювання економічних процесів зробили такі учені як Л. Вальрас, В. Дмітрієв, Л. Канторович, О. Курно, В. Леонтьєв, В. Парето, П. Самуельсон, Д. Хікс, Ф. Еджворт та інші, які використовували у своїх дослідженнях різні розділи вищої математики, у тому числі й диференціальні рівняння. По усьому світу математичні знання цінуються, відбуваються наукові конференції з питань застосування математики у реальних процесах, розробляються математичні моделі різних галузей сучасного виробництва та науки.

Проте шкільна математична освіта ще не задовольняє запитам сучасного суспільства і потребує певних кроків щодо її вдосконалення. Цього річ ЗНО з математики стало провальним для 30% школярів, хоча цей рік і був проголошений «роком математики». Учителям зрозуміло, що лише лозунгами шкільну освіту не підняти на належний рівень, необхідні рішучі кроки кожного керівника освіти та кожного викладача математики. І нам здається, що ці кроки мають бути спрямовані і на підвищення рівня математичної компетентності учнів, наприклад, у питаннях математичного моделювання різних ситуацій, що є неможливим без опанування учнями теми «Диференціальні рівняння».

Диференціальні рівняння описують виробничі процеси й тому важливо не лише навчитися їх складати і розв'язувати.

Теорія диференціальних рівнянь має важливе теоретичне та практичне значення для цілісної математичної освіти. Тема є фундаментом для багатьох інших розділів математики, а також базою для глибокого вивчення фізики, хімії, біології та інших природничих наук. Вона дозволяє моделювати процеси, які характеризуються залежністю між певними величинами та швидкістю змін цих величин. Тому вивчення теми "Диференціальні рівняння" у шкільному курсі є, на наш погляд, вельми важливим у тому числі й з точки зору навчання учнів елементарним методам математичного моделювання

Отже, можна виокремити такі протиріччя:

- між потребою суспільства у моделюванні різноманітних процесів (у тому числі й при вивченні інших навчальних дисциплін) і не повною реалізованістю цього у практиці вивчення шкільного курсу математики;
- між потребою суспільства в активних громадянах та традиційною спрямованістю школи на просте засвоєння знань з навчальних предметів (математики й у тому числі), без досвіду застосування цих знань у реальних практичних задачах.

Ці протиріччя зумовили проблему дослідження.

Проблема: акцентування змісту математичної освіти на прикладне застосування математики, набуття школярами досвіду творчого застосування математичних знань до реальних проблем.

Об'єктом дослідження є навчання математики школярів старшої школи.

Предметом дослідження є вивчення школярами теми «Диференціальні рівняння» з метою забезпечення прикладної спрямованості математики і застосування математичних знань у реальних задачах.

Мета: запропонувати певну систему завдань, пов'язаних з диференціальними рівняннями, через які учням буде наглядно зрозуміло значущість математичних знань і реалізовано прикладну спрямованість математики.

В основу дослідження було покладено гіпотезу.

Якщо у процес навчання математики ввести певну систему практичних задач і застосувати теорію диференціальних рівнянь до вирішення різноманітних прикладних проблем, то такий підхід буде сприяти підвищенню мотивації вивчення предмету, покращенню засвоєння математичних знань, розвитку прикладного функціонального мислення та досвіду математичного моделювання реальних процесів.

У відповідності до мети, предмету та гіпотези дослідження сформульовані такі **завдання дослідження**:

1. Дослідити необхідність розробки цього питання. Проаналізувати стан проблеми у науковій та методичній літератур та практиці шкільної математичної освіти.
2. Розробити конкретну дидактичну систему задач, що будуть забезпечувати взаємозв'язок математики з іншими навчальними дисциплінами та її прикладну спрямованість.
3. Провести апробацію розроблених завдань.

Методи дослідження.

При виконанні роботи використовувалися теоретичні (аналіз психолого-педагогічної, методичної та навчальної літератури , що пов'язані з проблемою дослідження) та емпіричні (вивчення та узагальнення вітчизняного та іноземного педагогічного досвіду, порівняння, анкетування).

Наукова новизна та практичне значення дослідження: розроблена система дидактичних завдань, спрямованих на застосування математики у вирішенні прикладних проблем; визначено роль та місце задач на застосування диференціальних рівнянь у формуванні математичної компетенції школярів старшої школи.

Особистий внесок автора полягає в аналізі необхідності зміни підходів до навчання, виявленні шляхів покращення вивчення математики і створенні системи задач, що забезпечує прикладне застосування математики в реальних процесах.

Апробація роботи. Робота була апробована при проведенні занять під час педагогічної практики та повсякденного навантаження в якості вчителя математики у 11 класі, Носівської ЗОШ І-ІІІ ступенів №1, міста Носівки.

Публікації. Тези доповідей «Вивчення теми «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ» у шкільному курсі математики» було представлено на VI Всеукраїнській конференції молодих науковців «Сучасні проблеми природничих і точних наук», м. Ніжин, 14 квітня 2021р.; «Необхідність прикладної спрямованості шкільного курсу математики» було представлено на Міжнародній науково-практичній конференції «Здобутки, реалії та перспективи освіти в сучасному світі», м. Дніпро, 28 червня 2021р.; «Реалізація прикладної спрямованості курсу математики з метою виховання компетентного школяра» було представлено на III Міжнародній науково-практичній онлайн-конференції «Актуальні проблеми, пріоритетні напрямки та стратегії розвитку України», м. Київ, 13 жовтня 2021р.

Структура роботи: робота складається зі вступу, 2 розділів, висновків та списку літератури. Основний текст міститься на 74 сторінках та на 14 сторінках представлено додатки.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Актуальною сьогодні є проблема встановлення зв’язків шкільної математики з реальними процесами і школярам необхідно навчитися розв'язувати задачі, яких потребує життя. Такі задачі слугують засобом формування ключових компетентностей учнів, а розв'язання цих задач дозволяє краще зрозуміти математичний апарат та встановити міжпредметні зв’язкі математики з іншими шкільними предметами, що вивчаються.

1.1. Значущість прикладної спрямованості навчання математики та її роль у формуванні компетентностей учня

Усі часи математична наука слугувала засобом пізнання світу, оскільки математика є мовою точних визначень і формул, з яких можна зробити кількісні висновки. Також математика є великою частиною загальнолюдської культури. Наприклад, відомо, що книга «Початки» Евкліда видавалася найбільшу кількість разів, звичайно, не рахуючи Біблію.

Наше століття є століттям застосування математичних методів в різних сферах діяльності людини. Математика найбільш впливає на формування наукового світогляду людини і дозволяє їй досягти певного загальнокультурного рівня. Сучасна висококваліфікована праця вимагає безперервної розумової діяльності, аналізу складних процесів, логічних висновків. Суспільство потребує спеціалістів з глибокими математичними знаннями та чітким логічним мисленням, умінням застосувати їх у реальних ситуаціях. Тому у сучасному світі без математики майже неможливо стати гарним фахівцем у будь-якої галузі. Математика посідає сьогодні значне місце у житті суспільства та його подальшому розвитку.

Проблемі математичної освіти присвятили дослідження багато вчених: Г. Бевз, Г. Дорофеєв, О. Мельничук, А. Мерзляк, З. Слєпкань, С. Скворцова, А. Столяр, Н. Тарасенкова, Л.М. Фрідман, В. Швець та ін.

Закон України “Про освіту ” головною метою освіти визначає

“... всебічний розвиток людини як особистості та найвищої цінності суспільства, її талантів, інтелектуальних, творчих і фізичних здібностей, формування цінностей і необхідних для успішної самореалізації компетентностей, виховання відповідальних громадян, які здатні до свідомого суспільного вибору та спрямування своєї діяльності на користь іншим людям і суспільству” [14]. Сучасні тенденції розвитку суспільства дійсно потребують компетентних особистостей у різних галузях науки й виробництва і зумовлюють необхідність формування у людини природничо-наукової компетентності, творчого мислення у поєднанні з фундаментальними знаннями з математики. Успіх у професійній діяльності людини залежить від здатності критично мислити, уміння аналізувати причинно-наслідкові зв’язки, будувати моделі різноманітних реальних процесів, проводити обчислення. Отже, під час викладання математики недостатньо зосереджуватися лише на змісті конкретної теми, а вкрай необхідно визначати прикладну наукову проблему, що пов’язана з цією навчальною темою і розв’язання якої є актуальним для сучасного розвитку різних галузей та повсякденного життя. Мова йде про математичні методи, що покликані допомогти конструювати моделі багатьох реальних процесів. Якщо людина здатна створити та дослідити певну модель, то вона глибше розуміє сутність реальних процесів, орієнтується у навколишньому середовищі.

Зазначимо, що математика також формує не лише мислення людини, а й багато важливих її особистісних рис: логічність, відповідальність, старанність, точність, пунктуальність, креативність тощо. Відомий російський письменник Л.Толстой запропонував виміряти людину за допомогою дробу, у чисельнику якого стоїть її оцінка реальної гідності, а у знаменнику – показник її думки про себе. Від реальної гідності якість людини збільшується, а від завищеної самооцінки падає. У міркуваннях Толстого закладений глибокий сенс, але на той час, порівняно з теперішнім, ще мало думали про самореалізацію особистості. Виховання людини, яка здатна самореалізуватися, бути компетентною стало метою вже сучасної освіти.

Зрозуміло, що школа не може забезпечити випускників запасом знань на все життя. Тому завдання освіти полягає у тому, щоб виховувати особистість з аналітичним мисленням, прищеплювати навички безперервного самонавчання, підвищувати рівень її творчої активності, прагнення до самореалізації та набуття людиною необхідних компетентностей.

Компетентнісний підхід означає «поступову переорієнтацію домінуючої освітньої парадигми з трансляцією знань, формуванням умінь і навичок на створення умов для оволодіння комплексом компетенцій, які визначають потенціал, здатність людині до виживання і стійкої життєдіяльності в умовах сучасного багатовимірного соціально-політичного, ринково-економічного, інформаційно- і комунікативно-насиченого простору» [53, С. 53].

Провідні ідеї компетентнісного підходу висвітлювали багато учених: В. Андрущенко, Ю. Бойчук, І. Герасімова, О. Гулай, І. Зимня, І. Зязюн, С. Калашнікова, О. Овчарук, Л. Овсієнко, Дж. Равен, О. Савченко, А. Хуторський, Л. Штефан [2; 4; 9; 10; 15; 16; 18; 22; 35; 39; 41; 48; 52] та інші.

Учені зазначають, що ключові компетентності особистості характеризуються: багатофункціональністю (тобто забезпечують вирішення різноманітних задач); креативністю (забезпечує розв’язання нестандартних задач); надпредметністю і міждисциплінарністю; багатовимірністю (реалізуються на різних рівнях) [8].

Також учені наполягають, що результат математичної освіти школярів та їх математичної компетентності маємо оцінювати через:

– знання основних понять та опанування методів математики;

– вміння використовувати математичний апарат, необхідний для розв’язання прикладних задач;

– створення математичних моделей найпростіших систем і процесів; уміння переформульовувати реальні задачі у математичні та вміти їх розв’язувати;

– уміння інтерпретувати результати;

– –аналізувати математичні моделі та інтерпретувати їх у термінах реальних об’єктів [40].

Зазначимо, що компетентнісний підхід на думку багатьох учених, не заперечує традиційного знаннєвого підходу, а являє собою його поглиблене продовження. За висновком Ю. Бойчука, «компетентнісний підхід є зорієнтованим на розвиток суб’єкта і пов’язаний з культурою мислення, аналітичною рефлексією, самостійністю і відповідальністю людини за прийняття рішень у діалектичній єдності з духовно-моральними та ціннісними настановами особистості, незалежними від сфери й галузі їхнього застосування» [4, с. 133]. Така орієнтація компетентнісного підходу, за своєю суттю є важливим поворотом освіти в бік інтересів і потреб особистості учня, що відображає одну з найбільш значущих тенденцій інноваційної освіти – її гуманізацію.

І оскільки, як указано раніше, навчальний процес у сучасній школі має, у першу чергу, забезпечити умови самореалізації кожної особистості, її саморозвиток, то мега-завданням освіти стає розвиток ключових компетенцій людини. Школа повинна розвивати різні ключові компетенції учнів, й у тому числі вельми важливу – уміння вчитися. І найкраще це завдання допоможе вирішити, на наш погляд, правильна організація самостійної роботи школяра, значення якої у процесі вивчення математики важко переоцінити. До того ж самостійна робота сприяє формуванню самостійності як якості особистості, дозволяє диференціювати навчання та забезпечує дійсно свідоме і міцне оволодіння знаннями і компетентностями. Питанням організації самостійної роботи присвятили свої дослідження такі вчені, як А. Алексюк, В. Буряк, Н. Волкова, Я. Гулецька, В. Коваль, І. Малкін, П. Підкасістий, Т. Шамова, М. Швед та інші. Самостійна робота розглядається ними як різноманітні види індивідуальної і колективної діяльності учнів, яка є внутрішньо мотивованою і здійснюється під час навчальних занять або в позааурочний час. Вона здійснюється хоча й за завданням учителя, але без його безпосередньої участі. На нашу думку, найлегше самореалізуватися учням при виконанні самостійної роботи буде у грі, оскільки саме у грі відбувається процес об’єктивації сутнісних сил дитини [24]. Вважаємо , що гра має містити достатню кількість завдань за різними темами, що вивчаються, також задачі логічного характеру, які взаємопов’язані і мають за мету розвиток компетентностей особистості. Загалом, компетентнісний підхід спрямований на комплексне оволодіння учнями узагальненими знаннями, вміннями та способами практичної діяльності. Як результат розглядається здатність людини самостійно діяти у різних проблемних ситуаціях, застосовуючи відомі знання і породжуючи нові [53].

Проте слід зазначити, що традиційна система освіти недостатньо швидко адаптується до вимог сучасного українського суспільства і можна стверджувати, що темпи розвитку комп’ютерних технологій значно випереджають темпи розвитку вітчизняної освіти загалом і математичної зокрема. У цьому році 30 % школярів не склали задовільно ЗНО з математики. Але ж відомо, що загальний розвиток мислення людини значним чином залежить від математичних здібностей. Саме здібності до математики тісно пов’язані з формуванням основних розумових операцій людині: аналіз, синтез, порівняння, узагальнення, систематизація, що є основою будь-яких математичних досліджень в теорії чи практиці. Учені виділяють ще й такі важливі допоміжні операції як спостереження та експеримент [50]. Вони, разом з аналізом, систематизацією і узагальненням, створюють спеціальні ситуації і надають учням можливостей виявити в них певні закономірності, наукові факти, ідеї доказу тощо. Реальні ситуації чи експериментальні розробки часто слугують джерелом інформації, інтуїції і з них випливають нові математичні результати, що набувають прикладного характеру. Ще однією важливою, допоміжною розумовою операцією є індукція, що є методом міркувань від часткового до загального. Поряд з індукцією в процесі математичної розумової діяльності застосовується й аналогія, коли в процесі розумової діяльності порівнюються структури різних предметів. Д. Пойа в книзі «Математичне відкриття» виділяє такі пари прийомів, як мобілізація й організація, ізоляція і комбінація, розпізнавання і згадування, перегрупування і поповнення [37].

Зазначимо, що здійснення різних вищезгаданих розумових операцій сприяє формуванню якостей мислення учнів, необхідних для вирішення тієї чи іншої проблеми і вони формуються під час навчання математики. Видатний фізик Р. Фейнман, лауреат Нобелівської премії, писав: "Математика не просто одна з мов. Математика - це мова плюс міркування, це мова та логіка разом. Математика - знаряддя для роздумів. У ній сконцентровані результати точного мислення людей. За допомогою математики можна пов'язати одне міркування з іншим" [38].

Можна говорити, що такі важливі якості мислення людині як широта, гнучкість, критичність, цілеспрямованість сформовані у учня, якщо він:

- у будь-якій ситуації спроможний чітко проаналізувати умови і поставлену мету;
- у будь-який момент процесу мислення здатний чітко систематизувати наявну інформацію, виявити яка наявна інформація є достовірною, повною і доступною, а яка викликає сумніви, знає як поповнити відсутню інформацію;
- після проведеного аналізу здатний скласти план досягнення мети, який передбачає послідовне застосування необхідних у кожному конкретному випадку операцій мислення;
- вміє перевірити правильність отриманого результату [1]. Але ж аналізуючи результати Національного і Міжнародного звітів за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018 (Program for International Student Assessment-2018), освітяни дійшли висновків, що реформа шкільної освіти для України є нагальною потребою. Дослідження PISA проводяться

більш ніж у 80 країнах кожні три роки. Досліджується рівень опанування читацькою, математичною та природничо-науковою компетентністю у 15-літніх підлітків, 9-класників. Перевіряється не рівень засвоєння шкільної програми, а здатність учнів використовувати здобуті знання на практиці, у повсякденному житті. У 2018 року у дослідженні брали участь 5998 учнів і виявилося, що 36% 15-річних українських учнів не досягають навіть базового рівня знання з математики. Вони мають найбільші проблеми із завданнями, що пов’язані з практикою.

Зрозуміло, що здатність учнів застосовувати знання в конкретних ситуаціях не з’являється стихійно, вона формується в процесі доцільного педагогічного впливу, що забезпечує здобування школярами таких знань, на які вони зможуть широко спиратися в трудовій і суспільній діяльності. Ідеться про реалізацію прикладної спрямованості шкільного курсу математики. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики забезпечує активізацію пізнавальної діяльності учнів у процесі навчання математики через формування в учнів стійких мотивів до навчання, посилення інтересу до вивчення математики, підвищення рівня пізнавальної активності та самостійності учнів. І можна сказати, що впровадження компетентністного підходу до навчання, що сприяє інтеграції України в Європейський освітній простір і його загальні теоретичні питання розроблені досить ґрунтовно (О. Овчарук, О. Пометун, О. Савченко, А. Хуторський та ін.). Проте реалізація його при вивченні математики тільки починає розроблятися українськими вченими. Тому актуальною є проблема реалізації компетентнісного підходу при вивченні різних розділів математики і одним із засобів формування в учнів математичних компетентностей є використання прикладних задач. Прикладне спрямування курсу математики має за мету навчити учнів математично досліджувати реальні явища, складати математичні моделі задач, розв’язувати їх та зіставляти отримані результати з реальними.

Серед учених та педагогів-практиків доволі часто обговорюється проблема створення такого курсу математики, в якому «математиці можна навчати так, щоб апаратом, який створюється у результаті вивчення предмету, було зручно користуватися у реальному житті» [46]. Згідно цього передбачалося відбір відповідного змісту тем, уваги до методів, що є важливими для застосування, використання ілюстрацій, взятих з життя, й у тому числі завдань, що імітують реальну ситуацію. Однак у всіх цих питаннях на перше місце ставиться, усе ж таки, математична теорія, а потім вже можливості її застосування в реальності. Математика є інструментом пізнання дійсності і увага приділяється конструкції цього інструменту.

Також необхідно додати, що в методичній літературі немає однозначної термінології. Компетентності учня часто описують як "прикладні", "практичні", "політехнічні", "загально математичні" тощо. За рахунок цього немає і однозначного тлумачення терміну "прикладна спрямованість навчання математики". Застосування математики до вирішення практичних проблем проходить декілька етапів, перший етап пов'язаний з математичним моделюванням, другий – з дослідженням сформованої моделі, і третій – з інтерпретацією отриманих результатів при вирішенні математичної задачі в реальну ситуацію. При цьому вміння, що використовуються на першому і третьому етапах не є власне математичними (часто дослідники називають їх позаматематичними), а вже вміння, що використовуються на другому етапі є математичними (вміння вирішувати математичні завдання). Таким чином, уміння застосовувати апарат математики на практиці поділяються на два види: вміння застосовувати математичний апарат до математичних об'єктів (математичні вміння) і вміння в застосуванні математичних знань і умінь в організації дослідження реальних ситуацій (позаматематичні або прикладні вміння).

Аналіз методичної літератури дозволяє констатувати, що під практичною спрямованістю навчання математики ученими розуміється відбір математичного змісту конкретних тем предмету і математичних методів, що мають важливе значення для дослідження задач, що виникають в практиці, і на їх основі формування умінь застосування математичного апарату до різноманітних життєвих об'єктів. Практичне спрямування шкільного курсу математики передбачає вироблення в учнів умінь використовувати здобуті знання під час вивчення навчальних предметів, застосовувати раціональні обчислювальні прийоми, розв’язувати рівняння і нерівності, використовувати інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) тощо.

Під прикладною спрямованістю навчання математики розуміється відбір змісту, спрямованого на навчання застосуванню математики в дослідженнях реальної дійсності і на його основі формування відповідних позаматематичних умінь. Прикладне спрямування включає уміння учнів математично досліджувати реальні явища, складати математичні моделі задач, розв’язувати їх та зіставляти знайдені результати з реальними.

Політехнічна спрямованість навчання енциклопедія визначає як «навчання, що дає знання про основні галузі і наукові засади сучасного виробництва і озброює загально технічними практичними навичками, необхідними для роботи на виробництві. Політехнічне навчання має за мету готувати до оволодіння технікою і технологією, що змінюються, і до участі в технічному прогресі суспільства. Політехнічне спрямування передбачає використання математичних знань та вмінь для пояснення виробничих циклів, процесів обслуговування та керування, полегшення вивчення інших предметів, зокрема фізики, хімії та інших дисциплін [32].

Учені та педагоги-практики минулого століття навіть розрізняли математику як науку на "чисту" і "прикладну" у навчальному предметі "математика". Визначаючи поняття "прикладна спрямованість навчання математики", відомі учені-математики тлумачили "прикладну" математику як науку "про практичні оптимальні методи вирішення математичних задач, що виникають за межами математики" [5]. Під прикладною спрямованістю навчання математики розуміли "навчання учнів рішенню так званих прикладних задач, тобто задач, що передбачають складання математичної моделі задачі і доведення рішення до певного числового значення. Мається на увазі, що прикладна спрямованість навчання математики є орієнтацією змісту і методів навчання на застосування математики в суміжних науках, у професійній діяльності, в народному господарстві, в побуті" [12].

Відомий математик В. Болтянський писав, що «задачі прикладного характеру мають у загальноосвітній школі важливе значення перш за все для виховання в учнів інтересу до математики. На прикладі добре складених задач прикладного змісту учні будуть переконуватись у значенні математики для різноманітних сфер людської діяльності, в її користі і необхідності для практичної роботи, побачать широту можливих застосувань математики, зрозуміють її роль в сучасній культурі» [47].

Сучасні дослідники дотримуються майже такої класифікації та виокремлюють особливості системи тих завдань, що забезпечують прикладну орієнтацію навчання математики: 1) система повинна бути розроблена на основі навчального плану та навчальної програми; 2) система завдань має містити завдання, що формують вміння будувати математичну модель; завдання, що формують уміння проводити інтерпретацію отриманого рішення; завдання, при вирішенні яких застосовується математика у практиці; 3) система завдань має бути повною, відображати різні ідеї застосування математики, а також містити приклади з різних наук чи виробництва.

Отже, проведений теоретичний аналіз проблеми дослідження, узагальнення визначення вченими поняття прикладної спрямованості навчання математики і аналіз можливостей застосування математики у розвитку математичної компетентності дозволяє нам визначити основний напрям реалізації прикладної спрямованості навчання математику загальноосвітній школі. Таким є шлях щодо необхідності розробки в рамках вивчення основного курсу математики, визначеному у державному стандарті з математики для загальноосвітньої школи, певної системи задач прикладного спрямування з метою формування прикладних умінь учнів.

1.2. Математичне моделювання як метод пізнання реальності та засіб розвитку математичних компетентностей школярів

У недалекий час випускники освітніх закладів України стануть керівниками промисловості, фінансових чи наукових установ і майбутнім фахівцям доведеться здійснювати функції управління. Це нелегка справа, коли з метою ефективного управління слід враховувати різноманітні аспекти взаємин між різними елементами всередині організації та назовні. Саме моделювання може бути потужним інструментом необхідного аналізу управління складними системами і саме математичне моделювання надає людині можливість оцінити різні стратегії, що покликані забезпечити досягнення мети.

Моделювання є методом наукового пізнання сутність якого полягає у вивченні не об’єкта, а його певної заміни. Зазвичай моделлю називають спеціально розроблений об’єкт, що має такі ж характеристики як досліджуваний об’єкт. Для розв’язання будь-якої реальної задачі математичними методами спочатку необхідно створити її математичну модель. Отже, учені найчастіше визначають модель як матеріальний чи уявний об’єкт, що безпосередньо замінює об’єкт дослідження.

І як зазначають учені, розв’язання задач прикладного чи життєвого змісту за допомогою математичних методів передбачає етапи: створення математичної моделі задачі; розв’язання цієї математичної задачі; аналіз результатів [32].

Важливим є той факт, що математичне дослідження моделі дозволяє отримати інформацію не тільки про об’єкт і ті процеси, що вивчаються, а й певні дані про особливості поведінки в майбутньому. Математична модель дозволяє значно легше і з меншими витратами ресурсів досліджувати реальні процеси. До того ж, і це дуже важливо, модель дозволяє розглядати не всі властивості, а лише найважливіші для тих аспектів, що досліджуються.

Процес побудови, вивчення та застосування моделей називають моделюванням. Математична модель спрощує дослідження та дозволяє отримати необхідні результати легше й швидше порівняно з самим об’єктом. Таким чином, пізнання різноманітних явищ потребують математичних моделей і одним з головних завдань сучасної математики є побудова математичних моделей об’єктів.

Зазначимо, що необхідність використання методу моделювання визначається тим, що багато об’єктів неможливо безпосередньо досліджувати, або ж це дослідження потребує багато часу і неординарних засобів. Учені пишуть, що можна виділити три допоміжні етапи у розв’язуванні задачі: 1. Формалізація – перехід від реальності до побудови формальної моделі; 2. Розв’язування задачі всередині побудованої моделі, коли успішне виконання залежить від правильно обраного методу розв’язування та залучення допоміжного математичного апарату; 3. Інтерпретація одержаного результату на мову вихідної задачі. Учені також зазначають, що етапи моделювання можуть бути розглянуті як компоненти складної діяльності з моделювання, що передбачать: попередній аналіз; переклад реальності на математичну мову; робота з моделлю; співвіднесення результатів, отриманих у межах математичної моделі, з реальністю. Кожен компонент діяльності з моделювання має свій зміст. Попередній аналіз включає такі операції як семантичний аналіз (на рівні окремих понять; на рівні окремих речень; перефразування речень); осмислення завдання в цілому; відновлення предметної ситуації, що стоїть за ним; виділення кількісних характеристик. Переклад реальності на знаково-символьну мову потребує знання відповідних математичних знань і правил. Робота з моделлю передбачає аналіз та перетворення моделі. Співвіднесення результатів, отриманих у межах математичної моделі, із реальністю передбачає не лише знаходження відповіді, але й аналіз відповідності отриманих даних дійсності

[32; 50]. При математичному моделюванні слід відійти від об’єкта, від належності моделі та об’єкта до різних форм руху матерії. Таке узагальнення має форму теорії ізоморфізму систем, набуває характеру математичної подібності. Навчання школярів рішенню задач є однією з найважливіших складових викладання математики, а також формування вміння застосовувати теоретичні знання на практиці. Проте як показує практика і аналіз результатів робіт школярів, вміння вирішувати практичні завдання залишається незадовільним. Особливо це стосується завдань на побудову математичної моделі, оскільки вони викликають у учнів найбільші утруднення. При вирішенні практичного завдання найголовніше вивчити умову задачі, побудувати її математичну модель, на цій моделі знайти рішення задачі, а потім перевести результат рішення до вихідної ситуації, тобто зробити практичний висновок. В цьому і полягає прикладна спрямованість математики, могутність математичного методу пізнання реальності. Школярі мають діяти, як вчені, коли науковці широко використовують метод моделювання. І для дослідження будь-якого явища або об'єкта, вибирають або будують інший об'єкт, подібний до досліджуваного об'єкта. Побудований або вибраний об'єкт вивчають і з його допомогою вирішують дослідницькі завдання, а потім результати вирішення цих переносять на первинне явище або об'єкт.

Наприклад, розрізаючи конус площинами, отримуємо в перерізі різні криві: окружності, еліпси, параболи, гіперболи. Математики ще в давнину почали вивчення цих кривих, результати яких мають велике значення для фізики, техніки, астрономії, військової справи. Проте лише тоді, коли користуючись методом Декарта і Ферма були складені рівняння цих кривих, їх вивчення відразу просунулося вперед.

Завдань, які спрямовані на моделювання і пропонуються в шкільних підручниках, дуже обмаль.

Розглянемо наступні завдання, які лягають в систему нашої підготовки школярів до опанування методів математичного моделювання:

Задача 1. Яка кількість кас в супермаркеті є необхідною і достатньою, щоб відвідувачі обслуговувалися без черги?

Розв’язання. Перший етап математичного моделювання, це етап формалізації. Його суть в тому, щоб умову задачі перевести на математичну мову. Потрібно визначити всі необхідні дані і за допомогою математичних співвідношень описати зв'язки між ними. Для вирішення завдання введемо такі характеристики:

1. k - необхідна кількість кас;
2. b - час обслуговування одного покупця за касою;
3. T - час роботи магазину;
4. N - кількість покупців, які побували в супермаркеті за день.

Протягом робочого дня через одну касу може пройти T / b покупців. Отже, число кас треба взяти таким, щоб (T / b) * k = N. Це співвідношення і є математичною моделлю задачі.

Другий етап математичного моделювання. Знайдемо з отриманої рівності необхідну кількість кас: k = (N / T) * b.

Третій етап математичного моделювання. Час інтерпретації, тобто перекладу отриманого рішення на ту мову, на якому була сформульована вихідна задача.

Щоб в супермаркеті біля кас не створювалися черги, число касових блоків має бути рівним або більшим отриманого значення k. Число k зазвичай обирають таким, щоб воно було найближчим цілим числом, що задовольняє нерівності $k \geq (N / T) * b$.

Звернемо увагу учнів на спрощені допущення, зроблені при побудові моделі:

• в якості b взято середній час проходження однієї людини через касу;

• за касовими апаратами сидять люди, що працюють з різною швидкістю;

• крім того, щодня в універсамі буває різна кількість покупців N;

• різна і інтенсивність потоку покупців в різний час дня, тобто число людей, що проходять через касу за одиницю часу. Тому, для більш точних, достовірних розрахунків в отриманій формулі треба замість середнього значення N / T взяти максимальне значення цієї величини a = max (N / T).

Підкреслимо, що будь-яка математична модель передбачає спрощення, вона не збігається з конкретною реальною ситуацією, а є лише її наближеним описом. Звідси очевидна і деяка похибка результатів. Однак саме завдяки заміні реального процесу відповідною йому математичною моделлю з’являється можливість застосувати математичні методи при його вивченні. Розглянутий приклад математичного моделювання прикладної задачі показує, що цінність цього методу при вирішенні прикладних задач полягає ще і в тому, що одна і та ж модель може описувати різні ситуації, різні процеси реальної практики.

Розглянемо на прикладі вирішення деяких завдань до теми: "Найбільше і найменше значення функції", яким чином можна формувати в учнів уявлення про створення і уточнення побудованої математичної моделі.

Задача 2. Для розміщення складу потрібно обгородити ділянку прямокутної форми найбільшою площі наявної для цього сіткою довжиною 80 м. Знайдіть довжину і ширину ділянки.

Рішення: позначимо довжину однієї зі сторін шуканого прямокутника через x м, тоді площа S (x) прямокутника виразиться формулою:

S (x) = x (40-x) = 40x - x, де x (0; 40).

Досліджуючи отриману функцію, переконуємося, що ділянкою найбільшої форми є квадрат 20x20 кв.м, max S (x) = 400 кв.м.

Потім проводимо роботу, мета якої привернути увагу учнів на можливу динамічність процесу математичного моделювання. Для цього вводимо додаткові умови, відповідні реальної ситуації, наприклад, в такому вигляді: "Як правило, склад будується не на відкритому місці, а близько будь-яких будівель. Які можливі випадки огорожі складу?"

Найбільш часто зустрічаються два випадки: 1) коли склад примикає до однієї стіни споруди; 2) одночасно до двох стін будівлі.

У першому випадку, бачимо, що площа S (x) виражається вже іншою формулою S (x) = 2 (40x - x), де x м - довжина боку, що не примикає до споруди.

Досліджуючи цю функцію, учні приходять до висновку, що в цьому випадку оптимальні розміри такі: довжина сторони, що примикає до будівлі 40 м, довжина іншого боку 20 м, найбільша площа дорівнює 800 м2.

Перед аналізом другого випадку можна запропонувати учням зробити прогноз передбачуваних оптимальних розмірів складу, а потім формальним шляхом з'ясувати, що функція S (x) = x (80 - x) приймає найбільше значення при x = 40: S (40) = 1600 (м2) .

Підводячи підсумки роботи над завданням, звертаємо увагу учнів на те, що одна з характерних особливостей математичного моделювання полягає в зіставленні побудованої моделі з описуваним явищем. Результатом такого зіставлення, як правило, є облік якихось нових моментів в даному явищі, отже, і уточнення моделі. Розгляд цього завдання бажано супроводжувати схемою території підприємства, за допомогою якої на змістовному рівні виявляються можливості для влаштування складу найбільшої площі, а на формальному - уточнюється математична модель, що описує величину площі складу. Застосування схеми дозволяє послідовно знаходити оптимальні варіанти розміщення складу, використовуючи для огорожі сітку тієї ж довжини.

Задача 3. При русі теплохода по озеру витрати N в умовних одиницях на 1 км шляху визначаються за формулою N (v) = aV3 + b/V, де V - швидкість теплохода (км/год), a і b – коефіцієнти, що визначаються з досвіду. Знайдіть швидкість теплохода, при якій витрати будуть найменшими, якщо, a = 0,001 і b = 60.

Зауважимо, що це завдання учні виконують самостійно. В результаті виходить, що оптимальна при такому русі по річці швидкість V =14,1км/год, а витрати N знижуються до 2,8 умовних одиниць на 1км шляху. Далі можна запропонувати учням порівнювати швидкості, різні умови руху теплохода; порівнювати математичні моделі, які описують витрати з урахуванням особливостей течії річки. Можна запропонувати учням вправу: "Якими мають бути фізичні розмірності коефіцієнтів a, b, $N(v) = AV + b/V$ правильно описувала витрати на 1 км плавання?"

Необхідно привернути увагу учнів, що математичне моделювання деяких задач практичного спрямування спирається на співвідношення, відомі учням, але в деяких випадках воно ґрунтується на залежностях, які неможливо встановити в рамках шкільної програми. Тому деякі факти надаються школярам додатково, без особливих пояснень, з метою використання цих даних при побудові моделей.

Розглянемо також такі проблеми повсякденності. У харчовій, хімічній та інших галузях промисловості у величезних масштабах використовуються металеві посудини, що мають форму прямокутного паралелепіпеда. За технологічними міркуваннями ці судини виготовляються із заданим відношенням висоти k судини до одного з розмірів основи. З метою економії потрібно, щоб при виготовленні судин заданої ємності витрати металу, емалей, лаків, фарб, що застосовуються в якості покриття, була якомога меншою.

Тому важливого практичного значення набувають завдання, що пропонуються до самостійного виконання й подальшого обговорення.

Задача 4. Якими мають бути розміри прямокутної судини заданої ємності V із заданим значенням величини k, щоб витрата металу на його виготовлення був найменшим?

Задача 5. Для стоянки машин виділили майданчик прямокутної форми, що примикає однією стороною до стіни будівлі. Майданчик обнесли з трьох сторін металевою сіткою довжиною 200м, та площа її при цьому виявилася найбільшою. Які розміри майданчика?

Задача 6. Визначити глибину відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом 500 куб.м так, щоб на половину його стін і дна пішло найменша кількість матеріалу. Додаткові питання: "Як зміниться математична модель, що описує витрати матеріалу на облицювання стін басейну, якщо буде потрібно повністю покрити стіни басейну матеріалом? Які оптимальні розміри відкритого басейну? "

Задача 7. На сторінці книги друкований текст повинен займати 900 см2. Верхнє і нижнє поля сторінки по 1,8 см, праве і ліве по - 0.8 см. Якщо брати до уваги тільки економію паперу, то якими мають бути найбільш вигідні розміри сторінки? Додаткові питання: "Як зміниться математична модель, що описує економію паперу в тексті, якщо буде потрібно зробити верхнє і нижнє поле сторінки по 3 см, праве і ліве - по 2 см. Якими мають бути найбільш оптимально вигідні розміри сторінки?"

Задача 8. Дощова крапля, початкова маса якої $m_{\circ}$, а початкова швидкість дорівнює 0, падає під дією сили тяжіння, рівномірно випаровуючись так, що спад маси пропорційна часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). Через скільки секунд, після початку падіння, кінетична енергія краплі буде найбільшою і яка вона? Додаткове питання: "Як зміниться величина найбільшої кінетичної енергії краплі, якщо її початкова швидкість буде відмінна від нуля?"

Таке завдання може бути запропоновано лише найбільш підготовленим учням, яким додатково надається формула для обчислення кінетичної енергії.

Задача 9. Школярі займаються збором ягід, перебуваючи у лісі в 9 км від найближчої точки шосе. Кур'єр на велосипеді відвозить зібрану ягоду в пункт переробки, розташований в 15 км від згаданої точки шосе (вважаємо шосе прямою лінією). Швидкість кур'єра по лісу 8 км / год, а по шосе - 10 км / ч. До якої точки шосе йому треба під'їхати, щоб в найкоротший час доставити ягоди до місця переробки? Додаткові питання: "Після здачі ягід в пункти заготівлі кур'єр може збільшити швидкість по шосе до 15 км / год, а по лісу - до 10 км/ ч. Який в цьому випадку найкоротший час повернення?

Яким повинен бути при цьому маршрут його руху? Який оптимальний проміжок виконання виробничої операції в цілому? "

Задача 10. Потрібно побудувати кілька однакових житлових будинків із загальною площею 40000 кв.м. Витрати на будівництво одного будинку, що має N кв.м житлової площі, складаються з вартості фундаменту, пропорційної кореню квадратному з величини житлової площі будинку, і вартості наземної частини, пропорційної кубу кореня квадратного з величини житлової площі. Будівництво будинку на 1600 кв.м обходиться в 184,8 тис. умовних одиниць, причому в цьому випадку вартість наземної частини складає 32% вартості фундаменту. Визначте, яку кількість будинків потрібно побудувати, щоб вартість витрат була найменшою, і знайдіть цю вартість.

Додаткове завдання може бути пов'язано, наприклад, з урахуванням застосування будь-яких нових матеріалів для покриття підлог: "Використання досконаліших будівельних матеріалів для обробки покриття підлоги зменшує вартість будинку на величину, пропорційну площі житлових кімнат N. Визначте, як в цьому випадку зміниться функція, що описує витрати на будівництво одного будинку, якщо при площі N = 2500 кв.м вартість будинку з поліпшеним покриттям підлоги дорівнює 260 тис. ум.од. Скільки в цьому випадку потрібно побудувати будинків, щоб сума витрат була найменшою? Яка ця сума?

Цікавою на наш погляд є розгляд такої практичної задачі на побудову математичної моделі. Розглянемо типову виробничо-економічну ситуацію.

Задача 11. Нехай, на підприємстві кожний з операторів обслуговує 6 однотипних об’єктів. При виникненні в одного з об’єктів потреби в обслуговуванні, оператор отримує відповідний сигнал, здійснює обслуговування і чекає наступного виклику. Звісно, якусь частину свого робочого часу оператор не працює, що призводить до економічних збитків підприємства.

Прагнучи скоротити простої, менеджер збільшує навантаження на операторів, додає кожному з них ще по одному об’єкту обслуговування.

Проте нічого раціонального не випливає: оператори перестають справлятися зі своїми обов'язками. Поки йде обслуговування одного з об'єктів, надходить виклик до іншого, а оскільки у цей момент оператор зайнятий, утворюється черга на обслуговування. Тоді менеджеру спадає на думку ідея: а чи не можна створити бригаду з 4 операторів і закріпити за всіма разом 26 об'єктів? Можливо, у цьому випадку простої скоротяться, бо з чотирьох операторів завжди хтось буде вільний і готовий до обслуговування чергового виклику. Такий розподіл має певний сенс: середнє число об'єктів, що обслуговує один оператор, збільшиться порівняно з існуючим і дорівнюватиме 26:4=6,5. Начебто є користь. Але чому 26 розподіляється на чотирьох операторів, а не, припустимо, 21 на трьох? Виграш буде ще більшим (21:3=7). До речі, а де гарантія, що за запропонованим збільшенням навантаження будуть ліквідовані черги? [44].

Автор задачі Ю. Ткач зазначає, що розв'язати таку задачу дослідницьким шляхом, перебираючи різні варіанти закріплення операторів за об'єктами, практично неможливо. Ні в якому досліді не можна відтворити всі ті випадкові умови, які бувають у житті: виклик від кожного об'єкта може надійти у будь-який час (у першу хвилину, у другу тощо), і термін обслуговування може бути найрізноманітнішим.

У таких випадках і стає в пригоді моделювання, яке використовують завжди, коли необхідно глибоко розібратися у будь-якому складному явищі, зрозуміти його приховані закономірності. Простота моделі порівняно з реальним об'єктом досягається тим, що в ній зберігається лише найголовніше, найважливіше, а все другорядне і несуттєве для усвідомлення та розв'язання задачі відкидається.

Створення моделей ситуацій, що вимагають прийняття рішень, тобто моделей операцій (як їх називають), безумовно, здійснюються і в мозку людини, подумки. А чи можна створити модель процесу обслуговування об'єктів операторами? Мається на увазі математична формулу, яка б показувала, від чого залежить ефективність роботи операторів. Підставляючи у цю формулу дані, що характеризують можливу кількість об’єктів та операторів, а також середній час обслуговування, можна було б отримати рішення, яке забезпечило ефективну роботу підприємства.

Зауважимо, що якщо за допомогою математичної моделі здійснити розрахунки наведеної вище задачі [44], виявиться, що найкращій результат буде, якщо групу з трьох операторів закріпити за двадцятьма об’єктами. У цьому випадку без будь-яких додаткових витрат помітно збільшується продуктивність праці, скорочуються час бездіяльності операторів, їх навантаження збільшується приблизно на 8%.

Отже, вирішуючи такі задачі, ми разом зі школярами усвідомлюємо висновок, що модель – це об’єкт, який використовують замість оригіналу. Він відображує найважливіші властивості і риси оригіналу.

Зауважимо учням також, що особливостями економіки як об’єкту математичного моделювання є неможливість подібного конструювання як у техніці. Не можна побудувати точну копію економічного процесу і за допомогою цієї копії „прокручувати” різні варіанти економічних дій. Саме тому математичні моделі, що створені для цілей економіки, вивчаються спеціальною науковою дисципліною, яка дістала назву “економіко-математичні методи”. І непогано було б тут додати історичні довідки щодо застосування математичних методів в економіці на кшталт такої.

У 1938 році до двадцятип’ятирічного професора Л. Канторовича звернулися представники фанерного треста з проханням розрахувати найвигідніший розподіл 8 верстатів за умовою, що відома продуктивність кожного верстату, за кожним із п’яти видів матеріалів. Наука того часу ще не володіла методами для подібних розв’язань. І молодому вченому довелося розробити свій оригінальний метод розв’язання “верстатної задачі”. Але головне, що зробив Л. Канторович, сягає далеко за межі інтересів фанерного треста. Відштовхуючись від часткової задачі, учений винайшов узагальнений метод розв’язання цілої низки найважливіших економіко-виробничих проблем. Новий метод, названий лінійним програмуванням, дав відповідь на питання, як керувати підприємством, щоб отримати максимально можливий прибуток. За розробку метода лінійного програмування й економічних моделей академік Л. Канторович у 1975 році одержав Нобелівську премію з економіки. Лінійне і, ширше, математичне програмування – наразі один із основних методів обґрунтування виробничо-економічних рішень. Але не єдиний. Сьогодні поряд із ним існує величезний арсенал математичних засобів пошуку оптимальних рішень.

Отже, після запропонованої школярам такої низки задач підводимо підсумки. Учні намагаються написати певні правила для розв'язання практичних проблем і рекомендують такий алгоритм:

1. усвідомлення проблеми і мети розв'язання;
2. вибір тієї змінної, від якої залежить досягнення мети;
3. побудова математичної моделі задачі;
4. розв'язання задачі за допомогою математичної моделі;
5. аналіз результатів.

Підкреслимо, що прикладні задачі потребують особливої уваги з боку вчителя, тому що спочатку їх потрібно сформулювати мовою математики, тобто скласти математичну модель задачі. Це найбільш складна частина роботи, що також потребує особливої підготовки як вчителя, так і учнів [49]. Розв'язування прикладних задач за допомогою моделювання сприяє розвитку творчої самостійності, ініціативи учнів, дозволяє краще реалізувати принцип зв'язку теорії з практикою. Дозволяє реалізувати також важливий принцип відповідності навчання реальному життю, міждисциплінарні зв'язки математики з іншими науками. Аналіз науково-методичної літератури і практики шкільного навчання показали, що, незважаючи на широке застосування методу математичного моделювання в різних навчальних предметах, цілеспрямоване формування в учнів відповідних умінь відбувається переважно на уроках математики Оскільки математика є базовою дисципліною у навчанні школярів та є основою прогресу суспільства, тому побудова математичних моделей, її взаємозв'язок з реальним життям є вельми актуальним.

Проте аналіз науково-методичної літератури і практики шкільного навчання показали, що, незважаючи на необхідність застосування методу математичного моделювання в різних життєвих ситуацій, дидактичних матеріалів для досягнення названого методу в процесі навчання є недостатньою. Підручник з алгебри Г. П. Бевза, виданий у 1996 році, вперше в історії навчання школярів нашої держави містить розділ з елементів прикладної математики параграф «Математичне моделювання». У цьому параграфі подано таке означення моделі: «Моделлю називають спеціально створений об'єкт, який відображає властивості досліджуваного об'єкта» [7]. Розглядається також три етапи моделювання (створення, розв'язання, аналіз відповіді), надається 12 прикладних задач на складання математичних моделей [3]. Експериментальний підручник для 9-го класу поглибленого вивчення курсу алгебри (Колесник Т. В., Хмара Т. М.), виданий у 2008 році містить параграф, присвячений математичному моделюванню, який називається «Математична модель і метод математичного моделювання». Тут детально розв'язано приклади різних задач і задачник до цього параграфа також містить декілька задач [21]. У 2009 року, елементи прикладної математики введено в обов'язковий план, і шкільні підручники вже містять розділ прикладної математики і параграф, присвячений математичному моделюванню. Так, з підручника [23] у додатковому матеріалі можна дізнатися історичні відомості, наприклад, як спираючись лише на математичні моделі, астрономи Дж. Адамс (Англія) й У. Левір'є (Франція), незалежно один від одного, дійшли висновку про існування невідомої тоді ще планети і вказали на її розміщення. І завдяки цим розрахункам астроном Г. Галле (Німеччина) знайшов планету Нептун. [23] Аналізуючи сучасні підручники для старшої школи, ми знаходимо недостатньо практичної інформації про метод математичного моделювання. При підготовці до ЗНО теж майже немає місця математичним моделям. На нашу думку, методу математичного моделювання в сучасних підручниках приділяється недостатньо уваги, підручники містять незначну кількість задач, теоретичний матеріал не досить чіткий і науковий.

Отже, за результатами аналізу різних підручників з математики [3; 21; 23; 28; 32; 51], математичне моделювання недостатньо розроблено.

З метою кращого вивчення математичного моделювання і підвищення ефективності навчання математики у школі загалом, нами у цьому і наступному розділі запропоновано систему задач практичного спрямування. Ці задачі покликані сприяти якіснішому й свідомому засвоєнню навчального матеріалу, організації ефективної навчальної діяльності школярів з вивчення математичного моделювання.

Висновки до розділу 1

У першому розділі на основі аналізу психолого-педагогічної та науково-методичної літератури зроблено висновок, що стрижнем сучасної освіти є виховання особистості, яка вміє використовувати набуті знання для розв'язання різноманітних проблем. І від системи навчання, яку пропонує вчитель залежить те, щоб кожен школяр навчився застосовувати власні знання у життєвих ситуаціях. У зв'язку з цим вчителю потрібно розробити певну систему задач, що покликані сприяти виконанню цього завдання. Саме уроки математики надають можливості виховувати в учнях вміння застосовувати отримані знання до задач практичного змісту, реалізовують прикладну спрямованість навчання. Вперше означення поняття „прикладна спрямованість шкільного курсу математики" було запропоновано радянським педагогом-математиком В. Фірсовим. Згодом воно вдосконалювалось іншими, у тому числі, й українськими вченими (Ю. Колягін, З. Слєпкань, Г. Бевз, В. Швець). У розділі продемонстровано, що ці питання пошуку способів розв'язання нестандартних життєвих задач, аналізу результатів дослідження побудованої моделі є важливими складовими у роботі сучасного вчителя на шляху розвитку математичних компетентностей учнів.

У розділі І, на основі аналізу науково-методичної літератури, доведено, що для успішної участі у суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв’язання конкретних практичних задач. У програмах з математики для середньої школи для вирішення даної проблеми були введені у підручник теми на кшталт „Елементи прикладної математики" (9 клас). Основним методом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є метод математичного моделювання, а найбільш ефективним засобом є прикладні задачі. Завдяки проведеному аналізу програм і підручників, доведено, що сьогодні, коли перед сучасною школою поставлені завдання поєднання теоретичного навчання з подальшим практичним застосуванням, а саме підвищення шкільної математичної освіти за умов посилення її прикладного та практичного спрямування, не має достатнього матеріалу у цих підручниках.

У першому розділі на основі аналізу різноманітних підходів до визначення поняття «математична модель», задач практичного спрямування розкрито необхідність розробки певної системи задач у процесі навчання математики школярів, постійний пошук нових форм і методів організації навчального процесу. Представлено систему задач, описано послідовність і форму їх подання школярам і запропоновано методи розв'язання цих задач.

Оскільки якість сучасного навчання має відповідати вимогам реального життя, потребує сформованості у школярів математичної компетентності, важливих практичних знань, умінь вирішувати певні життєві, виробничі чи економічні проблеми та задачі, використання апарату математичного моделювання є важливим. І у наступному розділі буде представлено систему задач з використанням диференціальних рівнянь, що покликані сприяти набуттю школярами досвіду розв'язання прикладних життєвих задач.

РОЗДІЛ 2. ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ УЧНІВ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

Вивчення предмету має відповідати стандартам освіти і програмі курсу шкільної математики, що й встановлюють вимоги до змісту, обсягу і рівня освітньої підготовки. Як зазначалося вище, важливо. щоб освіта враховувала вимоги реального життя. Тому головною метою вивчення математики є не тільки вивчення основ математичної науки, а й розвиток компетентностей учнів з метою адаптації молоді у реальну суспільну працю і життя. Мова йде не лише про наявність стійких знань з математики, а саме про вміння застосувати їх у різноманітних ситуаціях. Таке завдання можливо вирішити за допомогою введення у процес навчання математики прикладної складової, спеціально розробленої системи завдань, які будуть забезпечувати взаємозв'язок математики і тих реальних життєвих процесів, що потребують дослідження.

2.1. Місце і роль диференціальних рівнянь у формуванні компетентності учнів

Диференціальні рівняння мають важливе як теоретичне, так і практичне значення у загальній математичній освіті. Ця тема є фундаментом для багатьох розділів не лише математики, а й також слугує базою для глибокого вивчення хімії, фізики та інших дисциплін. Різні проблеми застосування диференціальних рівнянь до процесів математичного моделювання досліджували Р. Асланов, К. Власенко, Д. Гальченко, Т. Крилова, В. Петрук, М. Холькін та інші. Особливість вивчення диференціальних рівнянь полягає в тому, що вони дозволяють моделювати процеси, що зописуються певною залежністю між деякими величинами та швидкістю змін цих величин. Тому диференціальні рівняння достатньо повно описують різноманітні процеси. Отже, є вкрай необхідним навчитися не лише їх розв'язувати, а й самостійно складати за результатами аналізу тих процесів, що досліджуються.

На наш погляд вивчення теми "Диференціальні рівняння" у шкільному курсі математики є цілком доречним, оскільки вона дозволяє показати учням елементарні методи математичного моделювання.

Проведений аналіз програм з математики (залежно від профільності навчання) визначає різні підходи до вивчення диференціальних рівнянь. Так, навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів, рівень стандарту, таким чином визначає «*практичну компетентність* випускника загальноосвітнього навчального закладу: вміє будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, задач, пов'язаних із ними, за допомогою математичних об'єктів, відповідних математичних задач» [34]. Постає природне питання: «Яким чином школа забезпечує цю компетентність, якщо у програмі не передбачено вивчення диференціальних рівнянь? Отже, вчитель має у додатковий час й спосіб сформувати у школяра цю компетентність?». Мабуть, має запропонувати певний факультативний курс.

Кращою є позиція у класах профільного навчання математики. Згідно навчальній програмі з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень) на вивчення теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування. Застосування похідної до розв'язування задач прикладного змісту» відводиться 54 навчальні години. І цією програмою наголошується, що випускник загальноосвітнього навчального закладу профільного рівня навчання: розпізнає життєві чи предметні ситуації як задачі, що можна розв'язати математичними методами; формулює їх математичною мовою та розв'язує, використовуючи математичні компетентності, оцінює похибку обчислень та інтерпретує отримані результати з урахуванням конкретних умов, змісту та цілей предмета дослідження; застосовує математичні моделі при вивченні природничих (фізика, астрономія, географія, економіка, хімія, біологія) та інших навчальних предметів [34].

Програмою на всіх рівнях передбачається вивчення теми «Диференціальні рівняння» у 11 класі. Підручники рівня стандарту не містять навчального матеріалу, пов’язаного з диференціальними рівняннями, але мають певне підґрунтя, оскільки пропонують матеріал про похідну та інтеграл [31]. У підручнику для профільного рівня (автори Нелін Є.П. та Долгова О.Є) значна увага приділяється саме процесу складання диференціального рівняння та рошзлядаються різні класичні приклади [30]. Аналізуючи підручник, дійщли висновку, що мету вивчення цієї теми автори вбачають у ознайомлення з поняттями, пов’язаними з диференціальними рівняннями та демонстрацією можливостей застосування диференціальних рівнянь до вивчення різнопланових реальних процесів. Зауважимо, що до вивчення цієї теми учні вже вивчили похідну і первісну та навіть ознайомлені з найпростішим диференціальним рівнянням $F'(x) = f(x)$, оскільки використовували його при визначенні первісної. І тепер подальше поглиблення матеріалу через вивчення нової теми «Диференціальні рівняння» надасть учням нових важливих знань. Узагальнюючи, можна стверджувати, що навчальна тема найкраще проілюструє учням роль математичного моделювання в дослідженні різноманітних життєвих процесів. Отже, акцент при вивченні цієї теми, як і має бути, ставиться на прикладній спрямованості курсу математики.

І хоча здається цілком зрозумілим, що людина повинна бачити роль математики і математичного моделювання у розвитку своєї загальної та математичної культури, при вивченні шкільного курсу уваги цьому питанню приділяється недостатньо. На жаль, підручники і дидактичні посібники містять малу кількість навчального матеріалу, який сприяв би розвитку не лише математичних знань, а й математичної компетентності школярів. З одного боку є нагальна потреба у формуванні розумових операцій спрямованих на практичне застосування навчального матеріалу. А з іншого, традиційне навчання часто надає учням математичні знання, які виявляються формальними і не мають реального змісту.

Прикладна спрямованість змісту навчання математики є одним з головних завдань сучасної математичної освіти і тема диференціальних рівнянь має безліч переваг серед інших навчальних тем курсу математики задля реалізації такої мети. Тому педагоги мають передбачити орієнтацію змісту навчання на вивчення математичної теорії у процесі розв'язання таких задач, що мають реальне застосування, на формування в учнів математичної компетентності, навичок самостійної дослідницької діяльності через уміння моделювати та досліджувати ці моделі завдяки диференціальним рівнянням [42].

Є достатньо багато наукових статей про можливості застосування диференціальних рівнянь в шкільному курсі фізики, хімії, біології, медицині тощо. Доцільною на уроках вважається нам й розповідь про історію появи і розвитку диференціальних рівнянь, демонстрація класичних прикладів, в яких використовуються диференціальні рівняння. Наприклад, диференціальні рівняння використано в задачах різних тем різних навчальних дисциплін шкільного курсу: "Радіоактивний розпад", "Падіння тіл", "Швидкість прямолінійного руху", "Поглинання світла", "Охолодження тіла", "Гармонічні коливання" тощо. Загалом, система задач на вивчення цієї теми має містити завдання на складання рівнянь, що вказують на залежність між величинами та швидкістю їх зміни. Для учнів також слід пропонувати і завдання на встановлення факту: чи є запропонована функція розв'язком заданого диференціального рівняння, чи ні.

Проведений аналіз програм, визначених компетентностей та підручників, дозволяє нам стверджувати, що вивчення диференціальних рівнянь не тільки не перевантажує програму й учнів, а й навпаки, сприяє кращому розумінню ролі математики у реальному житті.

Дійсно, курс математики має забезпечити розвиток мислення, але ж особливу увагу необхідно приділити визначеню ролі математики як науки у питаннях її можливих застосувань, її прикладній спрямованості. Тобто учні мають оволодіти навичками математичного модлювання і саме така діяльність сформує їх компетентності. І саме з цією метою необхідною є детальна розробка методики вивчення теми та створення системи задач, що продемонструють прикладну спрямованість застосування диференціальних рівнянь.

2.2. Реалізація прикладної спрямованості шкільного курсу математики

Диференціальні рівняння є потужним засобом математичного моделювання. Саме вони мають «уособлювати потужність ідей математичного аналізу у вивченні математики. А це означає, що основна увага має бути спрямована на застосування диференціальних рівнянь до опису реальних процесів» [43].

Запропонуємо наш підхід до опанування цієї навчальної теми та представимо розроблену систему задач, яка «крок за кроком», на нашу думку, допоможе учням не лише опанувати матеріал, а й досягти мети у набутті компетентностей моделювання різноманітних реальних процесів.

Надавши учням означення диференціального рівняння необхідно класифікувати найпростіші диференціальні рівняння виду $y^1(x) = f(x)$, де f (x) є відомою функцією, а у = у (х) – шуканою функцією незалежної змінної х. Зазначимо, що характерною властивістю диференціальних рівнянь є наявність безліч його розв’язків. Тому, розв’язавши диференціальне рівняння, яке описує перебіг певного процесу, не можна однозначно знайти залежність між величинами, що характеризують цей процес. Обрати з нескінченної множини залежностей ту одну, яка властива саме цьому процесу, можна за початковими умовами. Без початкової умови задача є невизначеною.

З метою демонстрації сутності понять „загальний та частковий розв’язки диференціального рівняння”, „початкові умови” є сенс розглянути прикладну задачу, математичною моделлю якої є найпростіше диференціальне рівняння.

Задача 1. Запишіть закон зменшення маси лікувального препарату в організмі людини, якщо через 1 годину після введення 20 мг маса препарату зменшується учетверо і швидкість розчинення прямо пропорційна часу.

Розв'язання. Візьмемо m(t) – маса лікувального препарату в організмі людини в момент часу t , тоді m'(t) – швидкість його розчинення. Згідно умов швидкість розчинення прямо пропорційна часу

Тому рівняння, що описує математичну модель процесу буде виглядати таким чином: $m'(t) = -\kappa t$, де κ – стале додатне дійсне число.

Загальним розв'язком цього диференціального рівняння є множина функцій

$m(t) = -\frac{kt^2}{2} + C$.

Використовуємо початкову умову: $m(0) = 20$, маємо $C = 20$ і,

отже $m(t) = -\frac{kt^2}{2} + 20$. Тепер враховуємо умову, що $m(1) = 5$, і обчислюємо $\kappa=30$. Таким чином, можемо записати, що зменшення маси лікувального препарату в організмі людини відбувається за законом

$m(t) = 20 - 30t^2$.

Відповідь: $m(t) = 20 - 30t^2$.

Логіка подання матеріалу визначає, що наступною задачею може бути прикладна задача, математична модель якої приводить до диференціального рівняння показникового зростання (спадання). Ця задача створює математичну модель у вигляді рівняння $f'(x) = k f(x)$, де k – деяка константа. Розглянемо таку задачу.

Задача 2. Відомо, що швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості в даний момент часу. Кількість бактерій подвоюється протягом 3 годин. Знайдіть залежність кількості бактерій від часу.

Розв'язання. Позначимо через P(t) – кількість бактерій в популяції в момент часу t і, пригадавши, що швидкість розмноження бактерій є похідною від кількості P'(t), одержимо диференціальне рівняння математичної моделі нашої задачі, а саме, рівняння показникового зростання $P'(t) = kP(t)$, де $k > 0$.

Оскільки $P(t) > 0$, то можемо поділити обидві частини рівняння на P(t).

І отримуємо: $\frac{P'(t)}{P(t)} = k$, що можна переписати у вигляді $(\ln P(t))' = k$.

Звідси $\ln P(t) = k\,t + C_1$, де C_1 – деяка стала, яку для зручності позначимо як lnC. Після перетворень на основі властивостей логарифмів маємо загальний розв'язок $P(t) = Ce^{kt}$.

Тепер поставимо завдання з цієї множини функцій виділити ту, яка описує заданий процес розмноження бактерій. Для цього слід використати початкову умову: $P(0) = P_0$, і одержимо, що $C = P_0$. Друга ж умова $P(3) = 2P_0$ дозволяє нам визначити значення з рівняння e^k : $P_0 = P_0\,(e)^{3k}$.

Отже, $e^k = 2^{1/3}$.

Таким чином, кількість бактерій в момент часу t визначається за законом

$P(t) = 2^{1/3} P_0$

Відповідь: $P(t) = 2^{1/3} P_0$

Зауважимо, що диференціальні рівняння допомагають у вирішенні різноманітних завдань фізичного, хімічного, медичного, фармацевтичного та біологічного змісту. Дифеенціальні рівняння встановлюють зв'язок між змінними величинами, що характеризують процес, описаний в задачі. Необхідно «перекласти» умову задачі мовою математики, що означає уміння школяра написати диференціальне рівняння. Наприклад, розглянемо задачу про залежність від часу числа ядер атомів радіоактивної речовини.

Задача 3. Ядра атомів радіоактивних елементів з плином часу розпадаються. Встановлено, що швидкість розпаду пропорційна числу нерозпавшихся в даний момент ядер атомів, що можна записати так:

$$dN / dt = -\lambda N,$$

де N- число нерозпавшихся в даний момент ядер атомів; t - час; λ- константа. Мінус означає, що з плином часу кількість нерозпавшихся ядер атомів зменшується і похідна спадної функції є від'ємною. При цьому швидкість є величиною додатньою і залежність числа нераспавшіхся ядер атомів радіоактивної речовини від часу, оскільки при t = 0 число нераспавшіхся ядер атомів $N = N_0$. Розділимо змінні в рівнянні й інтегруємо ліву частину по N, а праву по t:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt; \int \frac{dN}{N} = -\int \lambda dt; \ln|N| = -\lambda t + \ln|C|; \ln|N| = \ln e^{-\lambda t} + \ln|C|; N = Ce^{-\lambda t}.$$

У останньому рівнянні покладаємо t=0 і $N=N_0$, знаходимо: $C = N_0$.

Тоді $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Ця формула показує залежність від часу числа ядер радіоактивної речовини, що не розпалися, записану у вигляді експоненціальної функції. Можемо тепер визначити період піврозпаду T, тобто час зп проміжок якого число ядер атомів зменшиться в два рази. Покладаємо $t = T$ и $N = N_0/2$, й маємо $N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T}; 1/2 = e^{-\lambda T}$. Прологарифмуємо останній вираз: $\ln(1/2) = -\lambda T$, і отримаємо $T = \ln 2/\lambda \approx 0{,}693/\lambda$. З формули випливає, що період напіврозпаду пов'язаний з константою розпаду і є характеристикою даної радіоактивної речовини. Наприклад, для радону $\lambda = 2{,}084 \cdot 10^{-6} c^{-1}$. Підставивши це значення у формулу, отримаємо період напіврозпаду радону T=3,15 діб.

Задачі, які розв'язувалися в класі, дозволяють школярам опанувати способи вирішення подібних прикладних проблем реального життя. І доцільним є подальше самостійне розв'язування декількох задач. Дотримуючись вказівок учених-практиків [43] пропонуємо такі завдання .

Задачі для самостійного розв'язування:

Задача 4. Швидкість розпаду радію пропорційна його кількості в даний момент часу. Знайдіть закон радіоактивного розпаду, якщо відомо, що через 1600 років залишиться половина від тієї кількості радію, яка була на початку.

Задача 5. Населення міста зростає зі швидкістю, пропорційно його кількості. Знайдіть закон зростання населення міста, якщо в момент часу t_0 в ньому проживало N_0 тисяч населення, а щорічний приріст становить h тисяч. Визначте, через скільки років населення міста збільшиться вдвічі. Проведіть обчислення для випадку, коли $N_0 = 900$, $h = 30$.

Задача 6. Деяка речовина перетворюється на іншу зі швидкістю, пропорційною кількості неперетвореної речовини. Кількість неперетвореної речовини через годину дорівнює 31,4 г, а через 3 години дорівнює 9,7 г. Знайдіть залежність кількості неперетвореної речовини x від часу t .

Задача 7. Швидкість приросту ферменту пивних дріжджів пропорційна кількості цього ферменту. Початкова кількість N_0 ферменту через 1 годину подвоюється. У скільки разів вона збільшиться через 3 години?

Задача 8. Тваринниками помічено, що щоденна норма корму, розрахована на 1000 кг живої ваги, виявляється найбільшою на початку росту тварин, у процесі росту вона зменшується, досягаючи свого мінімуму в момент припинення росту. Це знаходить своє пояснення в зменшенні інтенсивності обміну речовин в організмі тварини. Швидкість зміни норми корму в залежності від віку тварин пропорційна різниці між щоденною нормою і її мінімумом. Складіть диференціальне рівняння, яке відповідає даному процесу. Чому дорівнює щоденна норма корму тварин?

Задача 9. За 30 днів маса радіоактивної речовини зменшилась на 50 %. Через який час залишиться 1 % початкової кількості цієї речовини, якщо відомо, що швидкість розпаду радіоактивної речовини пропорційна її кількості?

Задача 10. Популяція бактерій перебуває у сприятливих для розмноження умовах. 1) Швидкість росту популяції у момент часу t (час виражено в годинах) дорівнює розміру популяції, поділеному на 10. Який буде розмір популяції після 10 годин росту, якщо в початковий момент в ній налічується 1000 бактерій? 2) Через який час кількість бактерій подвоюється? 3) Кількість бактерій, яка в початковий момент дорівнює 100, подвоїлась протягом 3 годин. Знайдіть залежність кількості бактерій від часу. У скільки разів вона збільшиться протягом 9 годин?

Задача 11. В експерименті з голодуванням маса голодуючого за 30 днів зменшилась з 140 до 110 фунтів. Щодня втрати маси, згідно з спостереженнями, були пропорційні масі голодуючого. Яке диференціальне рівняння задовольняє маса голодуючого як функція часу? Знайдіть масу досліджуваного після 15 днів голодування.

Прикладні задачі природничого змісту потребують побудови математичної моделі, коли на основі умови складається певне диференціальне рівняння. Диференціальні рівняння посідають важливе місце для завдань фізико-хімічного, фармацевтичного та медико-біологічного змісту. Користуючись цими рівняннями, ми встановлюємо зв'язок між змінними величинами, що характеризують заданий процес або явище. Рішення будь-якої задачі за допомогою математичного аналізу зазвичай розбивається на три етапи:

1) переклад умов завдання на мову математики;

2) вирішення задачі через диференціальне рівняння;

3) оцінка результатів.

Перша частина роботи зазвичай полягає в складанні диференціального рівняння і є найбільш важкою, так як загальних методів складання диференціальних рівнянь немає і навички в цій області можуть бути придбані лише в результаті вивчення конкретних прикладів.

Розглянемо задачі, які можна запропонувати школярам з метою побудови математичної моделі у загальному випадку задач такого змісту, коли часткові випадки вже розглянуто раніше й узагальнюємо.

Задача 12 (Закон розчинення лікарської речовини).

Швидкість розчинення лікарських форм речовини у пігулках пропорційна кількості лікарських форм речовини в них. Встановимо залежність зміни кількості лікарських форм речовини в пигулці з плином часу.

Позначимо через m кількість речовини в таблетці, що залишився до часу розчинення t. Тоді

$dm/dt = -km$, де k - постійна швидкість розчинення. Мінус в рівнянні означає, що кількість лікарських форм речовини з плином часу зменшується. У диференціальному рівнянні розділяємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{dm}{m} = -kdt; \int \frac{dm}{m} = -\int kdt; \ln|m| = -kt + \ln|C|; \ln|m| = \ln e^{-kt} + \ln|C|; m = Ce^{-kt}.$$

Покладаємо $t = 0$, $m = m_0$, маємо:

$m = m_0 e^{-kt}$. Ця формула надає закон розчину лікарських засобів з пігулок. З цієї формули знаходимо константу швидкості розчину k: $k = \frac{1}{t}\ln\frac{m_0}{m}$

Період напіврозчину пігулок $t_{1/2}$ розраховується з умов: $t = t_{1/2}$, $m = m_0/2$:

$$m_0/2 = m = m_0 e^{-kt_{1/2}}; \quad 1/2 = e^{-kt_{1/2}}; \quad \ln(1/2) = -kt_{1/2};$$

Звідки маємо: $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0{,}693}{k}$.

Ми виходимо з того, що учням зрозуміліше буде ця тема, вони краще зможуть осягнути зміст диференціальних рівнянь та зможуть усвідомити функції цих рівнянь у моделюванні реальних процесів, якщо будуть представлені задачі із суміжних наук.

Задача 13. Швидкість розмноження деяких бактерій пропорційна кількості бактерій в даний момент. Встановимо залежність зміни кількості бактерій від часу.

Позначимо кількість бактерій, що є в даний момент через x, тоді

$dx/dt = kx$, де: k - коефіцієнт пропорційності. Розділяємо змінні у рівнянні і інтегруємо його:

$$\frac{dx}{x} = kdt; \int \frac{dx}{x} = k\int dt; \ln|x| = kt + \ln|C|; \ln|x| = \ln e^{kt} + \ln|C|;$$

Отже, $x = Ce^{kt}$. Покладаємо при $t = 0, x = x_0$, маємо $C = x_0$ і тому: $x = x_0 e^{kt}$.

Зауважимо, що з рівняння випливає: при сприятливих умовах з плином часу збільшення кількості бактерій відбувається за експоненціальним законом.

Задача 14 (Закон руйнування клітин в звуковому полі). Пояснення: кавітація ультразвукових хвиль проявляється у вигляді розривів суспензійного середовища й утворення дрібних бульбашок і пустот, щільність яких незначна в порівнянні з щільністю води. Найпростіші (бактерії, водорості, дріжджі, лейкоцити, еритроцити) можуть бути зруйнованими при кавітації, що виникає в інтенсивному звуковому полі. Відносні швидкості руйнування біологічних клітин різних видів залишаються постійними в дуже широкому діапазоні частот. Ці швидкості можуть характеризувати відносну крихкість клітин різних видів. Щоб визначити це кількісно, потрібно знайти швидкість руйнування клітини в постійному звуковому полі. Вивчення цього питання завдяки дослідам показує, що поки 1% популяції залишається незруйнованим, можна записати: $dN/dt = -RN$ де N - концентрація клітин; t - час; R - стала.

У рівнянні розділимо змінні і проинтегрируем його:

$$\frac{dN}{N} = -Rdt; \int \frac{dN}{N} = \int -Rdt; \ln|N| = -Rt + \ln|C|; \ln|N| = \ln e^{-Rt} + \ln|C|; N = Ce^{-Rt}$$

Сталу величину C знайдемо з умови при $t = 0, N = N_0$ і $C = N_0$.

Тоді $N = N_0 e^{-Rt}$, тобто закон руйнування клітин у звуковому полі відбувається за експоненціальним законом.

Розглянуті задачі є загальновідомими і доступними для більшої частини школярів. Проте, розуміючи, що у класі завжди є діти, хто більшою мірою цікавиться математикою й спроможні осягнути більш важкі завдання, готуємо й задачі більш складні.

Наприклад, розглянемо, як складаються і вирішуються диференціальні рівняння в теорії епідемії за умови, що досліджуване захворювання носить тривалий характер. При цьому процес передачі інфекції значно швидший, ніж протягом самої хвороби, і заражені особини не видаляються з колонії, а передають при зустрічах інфекцію незараженим особинам.

Задача 15. **(**складання диференціального рівняння в теорії епідемій). Нехай в початковий момент t=0, a – це число заражених, b - число незаражених особин, $x(t), y(t)$ - відповідно число заражених і незаражених особин до моменту часу t. Для будь-якого проміжку часу t, меншого за час життя одного покоління має місце рівність: $x + y = a + b$. За цих умов необхідно встановити закон зміни числа незаражених особин з плином часу, тобто знайти $y = f(t)$.

Оскільки інфекція передається при зустрічах заражених особин з незараженими, то число незаражених особин буде спадати з плином часу пропорційно кількості зустрічей між зараженими і незараженими особинами. Для проміжку часу

$dt \,/ dy = -\beta xydt$, звідки $dy / dt = -\beta xy$,

де: β – коефіцієнт пропорційності . Підставивши у це рівняння значення x з рівності вище, отримаємо диференціальне рівняння:

$$dy / dt = -\beta y(a + b - y).$$

Після розподілу змінних отримаємо:

$$\frac{dy}{y(a+b-y)} = -\beta dt;$$

Після перетворень лівої частин рівняння та інтегрування маємо:

$$\frac{1}{y(a+b-y)} = \frac{1}{(a+b)}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{a+b-y}\right)$$

$$\int \frac{1}{a+b}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{a+b-y}\right)dy = -\int \beta dt;$$

$$\frac{1}{a+b}\int\frac{dy}{y}+\frac{1}{a+b}\int\frac{dy}{a+b-y}=-\beta t+C;$$

$$\ln|y|-\ln|(a+b-y)|=-(a+b)\,\beta t+\ln|C|;$$

або

$$\ln\left|\frac{y}{a+b-y}\right|=\ln e^{-\beta(a+b)t}+\ln|C|.$$

Виконаємо потенціювання:

$$\frac{y}{a+b-y}=Ce^{-\beta(a+b)t};$$

За початковими умовами (при $t=0, y=b$) знайдемо значення константи C та підставимо у останнє рівняння:

$$\frac{b}{a+b-b}=Ce^{0};\quad C=\frac{b}{a};$$

$$\frac{y}{a+b-y}=\frac{b}{a}e^{-\beta(a+b)t};$$

Знаходимо y, та отримуємо: $y(t)=\dfrac{b(a+b)}{b+ae^{\beta(a+b)t}}$.

Ця формула є законом спадання числа незаражених особин з плином часу.

Зауважимо, що цікавими для школярів можуть бути задачі з економічним змістом, наприклад така.

Задача 16. Капітал у 1 млрд. грошових одиниць може бути розміщено у банківську установу під 50% річних. Або інвестований у підприємство і при цьому ефективність вкладу очікується у розмірі 100%, витрати задаються квадратичною залежністю, на прибуток накладається податок в p %. При яких значеннях p вклад в підприємство є більш ефективним, ніж чисте розміщення капіталу у банку? [45]

Або ж для учнів, що зацікавлені фізикою, можна запропонувати таку задачу.

Задача 17 (закон охолодження тіла). Відповідно до закону Ньютона, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурами тіла і навколишнього середовища. Нехай тіло підігріто до температури T_0, температуру навколишнього середовища будемо вважати постійною і рівною Tc, Tc <T0. У момент часу t температура тіла дорівнює T. Швидкість зміни температури dT/dt - пропорційна різниці $T - T_c$.

Отже, $dT/dt = -\kappa(T - T_c)$. Зрозуміло, що у рівнянні буде мінус, який означає, що зі зростанням часу температура T тіла зменшується. Похідна спадної функції негативна, а швидкість за змістом є позитивною величиною. Коефіцієнт пропорційності буде залежати як від фізичних властивостей тіла, так і від його геометричної форми. Розділимо змінні в рівнянні і інтегруємо його:

$$\frac{dT}{T - T_c} = -\kappa dt; \int \frac{dT}{T - T_c} = \int -\kappa dt;$$

$$\ln|T - T_c| = -\kappa t + \ln C; T - T_c = Ce^{-\kappa t}.$$

Оскільки $t = 0$ и $T = T_0$, знаходимо $C = T_0 - T_c$.

Тоді

$$T = T_c + (T_0 - T_c)e^{-\kappa t} .$$

Отримана формула й відображає залежність температури тіла від часу.

На нашу думку, учням можна розкрити істину, що теорія диференціальних рівнянь є одним з найбільших розділів сучасної математики. Характеризуючи математику як метод проникнення в таємниці природи, слід ще раз сказати учням, що основним шляхом застосування цього методу є формування і вивчення математичних моделей реального світу. Вивчаючи будь-які фізичні явища, дослідник передусім створює його математичну ідеалізацію тобто математичну модель, де нехтуючи другорядними характеристиками явища, він записує основні закони, що керують цим явищем, в математичній формі. Ці закони можна виразити у вигляді диференціальних рівнянь. Такими виявляються моделі різних явищ суцільного середовища.

Основи теорії диференціальних рівнянь були закладені працями Д'Аламбера (1717 - 1783), Ейлера (1707 - 1783), Бернуллі (1700 - 1782), Лагранжа (1736 - 1813), Лапласа (1749 - 1827), Пуассона (1781 - 1840), Фур'є (1768 - 1830) та інших вчених. Цікаво те, що багато хто з них були не тільки математиками, а й астрономами, механіками, фізиками. Розроблені ними при дослідженні конкретних завдань математичної фізики ідеї та методи виявилися застосовними до вивчення широких класів диференціальних рівнянь, що і послужило в кінці XIX століття основою для розвитку загальної теорії диференціальних рівнянь.

І школярі мають можливість приготувати власні цікаві презентації, що висвітлюють внесок якогось з вищевказаного ученого. Загалом запропонована система задач дозволяє удосконалити математичну компетентність учнів, дозволяє їм наочно побачити застосування математичного апарату до вирішення практичних задач реального життя. Такий підхід до вивчення теми надає можливості самореалізації для учнів, що в кінцевому порядку є метою навчального процесу [36].

2.3. Апробація запропонованої системи роботи та її результати

Нами була проведена апробація запропонованої нами системи задач практичного спрямування зі школярами випускного класу. Базуємося на ідеях, що головним результатом шкільної освіти є учень, випускник школи, який володіє практичними навичками, готовий до самостійної пізнавальної діяльності, володіє набором певних компетентностей.

Виходимо з того, що педагоги розкривають структуру компетентностей через призму психологічної науки. Компетентність, на їхню думку, має складові: мотиви, знання, вміння, рефлексія [25]. З огляду на це саме мотивація є основою будь-якої діяльності, і мотиви відіграють важливу роль в навчальній діяльності. Тому питання, пов’язані з навчальною мотивацією можна назвати однією з центральних проблем сучасної школи, що стосуються оновлення змісту навчання, самостійного надбання знань, розвитку активності [11]. І цей компонент буде нами досліджений.

Дійсно, багато учених зазначають, що компетентність школярів та успішність їх навчання значною мірою залежать від навчальної мотивації. Старшокласники, які мотивовані на самореалізацію мають високу мотивацію на навчання, прагнуть пізнавати як найбільше на уроках, виконувати творчі завдання, дізнаватися нову інформацію. За багато років навчання у школі мотивація школярів може знижуватися і тоді навчання не буде ефективним [13]. Тому на етапі апробації нашої магістерської роботи значна увага приділяється мотивації навчання учнів.

Психологи і педагоги зазначають, що прагнення школярів вчитися залежить від наявності у них пізнавальних мотивів (з метою розібратися у навколишньому середовищі, його устрої, оволодіти новими знаннями та вміннями, здобути навички і досвід, оволодіти професією тощо) та соціальних мотивів (мати похвалу від батьків, оточуючих, однокласників).

Пізнавальні мотиви вважаються внутрішніми мотивами навчальної діяльності, а соціальні мотиви можна вважати зовнішніми. Найчастіше їх розглядають як єдине ціле, бо інтерес учня до навчання знаходиться на одному полюсі до діяльності, а на іншому полюсі є бажання любові батьків, поваги однокласників та лідерські мотиви бути першим.

Успішність навчальної діяльності й якість освіти залежать найбільшою мірою від внутрішньої мотивації. Стійкий інтерес старшокласників, їх мотивація навчання також, у свою чергу, слугують одним з критеріїв правильної організації навчального процесу та його ефективності. Постає питання про вивчення мотивації старшокласників. Зрозуміло, що певним чином про навчальну мотивацію свідчить рівень реальної успішності школярів у діяльності щодо вивчення математики. Сюди відносяться звичайні показники шкільної успішності, відвідуваності уроків та показники сформованості певних складових компетентності школярів. До того ж інформацію про навчально-пізнавальну мотивацію школяра вчитель може отримати, якщо буде: спостерігати за поведінкою учнів під час уроку та поза ним; проводити анкетування, що допомагає досить швидко зібрати матеріал про ставлення школярів до предмету; мати індивідуальні бесіди з учнем з прямими і непрямими питання вчителя про мотиви та сенс навчання для цього учня.

Цілком зрозуміло, що для педагога є дуже важливим наявність у учнів внутрішньої мотивації, тому що за цих умов навчання є ефективнішим. За наявності внутрішньої мотивації інтерес становить сама по собі виконувана діяльність, саме вона приносить задоволення, захопленість процесом навчання. Дослідження багатьох учених доводять, що внутрішня мотивація пов'язана з використанням на уроках математики задач практичного чи прикладного спрямування, творчих завдань. Внутрішня мотивація старшокласників також є предметом нашого дослідження при апробації роботи при розробці задач практичного змісту.

На нашу думку, такі задачі навчать школярів наполегливості, нададуть досвіду ефективного використання знань з математики у реальному повсякденному житті, а ситуації успіху додадуть учням відчуття психологічного комфорту при вивченні предмету. Вважаємо, що соціальні мотиви також корисно використовувати для того, щоб підтримувати навчальну мотивацію. Наприклад, організовуючи діяльність, пов'язану з груповою роботою, зі спілкуванням, враховувати особистісні характеристики школярів, їх лідерські якості чи пропонуючи заохочення за навчальні досягнення.

Досвідчений педагог завжди зрозуміє демотивованість учня, оскільки за таких умов у школяра знижуються оцінки; не виконуються домашні завдання; є прогули уроків; помітна пасивність на уроках. Часто старшокласник говорить, що вивчення математики не є важливим для його подальшого життя, а уроки описує з негативними емоціями. Тому й шукають вчителі можливості зробити навчання математики більш цікавим. Ми вирішили, мотивуючи школярів, зробити акцент на практичному застосуванні математики з метою доказати учням, що математика вельми необхідна сучасній людині у будь-якої професії. Також багато задач подаються через цифрові освітні ресурси, з можливістю вирішувати інтерактивні завдання на комп'ютерах і гаджетах, пробуджуючи і в такий спосіб бажання вчитися.

Нам уявляється важливим створити для кожного учня певну карту його мотивів, оскільки це дозволяє нам підібрати ті види діяльності на уроках, які підтримають навчальну мотивацію конкретного школяра.

Існує багато методик діагностики навчальної мотивації учнів. Розглянемо деякі з них, які ми обрали для дослідження навчальної мотивації наших учнів. Наприклад, розглянемо методику для діагностики навчальної мотивації школярів М. Матюхиної (модифікація Н. Бадмаєва). За побажаннями авторів цю методику слід використовувати індивідуально, щоб налаштувати діалог з учнем.

Цей тест аналізу мотивації навчання дозволяє зрозуміти, чим керуються учні, відвідуючи школу. Діагностика проводиться в три етапи. На першому етапі пропонуються картки з твердженнями і учні мають обрати всі картки, які вони вважають важливими для власного навчання. На другому етапі серед усіх карток потрібно вибрати лише сім, тобто найважливіших, на думку учня. І на третьому етапі необхідно обрати лише три.

Пропонуються такі твердження.

1. Я розумію, що учень повинен добре вчитися.
2. Прагну швидко і точно виконувати вимоги вчителя.
3. Хочу закінчити школу і навчатися далі.
4. Хочу бути культурною і розвиненою людиною.
5. Хочу отримувати гарні оцінки.
6. Хочу отримувати схвалення вчителів і батьків.

7. Хочу, щоб товариші завжди були хорошої думки про мене.

8. Хочу, щоб у класі у мене було багато друзів.

9. Хочу бути найкращим учнем у класі.

10. Хочу, щоб мої відповіді на уроках були завжди найкращими за інших.

11. Хочу, щоб не лаяли батьки і вчителі.

12. Не хочу отримувати погані оцінки.

13. Люблю дізнаватися нове.

14. Мені подобається, коли вчитель розповідає щось цікаве.

15. Люблю думати, міркувати на уроках.

16. Мені подовається брати складні завдання, долати утруднення.

17. Мені цікаво розмовляти з учителем на різні теми.

18. Мені більше подобається виконувати навчальне завдання в групі, ніж одному.

19. Люблю вирішувати завдання різними способами.

20. Люблю все нове і незвичайне.

21. Хочу щоб мене оцінювали лише на 10-12 балів.

22. Хочу домогтися в майбутньому великих успіхів.

Завдання вчителя встановити картки з якими мотивами учень вибрав два або три рази, і на основі списку мотивів зробити висновок про те, чим учень керується у навчальній діяльності. Судження, які школяр обрав лише один раз, можна вважати випадковим вибором.

Відповідність затвердження певними мотивами:

• обов'язку і відповідальності: 1 - 2 затвердження;

• самовизначення і самовдосконалення: 3 - 4;

• благополуччя: 5 - 6;

• афіліації (потреби в прийнятті, довірчі стосунки): 7-8;

• престижу: 9 - 10;

• уникнення невдачі: 11 - 12;

• навчально-пізнавальні (зміст навчання): 13 - 14;

• навчально-пізнавальні (процес навчання): 15 - 16;

• комунікативні: 17 - 18;

• творчої самореалізації: 19 - 20;

• досягнення успіху: 21 - 22.

За підсумками цієї діагностики шкільної мотивації у нас з'явиться «карта мотивів» конкретного учня. За рахунок актуальних для нього мотивів нам буде простіше підтримати його пізнавальну навчальну мотивацію і підсвітити в навчанні ті аспекти, які можуть бути для важливими для школяра. Детальне пояснення цієї методики та рекомендації для вчителів подано у додатку Б.

Цікавою, на наш погляд, є методика діагностики мотивації навчання та емоційного ставлення до навчання у старших класах школи згідно опитувальнику Ч. Спілбергера (модифікація А. Андрєєвої). Цю методику діагностики навчальної мотивації доцільно використовувати з метою визначення рівня мотивації школярів та їх емоційного ставлення до навчання.

Ця діагностика, на відміну від попередньої діагностики, проводиться фронтально з усім класом за допомогою психолога. Школярам надаються бланки та інструкція. Перед виконанням діагностики учні можуть задавати питання психологу, щоб з'ясувати незрозумілі моменти, і вже потім вони працюють самостійно. На заповнення бланку надається 10-15 хвилин. Учні відповідають на різні питання про те, як вони зазвичай відчувають себе на уроках в школі. За результатами цієї методики вчитель також може визначити загальний рівень мотивації, пізнавальної активності і мотивації досягнень, виявити тих учнів, у яких навчання викликає тривогу чи негативні емоції.

Учитель аналізує результати і учні, які набрали низький бал за шкалою пізнавальної активності або високий бал за шкалами гніву і тривоги, мають отримати більше його уваги. Психологи рекомендують обговорити з учнем отримані результати і разом продумати кроки на позбавлення негативних емоцій в навчанні, обрати найбільш ефективні педагогічні методики й тактики.

Отже, за результатами цієї методики можна визначити загальний рівень мотивації, пізнавальної активності, мотивації досягнень та виявити тих учнів, у яких навчання викликає тривогу [26].

У нашому дослідженні також використовувалася шкала академічної мотивації, розроблена Т. Гордєєвою (на основі шкали академічної мотивації ШАМ Е. Валлеранда, Е. Дісі та Р. Райана). Цей тест шкільної мотивації призначений для вимірювання вираженості і типу мотивації до навчальної діяльності (дивись Додаток В).

Методика діагностики мотивації досліджує сім аспектів (шкал мотивації). Бали складаються окремо за кожною шкалою мотивації. Чим більше балів, тим яскравішим є конкретний тип мотивації.

1. Пізнавальна мотивація (питання 1, 8, 15, 22). Шкала оцінює прагнення пізнавати нове, зрозуміти навчальний предмет, показує рівень переживання інтересу і задоволення в процесі пізнання.

2. Мотивація досягнення (питання 2, 9, 16, 23). Оцінює прагнення домагатися максимально високих результатів, відчувати задоволення при вирішенні складних завдань.

3. Мотивація саморозвитку (питання 3, 10, 17, 24). Вимірює рівень прагнення до розвитку своїх здібностей в навчанні, досягнення відчуття майстерності та компетентності.

4. Мотивація самоповаги (питання 4, 11, 18, 25). Оцінює бажання вчитися заради відчуття власної значущості і підвищення самооцінки за рахунок саме досягнень у навчанні.

5. Інтроецирована мотивація (питання 5, 12, 19, 26). Оцінює спонукання до навчання, зумовлене відчуттям сорому і почуттям обов'язку перед собою або іншими людьми.

6. Екстернальна мотивація (питання 6, 13, 20, 27). Відповідає на питання: Чи є дотримання вимог соціуму основним мотивом до навчання. Потреба в автономії в такій ситуації максимально фрустрирується.

7. Амотівація (питання 7, 14, 21, 28). Оцінює наявність чи відсутність інтересу і осмисленості навчальної діяльності.

За результатами проведеної діагностики мотивації учнів можна скласти профіль мотивації кожного учня. Школяри, які набрали найбільшу кількість балів по 5,6 і 7 шкалам знаходяться у групі ризику, тому що у них переважає зовнішня мотивація. І на це слід звернути увагу та намагатися розвивати внутрішню мотивацію. Допомогти учню відчути свою компетентність, відчуття «я зможу», якому наслідує зацікавленість; розвивати автономію учня, можливість робити власний вибір, приймати рішення; отримувати позитивні взаємовідносини, спілкуватися в процесі навчальної діяльності при вирішенні задач прикладного спрямування.

Педагоги пропонують використовувати також тест рівня мотивації навчання (авторка – Н. Лусканова) [27]. Але ми трохи модифікували його саме з метою вивчення предмету математики. Він має такі запитання:

1. Тобі подобаються уроки математики?

- не надто
- подобаються
- не подобаються

2. Ти завжди з радістю йдеш на уроки або тобі часто хочеться залишитися вдома?

- частіше хочеться залишитися вдома
- буває по-різному
- йду з радістю

3. Якби вчитель сказав, що завтра не обов'язково приходити всім учням, що бажаючі можуть залишитися вдома, ти пішов би на математику або залишився вдома?

- не знаю
- був би дома
- пішов би на урок

4. Тобі подобається, коли скасовуються уроки математики?

- не подобається
- буває по-різному
- подобається

5. Ти хотів би, щоб тобі не задавали домашніх завдань?

- хотів би
- не хотів би
- не знаю

6. Ти хотів би, щоб замість уроків математики були лише перерви?

- не знаю
- не хотів би
- хотів би

7. Ти часто розповідаєш про уроки математики батькам?

- часто
- рідко
- не розповідаю

8. Ти хотів би, щоб у тебе був менш вимогливий учитель?

- точно не знаю
- хотів би
- не хотів би

9. У тебе в класі багато друзів, яких цікавить математика?

- мало
- багато
- немає друзів

10. Тобі подобається ставлення твоїх однокласників до предмету?

- подобається

- не надто
- не подобається

КЛЮЧ до тесту.

Номер запитання	Оцінка за 1 відповідь	Оцінка за 2 відповідь	Оцінка за 3 відповідь
1	1	3	0
2	0	1	3
3	1	0	3
4	3	1	0
5	0	3	1
6	1	3	0
7	3	1	0
8	1	0	3
9	1	3	0
10	3	1	0

Пояснення.

Перший рівень. Наявність у школяра 25-30 балів показує високий рівень шкільної мотивації і його навчальної активності. У таких учнів є пізнавальний мотив, прагнення найбільш успішно виконувати всі вимоги школи. Ці школярі чітко дотримуються всіх вказівок вчителя, сумлінні та відповідальні, переживають, якщо отримують незадовільні оцінки.

Другий рівень: 20-24 бали показує, що учні мають гарну мотивацію. Подібні показники мають більшість учнів, які успішно виконують навчальну діяльність. Подібний рівень мотивації є середньою нормою.

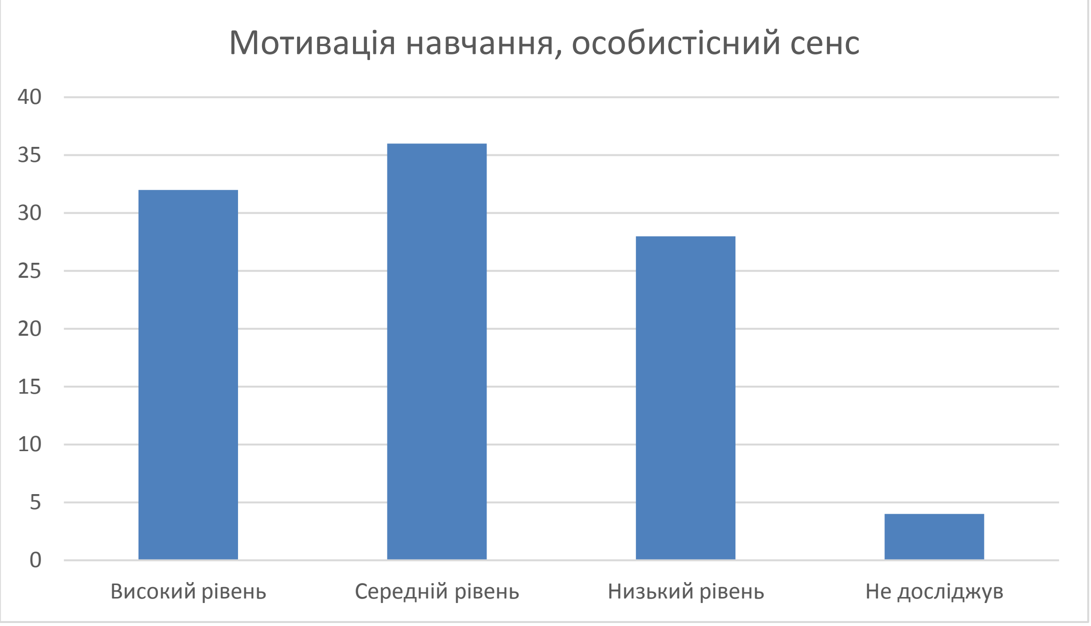
Третій рівень: Наявність 15-19 балів у учня демонструє позитивне ставлення до школи, але ж приваблює таких учнів більше позанавчальна діяльність. Такі школяри досить благополучно почуваються на уроках, але ж надають перевагу спілкуванню з друзями ніж урокам. Хоча їм подобається відчувати себе учнями, мати гарний портфель, ручки, зошити. Пізнавальні мотиви у таких дітей сформовані меншою мірою, і навчальний процес їх не дуже приваблює.

Четвертий рівень: 10-14 балів - низька мотивація учнів. Ці учні відвідують уроки неохоче, воліють пропускати заняття. На уроках часто займаються сторонніми справами, іграми. Зазнають серйозних труднощів у навчальній діяльності. Знаходяться в стані нестійкої адаптації до навчання.

П'ятий рівень: нижче 10 балів - негативне ставлення до уроків, дезадаптація. Учні відчувають серйозні уттруднення в навчанні: вони не справляються з навчальною діяльністю, відчувають проблеми в спілкуванні з однокласниками, у взаєминах з учителем. Уроки нерідко сприймається ними як певне вороже середовище, перебування в якій для них нестерпно.

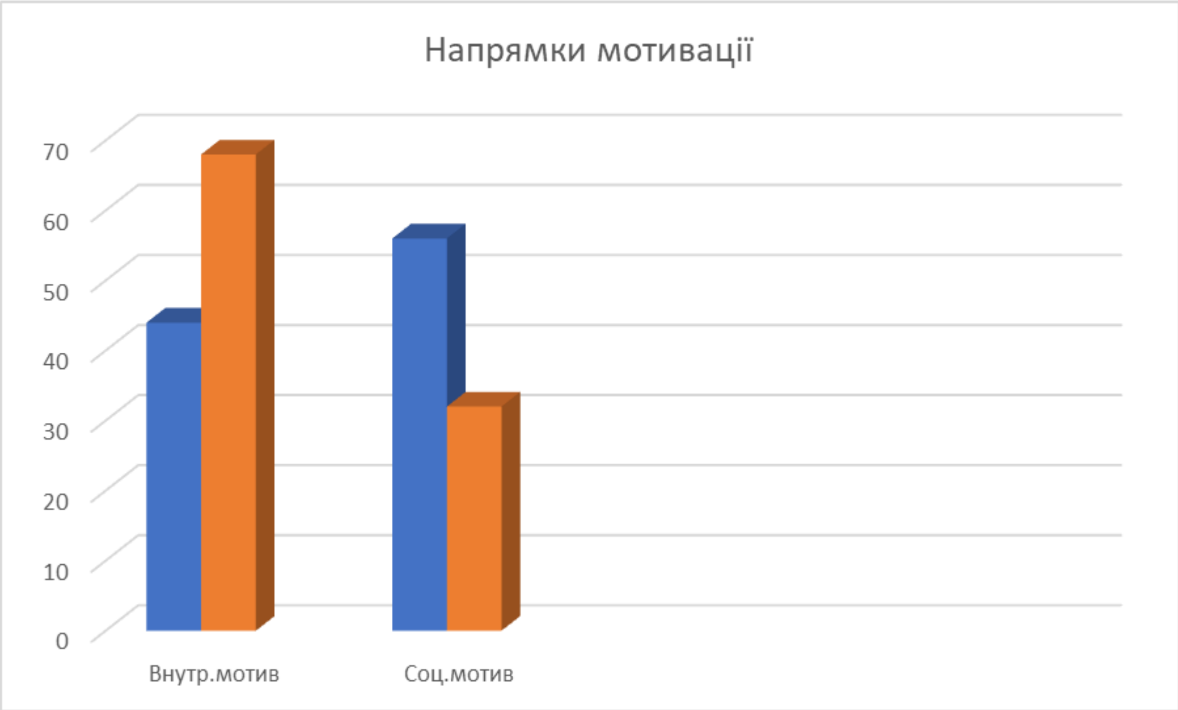
Застосування методики вивчення мотивації навчання у старшокласників М.І. Лук'янової [1; 4] дозволяє виявити: загальний рівень навчальної мотивації у школярів; особистісний сенс вчення; здатність учнів до цілепокладання; провідні мотиви навчання; переважання зовнішніх або внутрішніх мотивів; прагнення до досягнення успіху або уникнення невдачі. Після проведеного дослідження по вказаній методиці щодо вивчення мотивації навчання у старшокласників були отримані наступні результати. До проведення апробації нашої магістерської роботи лише у 5-ти учнів в класі була висока мотивація навчання, а 7 учнів мали низьку мотивацію навчання. Після запропонованої нами системи задач до вивчення матеріалу, пов’язаного з диференціальними рівняннями, показники дещо змінилися у кращий бік, але учнів з низькою мотивацією навчання, на жаль, менше не стало. Проте 3 учня, що мали середній рівень мотивації навчання, отримали результати, що дозволяють перевести їх у групу учнів з високою мотивацією навчання. Тобто, позитивні зміни усе ж таки відбулися. Констатуємо, що у класі, обраному нами для апробації роботи (25 учнів, 11 класу Носівської ЗОШ І-ІІІ ступенів №1, міста Носівки) при вивченні особистісного сенсу навчання після нашої роботи, у 32% у учнів в класі виявлено високий або дуже високий рівень. При цьому старшокласників зі зниженим або низьким рівнем особистісного сенсу виявлено 28 % як на початку апробації нашої роботи, так і після неї (їх кількість не змінилася). Результати презентовано на гістограмі 1 «Мотивація навчання, особистісний сенс» (один учень не був досліджений у зв'язку з вагомими причинами).

Гістограма 1. Мотивація навчання, особистісний сенс



Також нами досліджувалися спрямованість мотивів навчально-пізнавальної діяльності, а саме мотиви, спрямовані на пізнавальну і соціальну сфери. Як вже зазначалося, пізнавальні мотиви сприяють прагненню учнів до самоосвіти, самовдосконаленню. Соціальні мотиви полягають у бажанні учня взаємодіяти з іншими людьми й вдосконалювати ці форми. При аналізі мотивів у учнів класу на початку нашої апробації переважають соціальні мотиви над пізнавальними (56% і 44% відповідно). Після проведення описаної методики роботи з учнями дані змінилися на користь внутрішньої мотивації у трьох школярів. У процентному відношенні маємо зміни з 44 % до 56%. Результати презентовано на гістограмі 2 «Спрямованість мотивації навчальної діяльності», де показано спрямування мотивів навчання до апробації (перші два стовпці) та після неї (третій та четвертий стовпці).

Гістограма 2. Напрямки мотивації



Зауважимо, що визначення загального рівня навчальної мотивації старшокласників дає можливість намітити шляхи і форми роботи з учнями зі зниженим і середнім рівнем мотивації навчання з метою підвищення мотивації в процесі навчання згідно рекомендацій учених [29].

Особливо слід додати інформацію щодо «методу експертних оцінок», який ми використовували як допоміжний метод одержання інформації про наявність знань, умінь, компетентностей учнів 11 класу від експертних осіб. У ролі «судді» може бути якийсь вчитель з іншого навчального предмету, керівник гуртка, викладач ЗВО та інші особи. Розуміємо, що є сенс збирати інформацію про одного з учнів у декількох «суддів» і ці дані від декількох таких експертів, порівнюються між собою. Так в якості експертів нами було обрано вчителів математики, інформатики та фізики, які зазначили наявність прогресу у знаннях учнів за контрольними роботами, що були проведені до початку апробації та після неї. Прогрес позначався через приріст балів у вигляді +3, +2, +1, або ж відсутність прогресу через 0, чи зменшення балів у вигляді -3. -2. -1.

Таблиця 1. Експертне оцінювання

№	ПІБ учня	Порівняльне оцінювання з дисциплини «математика»	Порівняльне оцінювання з дисциплини «інформатика»	Порівняльне оцінювання з дисциплини «фізика»
1.	Андрушко Влад	+1	+2	0
2.	Богун Роман	+2	+1	+1
3.	Ганжа Зоряна	+2	+1	+2
4.	Гуленко Богдан	+1	+2	+1
5.	Дегтярьова Влада	+2	+1	+3
6.	Євтушено Тетяна	+2	+2	0
7.	Захарчук Марина	+1	+1	-2
8.	Золова Вікторія	0	+1	+1
9.	Ілляш Діана	+1	+1	+1
10.	Косян Алевтина	+2	-1	+1
11.	Кратко Андрій	+1	+2	+1
12.	Лісовол Тетяна	+3	-2	0
13.	Михайлець Ангеліна	+2	+3	+1
14.	Олексієнко Влад	+1	+2	0
15.	Самойленко Анна	+2	+1	+1
16.	Семенова Аміна	+1	+1	0
17.	Скрипець Марія	+1	0	+3
18.	Собех Яна	-1	+2	+1
19.	Суярко Любов	0	+3	+1
20.	Унжакова Поліна	+3	+1	+2
21.	Філь Віка	+1	-1	+2
22.	Хлопчур Вадим	+2	+1	+1
23.	Цегельник Вадім	+1	+3	+2

24.	Ювенко Аліні	+2	+1	+2
25.	Яницький Олег	+1	+1	0

Аналіз результатів контрольних робіт засвідчив, що можна говорити про покращення в учнів рівня сформованості певних вмінь (на яких зосереджувалися ми при створенні нашої системи практичних задач) застосовувати різноманітні креативні процедури до розв’язування задач з указаних навчальних дисциплін. Оскільки наявними у таблиці є знаки «+», аніж «-» та 0.

Також нами було враховано, що можуть бути різні методи дослідження думки учнів (бесіда, інтерв’ю, анкетування), які використовуються як на початку, усередині та наприкінці апробації роботи з метою зіставлення одержаних результатів із думками самих учасників експерименту. У науковій літературі детально описуються такі методи як бесіда, інтерв’ю. що передбачають усне опитування, та анкетування, яке є письмовим. Ми використовували анкетування – метод збору первинного матеріалу через письмове опитування з метою збору інформації щодо ставлення учнів до запропонованої нами системи задач практичного спрямування тощо. Анкетування було обрано нами оскільки є засобом для одержання первинної соціологічної інформації на основі вербальної комунікації. Перевагами анкетування є опитування учнів за короткий проміжок часу; уникнення стороннього впливу; необов’язковість особистого контакту з респондентом; можливість достатньо швидкої обробки результатів анкетування.

Зазначимо, що анкетування учнів підтвердило їх позитивне ставлення до такої системи роботи, коли задачі, що розглядаються на заняттях мають прикладний характер, є практичними та викликають інтерес.

Таким чином, апробація нашої магістерської роботи підтверджує гіпотезу, що дотримання певних принципів практично орієнтованого, діяльнісного, компетентнісного навчання при вивченні певних тем є вельмиважливим. Якщо у процес навчання математики ввести певну систему практичних задач і застосувати теорію диференціальних рівнянь до вирішення різноманітних прикладних проблем, то такий підхід буде сприяти підвищенню мотивації вивчення предмету, покращенню засвоєння математичних знань, розвитку прикладного функціонального мислення та досвіду математичного моделювання реальних процесів.

Зміст вивчення теми диференціальних рівнянь, доповнений систематизованими завданнями та практико-орієнтованими моделями реальних проблемних ситуацій, сприяє поетапному формуванню матеріалізованих розумових дій учнів при вивченні математики та підвищує мотивацію навчання у цілому. Отже, на нашу думку, діяльність вчителя у напрямку розробки системи задач практичного спрямування здатна підвищити успішність старшокласників (у навчальній діяльності, про що свідчать не лише анкети учнів, а й покращення їх навчальних досягнень за висновками експертів).

Висновки до розділу 2

Аналіз науково-педагогічної літератури та наші власні дослідження організації навчального процесу у школі щодо вивчення предмету математики дозволяють зрозуміти такий важливий факт: сучасний вчитель математики у процесі навчання шкільного курсу має акцентувати увагу учнів на зв'язок математики з життям. За таких умов він пробуджує інтерес школярів до навчання, формує в них необхідні компетентності і такі важливі особистісні якості як критичне мислення, навички моделювання, алгоритмізацію різних процесів, послідовність дій, наполегливість, акуратність, увагу, кмітливість тощо.

Кожен учитель розуміє необхідність так організувати вивчення математики, щоб предмет був цікавим, корисним, захоплюючим. Тобто постає завдання максимально позбутися абстракції предмету математики, показати її роль в пізнанні навколишнього середовища, реалізувати міжпредметні зв'язки математики з іншими навчальними предметами, інтегрувати математику у загальну освіту учня й завдяки цьому сформувати його цілісне, гармонійне світосприйняття. Вирішити таке завдання можна за умов реалізації принципу зв'язку навчання з життям загалом та вивченням математики зокрема.

Ми виходили з того факту, що людина перевіряє правильність своїх знань, розвиває власні компетенції та креативне мислення у житті, а саме у практичній діяльності. Тому нами розроблено систему задач практичного спрямування, які потребують використання математичних знань, а саме знання диференціальних рівнянь, застосування та способів їх розв'язання. На нашу думку, розроблена система задач покликана продемонструвати учням практичне застосування математичних ідей і методів їх використання. Також необхідного педагогічного ефекту надає використання прикладної задачі, яка складена на матеріалах узятих із суміжних предметів, оскільки формує єдину картину реального світу.

Проведена апробація запропонованої методики дозволила нам краще зрозуміти переваги та недоліки як консервативного підходу до вивчення математики у старших класах, так й нашої спроби планування у методиці навчання певних змін. Нами було використано декілька психолого-педагогічних методик оцінювання мотивації учнів до навчання, вивчення деяких аспектів щодо превалювання пізнавальної чи соціальної мотивації навчання, проводилося спостереження за роботою школярів на уроках та у позашкільній діяльності. Було використано також метод «експертного оцінювання» з думками педагогів інших шкільних дисциплін, аналізувалися результати контрольних робіт учнів, проводилося анкетування старшокласників. За усіма цими даними ми дійшли висновку, що запропонований підхід до вивчення теми «Диференціальні рівняння» є доцільним, оскільки учні позитивно оцінили нашу методику та (згідно різноманітних методик, що вказані у роботі й запропоновані психолого-педагогічною літературою) мали позитивні зрушення у бік підвищення мотивації навчання.

ВИСНОВКИ

Сьогодні система освіти встановлює нові вимоги до процесу навчання. Раніше завдання вчителя полягало у тому, щоб навчити, дати знання, якими до цього часу володіло людство. Але сьогодення є віком інформації, знань стало дуже багато, вони швидко змінюються і шкільні знання часто стають застарілими і неактуальними. За межами школи учень відчуває непотрібність цих знань, бо є вже набагато прогресивніші. Тому педагоги дійшли висновку, що необхідно вчити не стільки знанням, скільки компетентностям. Згідно думок педагога-ученого С. Ракова, «математична компетентність» є спроможністю особистості бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, будувати математичну модель, досліджувати її методами математики та інтерпретувати отримані результати.

Проаналізувавши витоки проблематики магістерської роботи, наукову педагогічну літературу, шкільні підручники з математики, ми дійшли висновку, що вчителю потрібно розробити таку систему задач, що покликані сприяти виконанню завдання формування життєвих компетентностей. Саме математика, математичні знання надають можливості сформувати вміння застосовувати усі відомості, отримані у школі, до вирішення задач практичного змісту, найкраще реалізовують прикладну спрямованість навчання загалом і математики зокрема.

У першому розділі магістерської роботи нами проаналізовано різноманітні підходи до визначення поняття «математична модель», досліджено наявність задач практичного спрямування у педагогічній літературі та зроблено висновок про необхідність розробки власної системи задач прикладного характеру до теми, що пов’язана вивченням та використанням диференціальних рівнянь.

У другому розділі проаналізовано деякі шкільні підручники математики для старшокласників на наявність задач практичного спрямування і також зроблено висновок про їх явну недостатність. Тому, у якості компенсації цієї прогалини, представлено розроблену нами систему задач, методи розв’язання цих задач та описано послідовність й форму їх надання учням 11 класу. Система задач розроблялася нами з метою продемонструвати учням практичне застосування математичних ідей і методів їх використання. Також широко використовувалися міжпредметні зв’язки математики з іншими шкільними дисциплінами, оскільки вельми важливим завданням вчителя є формування у школярів єдиної картини реального світу. У цьому ж розділі детально описано апробацію запропонованої нами методики вивчення теми з учнями 11 класу Носівської ЗОШ І-ІІІ ступенів №1, міста Носівки. Зроблено висновки, що спроби такого планування при вивченні теми «Диференціальні рівняння» мають право на їх застосування у реальній шкільній практиці, оскільки певним чином сприяють підвищенню рівня навчання та інтересу учнів до предмету.

За психолого-педагогічних методиками оцінювання мотивації учнів до навчання, вивчення деяких інших аспектів мотивації навчання, проводилося спостереженнями за роботою школярів, експертне оцінювання та анкетування старшокласників. З’ясувалося, шо наш підхід до навчання має певні переваги. Не лише школярі позитивно оцінили запропоновану нами методику, а й психологічні опитувальники підтвердили позитивні зрушення в особистісних характеристиках старшокласників у бік підвищення мотивації навчання.

У магістерській роботі ми виходили з того, що розвиток математичних компетентностей школярів полягає не лише в уміннях розв’язувати типові математичні задачі. Необхідно вміти систематизувати типові задачі, щоб знаходити критерії можливостей зведення практичних задач до типових, моделювання ситуацій та знаходження процедури розв’язання нетипових задач, задач практичного життєвого змісту. До таких результатів приводить внутрішня мотивація в школярів, яка ще у багатьох учнів не є стійкою і залежить від ситуації. Тому вчителю необхідно пропонувати цікаві реальні завдання, моделювати різні життєві ситуативні завдання, застосовувати різноманітний історичний матеріал, ігрові ситуації. Важливим є залучення учнів до «самостійного відкриття» у розв’язанні різних практичних ситуацій, задач проблемного характеру. За цих умов необхідним є напруження мислення учня й тому завдання практичного і прикладного спрямування підвищують його мотивацію. Вважаємо, що подібні підходи до навчання вдосконалюють такі компетенції учня як уміння робити вибір на шляху вирішення проблеми, моделювання цієї проблеми, прийняття рішення, формують відповідальність за зроблений вибір, стимулюють пізнавальну діяльність і розвивають критичне мислення школяра.

Також, формуючи дійовий компонент математичної компетентності при вивченні диференціальних рівнянь, ми намагалися створювати для учнів оптимальні умови для поступового переходу від дій під керівництвом учителя до самостійних дій. Це відбувалося через домашні задачі для самостійної роботи та самостійної розробки презентацій нового матеріалу інноваційно-цікавого чи історичного напрямку. Застосування таких завдань надає можливостей вирішити проблему більш якісного опанування учнями математичних знань та здатності їх використання на практиці, сприяє розвитку в них математичної компетентності, підсилює прикладний, практичний зміст всіє шкільної освіти. Ми упевнені, що набуті компетентності при застосуванні математики у реальних практичних ситуаціях покликані допомогти старшокласникам у контексті подальшого повсякденного життя, навчанні чи трудової діяльності. Апробація магістерської роботи з учнями 11 класу Носівської ЗОШ I-III ступенів №1, міста Носівки підтвердила гіпотезу нашого дослідження.

Зазначимо, що дослідження вказаної проблеми магістерської роботи не є закінченими, оскільки: потребує удосконалення як запропонована нами система задач практичного напрямку, так і методичні підходи до викладання навчального матеріалу. Також потреба є у вивченні нових психолого-педагогічних методик щодо апробації описаної системи задач, а можливо, й організації експеримента.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Yarkho T.O. Theory of numerical series: conceptual, demonstrative, practical aspects: study guide. Kharkiv, *KhNAHU* [Kharkiv National Automobile and Highway University], 2017. 60 p.

2. Андрущенко В. П. Роздуми про освіту: статті, нариси, інтерв'ю. 2-е вид. Київ : Знання України, 2008. 819 с.

3. Бевз, Г. П. Алгебра: проб. підруч. для 7–9 кл. середньої школи / Г. П. Бевз. – К.: Освіта, 2001. – 303 с.

4. Бойчук Ю. Д. Компетентнісний підхід як основа модернізації сучасної освіти. *Освітній простір. Глобальні, регіональні та інформаційні аспекти : наук.-метод. журнал.* Черновці : Черемош, 2013. Вип. 13. С. 130–135.

5. Болтянский В.Г. Математическая культура и эстетика // Математика в школе. – 1992 – № 2 – С.40 – 43.

6. Возняк Г. М., Маланюк М. П. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики: Посібник для вчителя. /К.: Радянська школа, 1989. 134с.

7. Волошена В.В. Результати аналізу прикладної спрямованості сучасних підручників з алгебри http://ipvid.org.ua/upload/iblock/2ce/2ce9de471aca4a059e40bf3d7b33e506.pdf

8. Воронка Г. С. Дисципліни «ядрові» та елективні: фундаменталізація і гуманітаризація навчального процесу. *Психологія і суспільство*. 2015. № 4. С. 147–156.

9. Герасимова І. Г. Гуманізація вищої освіти: досвід і проблеми. URL: http://derun.vk.vntu.edu.ua/file/cbbdeb0c2e5f3d1518d52ce951847bef.doc

10. Гулай О. І. Компетентнісний підхід як основа нової парадигми освіти. *Вісник Національної академії Державної прикордонної служби України*. 2009. № 2. С. 41–51.

11. Дзюбко Л. В. Мотивація навчальної діяльності як психолого-педагогічна проблема / Л. В. Дзюбко, Л. І. Гриценок // Психодіагностика: Зб.

наук. праць ДВНЗ «Переяслав-Хмельницький державн. пед. ун-тет імені Григорія Сковороди». – Переяслав-Хмельницький : ПП «СКД», 2009. – Вип. 4. – 256 с. – С. 33–43.

12. Дорофеев Г.В. Применение производных при решении задач в школьном курсе математики // Математики в школе – 1995 – № 5 –С. 12.

13. Дуброва О.М. Навчальна мотивація як специфічний компонент навчальної діяльності / Вісник Черкаського університету: Педагогічні науки. Вип. 14.2016. С.30-37.

14. Закон України «Про освіту» https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text

15. Зимняя И. А. Компетентностный подход. Каково его место в системе современных подходов к проблемам образования? (теоретико-методологический аспект). *Высшее образование сегодня.* 2006. № 4. С. 20–27.

16. Зязюн І. А. Філософія поступу і прогнозу освітньої системи / Ничкало Н. Г., Зязюн І. А., Пуховська Л. П., Гузій Н. В. Педагогічна майстерність: проблеми, пошуки, перспективи: монографія. Київ : Глухів : РВВ ГДПУ, 2005. С. 10–18.

17. Іванюк Т. Г. Групова форма роботи на уроках математики./ Тернопіль: Підручники й посібники, 2007. 87с.

18. Калашнікова С. А. Компетентнісно орієнтований підхід: базові поняття та положення. *Педагогічна освіта: теорія і практика. Педагогіка. Психологія.* 2010. № 1. С. 67–71.

19. Калугіна О. Р. Шляхи формування предметної компетенції на уроках математики. «Освітянин», № 1, 2008. С.18-19.

20. Клочко І. Я. Посібник з математики для школярів і абітурієнтів: Частина друга. / Тернопіль: Підручники й посібники, 2007. 112с.

21. Колесник, Т. В. Алгебра. 9 клас: для поглибленого вивчення : підруч. / Т. В. Колесник, Т. М. Хмара – К.: Пед. думка, 2008. – 246 с.

22. Компетентнісний підхід у сучасній освіті. Світовий досвід та українські перспективи / Під ред. О. В. Овчарук. К.: К. І. С., 2004. 112 с.

23. Кравчук, В. Алгебра: підруч. для 9 кл. / В. Кравчук, М. Підручна, Г.Янченко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2009. – 256 с.

24. Лосєва Н.М. Розвиток ідеї самореалізації особистості (філософський аспект) // Рідна школа. – 2004. – № 5. – С. 71-74.

25. Лук'янова М. Психологія навчальної мотивації школярів / М. Лук'янова // Відкритий урок: розробки, технології, досвід. – 2006. – №3/4. – С. 26–32.

26. Лукьянова М.И. Учебная мотивация как показатель качества образования // Народное образование №8, - 2011, С.77-88.

27. Лусканова Н. Тест «Оцінка рівня шкільної мотивації» https://infourok.ru/anketa_ocenka_urovnya_shkolnoy_motivacii_n.g.luskanovoy-374120.htm

28. Мальований, Ю. І. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосв. навч. закл. / Ю. І. Мальований, Г. М. Литвиненко, Г. М. Возняк / [за ред. Ю. І. Мальованого]. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2009. – 288 с.

29. Мануйлов, Г.М. Социально-психологическая диагностика развития личности и малых групп / Г.М. Мануйлов, Н.П. Фетискин, В.В. Козлов. – М: Изд-во Института Психотерапии, 2002. – 337 с.

30. Математика: алгебра і початки аналізу 11 клас (профільний рівень) / Нелін Є. П., Долгова О. Є. Вид-во: Ранок, 2019. 240с.

31. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія. Підручник для 11 класів загальної середньої освіти / Мерзляк А. Г.,Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Х.: Гімназія, 2019. 208с.

32. Мерзляк, А. Г. Алгебра : підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2019. – 320 с.

33. Методика використання прикладних задач у шкільному курсі математики. Методичний посібник. /уклад. А.П.Королюк. – Рівне: РОІППО, 2018. 30 с. http://navigator.rv.ua/wp-content/uploads/2019/01/posibnyk-Korolyuk.pdf

34. Навчальні програми. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

35. Овсієнко Л. М. Сутність понять «компетенція», «компетентність», «компетентнісний підхід», «якість освіти» у світлі сучасної освітньої парадигми. *Науковий вісник Донбасу.* 2013. № 2. URL : http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvd_2013_2_32

36. Олейник О.А. Роль теории дифференциальных уравнений в современной математике и ее приложениях. М.: 1996, 121с.

37. *Пойа* Д. *Математическое открытие* : решение задач: основные понятая, изучение и преподавание / пер. с англ. В. С. Бермана ; под ред. И. М. Яглома. — 2-е изд, 1976.

38. Р.Фейман Радость познания. Издательство: АСТ, 2019. 352с.

39. Равен Дж. Компетентность в современном обществе. Москва : КОГИТО-ЦЕНТР, 2002. 138 с

40. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.

41. Савченко О. П. Компетентнісний підхід у сучасній вищій школі. *Педагогічна наука: історія, теорія, практика, тенденції розвитку*. 2010. Вип. 3. С. 16–23. URL : http://intellect-invest.org.ua

42. Соколенко Л.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри та початків аналізу: практикум. Навчальний посібник / Л.О. Соколенко, Л.Г. Філон, В.О. Швець. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.

43. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.

44. Ткач, Ю. М. Задачі економічного змісту у шкільному курсі математики. Методичний посібник / Ю. М. Ткач . - Чернігів : ЧОІППО. - 2005. - 68 с.

45. Ткач, Ю. М. Математика. Задачі економічного змісту в математиці: навчальнометодичний посібник / Ю. М. Ткач. - Х. : Ранок, 2011. - 176 с.

46. Фирсов В.В. Учим математикой. –М.: Просвещение. 2012.- 223 с.

47. Формування життєвих вмінь та навичок учнів на уроках математики шляхом використання прикладних задач. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://schoolv.ucoz.ru/publ/formuvannja_zhittevikh_vmin_ta_navichok_uchniv_na_urok akh_matematiki_shljakhom_vikoristannja_prikladnikh_zadach/1-1-0-1.

48. Хуторской А. В. Ключевые компетенции и образовательные стандарты. *Эйдос: интернет-журнал.* URL: http://www.eidos.ru/journal/2002/0423.htm

49. Цыпкин А.Г."Справочное пособие по методам решения задач по математике. Москва: Наука. 2006. 207 с.

50. Швець В.О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики / В.О.Швець // Дидактика математики : проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2009. – № 32. – С. 16-23.

51. Шкіль, М. І. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К. : Зодіак-Еко, 2015. – 384 с.

52. Штефан Л. В., Нечіпор С. В. До питання компетентнісного підходу в професійній освіті. *Педагогіка і психологія професійної освіти. 2010. № 3. С. 22-28.*

53. Ярхо Т.О. Теоретичні і методичні основи фундаменталізації математичної підготовки майбутніх фахівців технічного профілю у вищих навчальних закладах. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора педагогічних наук, Харків 2017. 618с.

Додатки

Додаток А

Апробація магістерської роботи на наукових конференціях

Міністерство освіти і науки України
Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя
Факультет природничо-географічних і точних наук

МАТЕРІАЛИ
VI Всеукраїнської онлайн-конференції молодих науковців

„СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИРОДНИЧИХ І ТОЧНИХ НАУК”

1805

“Наука-сервіс”
Ніжин – 2021

ВИВЧЕННЯ ТЕМИ “ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ” У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

В шкільному курсі математики, а саме в поглибленому рівні в 10 класі вивчають поняття диференційні рівняння. Це поняття вперше дослідив Ньютон (1642-1727). Він вважав, що цей виняток є одним із важливих і зашифрував його у вигляді анаграми, смисл якої можна трактувати так: “закони природи виражаються диференціальними рівняннями”. Основними його здобутком було розкладання функцій в степеневі ряди та розклад формули бінома Ньютона. Крім Ньютона над темою працювали: Тейлор, Гук, Лагранжа та інші.

Указана тема частково розглядається в поглибленому курсі в 10 класі в темі “Похідна та її застосування”. У відповідності до навчальної програми, яку пропонує Міністерство освіти і науки учні повинні:

– формулювати означення похідної та пояснює її геометричний і фізичний зміст;

– знаходити кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції, знаходить похідні функцій;

– застосовувати похідну до знаходження проміжків монотонності та екстремумів функції;

– знаходити найбільше і найменше значення функції на проміжку, розв’язує прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень;

– застосовувати результати дослідження функції за допомогою похідної до розв’язування рівнянь і нерівностей та доведення тотожностей і нерівностей;

– описувати поняття опуклості функції та точок перегину;

– застосовувати другу похідну до знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину;

– досліджувати функції за допомогою першої та другої похідних і використовує одержані результати для побудови графіків функцій.

Мета дослідження полягає у реалізації прикладної спрямованості диференціальних рівнянь у шкільному курсі математики в 10 класі та для підготовки учнів до олімпіад або на факультативних заняттях. В роботі планується розкрити питання практичного застосування диференціальних рівнянь, підібрати завдання практичного змісту та приклади реалізації цієї мети під час проведення уроків.

НЕОБХІДНІСТЬ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Якість навчання має відповідати як державним стандартам освіти, що встановлюють вимоги до змісту, обсягу і рівня освітньої підготовки, так і вимогам реального життя. Здатність учнів застосовувати знання в конкретних життєвих ситуаціях не з’являється стихійно, вона формується під час навчання в процесі реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики. Прикладне спрямування передбачає, що учні зможуть математично досліджувати реальні явища, складати їх математичні моделі, аналізувати й досліджувати їх та зіставляти результати з реальними обставинами. І, перш за все, задачі прикладного спрямування мають дуже важливе значення для мотивації учнів до вивчення математики, оскільки вони будуть наочно бачити необхідність і значення застосування математичних знань у різноманітних сферах діяльності, її користі у сучасному житті.

У методичній літературі наведено різні означення прикладних задач. Дехто з учених прикладною називає задачу, що потребує перекладу на математичну мову, а інші вважають, що прикладна задача має походити з практики. Часто вчені прикладними називають задачі, що виникають за межами математики, але розв'язування яких потребує застосування математичного апарату. Прикладні задачі – це задачі, зміст яких розкриває застосування математики у суміжних дисциплінах, вони використовуються в технології та економіці сучасного виробництва тощо. У цих задачах задаються реальні умови та розглядаються реальні ситуації, що відбуваються на практиці. Прикладною задачею практичного характеру називають задачу, розв'язування якої передбачає використання реального предмета (моделі), потребує проведення експерименту, відповідних вимірювань тощо. Виокремлюють учені й прикладну задачу теоретичного характеру, якщо вона не пов'язана з роботою із реальним об'єктом або його моделлю [1]. Усі типи задач практичного спрямування вкрай важливі у навчальному процесі і мають бути застосованими при вивченні школярами курсу математики [2].

Ми упевнені, задачі повинні мати реальний практичний зміст, що забезпечують ілюстрацію практичної цінності і значущості набутих математичних знань. Наприклад, учням необхідно показати, що життєві ситуації слугують об'єктами математичного моделювання і математичне моделювання є чудовим інструментом наукових досліджень різноманітних процесів. Зауважимо, що уроки, пов'язані з практичним змістом математики і моделюванням певних ситуацій, можливо проводити в ігровій формі, використовуючи різноманітні сценарії та історичні відомості, описані в роботах учених-практиків [3; 4]. На нашу думку, найбільше можливостей моделювати реальні процеси вчитель математики має при вивчення теми "Диференціальні рівняння".

Цікавими зазвичай є задачі пов'язані з певними експериментами на кшталт: Задача 1. З експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій за умов достатнього запасу їжі пропорційна їх кількості. Визначити за який час кількість бактерій збільшиться в m разів порівняно з початковою кількістю. Задача 2. Експериментально встановлено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості в даний момент часу. Знайти закон зміни маси речовини від часу, якщо при t = 0 маса речовини дорівнювала m0. Задача 3. Матеріальна точка маси m рухається по осі Ох під впливом відновлювальної сили, що спрямована до початку координат і пропорційна відстані цієї точки від початку; середа, в якій здійснюється рух, чинить опір руху цієї точки, пропорційний швидкості руху. Знайдіть закон руху.

Оскільки знання з математики сучасної людини не мають бути формальними, викладачі повинні подбати, щоб математичні знання відповідали потребам реального життя і мотивації підвищення рівня математичної підготовки учнів у їх подальшій фаховій діяльності. І вищеописаний підхід до вказаної проблематики, на нашу думку, сприяє вирішенню цього питання.

Список використаних джерел

1. Швець В. О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики. Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнародний збірник наукових робіт. Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2009. № 32. С. 16 – 23.

2. Losyeva, N., Gubar, D., & Puzyrov, V. (2011). Helping child to learn mathematics. FAMA – Family Math for Adult Learners / Family and communities in and out of classroom: Ways to improve mathematics' achievement – Barcelona, 98 – 105.

3. Losyeva, N. (2009). Game Frame of Reference as a of Preconditions for Students and Teachers Self-Realization. Journal of Research in Innovative Teaching. Publication of National University, 2(1), 208 – 217.

4. Пузирьов В. Є. Використання історичного матеріалу при викладанні вищої математики – один з чинників розвитку пізнавального інтересу студентів. Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка. Серії “Проблеми фізико-математичної і технологічної освіти”. Ч. 3. Кіровоград, 2015. Вип. 8. С. 47 – 52.

РЕАЛІЗАЦІЯ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ КУРСУ МАТЕМАТИКИ З МЕТОЮ ВИХОВАННЯ КОМПЕТЕНТНОГО ШКОЛЯРА

Математика є шкільною дисципліною, що значним чином впливає на компетентність людини, дозволяє вивчати будь-які реальні процеси та їх наслідки у питаннях екологічної безпеки соціуму тощо. Потужним засобом математичного моделювання будь-яких життєвих процесів є диференціальні рівняння. Характерною ознакою диференціальних рівнянь є наявність багатьох розв’язків і не можна однозначно знайти залежність між величинами, що характеризують цей процес, без використання початкових умов. Продемонструвати школярам такі поняття як «загальний» та «частковий» розв’язок краще всього, на нашу думку, розв’язуючи конкретні, важливі для екологічної компетентності школяра наведені нижче задачі. При цьому нам імпонує думка про організацію процесу навчання у вигляді ігрових чи рольових технологій, де задачі пропонуються як завдання для наукової лабораторії та презентація її досягнень (є директор лабораторії, наукові співробітники, представники преси, гості закордонних наукових установ та інші особи) [1, с. 45; 2]. Розглядаємо такі задачі.

*Задача 1***.** Знайдіть закон зменшення маси ліків в організмі людини, якщо через одну годину після введення 20 мг маса препарату зменшується учетверо і швидкість розчинення прямо пропорційна часу.

*Розв'язання***.** Візьмемо $m(t)$ – маса лікувального препарату в організмі людини в момент часу t , тоді $m'(t)$ – швидкість його розчинення. Згідно умов задачі шидкість розчинення прямо пропорційна часу. Тому рівняння, що описує математичну модель процесу буде виглядати таким чином: $m'(t) = -\kappa t$, де κ – стале додатне дійсне число. Загальним розв'язком цього диференціального рівняння є множина функцій $m(t) = -\frac{kt^2}{2} + C$. Використовуємо початкову умову: $m(0) = 20$, маємо $C = 20$ і, отже $m(t) = -\frac{kt^2}{2} + 20$. Тепер враховуємо умову, що $m(1) = 5$, і обчислюємо κ=30. Таким чином, можемо записати, що зменшення маси лікувального препарату в організмі людини відбувається за законом $m(t) = 20 - 30t^2$. *Відповідь:* $m(t) = 20 - 30t^2$.

Підкреслимо, що при розв'язанні математичних задач педагог має не забувати й про реалізацію культурно-історичного змісту математики й активно використовувати історичний матеріал, пов'язаний з навчальною темою [3, с.49]. Наступною задачею, що пропонується для розв'язання «науковій лабораторії» членами якої є школярі 11 класу, може бути прикладна задача, математична модель якої приводить до диференціального рівняння показникового зростання (спадання).

*Задача 2***.** Відомо, що швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості в даний момент часу. Кількість бактерій подвоюється протягом трьох годин. Знайдіть залежність кількості бактерій від часу [4].

Розв'язання. Позначимо через $P(t)$ – кількість бактерій у популяції в момент часу t і, пригадавши, що швидкість розмноження бактерій є похідною від кількості $P'(t)$, одержимо диференціальне рівняння математичної моделі нашої задачі, а саме, рівняння показникового зростання $P'(t) = kP(t)$, де $k > 0$.

Маємо: $\frac{P'(t)}{P(t)} = k$, що можна переписати у вигляді (lnP(t))'= k . Звідси ln P(t) = k t + C_1 , де C_1 – деяка стала, яку для зручності позначимо як lnC. Після перетворень на основі властивостей логарифмів маємо загальний розв'язок P(t) = Ce^{kt} . Тепер з цієї множини функцій виокремлюємо ту, яка описує заданий процес розмноження бактерій. Для цього слід використати початкову умову: P(0) = P_0 , і одержимо, що C = P_0 . Друга ж умова P(3) = 2P_0 дозволяє нам визначити значення e^k : P_0 = P_0 $(e)^{3k}$, e^k = $2^{1/3}$.

Таким чином, кількість бактерій в момент часу t визначається за законом P (t) = $2^{1/3}$ P_0. *Відповідь:* P (t) = $2^{1/3}$ P_0 .

Отже, проведення навчального заняття у такому форматі уявляється нам доцільним, оскільки виховує їх математичну компетентність і (за анкетами школярів) сприяє кращому розумінню навчального матеріалу, дозволяє проявити ініціативу, лідерські якості, враховує особистісні риси учнів при розподіленні ролей в грі. Також необхідно додати, що такий підхід до проведення уроку максимально сприяє й самореалізації педагога у навчальному процесі та легко переводиться у формат дистанційної освіти, що на сьогодні є актуальною частиною організації навчального процесу [5].

ЛІТЕРАТУРА

1. Лосєва Н.М. Самовдосконалення викладача: навчально-методичний посібник. Видання друге, перероблене. – Донецьк, ДонНУ, 2004. – 300 с.

2. Losyeva N. Game Frame of Reference as a of Preconditions for Students and Teachers Self-Realization/ Natalie Losyeva // Journal of Research in Innovative Teaching. Publication of National University. Volume 2, Issue 1, March 2009. – La Jolla, CA USA.

3. Пузирьов В.Є. Використання історичного матеріалу при викладанні вищої математики – один з чинників розвитку пізнавального інтересу студентів // Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка. Серії «Проблеми фізико-математичної і технологічної освіти» - 2015.- №8. С.47-52.

4. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.

5. Буркіна Н.В. Самореалізація викладача вищого навчального закладу і дистанційне навчання / Н.В. Буркіна, Н.М. Лосєва //Комп’ютер у школі та сім’ї . 2010. №4(84). - С.39-41.

Додаток Б

МЕТОДИКА ДЛЯ ДІАГНОСТИКИ НАВЧАЛЬНОЇ МОТИВАЦІЇ ШКОЛЯРІВ М. МАТЮХИНОЇ (МОДИФІКАЦІЯ Н. БАДМАЄВА)

Ця методика використовується індивідуально з метою організації діалогу з учнем.

Тест дозволяє зрозуміти, чим керуються учні, відвідуючи школу. Діагностика проводиться в три етапи. На першому етапі пропонуються картки з твердженнями і учні мають обрати всі картки, які вони вважають важливими для власного навчання. На другому етапі серед усіх карток потрібно вибрати лише сім, тобто найважливіших, на думку учня. І на третьому етапі необхідно обрати лише три.

Учню пропонуються такі твердження.

1. Я розумію, що учень повинен добре вчитися.
2. Прагну швидко і точно виконувати вимоги вчителя.
3. Хочу закінчити школу і навчатися далі.
4. Хочу бути культурною і розвиненою людиною.
5. Хочу отримувати гарні оцінки.
6. Хочу отримувати схвалення вчителів і батьків.
7. Хочу, щоб товариші завжди були хорошої думки про мене.
8. Хочу, щоб у класі у мене було багато друзів.
9. Хочу бути найкращим учнем у класі.
10. Хочу, щоб мої відповіді на уроках були завжди найкращими за інших.
11. Хочу, щоб не лаяли батьки і вчителі.
12. Не хочу отримувати погані оцінки.
13. Люблю дізнаватися нове.
14. Мені подобається, коли вчитель розповідає щось цікаве.
15. Люблю думати, міркувати на уроках.
16. Мені подовається брати складні завдання, долати утруднення.
17. Мені цікаво розмовляти з учителем на різні теми.

18. Мені більше подобається виконувати навчальне завдання в групі, ніж одному.

19. Люблю вирішувати завдання різними способами.

20. Люблю все нове і незвичайне.

21. Хочу щоб мене оцінювали лише на 10-12 балів.

22. Хочу домогтися в майбутньому великих успіхів.

КЛЮЧ до тесту. Дослідить які картки (з якими мотивами) учень обрав два або три рази, і на основі списку мотивів зробити висновок про те, чим учень керується у навчальній діяльності. Судження, які школяр обрав лише один раз, можна вважати випадковим вибором.

Відповідність певним мотивам:

• обов'язку і відповідальності: 1 - 2 твердження;

• самовизначення і самовдосконалення: 3 - 4;

• благополуччя: 5 - 6;

• афіліації (потреби в прийнятті, довірливих стосунках): 7-8;

• престижу: 9 - 10;

• уникнення невдачі: 11 - 12;

• навчально-пізнавальні (зміст навчання): 13 - 14;

• навчально-пізнавальні (процес навчання): 15 - 16;

• комунікативні: 17 - 18;

• творчої самореалізації: 19 - 20;

• досягнення успіху: 21 - 22.

За підсумками цієї діагностики шкільної мотивації у вчителя з'явиться «карта мотивів» конкретного учня. За рахунок актуальних для нього мотивів буде простіше підтримати його пізнавальну навчальну мотивацію і зробити акцент у навчанні тих аспектах, які можуть бути для нього важливими. Щоб краще зрозуміти ці мотиви, які домінують можливими є додаткові запитання:

• мотиви обов'язку і відповідальності:

Слід запитати: «Чи бувають такі моменти в навчанні, коли тобі стає цікаво? Чи є моменти, коли ти отримуєш задоволення від того, що ти робиш?»;

Необхідно спробувати знайти те, що у нього виходить добре і приносить задоволення і намагатися зробити так, щоб таких моментів в процесі навчання ставало більше.

• потреба в спілкуванні та прийнятті:

Слід максимально часто включати таких дітей в групову роботу, організовувати міні-проекти, дискусії, роботу в парах та групах.

• потреба в досягненні і прагнення до престижу:

Учителю необхідно підкреслювати досягнення учня не тільки в порівнянні з однолітками, а й в порівнянні з самим собою у минулому. Це дозволить підтримати інтерес до тих предметів, в яких учень не був дуже успішний, але вже має певний прогрес .

• уникнення невдачі:

Необхідно розібратися, що є цікавим для учня, і створювати ситуації успіху, концентруючи увагу на досягненнях і тим самим працюючи на адекватну самооцінку. Надавати вибір у завданнях, запитаючи думку учня, щоб підтримати потребу в автономії.

Додаток В

Текст опитувальника ШАМ (опитувальник "ШКАЛА АКАДЕМІЧНОЇ МОТИВАЦІЇ")

Інструкція. Будь ласка, уважно прочитайте кожне твердження. Використовуючи шкалу від 1 до 5, вкажіть відповідь, яка найкращим чином відповідає тому, що Ви думаєте про причини Вашої залученості у діяльність. Чому Ви ходите на заняття?

1. Мені цікаво вчитися.

2. Навчання приносить мені задоволення, я люблю вирішувати складні завдання.

3. Тому що я отримую задоволення, перевершуючи самого себе в навчальних досягненнях.

4. Тому що я хочу довести самому собі, що я здатн(ий)/на успішно навчатися.

5. Тому що мені соромно погано вчитися.

6. У мене немає іншого вибору, так як відвідуваність відзначається.

7. Чесно кажучи, не знаю, мені здається, що я тут просто втрачаю час.

8. Мені подобається вчитися, тому що це цікаво.

9. Я відчуваю задоволення, коли перебуваю в процесі рішеннях складних навчальних завдань.

10. Навчання дає мені можливість відчути задоволення в моєму вдосконаленні.

11. Тому що, коли я добре вчуся, я відчуваю себе значимою людиною.

12. Тому що совість змушує мене вчитися.

13. Щоб уникнути проблем з батьками.

14. Раніше я розумів (а), навіщо вчуся, а тепер не впевнений (а), чи варто продовжувати.

15. Мені просто подобається вчитися і пізнавати нове.

16. Мені подобається вирішувати важкі завдання і прикладати інтелектуальні зусилля.

17. Заради задоволення, яке приносить мені досягнення нових успіхів у навчанні.

18. Щоб довести самому(ій) собі, що я розумна людина.

19. Тому що вчитися - це мій обов'язок, якого я не можу знехтувати.

20. Тому що близькі мене будуть засуджувати, якщо я стану погано вчитися.

21. Ходити-то я ходжу, але не впевнений(а), що мені це дійсно треба.

22. Я дійсно отримую задоволення від вивчення нового матеріалу на заняттях.

23. Я просто люблю вчитися, вирішувати складні завдання і відчувати себе компетентним(ою).

24. Мені приємно усвідомлювати, як зростає моя компетентність і мої знання.

25. Тому що я хочу показати самому собі, що я можу бути успішним(ою) в навчанні.

26. Тому щоя повинен відвідувати заняття і вчитися.

27. У мене немає вибору, інакше я не зможу в майбутньому мати досить забезпечене життя.

28. Ходжу за звичкою, навіщо, відверто кажучи, точно не знаю.

Додаток Г

З анкет учнів (граматичні помилки, за наявності таких, було нами виправлено):

Учень А: «…мені було дуже цікаво, коли пропонувалися задачі, що були пов'язані з реальними проблемами. Оскільки найчастіше ми раніше вирішували якісь абстрактні завдання…»

Учень Б: «…я мрію стати біологом і тому для мене були цікавими конкретні життєві завдання. Після таких задач, які пропонував нам вчитель, я самостійно знайшов в Інтернеті ще декілька цікавих для мене задач і спробував розв'язати їх…»

Учень В: «…планую поступати у медичний університет і мені було цікаво побачити, що математика може стати мені потрібною…»

Учень Г: «…я планую здобувати професію вчителя і тому мені цікаво спостерігати за вчителем та аналізувати його професійну діяльність...»

Учень Д: «…після розв'язання прикладних задач із математики я почав допомогати татові на будівництві й пропонувати йому змоделювати процес виконання покривельних робіт та зробити чисельні розрахунки …»

Учень Е: «…я із задоволенням і легкістю пояснила матусі та сестрі яка чашка кави охолоне швидше, аргументовано обгрунтувала відповідь після наших уроків математики…»

Учень Є: «… в магазині я самостійно виконую математичні розрахунки та купую продукти для всієї сім'ї…»

Учень Ж: «… цього річ під час проведення виборів у школі я допомогала у підрахунку голосів та побудові вибірки…»