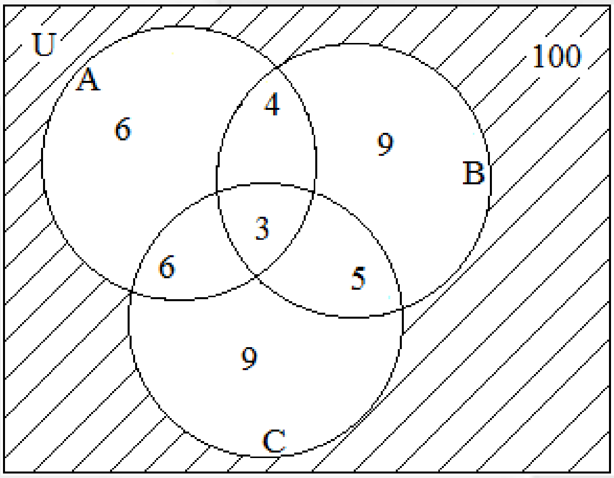
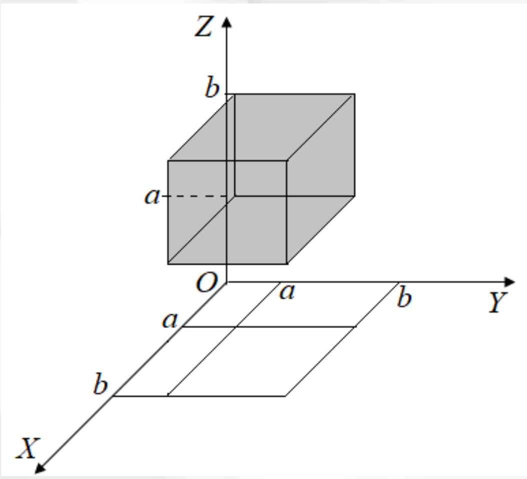
Ніжинський державний університет
імені Миколи Гоголя

Харченко В.М.

ПРАКТИКУМ
З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ





Навчальний посібник

Ніжин – 2022

УДК 519.1 : 510.3 (075.8)

Х22

Рекомендовано Вченою радою
Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя
(НДУ ім. М. Гоголя)
Протокол №3 від 05.10.2022 р.

Рецензенти:

Лисенко І. М. – доцент кафедри інформаційних технологій, фізико, кандидат фіз.-мат. наук;

Кресан Т. А. – в.о. завідувача кафедри природничо-математичних та загальноінженерних дисциплін Ніжинського агротехнічного інституту Національного університету біоресурсів і природокористування України, доцент, канд. техн. наук.

Харченко В. М.

Х22 Практикум з дискретної математики / В. М. Харченко. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2022. – 148 с.

Даний практикум відповідає програмі курсу «Дискретна математика» для спеціальностей 014 Середня освіта та 122 Комп'ютерні науки. У ньому розглянуто модулі «Множини і відношення», «Елементи комбінаторики» і «Теорія графів». Кожен модуль містить короткі теоретичні відомості, значну кількість прикладів. Запропоновано достатню кількість завдань для аудиторних та домашніх завдань. До частини задач з тих, які плануються для домашніх робіт, вказані відповіді.

Його можуть використовувати також вчителі математики та учні ліцеїв, гімназій та загальноосвітніх шкіл при підготовці до олімпіад з інформатики.

УДК 519.1 : 510.3 (075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Практикум містить практичні задачі всього курсу «Дискретна математика» для студентів спеціальностей 014 Середня освіта та 122 Комп'ютерні науки.

На початку кожної теми у практикумі подано найважливіші теоретичні відомості. Після цього запропоновано значну кількість розв’язаних задач, що дозволить читачам самостійно опрацьовувати даний матеріал. Крім того, розв’язання можуть слугувати зразком оформлення контрольно-розрахункових робіт, які потрібно буде виконати студентам. Кожен параграф практикума містить достатню кількість завдань для проведення практичної роботи і виконання домашнього завдання.

Таблиці та рисунки мають наскрізну нумерацію, а теореми, задачі нумеруються окремо по параграфах.

Список літератури містить 14 україномовних та англомовних підручників та посібників, які дозволять студентам уточнити ті питання, які виявилися не досить зрозумілими.

Даний посібник буде корисним не тільки для студентів факультетів закладів вищої освіти. Його можуть використовувати також вчителі математики та учні ліцеїв, гімназій та загальноосвітніх шкіл при підготовці до олімпіад з інформатики.

Модуль 1. Множини і відношення

§1. Основні поняття та операції теорії множин

Основні теоретичні відомості

Поняття **множини** – це одне з основних понять математики, воно є **первісним і не означуваним.**

Множина є **визначеною**, коли можна однозначно встановити, є будь-який об'єкт її членом чи ні. Для позначення конкретних множин використовують великі літери латинського алфавіту з індексами або без них: A, B_1, B_2, X, … Для позначення елементів множин використовують малі літери латинського алфавіту з індексами або без них: a, b_1, b_3, s, x, …

Є кілька *способів задання множин.*

1. **Словесний.** Множина задається за допомогою опису характеристичних властивостей, які повинні мати елементи множин. Під властивістю предмета X розуміють таке розповідне речення, у якому щось стверджується відносно предмета X і яке можна охарактеризувати як істинне або хибне відносно X.

2. **Перелік.** Список усіх елементів множини у фігурних дужках. Наприклад, $\{1,2,3\}$.

3. **Предикатний.** Множина задається у вигляді $\{x|P(x)\}$, де $P(x)$ – властивість, яка набуває значення «істина» для елементів множини. Наприклад, раніше задану переліком множину {0,1} предикатно задати можна так: $\{x|x^2 - x = 0\}$.

4. **Аналітичний.** У даному випадку елементи множини задаються формулою. Наприклад: $a_n = \frac{n}{1+n^2}$, де $n \in N$.

Множини бувають скінченими та нескінченними. Множини називаються скінченими, якщо число їх елементів скінчене, тобто існує натуральне число n, яке є числом елементів множини. Кількість елементів множини S називають ***потужністю скінченої множини*** й позначають N(S) або ж $|S|$. Множини називаються нескінченними, якщо вони містять нескінченне число елементів.

Дві множини рівні тоді і тільки тоді, коли вони складаються з одних і тих же елементів.

Рівність двох множин A і B позначатимемо $A = B$. Коли ж множини A і B нерівні, то позначатимемо $A \neq B$.

***<u>Інтуїтивний принцип об'ємності</u>*: *Дві множини рівні тоді і тільки тоді, коли вони складаються з одних і тих же елементів.*

<u>Інтуїтивний принцип абстракції:</u> *Будь-яка властивість P(x) визначає деяку множину A за допомогою такої умови: елементами множини A є ті і тільки ті об'єкти* a*, які володіють властивістю P.*

Із принципу об'ємності випливає, що може існувати лише одна множина, яка не має об'єктів. Ця множина називається ***порожньою множиною*** і позначається $\emptyset$. Уведення порожньої множини дає можливість оперувати будь-якою множиною без попереднього застереження, існує вона чи ні.

<u>Означення.</u> Множина A називається **підмножиною множини B,** якщо всі її елементи є також елементами множини B.

Будемо писати у цьому випадку $A \subseteq B$. Зауважимо, що при цьому множину B називають ***надмножиною множини A.***

<u>Означення.</u> Множина A називається **власною підмножиною множини B,** якщо A $\neq \emptyset$ є підмножиною множини B і множини A та B не рівні між собою.

Запис $A \subset B$означає, що множина A є власною підмножиною множини B, а символ «⊂» є символом строгого включення.

Множину всіх підмножин деякої множини A часто позначають через $\beta(A)$ і називають ***булеаном множини*** A. Якщо $|A| = n$, то $|\beta(A)| = 2^n$.

<u>Теорема 1.</u> Порожня множина є підмножиною будь-якої множини A.

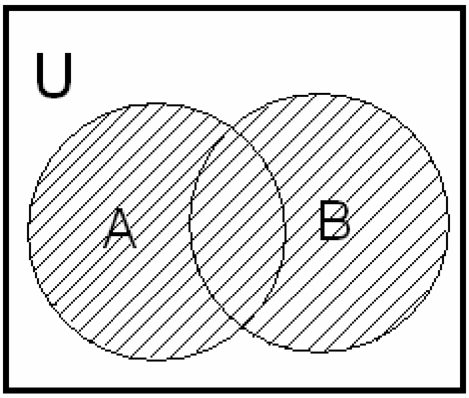


Рис.1.1. Об'єднання множин

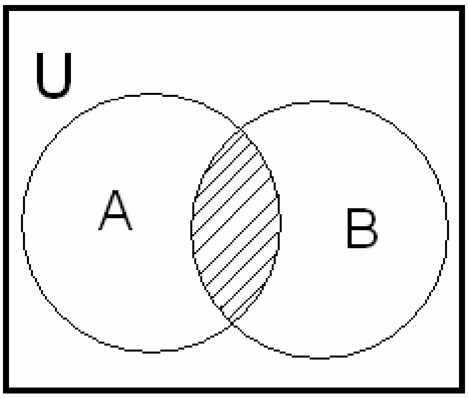


Рис.1.2. Переріз множин

<u>Означення.</u> Об'єднанням множин A і B називається множина тих і лише тих елементів, які належать принаймні одній із цих множин.

Об'єднання множин позначатимемо $A \cup B$. Скорочено дане означення можна записати так: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

<u>Означення.</u> Перерізом множин A і B називається множина їх спільних елементів.

Операцію «переріз множин A і B» позначатимемо $A \cap B$. Скорочено дане означення записують так: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

<u>Означення.</u> Різницею множин A і B називається множина, які містить ті і лише ті елементи, які належать множині A і не належать множині B.

Операцію різниці множин A і B позначатимемо $A \setminus B$. Скорочено означення записують: $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.

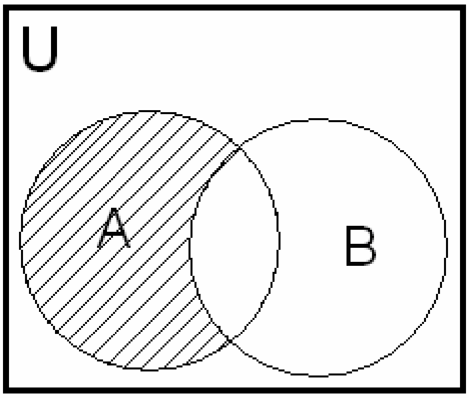


Рис.1.3. Різниця множин

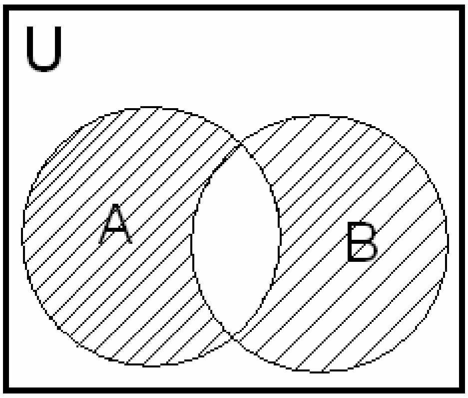


Рис.1.4. Симетрична різниця множин

<u>Означення.</u> Симетричною різницею множин A і B називається множина, що складається з усіх елементів A, які не належать множині B, й усіх елементів B, які не належать множині A.

Дану операцію позначають $A \Delta B$, $A \oplus B$ або $A \div B$.

<u>Означення.</u> Доповненням до множини A називається множина лише тих елементів універсальної множини, які не належать множині A.

Доповнення до множини A позначатимемо $\overline{A}$.

Ілюстративно операцію зображають так, як подано на рис.5.

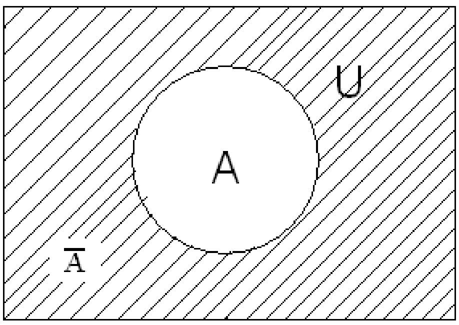


Рис.1.5. Доповнення до множини A

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задати всіма можливими способами множину парних натуральних чисел, що не більші за 10.

Розв'язання

Оскільки в умові використано словесний спосіб задання множини, то розглядатимемо інші способи задання множин:

1) Переліком: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
2) Предикатний спосіб: $A = \left\{x \middle| \, x \in N, \frac{x}{2} \in N, x \leq 10\right\}$.
3) Аналітично: $A = \{a_i\}$, де $a_i = 2 \cdot i,\ 1 \leq i \leq 5$.

Приклад 2. З яких елементів складатиметься множина X $X = \{x |\, x = y + z, y, z \in Y\}$, якщо $Y = \{1,2\}$?

Розв'язання

Обчислимо елемент x за вказаним правилом, якщо $y = 1$ і $z = 1$: $x = 1 + 1 = 2$. Аналогічно обчислюємо інші елементи множини X: $y = 1$ і $z = 2\ - x = 3$; $y = 2$ і $z = 1\ - x = 3$; $y = 2$ і $z = 2\ - x = 4$. Отже, маємо таку множину $X = \{2, 3, 4\}$.

Відповідь: $\{2, 3, 4\}$.

Приклад 3. Які з наведених співвідношень є правильними?

а) $\{2,4,6\} = \{2, \{4\}, 6\}$;
б) $\{2,4,6\} = \{6,4,2\}$;
в) $\{2, \emptyset\} = \{2\}$;
г) $|\{\emptyset\}| = 1$;
ґ) $\{2\} \subset \{2,4,6\}$;
д) $2 \subset \{\{2,4,6\}\}$
е) $4 \in \{2, 4, 6\}$;
є) $3 \notin \{2, 3, 4, 6\}$.

Розв'язання

а) Оскільки множина із правої частини співвідношення містить як елемент множину $\{4\}$, а множина з лівої частини – тільки числа, то вказане співвідношення є неправильним.

б) За інтуїтивним принципом об'ємності дане співвідношення правильне.

в) Оскільки множина з лівої частини співвідношення містить як елемент порожню множину, а множина з правої частини – тільки число, то вказане співвідношення є неправильним.

г) Враховуючи, що множина містить своїм елементом порожню множину, то її кількість елементів дорівнює 1. Отже, вказане співвідношення є правильним.

ґ) З означення власної підмножини випливає, що співвідношення правильне.

д) Оскільки елемент 2 не може бути підмножиною множини, то співвідношення є хибним.

е) Співвідношення правильне, оскільки число 4 є елементом множини, що вказана у правій частині співвідношення.

є) Елемент 3 належить множині, що розміщена у правій частині співвідношення, отже, воно не правильне.

Приклад 4. Нехай задана множина $X = \{a, b, c\}$. Знайти $\beta(X)$.

Розв'язання

$\beta(X) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$.

Приклад 5. Нехай $\boldsymbol{U} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c,\ d,\ e,\ f\}$. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \Delta B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Розв'язання

Використовуючи відповідні означення маємо:

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$;

$A \cap B = \{c, d\}$;

$A \backslash B = \{a, b\}$;

$B \backslash A = \{e, f\}$;

$A \Delta B = \{a, b\ e, f\}$;

$\bar{A} = \{e, f, g\}$;

$\bar{B} = \{a, b, g\}$;

Приклад 6. Нехай $\boldsymbol{U} = \{1,\ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8{,}9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \ \{x |\ \frac{(x-3)(x^2-9x+20)}{x-4} = 0\}$. Обчислити $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A \backslash B|$, $|A \Delta B|$.

Розв'язання

Задамо множину В повним переліком елементів, а для цього розв'яжемо рівняння, яке задає властивість елементів:

$$\frac{(x-3)(x^2-9x+20)}{x-4} = 0,$$

$$\begin{cases} (x-3)(x^2-9x+20) = 0, \\ x - 4 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0, \\ x^2 - 9x + 20 = 0, \end{array}\right. \\ x \neq 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 5, \\ x = 4, \end{array}\right. \\ x \neq 4; \end{cases}$$

Отже, маємо $B = \{3, 5\}$.

Використовуючи відповідні означення отримаємо:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \backslash B = \{1, 2, 4\}$, $A \Delta B = \{1, 2, 4, 5\}$. Оскільки у множині $A \cup B$ є 5 елементів, то $|A \cup B| = 5$. Аналогічно знаходимо: $|A \cap B| = 1$, $|A \backslash B| = 3$, $|A \Delta B| = 4$.

Відповідь: 5, 1, 3, 4.

Приклад 7. За допомогою діаграм Ойлера – Вена зобразіть результат операції $(A \cap B) \cup C$, якщо $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

Розв'язання

Спочатку зобразимо результат $A \cap B$ за допомогою діаграм Ойлера – Вена (див. рис. 1.2), а потім – остаточний результат, який зображено на рис. 1.6 :

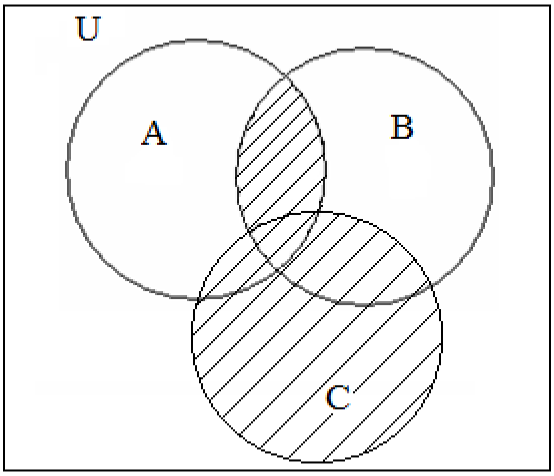


Рис.1.6. Діаграма Ейлера-Вена для $(A \cap B) \cup C$

Приклад 8. За допомогою діаграм Ойлера – Вена розв'яжіть задачу:

Серед 100 випускників школи, що брали участь у ЗНО, 19 складали біологію, 21 – хімію, 23 – географію, 7 – біологію і хімію, 9 – біологію і географію, 8 – хімію і географію. Скільки учнів не вибрали жодне із вказаних ЗНО, якщо всі вказані ЗНО вибрало 3 учні?

Розв'язання

Позначимо через U – множину всіх випускників школи, що брали участь у ЗНО, A – учнів, які проходили ЗНО із біології, B – учнів, які проходили ЗНО із хімії, C – учнів, які проходили ЗНО із хімії. Побудуємо діаграму Ойлера – Вена, на якій заштриховано ту частину множини U, потужність якої слід знайти.

Оскільки $|A \cap B \cap C| = 3$, то кількість учнів, які складали ЗНО з біології і хімії, але не складали ЗНО з географії, становитиме 4 учні ($7 - 3 = 4$). Аналогічно можна визначити, що складали ЗНО з біології та географії 6 учнів $(9-3=6)$, а з хімії та географії – 5 учнів. Тепер можна визначити кількість учнів, які складали тільки ЗНО з біології – 6 учнів $(19-4-3-6=6\ )$, з хімії – 9 учнів $(21-4-3-5=9)$, з географії – 7 учнів $(\ 23-5-3-6=9)$. Усі вказані результати можна відобразити на діаграмі (див. рис.1.7).

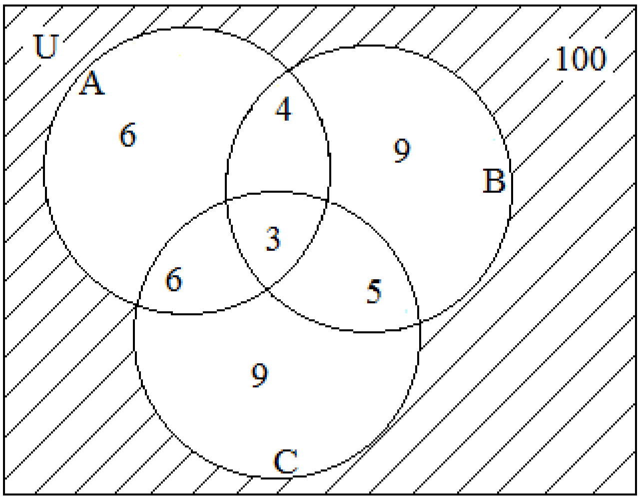


Рис.1.7

Щоб дізнатися кількість учнів, які не проходили ЗНО з біології, хімії та географії, необхідно від $|U|$ відняти знайдені потужності множин: $100-6-4-3-9-5-9-6=58$.

Відповідь: 58 учнів.

Задачі для самостійної роботи

1. Задайте множину X за допомогою переліку

а) $\mathrm{X}=\{x|\ x-$ ціле, $\ x^2<25\}$;

б) $\mathrm{X}=\{x|\ x-$ голосна буква українського алфавіту$\}$.

в) $X=\{x|\ x\in N, x<21,\ x\ \vdots\ 2\}$;

г) $X=\{x|\ x=2\cdot i+1,\ i\in N, x<10\}$.

2. Задайте множину X за допомогою характеристичної властивості:

а) $\mathrm{X}=\{3,6,9,12,15,18,21,24\}$;

б) $\mathrm{X}=\{-125,-64,-27,-8,-1,0,1,8,27,64,125\}$.

в) $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$;

г) $X=\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13\}$.

3. Які з наведених співвідношень є правильними?

а) $\{3\}\in\{1,2,3,4,5,6\}$;

б) $\{3\}\subseteq\{1,2,3,4,5,6\}$;

в) $\emptyset=\{\emptyset\}$;

г) $\{2,3,4\}\subseteq\{2,3,4,\{2,3,4\}\}$;

г) $\{\{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$;

д) $\{2,3,4\}\in\{2,3,4,\{2,3,4\}\}$.

4. Визначте кількість елементів в кожній із множин:

а) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;

б) $A = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$;

в) $A = \{2, 3, 4, \{2, 3, 4\}\}$;

г) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$;

г) $A = \{\emptyset\}$;

д) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \text{а}, \text{б}, \{\text{а}, \text{б}\}, \{\text{а}, \text{б}, \{\text{а}, \text{б}\}\}\}$.

5. Знайдіть всі підмножини множини X:

а) $X = \emptyset$;

б) $X = \{a\}$;

в) $X = \{a, b\}$;

г) $X = \{a, b, c\}$.

6. Зі скількох елементів складається множина X, якщо $|\beta(X)| = 32$?

7. Множина X має 14 власних підмножин. Чому дорівнює $|X|$?

8. Нехай задано множини $A = \{1, 3, 4\}$ і $B = \{3, 4, 5\}$. Знайти

а) $\beta(A)\backslash\beta(B)$, б) $\beta(B)\backslash\beta(A)$.

9. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6,7\}$ і $C = \{3, 5, 7\}$. Обчислити $A \cup B$, $A \cap B$, $A\backslash B$, $A\Delta B$, $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

10. Нехай $A = \{x, y, z, t\}, B = \{t, u, v, x\}$. Обчислити $A \cup B$, $A \cap B$, $B\backslash A$, $A\Delta B$.

11. Нехай $\boldsymbol{U} = \{1,\ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9\}$, $A = \{1, 4, 5, 6\}$, $B = \{x|\sqrt{x-1} \times \times (x+2)(x-3)(x-4) = 0\}$. Обчислити $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A\backslash B|$, $|B\backslash A|$, $|A\Delta B|$, $|\overline{A \cup B}|$.

12. Нехай $U = \{1,\ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{x|(x-1)(x-2)(x-4) \times \times \ln(x-2) = 0\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Обчислити $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A\backslash B|$, $|B\backslash A|$, $|A\Delta B|$, $|\overline{A \cap B} \cap \bar{B}|$.

13. Нехай $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. За допомогою діаграм Ейлера – Вена зобразіть результат операцій:

а) $A \cup (B \cap \bar{C})$; б) $A \cap (B \cup C)$.

14. Серед 30 учнів випускного класу на ЗНО з математики пішли 18 учнів, з історії – 14, фізики – 10 учнів. Скільки випускників вирішило не брати участь у ЗНО, якщо на ЗНО з математики і фізики прийшло 8 учнів, математики та історії – 6, фізики та історії – 3, а на історію, математику та фізику одночасно прийшло 3 учні класу?

15. При анкетуванні 80 студентів-першокурсників виявили, що 45 захоплюються спортом, 23 – музикою, 22 – живописом, 15 – спортом і живописом, 3 – музикою і живописом. Скільки студентів не вказали чим вони захоплюються?

§2. Алгебра множин

Основні теоретичні відомості

Для довільних підмножин A, B, C деякої універсальної множини U мають місце такі тотожності:

1) $A \cup B = B \cup A$ (комутативність об'єднання);
2) $A \cap B = B \cap A$ (комутативність перерізу);
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (асоціативність об'єднання);
4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$(асоціативність перерізу);
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивність);
6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивність);
7) $A \cup \bar{A} = U$;
8) $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
9) $A \cup \emptyset = A$;
10) $A \cap U = A$;
11) $A \cup A = A$(ідемпотентність об'єднання);
12) $A \cap A = A$ (ідемпотентність перерізу);
13) $A \cup (A \cap B) = A$ (поглинання);
14) $A \cap (A \cup B) = A$(поглинання);
15) $A \cup U = U$;
16) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
17) $\overline{\emptyset} = U$;
18) $\overline{U} = \emptyset$;
19) $\bar{\bar{A}} = A$ (інволютивність);
20) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (закон де Моргана);
21) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$(закон де Моргана);
22) $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$;
23) $A \backslash B = A \cap \bar{B}$;
24) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;
25) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;
26) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$;
27) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$;
28) $A \Delta B = B \Delta A$ (комутативність);
29) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (асоціативність);

30) $A\Delta\emptyset = \emptyset\Delta A = A$;

31) $A\Delta A = \emptyset$;

32) $A\Delta U = \bar{A}$;

33) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$ (дистрибутивність);

34) $A\Delta B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A) = (A \cup B)(A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.

Приклади розв'язування задач

<u>Приклад 1.</u> Довести тотожність $(\mathrm{A} \vartriangle \mathrm{B})\setminus\mathrm{C} = (\mathrm{A}\setminus\mathrm{C}) \vartriangle (\mathrm{B}\setminus\mathrm{C})$.

Доведення

Нехай $x \in (\mathrm{A} \vartriangle \mathrm{B})\setminus\mathrm{C}$. Тоді за означенням різниці множин маємо

$$\left\{\begin{aligned} &x \in A \vartriangle B,\\ &x \notin C.\end{aligned}\right.$$

Використавши означення симетричної різниці, запишемо систему:

$$\left\{\begin{aligned} &x \in (A\setminus B) \cup (B\setminus A),\\ &x \notin C.\end{aligned}\right.$$

Застосовуючи означення об'єднання та різниці множин, утворимо ланцюг таких перетворень:

$$\left\{\begin{aligned} &\left[\begin{aligned}&x \in (A\setminus B),\\ &x \in (B\setminus A),\end{aligned}\right.\\ &x \notin C;\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\left[\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned}&x \in A,\\ &x \notin B;\end{aligned}\right.\\ &\left\{\begin{aligned}&x \in B,\\ &x \notin A;\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\\ &x \notin C;\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned}&x \in A,\\ &x \notin B,\\ &x \notin C;\end{aligned}\right.\\ &\left\{\begin{aligned}&x \in B,\\ &x \notin A,\\ &x \notin C;\end{aligned}\right.\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned}&x \in A\setminus C,\\ &x \notin B,\\ &x \notin C;\end{aligned}\right.\\ &\left\{\begin{aligned}&x \in B\setminus C,\\ &x \notin A,\\ &x \notin C;\end{aligned}\right.\end{aligned}\right. \Rightarrow x \in (A\setminus C) \vartriangle (B\setminus C).$$

Отже $(\mathrm{A} \vartriangle \mathrm{B})\setminus\mathrm{C} \subseteq (A\setminus C) \vartriangle (B\setminus C)$.

Покажемо, що $(A\setminus C) \vartriangle (B\setminus C) \subseteq (\mathrm{A} \vartriangle \mathrm{B})\setminus\mathrm{C}$.

Нехай $y \in (A\setminus C) \vartriangle (B\setminus C)$, тоді маємо $y \in ((A\setminus C)\setminus(B\setminus C)) \cup ((B\setminus C)\setminus (A\setminus C))$.

Із означень об'єднання та різниці множин, отримаємо:

$$\left[\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned}&y \in (A\setminus C),\\ &y \notin (B\setminus C);\end{aligned}\right.\\ &\left\{\begin{aligned}&y \in (B\setminus C),\\ &y \notin (A\setminus C);\end{aligned}\right.\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned}&y \in A,\\ &y \notin C;\end{aligned}\right.\\ &\left[\begin{aligned}&y \notin B,\\ &y \in C;\end{aligned}\right.\end{aligned}\right. \text{або} \left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned}&y \in B,\\ &y \notin C;\end{aligned}\right.\\ &\left[\begin{aligned}&y \notin A,\\ &y \in C.\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

Кожну із систем можна розділити на дві системи, але у двох із них будуть випадки, коли $y \notin C$ і $y \in C$. Відкинувши ці випадки, матимемо:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\in A,\\ y\notin B,\\ y\notin C;\end{cases}\\ \begin{cases} y\in B,\\ y\notin A,\\ y\notin C\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\in A,\\ y\notin B;\end{cases}\\ \begin{cases} y\in B,\\ y\notin A;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} y\in (A\vartriangle B),\\ y\notin C;\end{cases} \Rightarrow y\in(A\vartriangle B)\setminus C.\\ y\notin C;\end{cases}$$

Таким чином $(A\setminus C) \vartriangle (B\setminus C) \subseteq (\mathrm{A} \vartriangle \mathrm{B})\setminus \mathrm{C}$.

Отже, тотожність справедлива.■

Приклад 2. Використовуючи тотожності, спростіть вираз

$$\big((A\cup\bar{B})\cap(\bar{B}\cup C)\big)\cup\big((\bar{A}\cup B)\cap(B\cup\bar{C})\big).$$

Розв’язання

При перетворенні виразу, будемо ставити над символом «=» номери тотожностей, а вкінці запишемо їх під вказаними номерами.

$$\big((A\cup\bar{B})\cap(\bar{B}\cup C)\big)\cup\big((\bar{A}\cup B)\cap(B\cup\bar{C})\big)\overset{1}{=}\big(\bar{B}\cup(A\cap C)\big)\cup$$

$$\cup\big(B\cup(\bar{A}\cap\bar{C})\big)=\bar{B}\cup(A\cap C)\cup\ B\cup(\bar{A}\cap\bar{C})\overset{2}{=}\bar{B}\cup B\cup(A\cap C)\cup$$

$$\cup(\bar{A}\cap\bar{C})\overset{3}{=}U\cup(A\cap C)\cup\ (\bar{A}\cap\bar{C})\overset{4}{=}U.$$ ■

При спрощенні використовувались тотожності:

1. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
2. $A\cup B=B\cup A$;
3. $A\cup\bar{A}=U$;
4. $A\cup U=U$.

Приклад 3. Нехай A, B, K - такі множини, що $B\subseteq A\subseteq K$. Знайдіть множину X, що задовольняє систему рівнянь $\begin{cases}A\cap X=B,\\ A\cup X=K.\end{cases}$

Розв’язання

Із першого рівняння випливає, що $B\subseteq X$, тому X можна подати у вигляді $B\cup X'=X$, де $X'\cap B=\emptyset$. Із рівнянь $A\cap X=B, B\cup X'=X, X'\cap B=\emptyset$ випливає, що $A\cap X'=\emptyset$.

Отже, залишилося знайти множину X'. Замінимо X у другому рівнянні системи на $X=B\cup X'$. У результаті отримаємо $A\cup(B\cup X')=K$. За асоціативним законом маємо $(A\cup B)\cup X'=K$. Із включення $B\subseteq A$ випливає, що $A\cup B=A$, тому отримуємо рівносильне рівняння $A\cup X'=K$. Врахувавши факти, що $A\cap X'=\emptyset$ і $A\subseteq K$ маємо $X'=K\setminus A$. Остаточно маємо $X=B\cup(K\setminus A)$.

Задачі для самостійної роботи

1. Використовуючи основні теоретико-множинні тотожності, спростити вирази:

а) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C}$;

б) $(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap D)$;

в) $A \cap \left(\left(\overline{A \cup \overline{B}} \right) \cup \left(\overline{\overline{A} \cup B} \right) \right) \cup \left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \right)$;

г) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C \cap D)$;

ґ) $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B} \right) \cup \left(\overline{A} \cap B \right)$;

д) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$;

е) $(A \setminus (B \cap C)) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$;

є) $(A \cap \bar{B} \cup C) \cap (A \cup B) \cap \bar{C}$;

ж) $\overline{A \cap \overline{\overline{B \cup C}}} \cap (A \cup B) \cap C$;

з) $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \cap (A \cup B)$.

2. Довести тотожності

а) $A \cup (B \Delta C) = ((A \cup B) \Delta (A \cup C)) \cup A$;

б) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

в) $A \setminus (B \Delta C) = (A \setminus \overline{B}) \Delta (A \setminus C)$;

г) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

ґ) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

д) (в) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

е) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

є) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

3. Подайте геометричну інтерпретацію множин $A = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$ і $B = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2,\ x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$. Які фігури зображають множини $A \cup B, A \cap B, R^2 \setminus A$?

Подайте геометричну інтерпретацію множин

4. Нехай задано такі множини:

$A_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$,

$A_2 = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 3\}$,

$A_3 = \{(x, y) \mid y^2 - |x| \geq 0\}$.

Зобразити графічно результати операцій:

а) $\overline{A_1} \cap A_3$;

б) $(A_1 \cap A_2) \backslash A_3$.

5. Довести для довільних множин A, B, K:

а) якщо $A \not\subset B$і $A \cap K \neq \emptyset$,то $A \cup K \not\subset B \cup K$;

б) якщо$B \cap K \neq \emptyset$ і$A \cap K \neq \emptyset$, то $A \backslash B = \emptyset$.

6. Знайти розв'язання системи рівнянь $\begin{cases} A \backslash X = B, \\ X \backslash A = K, \end{cases}$ якщо відомо, що $B \subseteq A, A \cap K \neq \emptyset$.

§3. Декартовий добуток множин. Бінарні відношення

Основні теоретичні відомості

Означення. Упорядкованою парою називається об'єкт (a, b), що складається із двох не обов'язково різних елементів, для яких a слід уважати першим, a b – другим.

Означення. Декартовим добутком множин A і B називається множина, яка складається з усіх тих і лише тих упорядкованих пар, перша компонента яких належить до множини A, а друга – до множини B.

Декартовий добуток, або прямий добуток, множин A і B будемо позначати $A \times B$. Дану операцію названо в честь французького математикаРене Декарта (1596-1659) тому, що розроблений ним метод координат знайшов застосування у теорії множин.

Декартовий добуток не володіє властивістю комутативності ($A \times B \neq B \times A$). Аналогічно можна показати, що у загальному випадку **декартовий добуток не володіє властивістю асоціативності** ($A \times (B \times$ C) $\neq (A \times B) \times C$).

Набір $(a_1, \dots a_n)$, щоб відрізнити його від множини, яка складається з елементів$a_1, \dots a_n$, записують не у фігурних, а у круглих дужках і називають також ***n*-елементним кортежем**, **вектором,** або **впорядкованим набором**. **Довжиною** кортежу називають кількість його координат. Два кортежі $(a_1, \dots a_n)$ і $(b_1, \dots b_n)$ однакової довжини вважаються **рівними**тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати, тобто $a_i = b_i$, $\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}}$.

Означення. Декартовим добутком множин $A_1, \dots, A_n$ називається множина впорядкованих n-елементних кортежів$(a_1, \dots, a_n)$, де $a_i \in A_i, i = \overline{1, n}$.

Декартовий добуток позначатимемо $A_1 \times \dots \times A_n$.

Нехай A – довільна множина така, що $A_1 = \cdots = A_n = A$. Тоді декартовий добуток $A_1 \times \ldots \times A_n$ називається декартовим добутком ***n***-го степеня множини A (A^n). До речі, прийнято вважати, що $A^0 = \emptyset$, $A^1 = A$.

<u>Означення.</u> Проекцією на і-у вісь (або і-ою проекцією) кортежу $u = (a_1, \ldots, a_n)$ називається i-а координата a_i кортежу u, позначається $Pr_i(u) = a_i$.

<u>Означення.</u> Проекцією кортежу $u = (a_1, \ldots, a_n)$ на осі з номерами $i_1,\ldots, i_k$ називається кортеж $(a_{i_1}, \ldots a_{i_k})$ позначається $Pr_{i_1,\ldots,i_k}(u) = (a_{i_1}, \ldots a_{i_k})$.

<u>Теорема.</u> Нехай $A_1, \ldots, A_n$ – скінченні множини і $|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \ldots, |A_n| = m_n$. Тоді потужність декартового добутку $A_1 \times \ldots \times A_n$ дорівнює добутку потужностей усіх множин $|A_1 \times \ldots \times A_n| = m_1 \times \ldots \times m_n$.

Наслідок. $\left|A^n\right| = |A|^n$.

<u>Означення.</u> Відношенням, заданим на множинах $A_1, \ldots, A_n$, називається довільна підмножина множини $A_1 \times \ldots \times A_n$.

Якщо $A_i = A$, $i = \overline{1,n}$, то для $A_1 \times \ldots \times A_n = A^n$ існуюче відношення R, яке задане на множинах $(A_1, \ldots, A_n)$, – є **n-арним відношенням на множині** A.

Коли $(a_1, \ldots a_n) \in R$, то говорять, що $a_i (i = \overline{1,n})$ знаходяться між собою у відношенні R. Це ж саме можна сказати й так: відношення R істинне для $a_1, \ldots a_n$. При n=1 відношення називається **унарним**, при n=2 – **бінарним**, при n=3 – **тернарним** і т.д.

Оскільки відношення, задані на $A_1, \ldots, A_n$ є підмножинами множини $A_1 \times \ldots \times A_n$, то для них визначені операції об’єднання, перерізу, різниці і доповнення. Їх означення запишемо скорочено:

$(a_1, \ldots a_n) \in R \cup R_1 \Leftrightarrow \big((a_1, \ldots a_n) \in R\big) \vee \big((a_1, \ldots a_n) \in R_1\big)$;

$(a_1, \ldots a_n) \in R \cap R_1 \Leftrightarrow \big((a_1, \ldots a_n) \in R\big) \wedge \big((a_1, \ldots a_n) \in R_1\big)$;

$(a_1, \ldots a_n) \in R \backslash R_1 \Leftrightarrow \big((a_1, \ldots a_n) \in R\big) \wedge \big((a_1, \ldots a_n) \notin R_1\big)$;

$(a_1, \ldots a_n) \in \bar{R} \Leftrightarrow \big((a_1, \ldots a_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n\big) \wedge \big((a_1, \ldots a_n) \notin R\big)$.

Будь-яка підмножина $R \subseteq A \times B$ називається ***бінарним відношенням з A у B.***

Часто множину A називають **множиною визначення**, а множину B – **множиною значень** відношення R.

Існує кілька способів задання відношень, зокрема алгебраїчний, за допомогою матриці відношень, графічний та за допомогою графа.

Алгебраїчний спосіб задання відношення полягає у описі множини повним переліком кортежів, які належать вказаному відношенню.

Матрицею відношень відношення R називається така квадратна матриця Δ, кожен елемент δ_{ij} знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця, визначається за правилом

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } (x_i; x_j) \in R; \\ 0, \text{якщо } (x_i; x_j) \notin R. \end{cases}$$

Задання дискретного бінарного відношення графіком полягає у зображенні точок на площині *Oxy*, перший елемент якого є абсцисою, а другий – ординатою.

<u>**Означення.**</u> **Образом елемента *a* в множині B при відношенні R** називається множина всіх елементів b із множини B, які відповідають елементу a із множини A.

<u>**Означення.**</u> **Прообразом елемента b у множині A при відношенні R** називається множина всіх елементів a, яким відповідає елемент b із множини B.

<u>**Означення.**</u> **Відношенням, оберненим до заданого відношення R** між множинами A і B, називається відношення R^{-1} між множинами B і A таке, що $R^{-1} = \{(b,a)|(a,b) \in R\}$.

<u>**Означення.**</u> **Композицією або добутком відношень R і R$_1$** називається відношення $R_1 * R$, між множинами A і C таке, що $R_1 * R = \{(a,c)|(a \in A) \wedge (c \in C) \wedge (\exists b \in B)(aRb, bR_1c)\}$.

<u>**Теорема.**</u> Якщо R, R_1, R_2 – бінарні відношення, задані на множині A, то:

1) $(R_1 \cup R_2) * R = R_1 * R \cup R_2 * R; R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 * R \subseteq R_2 * R$;

2) $(R^{-1})^{-1} = R; R \subseteq R_1 \Rightarrow R^{-1} \subseteq R_1^{-1}$;

3)$(R * R_1)^{-1} = (R_1^{-1}) * (R^{-1})$;

4) $(R \cap R_1)^{-1} = (R^{-1}) * (R_1^{-1})$;

5) $(R * R_1) * R_2 = R * (R_1 * R_2)$.

Бінарне **відношення тотожності**, задане на множині A, складається із усіх пар (*a,a*), де $a \in A$. Надалі будемо позначати відношення тотожності i_A, або просто i, якщо A фіксоване. Такі пари (*a,a*) називають ***діагональними***, а відношення i_A – ***діагоналлю***. Для будь-якого бінарного відношення, визначеного на множині A, справедлива рівність $i_A * R = R * i_A$.

Означення. Бінарне відношення R, задане на множині A, називається **рефлексивним**, якщо воно включає діагональ.

Означення. Бінарне відношення R називається **іррефлексивним,** якщо aRa не має сенсу.

Означення. Бінарне відношення R, задане на множині A, називається **симетричним,** якщо із aRb випливає bRa $(R \subseteq R^{-1})$.

Означення. Бінарне відношення R, задане на множині A, називається **антисиметричним,** якщо з aRb і bRa випливає a=b $(R \cap R^{-1} \subseteq i_A)$.

Означення. Бінарне відношення R, задане на множині A, називається **транзитивним,** якщо з *aRb* і *bRc* випливає *aRc*.

Означення. Бінарне відношення R, задане на множині A, називається **толерантним**, якщо воно рефлексивне і симетричне.

Означення. **Відношенням еквівалентності на множині A** називається бінарне відношення R, задане на множині A, на якому для будь-яких елементів a, b, c із A справедливі властивості рефлективності, симетричності та транзитивності.

Для відношення еквівалентності справедливі такі твердження:

- Будь-яке розбиття множини A на класи визначає на множині A відношення еквівалентності.
- Будь-яке відношення еквівалентності R, визначене на множині A, задає розбиття множини A на класи.
- Між розбиттям множини на класи і відношенням еквівалентності, заданим на цій множині, існує взаємно однозначна відповідність.

Якщо R – еквівалентність на A, то класи розбиття, визначені відношенням R, називають **класами еквівалентності відношення R**, а множину класів – **фактор-множиною множини A** і позначають *A/R*.

Означення. **Індексом множини A** називається число класів еквівалентності відношення еквівалентності R.

Теорема. Якщо R, R_1 – відношення еквівалентності, задані на множині A, то:

1) R^{-1}– відношення еквівалентності на A;

2) $R * R_1$ – відношення еквівалентності на A тоді й тільки тоді, коли $R * R_1 = R_1 * R$, тобто коли відношення R і R_1можна міняти місцями;

3) $R \cap R_1$– відношення еквівалентності на A;

4) $\bar{R}$ не є відношенням еквівалентності на А.

Теорема. Об’єднання відношень еквівалентності R і R_1 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли перетин будь-якого класу еквівалентності по R із будь-яким класом еквівалентності по R_1 або збігається з одним із них, або порожній. Якщо $R \cup R_1$ – еквівалентність, то $R \cup R_1 = R * R_1$.

Означення. Рефлексивним замиканням R називається найменше рефлексивне відношення на множині А, яке містить R як підмножину.

Означення. Симетричним замиканням R називається найменше симетричне відношення на множині А, яке містить R як підмножину.

Означення. Транзитивним замиканням R називається найменше транзитивне відношення на множині А, яке містить R як підмножину.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Нехай А={1, 2} і В={a, b, c}. Знайти $A \times B$, $B \times A, A^2$.

Розв’язання

За означенням декартового добутку маємо:

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$,

$B \times A = \{(a, 1), \quad (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$,

$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Приклад 2. Нехай $X = \{(1, 2, 4), (3, 2, 4), \ (4, 2,2)\}$. Чому дорівнює проекція X на першу вісь, на другу, а також на другу і третю осі?

Розв’язання

Проекції множин векторів X:

$$Pr_1 X = \{1, 3, 4\}; Pr_2 X = \{2\}; Pr_{2,3} X = \{(2,4), (2,2)\}.$$

Розв’язання

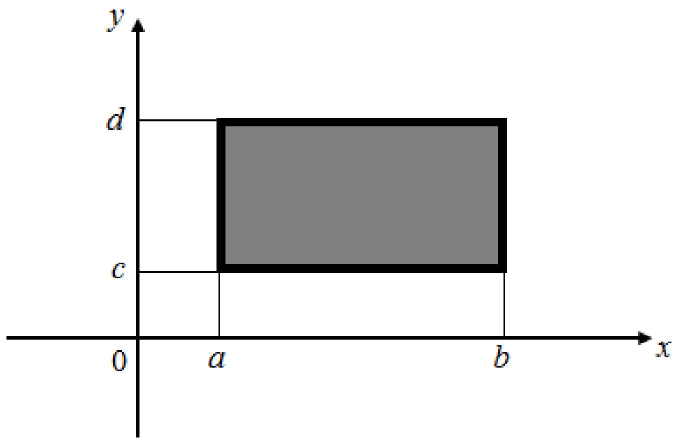


Рис. 1.8. Геометрична інтерпретація множини $[a, b] \times [c, d]$

<u>Приклад 3.</u> Для відрізків [a, b] і [c, d] (0<a<b, 0<c<d)дійсної прямої R дати геометричну інтерпретацію множини $[a, b] \times [c, d]$.

При побудові декартового добутку $[a, b] \times [c, d]$кожному елементу $x \in [a, b]$ ставиться у відповідність пара на площині (x, y) така, що $y \in [c, d]$. При цьому, геометричною інтерпретацією буде рис. 1.8.

<u>Приклад 4.</u> Нехай $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Задати алгебраїчно, матрицею відповідності, графіком та графом відношення $R \subseteq M \times M$, якщо R означає «бути строго менше».

Розв'язання

Відношення R «бути строго менше» означає, що воно містить всі пари елементів $a, b \in M$ такі, що $a < b$:

$$R = \{(a, b) | a, b \in M, a < b\}.$$

Тоді указане відношення можна задати за допомогою переліку: $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$.

Задання відношення графіком подано на рис. 1.9, а графом – на рис. 1.10.

Для задання відношення матрицею відповідності використаємо допоміжну таблицю.

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

Отже матриця відповідності запишеться:

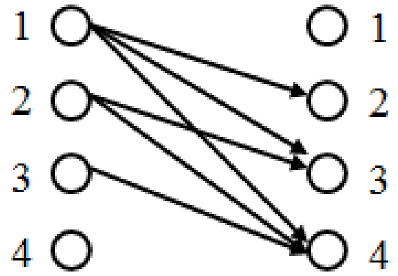


Рис. 1.9. Граф відношення R

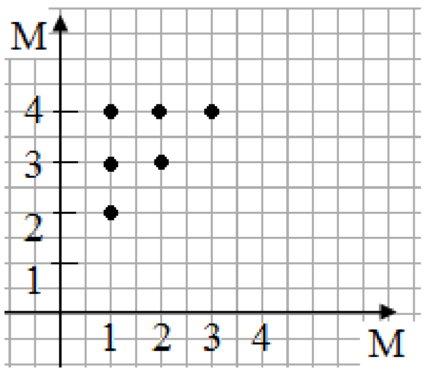


Рис. 1.10. Графік відношення R

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Для відношення $R = \{(1,1), (1,2), (1,3),\ (1,4),\ (2,2),$ $(2,3),\ (2,4),\ (3,4)\}$, заданого на множині M = {1, 2, 3, 4}, знайти множину визначення, множину значень, Pr_2R, обернене відношення R^{-1}, переріз, об'єднання, різницю і композицію відношень R і R^{-1}, а також $\bar{R}$.

Розв'язання

За означенням, множина визначення $D(R) = \{1, 2, 3\}$, множина значень $E(R) = \{1, 2, 3, 4\}$, а $Pr_2R = \{2, 3, 4\}$.

Обернене відношення, за означенням, запишеться так
$R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.
Виконаємо операції над відношеннями:
$R \cap R^{-1} = \{(1,1), (2,2)\}$.
$R \cup R^{-1} = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,1), (2,2), (2,3),\ (2,4),\ (3,1),$ $(3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.
$R \backslash R^{-1} = \{(1,2), (1,3),\ (1,4),\ (2,3),\ (2,4), (3,4)\}$.
$R^{-1} \backslash R = \{(2,1), (3,1),\ (3,2), 4,1), (4,2), (4,3)\}$.

Використовуючи означення композиції відношень, побудуємо множину $R * R^{-1}$. Візьмемо кортеж (1,1) відношення R^{-1}. Оскільки другим елементом є 1, то у відношенні R будемо шукати ті кортежі, першим елементом яких є 1 – це (1,1), (1,2), (1,3), (1,4). Тому, за означенням, новоутворені кортежі запишуться – (1,1), (1,2), (1,3), (1,4). Потім беремо кортеж (2,1) відношення R^{-1} і знову шукаємо ті кортежі відношення R, першим елементом яких є 1 – (2,1), (2,2), (2,3), (2,4) і т.д.
$R * R^{-1} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2),$ $(3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.
$R^{-1} * R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$.
$\bar{R} = \{(2,1), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.

Приклад 6. Для бінарного відношення ρ, яке задане на множині дійсних чисел R, побудуйте його графік, якщо $\rho = \{(x, y) |\ x^2 = y,\ x \in R\}$.

Розв'язання

Оскільки множина визначення і множина значень є неперервні множини, то досить легко побудувати графік даного відношення – він буде параболою, яка подана на рис.1.11.

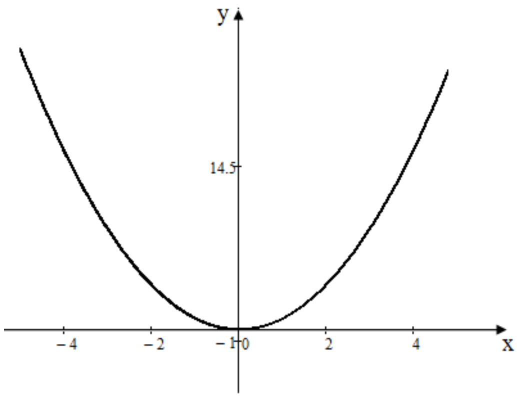


Рис. 1.11. Графік відношення ρ

Приклад 7. Зобразити на площині R^2 підмножину, яка задана аналітичним виразом $\{(x,y) \in R^2 | (x^2 + y^2 \leq 4) \cap (x \cdot y \geq 0)\}$.

Розв'язання

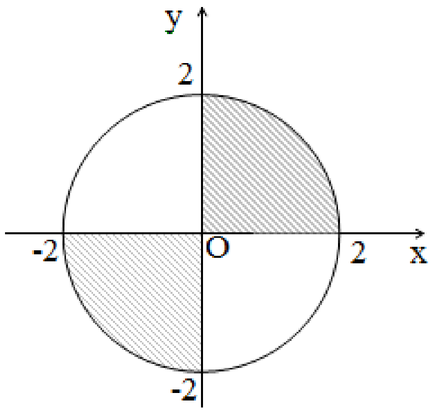


Рис. 1.12. Геометрична інтерпретація множини з прикладу 7.

Аналітичний вираз $x^2 + y^2 \leq 4$ на площині R^2 задає круг радіуса 2, центр якого знаходиться у точці (0;0). У свою чергу, виразу$x \cdot y \geq 0$ задовольняють перший та третій квадрант площини R^2. Їх спільна частина подана на рис. 1.12.

Приклад 8. Визначити якими властивостями володіє бінарне відношення $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ (2,1),(3,2),(3,3)\}$ на множині $X = \{1,2,3\}$.

Розв'язання

Оскільки для точки $2 \in X$ пара $(2,2) \notin R$,то дане відношення не рефлексивне. Врахувавши, що упорядкована пара $(1,3) \in R$,а упорядкована пара $(3,1) \notin R$– вказане відношення не симетричне. Відношення R не є антисиметричним, бо $(1,2) \in R$ і $(2,1) \in R$, але при цьому $1 \neq 2$.

Приклад 9. Нехай на множині дійсних чисел R задані такі бінарні відношення: $C_1 = \{(x, y)|\ x = y^2\}$, $C_2 = \{(x, y)|\ x + y \leq 2\}$. Знайдіть обернені відношення до заданих та всі можливі композиції.

Розв'язання

Згідно з означенням відношення, оберненого до даного, маємо:

$C_1^{-1} = \{(y, x)|\ (x, y) \in C_1\} = \{(x, y)|\ y = x^2\}$;

$C_2^{-1} = \{(y, x)|\ (x, y) \in C_2\} = \{(x, y)| x + y \leq 2\} = C_2$.

Розглянемо тепер можливі композиції вказаних відношень:

$C_2 * C_1 = \{(x, y)|\ \exists z\ (x, z) \in C_1, (z, y) \in C_2\} = \{(x, y)|\ \exists z\ \ x = z^2, z + y \leq 2\} = \{(x, y)|\ x \geq 0, \left[\begin{matrix} \sqrt{x}+y\leq 2, \\ -\sqrt{x}+y\leq 2 \end{matrix}\right.\}$;

$C_1 * C_2 = \{(x, y)|\ \exists z\ (x, z) \in C_2, (z, y) \in C_1\} = \{(x, y)|\ \exists z\ \ x + z \leq 2, z = y^2\} = \{(x, y)|\ x + y^2 \leq 2\}$.

Приклад 10. Нехай ρ, φ– бінарні відношення, які задані на множині X. Довести, що якщо ρ, φ – симетричні відношення, то й $(\rho * \varphi)^{-1}$ – симетричне відношення.

Доведення

Нехай $(x, y) \in (\rho * \varphi)^{-1}$, доведемо, що $(y, x) \in (\rho * \varphi)^{-1}$.

$(x, y) \in (\rho * \varphi)^{-1} \Longrightarrow (y, x) \in \rho * \varphi \Longrightarrow \begin{cases} (y, x) \in \rho, \\ (y, x) \in \varphi; \end{cases} \begin{cases} (x, y) \in \rho, \\ (x, y) \in \varphi; \end{cases} \Longrightarrow$ $(x, y) \in \rho * \varphi \Rightarrow (y, x) \in (\rho * \varphi)^{-1}$.

Що й слід було довести.

Приклад 11. Перевірити, чи є відношення D відношенням еквівалентності на R, якщо $D = \{(x; y)|\ cosx = cosy\}$.

Розв'язання

Згідно з означення еквівалентності, слід перевірити чи є відношення D рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Оскільки $cosx = cosx$ для будь-якого $x \in R$, тобто для будь-якого $a \in R$ справджується $(a; a) \in D$. Отже відношення D є рефлексивним.

Для будь-яких $x, y \in R$ із $(x, y) \in D$випливає, що $cosx = cosy$, а значить $cosy = cosx$, тому $(y, x) \in D$. Таким чином, доведено, що відношення D є симетричним.

Якщо для будь-яких $x, y \in R$ з $(x, y) \in D$ випливає, що $cosx = cosy$. Аналогічно для будь-яких $y, z \in R$ з $(y, z) \in D$ випливає, що $cosy = cosz$. На основі цього можна стверджувати, що $cosx = cosy = cosz$. Із вказаних тверджень можна зробити висновок, що для будь-яких $x, z \in R$

справджується рівність $cosx = cosz$, а тому $(x, z) \in D$. Отже було доведено, що для будь-яких $x, y, z \in R$ із того, що $(x, y) \in D$ і $(y, z) \in D$ випливає $(x, z) \in D$. Тому відношення D є транзитивним.

Оскільки відношення D є рефлексивним, симетричним та транзитивним, то відношення D є еквівалентним.

Приклад 12. Нехай m – деяке натуральне число. На множині цілих чисел задано бінарне відношення $R = \{(x, y) | (x, y) \in Z \times Z,\ x - y \ \vdots\ m\}$ (символ $\vdots$ позначає операцію «ділитися націло»). Побудувати фактор-множину Z/R.

Розв'язання

Побудуємо класи еквівалентності, що породжені елементами: $0,1, \dots, m-1 \in Z$. Розпочнемо побудову класів з класу еквівалентності, який породжений елементом $0 \in Z$

$[0] = \{y | y \in Z, 0 \approx y\} = \{y |\ y \in Z, 0 - y \vdots m\} = \{y |\ y \in Z, \exists k \in Z,\ 0 - y = km\} = \{y |\ y \in Z, \exists k \in Z,\ y = -km\} = \{0, -m, m, \dots, -km, km, \dots\}$.

Побудуємо клас еквівалентності, що породжений 1

$[1] = \{y | y \in Z, 1 \approx y\} = \{y |\ y \in Z, 1 - y \vdots m\} = \{y |\ y \in Z, \exists k \in Z,\ 1 - y = km\} = \{y |\ y \in Z, \exists k \in Z,\ y = 1 - k \cdot m\} = \{1, 1 - m, 1 + m, \dots, 1 - km, 1 + km, \dots\}$.

Аналогічно будуємо інші класи, які не перетинаються і при об'єднанні утворюють множину Z.

Отже, $Z/R = \big\{\{n, n - m, n + m, \dots,\ n - km, n + km, \dots\} \big|\ n = 0, 1, 2, \dots, m - 1\big\}$.

Приклад 13. На множині $X = \{a, b, c\}$ задано відношення $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, b)\}$. Добудувати дане відношення до рефлексивного замикання відношення R.

Розв'язання

Оскільки відношення R не є рефлексивним, то його необхідно добудувати до такого. Для цього слід додати пари (b, b) і (c, c).

Отже, рефлексивним замиканням буде відношення $R_1 = R \cup \{(b, b), (c, c)\}$.

Приклад 14. На множині $X = \{a, b, c\}$ задано відношення $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, b), (a, c)\}$. Добудувати дане відношення до симетричного замикання відношення R.

Розв'язання

Для отримання симетричного замикання із R достатньо додати пари (b,c) і (c,a).

Отже, симетричним замиканням буде відношення $R_1 = R \cup \{(b,c),(c,a)\}$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Нехай A={1, 2} і B={2, 3, 4}. Знайти

а) $A \times B$, б) $B \times A$,

в) B^2; г) $(B \backslash A) \times A$;

ґ) $A \times B \times A$; д) $A \times (A \cup B)$.

2. Визначити проекції множин векторів X на першу вісь, на третю, а також на першу й третю осі:

а) $X = \{(2,3,1,1),(2,2,3,1),(1,2,3,1)\}$;

б) $X = \{(1,3,5),(2,4,6),(3,5,7)\}$

3. Для відрізків [a, b] і [c, d] (0<a<b, 0<c<d) дійсної прямої R дати геометричну інтерпретацію множини

а) $[a,b]^2$; б) $[a,b]^3$;

в) R^2; г) R^3.

4. Нехай задано множини $A = \{u,x,y,z\}$ і $B = \{1,2,3,4\}$, а також відповідності:

$R_1 = \{(u,1),(u,3),(u,4),(x,1),(x,3),(y,3),(y,4),(z,4)\}$;

$R_2 = \{(u,2),(u,3),(x,2),(x,3),(y,1),(z,2),(z,3)\}$;

$R_3 = \{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2),(z,1),(z,4)\}$.

Задати матрицею відповідності, графіком та графом дані відношення.

5. Нехай задано множини $A = \{a,b,c,d\}$ і $B = \{1,2,3,4,5\}$, а також відповідності:

$C_1 = \{(a,1),(a,3),(a,5),(b,1),(b,3),(d,3),(d,4),(d,5)\}$;

$C_2 = \{(a,4),(a,5),(b,2),(b,3),(c,1),(d,2),(d,3)\}$;

$C_3 = \{(b,1),(b,2),(c,1),(c,2),(d,1),(d,5)\}$.

Визначити:

а) $C_1 \cup C_2$; б) $C_1 \cup C_3$;

в) $C_1 \cap C_2$; г) $C_1 \backslash C_3$;

ґ) $\overline{C_1}$; д) $\overline{C_2}$.

6. Нехай на множині дійсних чисел R задані такі бінарні відношення: $C_1 = \{(x,y) | \, x = y^2\}$, $C_2 = \{(x,y) | \, x + y \le 2\}$, $C_3 = \{(x,y) \; | \, (x+y) \in Z\}$.

Знайдіть:

а) C_3^{-1}; б) $C_1 * C_3$;

в) $C_2 * C_3$; г) $C_3 * C_1$.

7. Нехай X – множина людей, визначте композицію відношень:

а) ρ≡«бути дружиною», φ≡«бути батьком»;

б) ρ≡«бути братом», φ≡«бути батьком»;

в) ρ≡«бути братом», φ≡«бути матір'ю»;

г) ρ≡«бути сестрою», φ≡«бути матір'ю».

8. Визначити якими властивостями володіє кожне із бінарних відношень

а) $R = \{(x, y) |\ x - y \in Z\}$ на множині $X = Z$;

б) $R = \{(x, y) |\ 2x = 3y\}$ на множині $X = R$;

в) $R = \{(x, y) |$ пряма x перетинає пряму $y\}$ на множині прямих X;

г) $R = \{(x, y) |\ x = y + 2\}$ на множині $X = N$.

9. Якими властивостями володіють відношення, що задані на множині натуральних чисел:

а) R_1 – „бути не більшим $\leq$";

б) R_2 – „бути дільником";

в) R_3 – „бути рівним".

10. Нехай ρ, φ, γ – бінарні відношення, які задані на множині X. Довести, що $(\rho \backslash \varphi) * \gamma \supseteq (\rho * \gamma)(\varphi * \gamma)$.

11. Нехай X – довільна множина, позначимо i_X–відношенняна множині X такого виду $i_X = \{(x, y) | x = y\}$. Довести, що для будь-якого відношення ρ між елементами множин A і B виконується тотожність $i_B * \rho = \rho$, $\rho * i_A = \rho$.

12. Нехай задано такі відношення на множині R:

$C_1 = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \geq 1\}$,

$C_2 = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 3\}$,

$C_3 = \{(x, y) | y^2 - |x| \geq 0\}$.

Зобразити графічно результати операцій:

а) $\overline{C_1 \cap C_2} \cap C_3$;

б) $(C_1 \cup C_2) \backslash C_3$.

13. Зобразити на площині R^2 підмножину, яка задана аналітичним виразом:

а) $\{(x, y) \in R^2 | (y \leq 2) \cap (y \geq x^2 + 1)\} \cup \{(x, y) \in R^2 | (y \geq 0) \cap$
$\cap\ (y \leq 1 + x^2) \cap (|x^2| \leq 0{,}1\}$;

б)$\{(x, y) \in R^2 | (x^2 + y^2 \leq 1) \cap (xy > 0) \cap (y > x)\}$;

в)$\{(x,y) \in R^2 | (\sqrt{x^2+y^2} \le 3) \cap (x \le 0) \cap (1 \le y \le 3)\}$;

г) $\{(x,y) \in R^2 | (x^2+y^2 \le 1) \cap (y \le -x^2) \cap (y \ge x^2+1)\}$.

14. Укажіть відношення, які є відношенням еквівалентності:

а) книга x має однакову ціну із книгою y;

б) Марія запросила в гості до себе Любов;

в) Сидоренко знайомий із Богуном;

г) трикутник x подібний трикутнику y;

ґ) пряма x є перпендикулярною до прямої y;

д) Іваненко зателефонував на роботу Вернидубу.

15. Довести, що бінарне відношення на множині цілих чисел $R = \{(x,y) | (x,y) \in Z \times Z,\ x = y\}$ є відношенням еквівалентності. Побудувати відповідну йому фактор-множину Z/R.

16. На площині A вибрана деяка декартова прямокутна система координат та задані відношення $R_1,\ R_2,\ R_3$:

$R_1 = \{((a_1,a_2),(b_1,b_2)) | ((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \in A \times A,\ a_1 = b_1,\ a_2 - b_2 \in Z\}$;

$R_2 = \{((a_1,a_2),(b_1,b_2)) | ((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \in A \times A,\ a_1 - b_1 \in Z,\ a_2 - b_2 \in Z\}$;

$R_3 = \{((a_1,a_2),(b_1,b_2)) | ((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \in A \times A, a_1 - b_1 + a_2 - b_2 \in Z\}$.

Дослідити, чи будуть R_1, R_2, R_3 відношеннями еквівалентності, якщо так – побудувати відповідні фактор-множини.

17. Придумати мінімальне за числом елементів відношення еквівалентності R на множині X = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ таке, що $(1,2) \in R$ і $(2,3) \in R$.

18. Довести, що відношення «бути рівним» на будь-якій множині є відношенням еквівалентності.

19. Навести приклади відношень еквівалентності, використовуючи свої знання з математики та інформатики.

20. На множині $X = \{a, b, c\}$ задано відношення R. Добудувати дане відношення до рефлексивного та симетричного замикання відношення R.

а) $R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(c,b)\}$;

б) $R = \{(a,b),(a,c),(b,b),(c,b)\}$;

в) $R = \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,b)\}$.

§4. Нечіткі множини та відношення

Основні теоретичні відомості

Дане поняття було введене Л. А. Заде. Дотримуючись його ідей, уведемо нечітку множину. Розглянемо деяку чітку множину **U** для якої задане відображення: $U \xrightarrow{\mu_A} [0;1]$. Функцію μ_Aчасто називають характеристичною.

У теорії нечітких множин характеристична функція μ_A має такий зміст:

- $\mu_A(x) = 1$, якщо елемент x повністю належить нечіткій множині А ($x \in A$);
- $\mu_A(x) = 0$, якщо елемент x повністю не належить нечіткій множині А ($x \notin A$);
- $0 < \mu_A(x) < 1$, якщо елемент x частково належить нечіткій множині А.

Характеристична функція μ_Aназивається **функцією належності**, а її значення $\mu_A(x)$ – **степенем належності** (нечіткості) елемента x нечіткої множини А. Найбільшу нечіткість мають елементи з $\mu_A(x) = 0{,}5$.

Нечіткою множиною А називається сукупність пар (x; μ_A(x)) таких, що $x \in U$ і $\mu_A(x) \in [0;1]$ – число.

Даний тип множин відображає деякі лінгвістичні поняття або ж нечіткі числа. У літературі можливі такі записи нечітких множин, що задані на скінченному універсумі:

$A = \{(x_1; 0{,}2), (x_2; 0{,}6), (x_3; 0), (x_4; 0{,}8), (x_5; 1), (x_6; 0{,}1)\}$;

$A = \{(x_1/0{,}2), (x_2/0{,}6), (x_3/0), (x_4/0{,}8), (x_5/1), (x_6/0{,}1)\}$;

$A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}6), (x_3|0), (x_4|0{,}8), (x_5|1), (x_6|0{,}1)\}$.

Часто нечітку множину задають за допомогою таблиць. Попередній приклад можна записати так, як подано у таблиці 1.

Таблиця 1. Подання нечіткої множини

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\mu_A(x)$	0,2	0,6	0	0,8	1	0,1

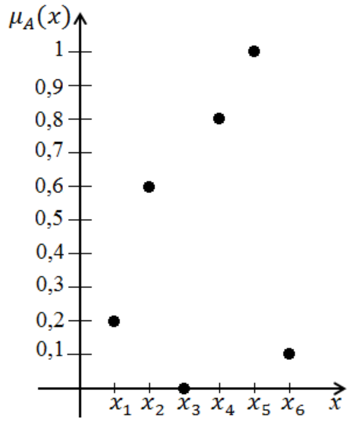


Рис. 1.13. ***Діаграма Заде скінченного універсуму***

Для кращого розуміння природи нечіткої множини часто їх зображають як графік функції належності. Такі графіки називають діаграмами Заде. На рис. 1.13 подано діаграма Заде для розглянутого приклада.

Сингельтон – це пара (x; μ_A(x)), де на першому місці стоїть єдиний елемент $x \in U$, а на другому – його степінь належності.

Досить часто розглядають нечітку множину як сукупність сингельтонів. У наведеному прикладі сингельтоном є $(x_1; 0{,}2)$ тощо.

Сингельтон A_a– це нечітка множина, що має тільки один елемент a з ненульовим степенем належності $\mu_A(a)$.

Сингельтон переважно записується у вигляді $\mu_A(a)/x$, де степінь належності стоїть перед своїм елементом. Тут знак / має зміст знака розділення степеня й елемента, а не знак ділення. Сингельтони з нулем часто опускають із запису.

У випадку дискретної універсальної множини цей запис має вигляд:

A=$\mu_A(x_1)/x_1 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n$.

Скорочений вигляд цього запису буде таким:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(x_i)/x_i.$$

Коли ж універсальна множина неперервна, то

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(x)/[x_{i_1}, x_{i_2}].$$

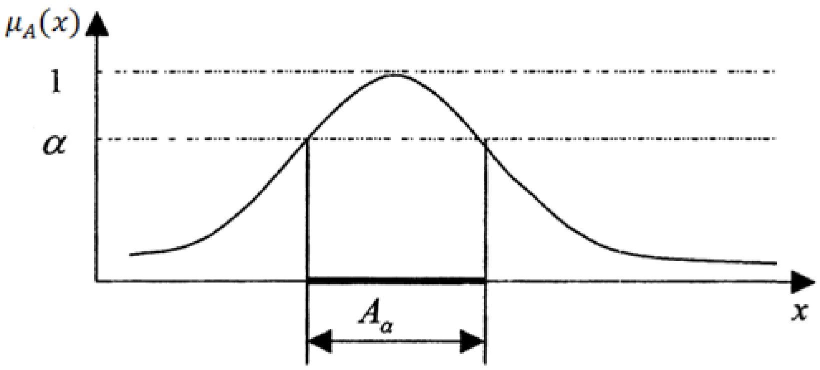


Рис. 1.14

***α* -рівень нечіткої множини А** – це чітка множина $A_\alpha = \{x| \ \mu_A(x) \geq \alpha\} \subset U$.

Геометричну інтерпретації α -рівня нечіткої множини А подано на рис. 1.14.

Найближча чітка множина χ_A до нечіткої множини А – це **його 0,5-рівень $A_{0,5}$.**

Рівень записують у вигляді α/A_α, де після значення степеня нечіткості стоїть його рівнева множина.

Розглянемо деякі характеристики нечітких множин.

Нечіткі множини А і В на одній і тій самій універсальній множині U називаються *рівними* тоді і тільки тоді, коли їх функції належності набувають рівних значень на всій універсальній множині.

Рівні нечіткі множини позначатимемо так: А=В. Скорочено це ж саме можна записати так: $A = B \ \Leftrightarrow \forall x \in U \ \mu_A(x) = \mu_B(x)$.

Нечітка множина А називається **підмножиною нечіткої множини В** тоді і тільки тоді, коли степені належності всіх елементів універсальної множини в першій множині не перевищують степені належності у другій.

Як і у традиційній теорії, у теорії нечітких множин дане порівняння множин позначатимемо так: $A \subset B$.

Нечіткі множини А і В порівнювані у тому й тільки в тому випадку, коли $A \subset B$, або $B \subset A$, або і те й інше. Якщо ж множини не можна порівняти, то їх називають непорівнюваними.

Нечітка множина А називається **універсальною,** або **універсумом,** якщо $\forall x \in U \ \mu_A(x) = 1$. Ця нечітка множина співпадає з чіткою універсальною множиною U.

Нечітка множина А називається **порожньою** і позначається $\emptyset$, коли $\forall x \in U$ виконується рівність $\mu_A(x) = 0$**.** Порожня множина – найменша на будь-якій універсальній множині, оскільки для будь-якої нечіткої множини А та для будь-якої універсальної множини завжди справедливе порівняння $\emptyset \subset A \subset U$.

Потужність нечіткої множини А – це число $|A|$, яке у випадку дискретної універсальної множини визначається як сума всіх степенів належності нечіткої множини

$$|A| = \sum_{x \in U} \mu_A(x),$$

а у випадку неперервного універсуму – як площа, що обмежена графіком функції належності й віссю абсцис

$$|A| = \int_U \mu_A(x)dx.$$

Функцію належності нечіткої множини А характеризують наступні поняття: основа, ядро, межа, точки переходу та висота. Їх ще називають *параметрами нечітких множин.*

Основою нечіткої множини А називається чітка множина елементів універсальної множини, у яких степінь нечіткості більший за нуль.

Основу позначатимемо supp(A). Скорочено дане означення можна записати так: $\mathrm{supp(A)} = \{\mathrm{x} | \ \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) > 0\}$.

Ядром нечіткої множини А називається чітка множина елементів універсальної множини, у яких степінь нечіткості дорівнює 1.

Ядро позначатимемо core(A). Скорочено дане означення можна записати так: $\mathrm{core(A)} = \{\mathrm{x} | \ \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) = 1\}$.

Межею нечіткої множини А називається чітка множина елементів універсальної множини, у яких степінь нечіткості відрізняється від 0 і 1.

Межу позначатимемо boun(A). Скорочено дане означення можна записати так: $\mathrm{boun(A)} = \{\mathrm{x} | \ 0 < \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) < 1\}$.

Точками переходу нечіткої множини А називається чітка множина елементів універсальної множини, у яких степінь нечіткості дорівнює 0,5.

Точку переходу позначатимемо cros(A). Скорочено дане означення можна записати так: $\mathrm{cros(A)} = \{\mathrm{x} | \ \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) = 0{,}5\}$.

Висотою нечіткої множини А називається величина, яка дорівнює верхній межі всіх степенів нечіткої множини.

Висоту позначатимемо alt(A). Скорочено дане означення можна записати так: $alt(A) = \sup\limits_{x \in U} \ \mu_A(x)$.

Нечітка множина А називається **нормальною**, якщо $\underset{x \in U}{supp} \ \mu_A(x) = 1$. Коли ж ця умова не виконується, то нечітка множина А називається **субнормальною**.

На рис. 1.15 зображено нормальну нечітку множину А та субнормальну нечітку множину В.

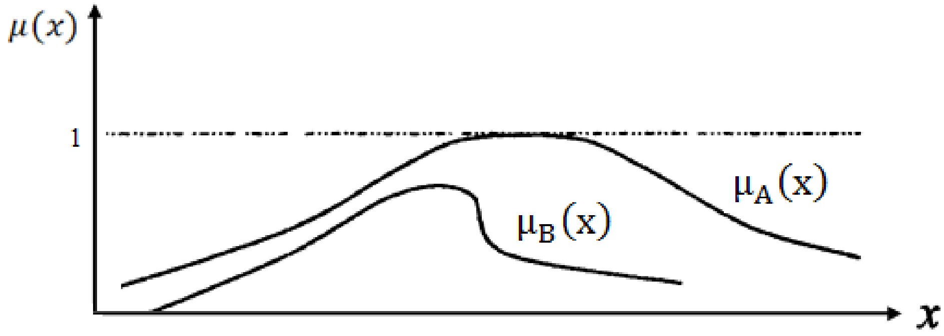


Рис. 1.15

На рис.1.16 зображено всі ці характеристики на діаграмі Заде.

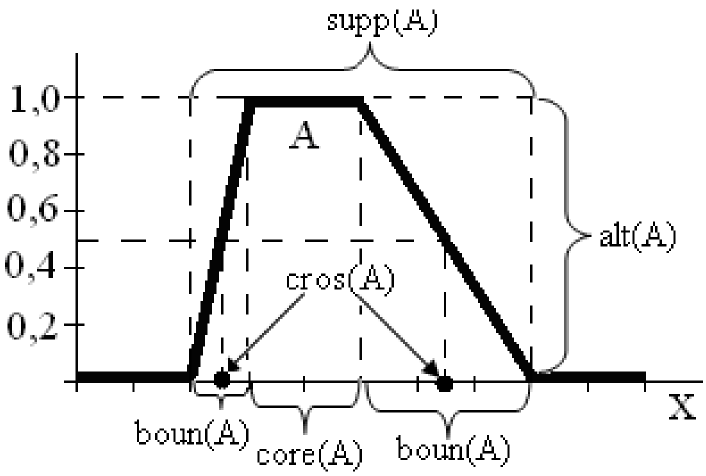
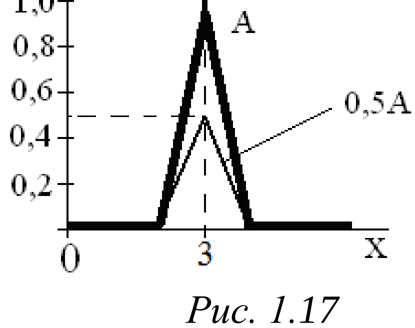


Рис. 1.16. ***Діаграма Заде з характеристиками***

Над нечіткими множинами можна виконувати різні операції.

Доповненням нечіткої множини A називається нечітка множина $\bar{A}$ з функцією належності $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Наприклад, нехай нечітка множина A – нечітка множина «біля 3» задана графічно своєю функцією належності, яка зображена на рис. 1.17 тоді, у результаті виконання операції доповнення нечіткої множини, отримають множину, яка зображена на рис. 1.18.



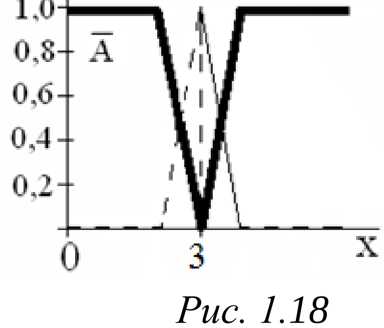


Рис. 1.17 *Рис. 1.18*

Добуток на число *a* нечіткої множини А, де $0 \le a \le 1/alt(A)$, – це нечітка множина$a \cdot A$ з функцією належності $\mu_{a \cdot A}(x) = a \times \mu_A(x)$.

На рис.1.17 зображено добуток нечіткої множини А на число 0,5.

Степенем k нечіткої множини А називається нечітка множина A^k з функцією належності $\mu_{A^k}(x) = \left(\mu_A(x)\right)^k$.

При $k = 2$ степінь називається **концентрацією нечіткої множини А** і позначається con(A).

При $k = 0{,}5$ степінь називається **розтягом нечіткої множини А** і позначається dil(A).

На рис.1.19 показана графічна інтерпретація концентрації, а на рис.1.20 – розтягу нечіткої множини.

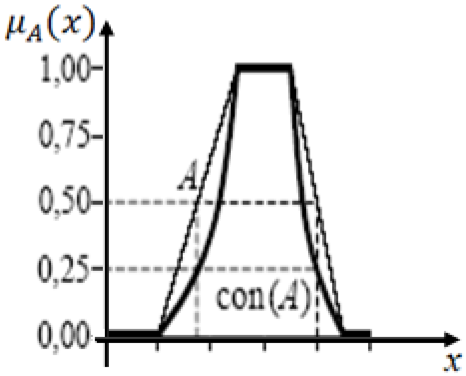


Рис. 1.19

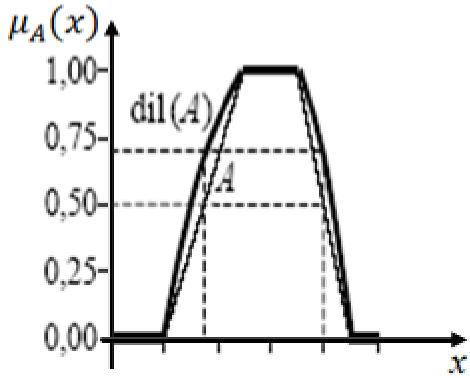


Рис. 1.20

Max-об'єднанням двох нечітких множин А і В називається нова нечітка множина $A \cup B$ із такою функцією належності:

$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

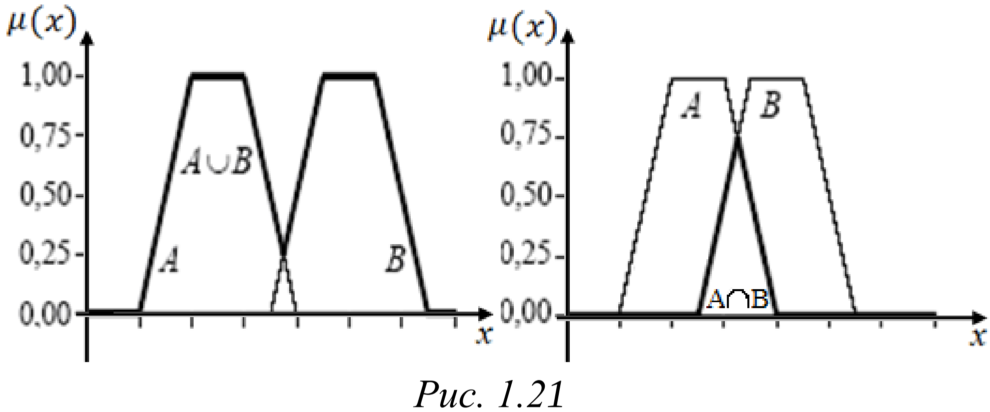


Рис. 1.21

Min-перерізом двох нечітких множин А і В називається така нова нечітка множина $A \cap B$ із такою функцією належності:

$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

На рис.1.21 показана графічна інтерпретація max-об'єднання (ліворуч) та min-перерізу (праворуч).

Алгебраїчним об'єднанням двох нечітких множин A і B називається така нова нечітка множина $A \dot{+} B$ із такою функцією належності: $\mu_{A \dot{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

Алгебраїчним перерізом двох нечітких множин A і B називається нова нечітка множина $A \cdot B$ із такою функцією належності: $\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

На рис. 1.22 показана графічна інтерпретація алгебраїчного об'єднання (ліворуч) та алгебраїчного перерізу (праворуч).

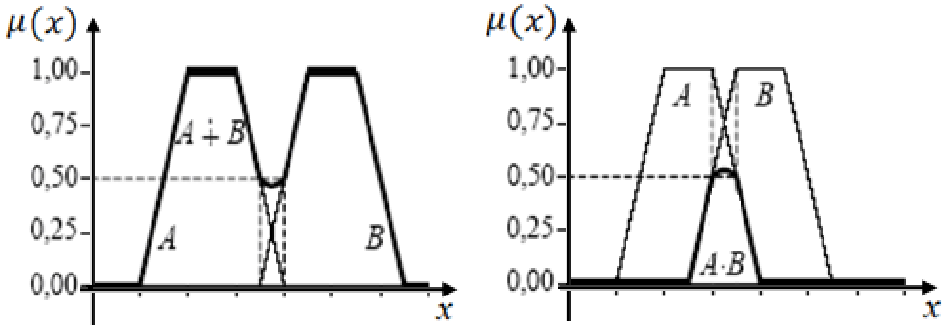


Рис. 1.22

Різницею двох нечітких множин A і B називається нова нечітка множина $A \backslash B$ із такою функцією належності:

$$\mu_{A\backslash B}(x) = \max\{\mu_A(x) - \mu_B(x), 0\}.$$

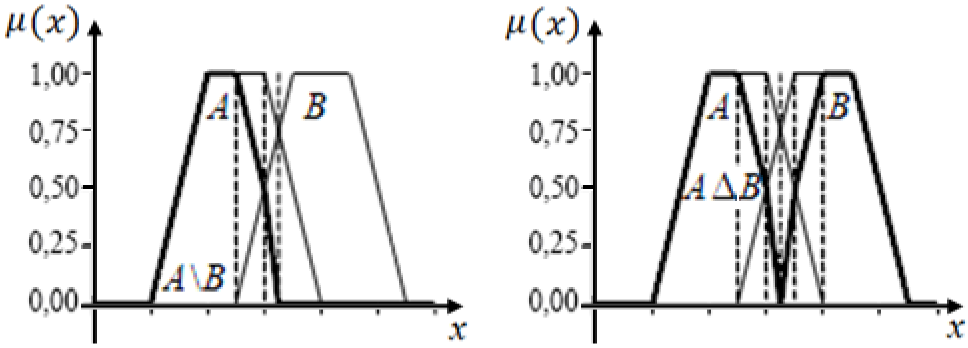


Рис.1.23

Симетричною різницею двох нечітких множин A і B називається нова нечітка множина $A \Delta B$ із такою функцією належності:

$$\mu_{A\Delta B}(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)|.$$

На рис.1.23 показана графічна інтерпретація різниці (ліворуч) та симетричної різниці (праворуч) двох нечітких множин A і B.

Властивості операцій над нечіткими множинами:

1) комутативність: $A \cup B = B \cup A$;

$$A \cap B = B \cap A;$$

$$A \dotplus B = B \dotplus \mathrm{A};$$

$$A \cdot B = B \cdot A;$$

2) асоціативність: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

$$A \dotplus (B \dotplus C) = (A \dotplus B) \dotplus C;$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$

3) дистрибутивність: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

4) ідемпотентність: $A \cup A = A$;

$$A \cap A = A;$$

$$A \dotplus A \neq A;$$

$$A \cdot A \neq \emptyset;$$

5) поглинання: $A \cup (A \cap B) = A$;

$$A \cap (A \cup B) = A;$$

$$A \dotplus (A \cdot B) \neq A;$$

$$A \cdot (A \dotplus B) \neq A;$$

6) інволютивність: $\bar{\bar{A}} = A$;

7) закони де Моргана: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$

$$\overline{A \dotplus B} = \bar{A} \cdot \bar{B};$$

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} \dotplus \bar{B};$$

8) закони доповнюваності: $A \cup \bar{A} \neq U$;

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset;$$

$$A \dotplus \bar{A} \neq U;$$

$$A \cdot \bar{A} \neq \emptyset;$$

9) універсальні межі: $A \cap \emptyset = \emptyset; A \cup \emptyset = A$;

$$A \cdot \emptyset = \emptyset; A \dotplus \emptyset = A;$$

$$A \cdot U = A; A \dotplus U = U;$$

10) монотонність: якщо $A \subset B$, то:

$$A \cup C \subset B \cup C;$$

$$A \cap C \subset B \cap C;$$

$$A \dotplus C \subset B \dotplus C;$$

$$A \cdot C \subset B \cdot C.$$

Декартовим добутком двох нечітких множин A і B, які можуть належати різним універсумам $A \subset U$ і $B \subset V$, називається така нова нечітка множина $A \times B$ на декартовому добутку чітких універсумів $U \times V$, що має функцію належності:

$$\mu_{A\times B}(x; y) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(y)\}.$$

Нечітким n-арним відношенням називається нечітка множина R із функцією належності $\mu_R(x_1, \dots, x_n)$, яка задана на чіткому декартовому добутку n довільних універсальних множин $U_1 \times \dots \times U_n$.

Нечітким n-арним відношенням на множині називається нечітка множина R із функцією належності $\mu_R(x_1, \dots, x_n)$, яка задана на чіткому декартовому добутку поднакових універсальних множин $U_1 \times \dots \times U_n = U^n$.

Нечітким бінарним відношенням називається нечітка множина R із функцією належності $\mu_R(x, y)$, яка задана на чіткому декартовому добутку двох універсальних множин $U_1 \times U_1$.

Нечітким бінарним відношенням на множині називається нечітка множина R із функцією належності $\mu_R(x, y)$, яка задана на чіткому декартовому добутку двох універсальних множин $U_1 \times U_2 = U^2$.

Нечіткі відношення можна задавати: словесно; аналітично; тривимірним графіком; списками впорядкованих пар із функцією належності; як об'єднання сингельтонів; як сукупність сингельтонів, які об'єднані знаком суми; у вигляді стандартного запису xRy; зваженим орієнтованим графом; таблицею з невід'ємних дійсних чисел; матрицею з невід'ємних дійсних чисел.

Підкреслимо, що нечіткі відношення є нечіткими множинами, а тому залишаються в силі раніше уведені означення операцій.

Нечітке бінарне відношення **R** називається **рефлексивним**, якщо $\mu_R(x, x) = 1$ для $\forall x \in U$.

Нечітке бінарне відношення **R** називається **антирефлексивним**, якщо $\mu_R(x, x) < 1$ для $\forall x \in U$.

Нечітке бінарне відношення **R** називається **сильноантирефлексивним**, якщо $\mu_R(x, x) = 0$ для $\forall x \in U$.

Нечітке бінарне відношення **R** називається **іррефлексивним**, якщо $(\exists x \in U)\ \mu_R(x, x) = 1$ і $(\exists x \in U)\ \mu_R(x, x) < 1$.

Нечітке бінарне відношення **R** називається **сильноіррефлексивним**, якщо $(\exists x \in U)\ \mu_R(x, x) = 1$ і $(\exists x \in U)\ \mu_R(x, x) = 0$.

Нечітке бінарне відношення **R** називається **симетричним**, якщо для $(\forall x, y \in U)\ \mu_R(x,y) = \mu_R(y,x)$.

Нечітке бінарне відношення **R** називається **асиметричним**, якщо для $(\forall x, y \in U,\ x \neq y)\ \mu_R(x,y) \neq \mu_R(y,x)$.

Нечітке бінарне відношення **R** називається **антисиметричним**, якщо $(\exists x, y \in U,\ x \neq y)\ \mu_R(x,y) = \mu_R(y,x)$ і $(\exists x, y \in U,\ x \neq y)\ \mu_R(x,y) \neq \mu_R(y,x)$.

Нечітке бінарне відношення **R** називається **транзитивним**, якщо $\mu_R(x,z) = max_y(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z))$ для $\forall x, y, z \in U$.

Оберненим нечітким відношенням R, заданим на $U \times V$, називається відношення R^{-1} на $V \times U$ з $\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(y,x)$.

Нехай $R_1: U \times V \to [0;1]$ і $R_2: V \times W \to [0;1]$ – нечіткі відношення.

Max-min композицією двох відношень R_1 і R_2 називається відношення $R_1 \circ R_2$ на $U \times W$ з

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,y) = \max_{y \in V} min(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z)).$$

Max-prod композицією двох відношень R_1 **і** R_2 називається відношення $R_1 \cdot R_2$ на $U \times W$ з

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x,y) = \max_{y \in V}(\mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(y,z)).$$

Max-* композицією двох відношень R_1 **і** R_2 називається відношення $R_1 * R_2$ на $U \times W$ з

$$\mu_{R_1 * R_2}(x,y) = \max_{y \in V}(\mu_{R_1}(x,y) * \mu_{R_2}(y,z)).$$

Наведемо деякі властивості операцій нечітких відношень:

1) асоціативність: $(R_1 * R_2) * R_3 = R_1 * (R_2 * R_3)$;

2) монотонність:якщо $R_1 \subset R_2$, то $R_3 * R_1 \subset R_3 * R_2$, $R_1 * R_3 \subseteq R_1 * R_3$;

3) дистрибутивність: $R_1 * (R_2 \cup R_3) = (R_1 * R_2) \cup (R_1 * R_3)$;

4) інволютивність: $(R^{-1})^{-1} = R$;

5) закон де Моргана: $(R_1 * R_2)^{-1} = R_2^{-1} * R_1^{-1}$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. На скінченному універсумі C={a, b, c, d, e, f, g} задана нечітка множина A={*(b;0,25), (c;0,5), (d;1), (e;0,75), (f;0,5)*}. Записати дану множину у вигляді сингельтона і зобразити її на діаграмі Заде. Визначити всі її не порожні ненульові рівні, найближчу чітку множину, параметри та потужність.

Розв'язання

Оскільки у записі множини відсутні елементи a і c, то їх степені належності дорівнюють 0. Запишемо нечітку множину у вигляді сингельтона:

$A = 0/a + 0{,}25/b + 0{,}5/c + 1/d + 0{,}75/e + 0{,}5/f + 0/g.$

Зобразимо нечітку множину А на діаграмі Заде (див. рис. 1.24).

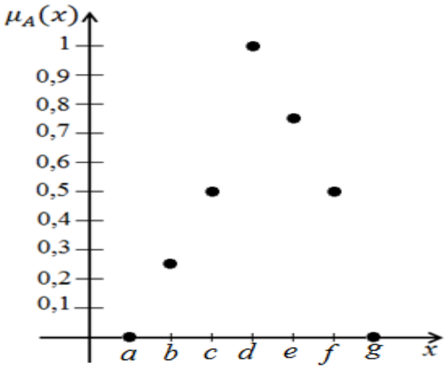


Рис. 1.24

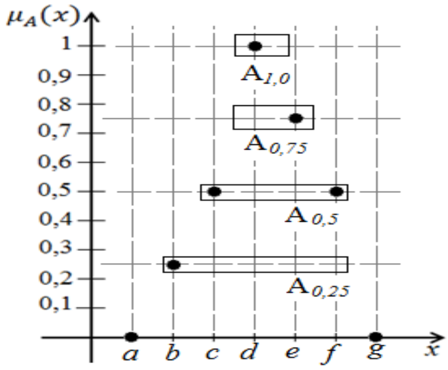


Рис. 1.25

Для кращого розуміння зобразимо непорожні ненульові рівні на діаграмі Заде нечіткої множини А (див. рис. 1.25).

Тепер запишемо непорожні ненульові рівні нечіткої множини А:

$A_{0,25} = \{b, c, d, e, f\}$,

$A_{0,5} = \{c, d, e, f\}$,

$A_{0,75} = \{d, e\}$,

$A_{1,0} = \{d\}$.

Можна даний перелік записати скорочено:

А=*0,25/{b, c, d, e, f}+0,5/{c, d, e, f}+0,75/{d, e}+1/{d}*, універсум С={a, b, c, d, e, f, g}.

Використовуючи діаграму Заде (див. рис. 1.26) та означення найближчої чіткої множини, знайдемо найближчу чітку множину для А: $\chi_A = \{c, d, e, f\}$.

Знайдемо параметри нечіткої множини А, використовуючи відповідні означення.

Основою нечіткої множини А буде supp(A)={ b, c, d, e, f}.

Ядро нечіткої множини А: core(A)={d}.

Межа нечіткої множини А: boun(A)={ b, c, e, f}.

Точки переходу нечіткої множини A: cros(a)={c, f}.

Висота нечіткої множини A: alt(A)=1.

Виходячи з параметрів нечіткої множини А, можна стверджувати, що вона є нормальною.

Знайдемо потужність множини A: $|A| = 0{,}25 + 0{,}5 + 1 + 0{,}75 + +0{,}5 = 3$.

Приклад 2. На скінченному універсумі C={a, b, c, d, e, f, g} задана нечітка множина A={*(b;0,25), (c;0,5), (d;1), (e;0,75), (f;0,5)*}. Знайти доповнення до множини A, $0{,}75 \cdot$ A, її концентрацію та розтяг.

Розв'язання

З означення доповнення до нечіткої множини маємо:

$\bar{A} = \{(a;1), (b;0{,}75), (c;0{,}5), (d;0), (e;0{,}75), (f;0{,}5), (g;1)\}$.

Застосувавши означення добутку нечіткої множини на число, отримаємо:

$0{,}75 \cdot \mathrm{A} = \{(a;0), (b;0{,}188), (c;0{,}375), (d;0{,}75), (f;0{,}375),\ (g;0)\}$.

Запишемо концентрацію і розтяг нечіткої множини А:

con(A)=*0/a+0,063/b+0,25/c+1/d+0,563/e+0,25/f+0/g*;

dil(A)= *0/a+0,5/b+0,707/c+1/d+0,866/e+0,707/f+0/g*.

Приклад 3. На скінченному універсумі C={a, b, c, d, e, f, g} задані нечіткі множини A={*(a;0), (b;0,25), (c;0,5), (d;1), (e;0,75), (f;0,5), (g;0)*} та B={*(a;0,4), (b;0,6), (c;0,9), (d;0,6), (e;0,5), (f;0,3), (g;0)*}.

Записати сингельтони $A \cup B$, $A \cap B$, $A \dot{+} B$, $A \cdot B$, $A \backslash B$, $A \Delta B$ та зобразити їх на діаграмах Заде.

Розв'язання

Використовуючи відповідні означення знаходимо :

$A \cup B$ =*0,4/a+0,6/b+0,9/c+1/d+0,75/e+0,5/f+0/g*;

$A \cap B$ =*0/a+0,25/b+0,5/c+0,6/d+0,5/e+0,3/f+0/g*;

$A \dot{+} B$=*0,4/a+0,7/b+0,95/c+1/d+0,875/e+0,65/f+0/g*;

$A \cdot B$=*0/a+0,15/b+0,45/c+0,6/d+0,375/e+0,15/f+0/g*;

$A \backslash B$=*0/a+0/b+0/c+0,4/d+0,25/e+0,2/f+0/g*;

$A \Delta B$=*0,4/a+0,35/b+0,4/c+0,4/d+0,25/e+0,2/f+0/g*.

Зобразимо операції, що визначені на діаграмах Заде. На всіх діаграмах елементи нечіткої множини А зображено ●, множини В – ■. На рис. 1.26 елементи $A \cup B$ позначено △, на рис. 1.27 елементи $A \cap B$ зображено⬡, на рис. 1.28 елементи $A \dot{+} B$ – △.

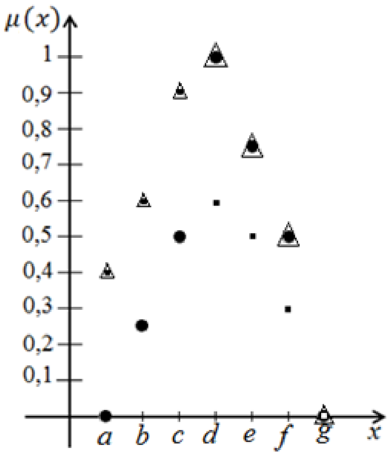


Рис. 1.26

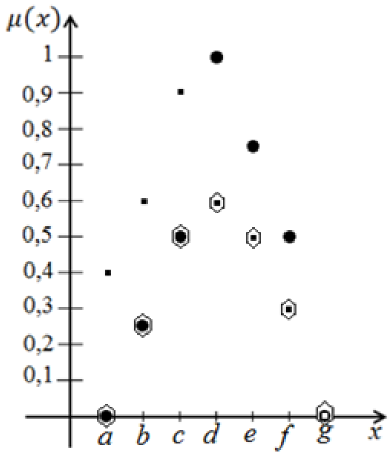


Рис. 1.27

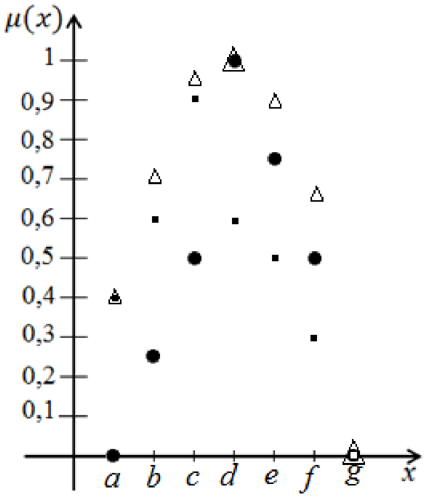


Рис. 1.28

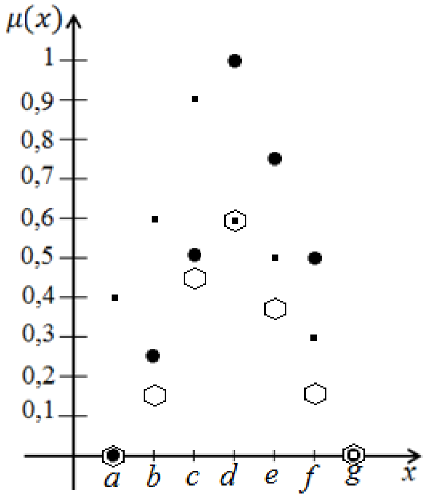


Рис. 1.29

На рис. 1.29 елементи нечіткої множини $A \cdot B$ позначені ⬡, на рис. 1.30 елементи $A \backslash B$ зображено △, а на рис. 1.31 елементи $A \Delta B$ – ⬡.

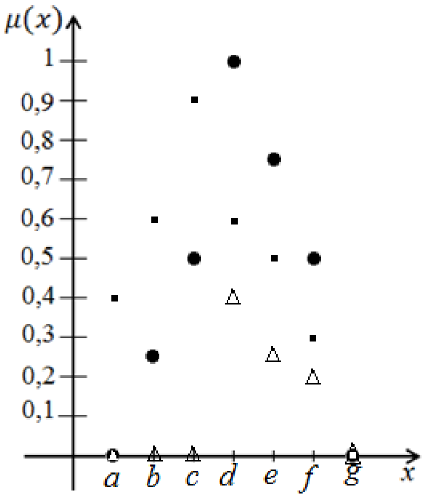


Рис. 1.30

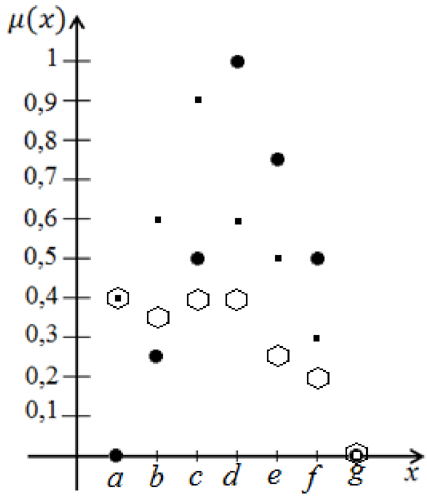


Рис. 1.31

Приклад 4. Нехай на універсумі $U = \{x_0, x_1, x_2\}$ задана множина $A = \{(x_0; 1), (x_1; 0{,}3), (x_2; 0{,}8)\}$, а на універсумі $V = \{y_0, y_1, y_2\}$ задана множина $B = \{(y_0; 0{,}5), (y_1; 1), (y_2; 0{,}5)\}$. Знайти $A \times B$. Результат виконання операції записати у вигляді матриці.

Розв'язання

За означення декартового добутку двох нечітких множин А і В маємо:

$A \times B = \{\big((x_0; y_0); 0{,}5\big), \big((x_0; y_1); 1\big), \big((x_0; y_2); 0{,}5\big), \big((x_1; y_0); 0{,}3\big), \big((x_1; y_1); 0{,}3\big), \big((x_1; y_2); 0{,}3\big), \big((x_2; y_0); 0{,}5\big), \big((x_2; y_1); 0{,}8\big), \big((x_2; y_2); 0{,}5\big)\}$.

Перш ніж записати декартовий добуток у вигляді матриці, побудуємо допоміжну таблицю.

	y_0	y_1	y_2
x_0	0,5	1	0,5
x_1	0,3	0,3	0,3
x_2	0,5	0,8	0,5

Запишемо декартовий добуток у вигляді матриці:

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}5 \end{pmatrix}.\blacksquare$$

Приклад 5. Для відношення $R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, яке задане матрицею, знайти R_0^{-1}. Визначити, чи буде відношення R_0 рефлексивним та симетричним.

Розв'язання

За означенням оберненого нечіткого відношення маємо:

$\mu_{R_0^{-1}}(x_0; y_0) = \mu_{R_0}(y_0; x_0) = 1$, $\mu_{R_0^{-1}}(x_0; y_1) = \mu_{R_0}(y_1; x_0) = 0$ і т.д.

У результаті отримаємо:

$$R_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\mu_{R_0}(x_2, x_2) \neq 1$ і $\mu_{R_0}(x_0, x_0) = \mu_{R_0}(x_1, x_1) = 1$, то дане відношення є іррефлексивним.

Враховуючи те, що $\mu_{R_0}(x_1; y_2) = \mu_{R_0}(y_2; x_1)$ і $\mu_{R_0}(x_1; y_0) \neq \mu_{R_0}(y_0; x_1)$, можна стверджувати, що дане відношення є антисиметричним.

<u>Приклад 6.</u> Нехай відношення R_0 і R_1 задані матрицями. Знайти їх max-min і max-prod композиції.

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 & 0,5 \\ 1 & 0,6 & 0 \end{pmatrix} \text{ і } R_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0,3 & 1 \\ 0,2 & 0,7 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 1 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Побудуємо допоміжні таблиці R_0 і R_1.

R_0	y_0	y_1	y_2
x_0	0,3	0,8	0,5
x_2	1	0,6	0

R_1	z_0	z_1	z_2	z_3
y_0	0,8	0,0	0,3	1
y_1	0,2	0,7	0	0,8
y_2	0,1	1	0	0,6

Знайдемо елементи max-min композиції:

$$\mu_{R_0 \circ R_1}(x_0, y_0) = \max_{y \in Y} \left(min\left(\mu_{R_0}(x_0, y_0), \mu_{R_1}(y_0, z_0)\right), \right.$$
$$\left. min\left(\mu_{R_0}(x_0, y_1), \mu_{R_1}(y_1, z_0)\right), min\left(\mu_{R_0}(x_0, y_2), \mu_{R_1}(y_2, z_0)\right)\right) =$$
$$\max_{y \in Y}(\min(0,3; 0,8), \min(0,8; 0,2), \min(0,5; 0,1)) = \max_{y \in Y}(0,3; 0,2; 0,1) = 0,3;$$

Аналогічно знайшовши інші елементи, маємо матрицю:

$$R_0 \circ R_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 & 0,5 \\ 1,0 & 0,6 & 0,0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0,8 & 0,0 & 0,3 & 1,0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,0 & 0,8 \\ 0,1 & 1,0 & 0,0 & 0,6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,3 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 & 0,3 & 1,0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо елементи max-prod композиції за означенням:

$$\mu_{R_0 \cdot R_1}(x_1, z_1) = \max_{y \in V} \left(\mu_{R_0}(x_1, y_1) \cdot \mu_{R_1}(y_1, z_1),\ \mu_{R_0}(x_1, y_2) \cdot \right.$$
$$\left. \mu_{R_1}(y_2, z_1), \mu_{R_0}(x_1, y_3) \cdot \mu_{R_1}(y_3, z_1)\right) = \max(0,3 \cdot 0,8; 0,8 \cdot 0,2; 0,5 \cdot 0,1) =$$
$$\max(0,24; 0,16; 0,05) = 0,24.$$

Аналогічно знайшовши інші елементи, маємо матрицю:

$$R_0 \cdot R_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 & 0,5 \\ 1,0 & 0,6 & 0,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,0 & 0,3 & 1,0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,0 & 0,8 \\ 0,1 & 1,0 & 0,0 & 0,6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,24 & 0,56 & 0,09 & 0,64 \\ 0,8 & 0,42 & 0,3 & 1,0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Задачі для самостійного опрацювання

1. На скінченному універсумі С задана нечітка множина А. Записати дану множину у вигляді сингельтона і зобразити її на діаграмі Заде. Визначити всі її не порожні ненульові рівні, найближчу чітку множину, параметри та потужність.

а) $C = \{b, c, g, r, y\}$ і $A = \{(b; 0{,}25), (c; 0{,}5), (g; 0{,}5), (y; 1)\}$;

б) $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ і $A = \{(a; 0{,}5), (d; 0{,}5), (f; 1)\}$;

в) $C = \{a, b, c, d, e\}$ і $A = \{(a; 0{,}2), (c; 0{,}6), (d; 1), (e; 0{,}4)\}$;

г) $C = \{u, v, w, x, y, z\}$ і $A = \{(v;\ 0{,}4), (w;\ 0{,}6), (x;\ 1), (y;\ 0{,}4)\}$.

2. На скінченному універсумі С задана нечітка множина А. Знайти доповнення до множини А, $\alpha \cdot$ А, її концентрацію та розтяг.

а) $C = \{b, c, g, r, y\}$, $A = \{(b; 0{,}2), (c;\ 0{,}5), (g;\ 0{,}6), (y;\ 0{,}8)\}$ і $\alpha = 0{,}3$;

б) $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{(a;\ 0{,}5), (d;\ 0{,}6), (e;\ 0{,}4), (f;\ 1)\}$ і $\alpha = 0{,}4$;

в) $C = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{(b;\ 0{,}4), (c;\ 0{,}6), (d;\ 1), (e;\ 0{,}3)\}$ і $\alpha = 0{,}6$;

г) $C = \{u, v, w, x, y, z\}$, $A = \{(v;\ 0{,}3), (w;\ 0{,}5), (x;\ 0{,}8), (y;\ 0{,}1)\}$ і $\alpha = 0{,}8$.

3. На скінченному універсумі $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ задані нечіткі множини А та В.

Записати сингельтони $A \cup B$, $A \cap B$, $A \dot{+} B$, $A \cdot B$, $A \backslash B$, $A \Delta B$ та зобразити їх на діаграмах Заде.

а) $A = \{(a; 0{,}25),\ (b; 0{,}4),\ (c; 0{,}8),\ (d; 0{,}6)\}$, $B = \{(c; 0{,}4),\ (d;\ 1),\ (e;\ 0{,}5)\}$;

б) $A = \{(a; 0{,}1), (b; 0{,}3), (d; 1)\}$, $B = \{(a; 0{,}4), (b; 0{,}7), (c; 1), (d; 0{,}3)\}$;

в) $A = \{(a; 0{,}5), (b; 0{,}8), (c; 1), (d; 0{,}2)\}$, $B = \{(c; 0{,}4), (d; 1), (f; 0{,}4)\}$;

г) $A = \{(a;\ 0{,}3),\ (b;\ 0{,}5),\ (c;\ 0{,}7),\ (e;\ 0{,}8)\}$, $B = \{(c;\ 0{,}3),\ (d;\ 1),\ (g; 0{,}4)\}$.

4. Нехай на універсумі U задана множина А, а на універсумі V задана множина В. Знайти $A \times B$. Результат виконання операції записати у вигляді матриці.

а) $U = \{x_1,\ x_2,\ x_3, x_4\}$, $A = \{(x_1; 0{,}2), (x_2; 0{,}4), (x_3; 0{,}8)\}$, $V = \{y_1, y_2, y_3\}$, $B = \{(y_1; 1), (y_2; 0{,}7), (y_3; 0{,}4)\}$;

б) $U = \{a, b, c\}$, $A = \{(a; 0{,}3), (b; 0{,}6), (c; 0{,}9)\}$, $V = \{x, y, z\}$, $B = \{(x; 0{,}1), (y; 0{,}6), (z; 0{,}8)\}$;

в) $U = \{x_1,\ x_2, x_3\}$, $A = \{(x_1; 0{,}3), (x_2; 0{,}5), (x_3; 1)\}$, $V = \{y_1, y_2, y_3\}$, $B = \{(y_1; 0{,}3), (y_2; 0{,}7), (y_3; 0{,}8)\}$;

г) $U = \{a, b, c, d\}$, $A = \{(a; 0{,}3), (b; 0{,}5), (c; 1)\}, V = \{e, f, g, h\}$, $B = \{(e; 0{,}1), (f; 0{,}2), (g; 1), (h; 0{,}4)\}$.

5. Для відношення R, яке задане матрицею, знайти R^{-1}. Визначити, чи буде відношення R рефлексивним та симетричним.

а) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0{,}3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $R = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Нехай відношення R_0 і R_1 задані матрицями. Знайти їх max-min і max-prod композиції.

а) $R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}9 & 1 \\ 1 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$.

Модуль 2. Елементи комбінаторики

§ 1. Основні правила комбінаторики та комбінаторні схеми

Основні теоретичні відомості

<u>Узагальнене правило множення.</u> Нехай потрібно виконати одну за одною *k* дій. Якщо першу дію можна виконати $\boldsymbol{n_1}$ способом, другу дію –$\boldsymbol{n_2}$ способами і так до k-ої дії, яку можна виконати $\boldsymbol{n_k}$ способами, то всі $\boldsymbol{k}$ дій послідовно можуть бути виконані $\boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2} \times \dots \boldsymbol{n_k}$ способами.

<u>Правило суми у загальному випадку.</u> Якщо об'єкт $\boldsymbol{a_1}$ може бути вибраний $\boldsymbol{n_1}$ способом, об'єкт $\boldsymbol{a_2}$ – іншими $\boldsymbol{n_2}$ способами і т. д., а об'єкт $\boldsymbol{a_k}$ – $\boldsymbol{n_k}$ способами, причому способи вибору об'єктів всі відрізняються, то кількість способів, якими може бути вибраний один із цих об'єктів, дорівнює сумі кількості способів вибору відповідних об'єктів:

$$\boldsymbol{n_1 + n_2 + \dots + n_k}.$$

<u>Означення.</u> Множина А називається ***впорядкованою***, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність певне натуральне число (номер елемента) від *1* до *n* (*n* – число елементів множини), так, що різним елементам відповідають різні числа.

<u>Означення.</u> ***Перестановками множини А*** називаються впорядковані множини, які відрізняються лише порядком елементів.

<u>Теорема 1.</u> Множину, яка містить n елементів, можна впорядкувати $\boldsymbol{P_n = n}!$ способами.

<u>Означення.</u> ***Перестановкою з повтореннями*** з *n* елементів по $\boldsymbol{n_1, n_2, \dots, n_k}$, де $\boldsymbol{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n}$, називається впорядкована множина, яка складається з $\boldsymbol{n_1}$ елементів першого типу, $\boldsymbol{n_2}$ елементів другого типу, ... , $\boldsymbol{n_k}$ елементів k-го типу.

Кількість перестановок з повтореннями часто позначають $\boldsymbol{P_n(n_1, \dots, n_m)}$.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $\boldsymbol{k_1, \dots, k_m}$ – цілі невід'ємні числа, причому $\boldsymbol{k_1 + \dots + k_m = n}$. Кількість способів, якими можна подати розбиття n-елементної множини на класи $\boldsymbol{A_1, \dots, A_m}$, число елементів яких відповідно дорівнює $\boldsymbol{k_1, \dots, k_m}$, становить:

$$\boldsymbol{P_n(k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_m!}}.$$

Числа $\boldsymbol{P_n(k_1, \dots, k_m)}$ називаються ***поліноміальними коефіцієнтами***.

Теорема 3. Число різних перестановок, які можна утворити з $\boldsymbol{n}$ елементів, серед яких знаходиться $\boldsymbol{k_1}$ елементів першого типу, $\boldsymbol{k_2}$ елементів другого типу, …, $\boldsymbol{k_m}$ елементів m-го типу, дорівнює $\boldsymbol{P_n(k_1, \dots, k_m)}$.

Означення. ***Розміщенням із n по k*** $(k \leq n)$ називаються впорядковані *k*-елементні підмножини деякої *n*-елементної множини.

Теорема 4. Число розміщень з *n* по *k* дорівнює

$$\boldsymbol{A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}.$$

Означення. ***Розміщенням з повтореннями із n по k елементів*** $(k \leq n)$ називається впорядкована *k*-елементна підмножина деякої *n*-еле-ментної множини, елементи якої не обов'язково відрізняються між собою.

Теорема 5. Кількість різних упорядкованих *k*-елементних підмножин *n*-елементної множини, всі $\boldsymbol{k}$ елементів якої не обов'язково різні між собою, дорівнює $\boldsymbol{\overline{A_n^k} = n^k}$**.**

Теорема 6. Число усіх підмножин множини А, яка містить n елементів, дорівнює $\boldsymbol{2^n}$.

Означення. ***Комбінацією елементів із n по k*** $(k \leq n)$ називається довільна *k*-елементна підмножина *n*-елементної множини.

Теорема 7. Число всіх *k*-елементних підмножин множини, що складається з *n* елементів (комбінацій), дорівнює $\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$.

Теорема 8. Має місце співвідношення між числом розміщень із *n* по *k* і числом комбінацій із *n* по *k*: $\boldsymbol{A_n^k = C_n^k \cdot k!}$.

Теорема 9. Число найкоротших шляхів з точки (0, 0) в точку (m, n), які складаються з відрізків паралельних осям координат, дорівнює $\boldsymbol{C_{m+n}^n = C_{m+n}^m}$.

Нехай маємо неупорядковану n-елементну множину А, елементи якої розбиті на *n* класів (у кожному класі по одному елементу), які будуть називатися ***типами елементів***.

Означення. ***Комбінацією з n елементів по m елементів із повтореннями*** називається *m*-елементна підмножина множини А, кожний елемент якої належить одному з *n* типів.

Сукупність таких комбінацій називають комбінаціями з *n* елементів по *m* і позначатимемо $\boldsymbol{\overline{C_n^m}}$ або $\boldsymbol{f_n^m}$.

Теорема 10. Кількість різних комбінацій з повтореннями із *n* елементів по *m* становить $\boldsymbol{\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m}$.

Узагальнимо вибір формул комбінаторних об'єктів при розгляді задач:

Таблиця 1

Застосування до об'єкта	**Порядок**	**Повтори**	**Назва об'єкта**	**Формула**
Множина	Важливий	Відсутні	Перестановки без повторень	$P_n = n!$
Множина	Важливий	Можливі	Перестановки з повтореннями	$P_n(k_1, \dots, k_m) = \dfrac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_m!}$
Підмножина	Важливий	Відсутні	Розміщення без повторень	$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$
Підмножина	Важливий	Можливі	Розміщення з повтореннями	$\overline{A_n^k} = n^k$
Підмножина	Не важливий	Відсутні	Комбінації без повторень	$C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
Підмножина	Не важливий	Можливі	Комбінації з повтореннями	$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m}$

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Скільки існує тризначних чисел, у записі яких використовують цифри 0, 1, 2, 3, 4 лише по одному разу?

Розв'язання

Оскільки першою значущою цифрою числа не може бути 0, то сотні можна записати 4 способами. Для запису десятків слід відкинути використану раніше цифру, але при цьому можна використовувати цифру 0. Тому записати десятки можна також 4 способами. У записі одиниць не можна використовувати вже 2 цифри, а тому існує 3 способи запису.

Врахувавши, що запис кожної цифри впливає на загальний вигляд числа, застосуємо узагальнене правило множення: $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

Відповідь: 48 чисел.

Задача 2. Юнак хоче подарувати троянду дівчині. У квітковому магазині є 40 троянд сорту "Циркус", 50 – сорту "Вендела", 25 – сорту "Блек Меджик", 40 – сорту "Корвет" та 28 троянд сорту "Дойче Велле". Скількома способами юнак може здійснити своє бажання?

Розв'язання

Оскільки кожна із квіток вказаного одного сорту відрізняється від квітки іншого сорту, а потрібно вибрати одну із множини вказаних, то застосуємо правило суми у загальному випадку:

$$40 + 50 + 25 + 40 + 28 = 183.$$

Відповідь: 183 способи.

Задача 3. Сім'я замовила у художника 5 портретів і планує їх повісити в ряд на стіні в коридорі. Скільки існує способів зробити це?

Розв'язання

Дану задачу можна перефразувати таким чином: скільки є способів впорядкування 5-елементної множини? За теоремою 1, існує $5! = 120$ способів.

Відповідь: 120 способів.

Задача 4. Скільки слів, навіть безглуздих, можна утворити із усіх букв слова "абатство"?

Розв'язання

За умовою задачі слід використовувати всі елементи множини $X = \{'а','б','в','о','с','т'\}$. Оскільки кількість букв у вказаному слові – 8, з них літера "а" входить 2 рази, "б" – 1, "в" – 1, "о" – 1, "с" – 1, "т" – 2 рази і порядок букв важливий, то потрібно застосувати перестановки з повтореннями. За теоремами 3 та 2 маємо:

$$P_8(2,1,1,1,1,2) = \frac{8!}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{2} = 10080.$$

Відповідь: 10080 слів.

Задача 5. У залі театру є 25 вільних місць. Скількома способами можна розсадити на них 4 запрошених гостей?

Розв'язання

Оскільки місця в залі пронумеровані, то порядок при розсаджуванні гостей важливий. Перефразуємо задачу: скільки є способів побудувати впорядковану 4-елементну підмножину із 25-елементної множини.

За теоремою 4 маємо:

$A_{25}^4 = 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22 = 303600$ способів.

Відповідь: 303600 способів.

Задача 6. Сейф містить 10-цифровий кодовий замок із п'ятизначним кодом. Скільки існує різних способів установити код замка?

Розв'язання

За умовою задачі слід вибрати п'ятиелементну підмножину десятиелементної множини – код замка. Оскільки порядок кожного знака в коді важливий і може повторюватися, то об'єкт − розміщення із повтореннями з десяти по п'ять елементів.

За теоремою 5 маємо:

$\overline{A_{10}^5} = 10^5 = 100000$ способів.

Відповідь: 100 000 способів.

Задача 7. У лотереї "Супергроші" для виграшу джекпота в 15 000 000 грн потрібно відгадати 6 номерів із 52. За кожен варіант заповнення ігрової карти слід заплатити 6 грн. Скільки потрібно витрати грошей, щоб точно виграти джекпот?

Розв'язання

Щоб точно виграти джекпот, потрібно перебрати всі можливі варіанти заповнення ігрової картки. Дізнаємося, скільки можна побудувати 6-ти елементних підмножин 52-елементної множини, якщо порядок елементів не важливий?

За теоремою 7 маємо:

$$C_{52}^6 = \frac{52!}{6! \cdot 46!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{52 \cdot 17 \cdot 10 \cdot 49 \cdot 47}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} =$$

$= \ 20\,358\,520.$

Знайдемо, яку кількість грошей слід витратити на заповнені картки:

$$6 \cdot 20\,358\,520 = 122\,151\,120 \text{ грн.}$$

Відповідь: 122 151 120 грн.

Задача 8. Скільки є розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ у цілих невід'ємних числах?

Розв'язання

Кожному розв'язку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ у цілих невід'ємних числах поставимо у відповідність m-елементну комбінацію з повтореннями типу $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. І навпаки, маючи сполуку з повтореннями із n елементів по m, отримаємо розв'язок рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$, взявши x_1 елементів першого типу, x_2 – число елементів другого типу, …, x_n – число елементів n типу. Указана відповідність є взаємно однозначною, отже, кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ у цілих невід'ємних числах дорівнює $\overline{C_n^m}$.

Відповідь: $\overline{C_n^m}$.

Задача 10. Троє дітей зірвали з яблуні 20 яблук. Скількома способами вони можуть їх розділити, якщо всі яблука вважаються однаковими?

Розв'язання

Дану задачу можна перефразувати таким чином: скільки існує способів розбити множину, яка містить 20 елементів, на 3 підмножини у яких елементи повторюються?

За теоремою 10 маємо:

$\overline{C_3^{20}} = C_{22}^2 = \frac{22!}{2!\cdot 20!} = \frac{22\cdot 21}{2} = 11\cdot 21 = 231.$

Відповідь: 231 способом.

Задача 11. Розв'язати рівняння: $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48.$

Розв'язання

Дане рівняння може мати розв'язки при $x > 2, x \in N.$

За теоремами 4 і 7 маємо:

$x\cdot(x-1)\cdot\frac{x!}{(x-1)!\cdot 1!} = 48,$

$x\cdot(x-1)\cdot x = 48,$

$x^3 - x^2 - 48 = 0,$

$x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 48 = 0,$

$x^2(x-4) + 3(x^2-16) = 0,$

$x^2(x-4) + 3(x-4)(x+4) = 0,$

$(x-4)(x^2+3x+12) = 0,$

$$\left[\begin{array}{l} x-4=0, \\ x^2+3x+12=0. \end{array}\right.$$

Перше рівняння має натуральний корінь $x = 4.$

Друге рівняння дійсних коренів не має, бо $D = 9 - 48 = -39 < 0.$

Оскільки $4 > 2$, то $x = 4$ − корінь рівняння.

Відповідь: $x = 4.$

Задачі для самостійної роботи студентів

1. У бібліотеці є 6 різних книг з вищої математики, 4 різні книги з дискретної математики і 3 різні книги зі статистики. Скількома способами студент може зробити вибір по одній книзі з названих предметів?
2. Скількома способами можна вибрати на шаховій дошці 2 квадрати різного кольору? Розв'яжіть цю задачу, якщо немає обмежень на колір квадрата. Розв'яжіть її, якщо потрібно вибрати 2 білі квадрати.

3. На вершину гори веде 7 доріг. Скількома способами турист може піднятися на гору і спуститися з неї? Дайте відповідь на те ж саме запитання, якщо підйом і спуск здійснюються різними шляхами.

4. У меню їдальні є 7 перших, 9 других і 4 треті страви. Скількома способами можна вибрати обід із трьох страв (перше, друге і третє)?

5. Скільки тризначних чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, 5? Дайте відповідь на те ж саме запитання, якщо кожну цифру можна використовувати не більше одного разу.

6. З пункту А до пункту В ведуть три асфальтовані й чотири ґрунтові дороги. Скількома способами можна доїхати з пункту А до пункту В?

7. Тема "Комбінаторика" розглянута у 5 підручниках із вищої математики, 6 підручниках із теорії ймовірностей і математичної статистики та в 7 підручниках з дискретної математики. Студент хоче вивчити цю тему за одним із підручників. Скількома способами він може це зробити?

8. Скількома способами на полиці можна розташувати 6 книг?

9. На Асамблеї ООН плануються виступи президентів України, Великобританії, Польщі та США. Скільки існує способів планування порядку виступів?

10. Скільки різних слів можна отримати перестановками літер слова:

а) абракадабра;

б) шаланда.

11. У школяра 2 однакові авторучки, 4 однакові олівці і 1 гумка. Він розкладає ці предмети на парті в ряд. Скільки існує варіантів розкладу?

12. Рибалки зловили 5 лящів, 4 чехоні і 2 плітки, посолили і вивісили на сонці сушитися. Скільки варіантів розвішування видів риби на нитці?

13. Скількома способами з десяти різних букв можна записати слова, які складаються із шести літер, за умови, що букви в слові не повторюються?

14. На дискотеку прийшло 10 дівчат і 15 юнаків. Оголошено "білий" танець. Усі дівчата вибрали для танцю юнаків (і ніхто з них не відмовився). Скільки можна утворити різних танцюючих пар?

15. Студенту необхідно скласти 4 іспити за 8 днів. Скількома способами це можна зробити, якщо в один день можна складати не більше одного іспита?

16. Скількома способами 12 різних куль можна розкласти у п’ять

різних пакетів?

17. П’ятеро студентів складають іспит. Скількома способами можуть бути поставлені їм оцінки, якщо відомо, що ніхто з них не отримав незадовільної оцінки?

18. У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого десятикутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?

19. З колоди у 52 карти вибираються 10 карт. У скількох випадках серед них виявляться всі 4 тузи?

20. У кондитерському відділі продають такі сорти тістечок: пісочні, еклери, тарталетки, шоколадні та штрейзелі. Скількома способами можна купити 8 тістечок?

21. Скількома способами можна скласти букет з 7 квіток, якщо є 9 сортів квітів?

22. У бібліотеці є підручники з аналітичної геометрії трьох різних авторів, підручники з дискретної математики двох різних авторів і підручники з математичного аналізу п’яти різних авторів. Яким є найбільше число студентів, котрі взяли не менше ніж по одному підручнику кожного з трьох видів, за умови, що жоден студент не взяв всі книги, однакові з іншим студентом?

23. Знайти кількість усіх дільників числа 210.

24. Скільки є трицифрових натуральних чисел, у десятковому запису яких немає парних цифр? Знайти суму всіх цих чисел.

25. Скількома способами можна утворити комісію у складі 3-х осіб, вибираючи їх з 6 подружніх пар так, щоб в комісію не входили члени однієї сім’ї?

26. Скількома способами можна утворити наряд по казармі із трьох солдатів і одного сержанта, коли у підрозділі 80 солдатів і 3 сержанти?

27. В опуклому n-кутнику ($n \geq 3$) проведено всі діагоналі. Відомо, що жодні три з них не перетинаються в одній точці. На скільки частин поділиться при цьому многокутник?

28. В урну складено 50 квитків, вісім із яких виграшні. Студент бере п’ять квитків. Скількома способами він може їх взяти, щоб: а) серед них було рівно два виграші; б) принаймні два виграшні?

§ 2. Біноміальна та поліноміальна формули

Основні теоретичні відомості

<u>Теорема 1.</u> Має місце рівність

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}} \ (\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}).$$

<u>Наслідок 1</u>. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

<u>Наслідок 2</u>. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{\ k} = 0, \ \ (n \geq 1)$.

Біноміальні коефіцієнти можна виписати у вигляді трикутної таблиці, що має назву **<u>трикутник Паскаля:</u>**

n = 0						1					
n = 1					1		1				
n = 2				1		2		1			
n = 3			1		3		3		1		
n = 4		1		4		6		4		1	
n = 5	1		5		10		10		5		1
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Зауважимо, що у n-му рядку трикутника стоять коефіцієнти розкладу $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$, причому кожен коефіцієнт, крім крайніх двох, які дорівнюють 1, дорівнює сумі двох відповідних коефіцієнтів із попереднього рядка.

Наслідок 1 стверджує, що сума чисел в n-му рядку трикутника дорівнює $\boldsymbol{2}^{\boldsymbol{n}}$.

Рівність $C_n^k = C_n^{n-k}$ для трикутника Паскаля інтерпретується так: кожен рядок трикутника Паскаля читається однаково як зліва направо, так і справа наліво.

<u>Теорема 2.</u> При $k < \frac{n-1}{2}$ справедлива нерівність $C_n^{k+1} > C_n^k$, а при $k > \frac{n-1}{2}$ – нерівність $C_n^{k+1} < C_n^k$. Найбільшим серед чисел C_n^k $(k = \overline{0, n})$ є число C_{2m}^m, якщо $n = 2m$, або ж два числа $C_n^m = C_n^{m+1}$, якщо $n = 2m+1$.

Найважливіші біноміальні тотожності

1. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

2. $\boldsymbol{C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \cdots + C_{k-1}^{k-1} = \sum_{m=0}^{n-k} C_{n-m-1}^{k-1}\, C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}}$.

3. $\boldsymbol{C_n^m C_k^0 + C_{n-1}^{m-1} C_{k+1}^1 + \cdots + C_{n-m}^0 C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m}$.

4. $\boldsymbol{(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n}$.

<u>Поліноміальна теорема</u>

$$\boldsymbol{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geq 0, \ldots, r_k \geq 0 \\ r_1 + \cdots + r_k = n}} P_n(r_1, \ldots, r_k)\, {a_1}^{r_1} \cdot {a_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {a_k}^{r_k}}.$$

<u>Наслідок 1</u>

$$\boldsymbol{(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}.$$

<u>Наслідок 2</u>

$$\boldsymbol{\sum_{\substack{r_1 \geq 0, \ldots, r_m \geq 0 \\ r_1 + \cdots + r_m = n}} P_n(r_1, \ldots, r_m) = m^n}.$$

Найважливіші поліноміальні тотожності

1. $\boldsymbol{P_n(r_1, \ldots, r_m) = P_n(r_1 - 1, \ldots, r_m) + \cdots + P_n(r_1, \ldots, r_m - 1)}$.
2. $\boldsymbol{P_n(r_1, \ldots, r_m) = \sum_{l_i + p_i = r_i} P_n(l_1, \ldots, l_m)\, P_n(p_1, \ldots, p_m)}$.

Приклади розв'язування задач

<u>Задача 1.</u> Записати комплексне число $(\sqrt{3} + i\sqrt{5})^4$в алгебраїчній формі.

Розв'язання

У ході розв'язування врахуємо, що $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Застосувавши теорему 1, маємо:

$(\sqrt{3} + i\sqrt{5})^4 = \mathrm{C}_4^0(\sqrt{3})^4 + \mathrm{C}_4^1(\sqrt{3})^3(\sqrt{5}i)^1 + \mathrm{C}_4^2(\sqrt{3})^2(\sqrt{5}i)^2 +$
$+\mathrm{C}_4^3(\sqrt{3})^1(\sqrt{5}i)^3 + C_4^4(\sqrt{5}i)^4 = 9 + 12\sqrt{15}i - 90 - 20\sqrt{15}i + 25 = -56 -$
$-8\sqrt{15}i$.

<u>Відповідь:</u> $-56 - 8\sqrt{15}i$.

<u>Задача 2.</u> Знайти вільний член розкладу $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$.

Розв'язання

Запишемо шуканий член розкладу з теореми 1:

$$T_{m+1} = C_9^m(\sqrt{x})^{9-m} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^m = C_9^m \cdot x^{\frac{9-m}{2}} \cdot x^{-\frac{m}{4}} = C_9^m \cdot x^{\frac{18-2m-m}{4}}$$
$$= C_9^m \cdot x^{\frac{18-3m}{4}}.$$

За умовою задачі

$$x^{\frac{18-3m}{4}} = x^0.$$

Тоді $18 - 3m = 0, m = 6$.

Таким чином, шуканий член розкладу

$$T_7 = C_9^6 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 12 \cdot 7 = 84.$$

Відповідь: 84.

Задача 3. У розкладі

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$$

перші три коефіцієнти утворюють арифметичну прогресію. Знайти всі раціональні члени розкладу, не виписуючи ірраціональних.

Розв'язання

Перші три члени розкладу записуються:

$C_n^0\left(\sqrt{x}\right)^n = \left(\sqrt{x}\right)^n$, $C_n^1\left(\sqrt{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt[4]{x}} = n\left(\sqrt{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt[4]{x}} = \frac{n}{2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{n-1} \times$ $\times \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $C_n^2\left(\sqrt{x}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^2 = \frac{n\cdot(n-1)}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{4\cdot\sqrt{x}} = \frac{n\cdot(n-1)}{8}\left(\sqrt{x}\right)^{n-3}$.

Коефіцієнтами у записаних членах розкладу будуть числа:

$1, \frac{n}{2}, \frac{n\cdot(n-1)}{8}$.

За умовою задачі ці коефіцієнти повинні утворювати арифметичну прогресію, тобто

$\frac{n}{2} - 1 = \frac{n\cdot(n-1)}{8} - \frac{n}{2}$.

Розв'яжемо це рівняння:

$$\frac{n-2}{2} = \frac{n \cdot (n-1) - 4n}{8},$$
$$\frac{4n-8}{8} = \frac{n^2 - n - 4n}{8},$$
$$4n - 8 = n^2 - 5n,$$
$$n^2 - 9n + 8 = 0.$$

З оберненої до теореми Вієта маємо: $n_1 = 1$ або $n_2 = 8$.

При $n = 1$ розклад не має раціональних членів.

При $n = 8$ довільний T_{m+1} член має вигляд:

$$T_{m+1} = C_8^m \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{8-m} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^m = C_8^m \cdot x^{\frac{8-m}{2}} \cdot 2^{-m} \cdot x^{-\frac{m}{4}} =$$

$$= C_8^m \cdot 2^{-m} \cdot x^{\frac{8-m}{2}-\frac{m}{4}} = C_8^m \cdot 2^{-m} \cdot x^{\frac{16-2m-m}{4}} = C_8^m \cdot 2^{-m} \cdot x^{\frac{16-3m}{4}},$$

де $m = \overline{0{,}8}$.

Щоб член розкладу був раціональним, необхідно і достатньо, щоб $\frac{16-3m}{4}$ було цілим числом. Отже, $16 - 3m$ повинно ділитися на 4, а це буде тоді, коли m ділиться на 4: $m = 0, 4, 8$.

У результаті маємо:

$$T_1 = x^4, T_5 = \frac{35}{8}x, T_9 = \frac{1}{256x^2}.$$

Відповідь: $x^4, \frac{35}{8}x, \frac{1}{256x^2}$.

Задача 4. Довести, що

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} x^k = (1+x)^n.$$

Доведення

Оскільки $C_n^k = C_n^{n-k}$, то

$$(1+x)^n = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} x^k.$$

Що і слід було довести.■

Задача 5. Довести, що

$$C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n^3$$

Доведення

За теоремою 5 § 1 маємо $\overline{A_n^3} = n^3$. Розіб'ємо ці розміщення на класи, відносячи до k-ого класу розміщення, які містять рівно k різних типів елементів.

Число розміщень, які містять 1 тип елементів, дорівнює C_n^1.

Визначимо число розміщень, які містять 2 різні типи елементів: кількість вибору 2 типів елементів – C_n^2, є 2 способи вибору елемента, який повторюється в розміщенні, та 3 способи розташування одиничного елемента. Оскільки кожен із виборів впливає на загальний вибір, то застосуємо правило множення і отримаємо $6C_n^2$.

Вибрати 3 різні типи елементів можна C_n^3 способами, причому кожен із способів можна упорядкувати 3! способами. Застосувавши правило множення, отримаємо $6C_n^3$. Інших способів вибору $\overline{A_n^3}$ немає. Застосувавши правило суми, отримуємо справедливість даної тотожності. ■

Задача 6. Розкласти $(x + y - z)^4$.

Розв'язання

Якщо не враховувати порядок доданків, то число 4 можна розбити так: 4=4+0+0, 4=3+1+0, 4=2+2+0, 4=2+1+1. Але $P_4(4{,}0{,}0) = 1$, $P_4(3{,}1{,}0) = 4$, $P_4(2{,}2{,}0) = 6$, $P_4(2{,}1{,}1) = 12$.

Тому за поліноміальною теоремою

$$(x + y - z)^4 = x^4 + y^4 + z^4 + 4x^3y - 4x^3z + 4xy^3 - 4y^3z - 4xz^3 - \\ -4yz^3 + 6x^2y^2 + 6x^2z^2 + 6y^2z^2 - 12x^2yz - 12xy^2z + 12xyz^2. \blacksquare$$

Задача 7. Знайти коефіцієнт при x^6 у розкладі $(1 + 2x^2 - 3x^4)^{10}$.

Розв'язання

За поліноміальною теоремою маємо:

$$(1 + 2x^2 - 3x^4)^{10} = \sum_{r_1+r_2+r_3=10} \frac{10!}{r_1!\,r_2!\,r_3!} 1^{r_1}(2x^2)^{r_2}(-3x^4)^{r_3} =$$

$$= \sum_{r_1+r_2+r_3=10} \frac{10!}{r_1!\,r_2!\,r_3!} 2^{r_2}x^{2r_2}(-3)^{r_3}x^{4r_3} =$$

$$= \sum_{r_1+r_2+r_3=10} \frac{10!}{r_1!\,r_2!\,r_3!} 2^{r_2}(-3)^{r_3}x^{2r_2+4r_3}.$$

Отже, слід розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = 10, \\ 2r_2 + 4r_3 = 6. \end{cases}$$

Знайдемо цілі невід'ємні числа r_2 і r_3, що задовольняють рівняння $2r_2 + 4r_3 = 6$. Легко побачити, що дане рівняння має лише два розв'язки $r_2 = 1, r_3 = 1$ або $r_2 = 3, r_3 = 0$. Тоді розв'язками системи будуть (8; 1; 1) і (7; 3; 0).

Шуканий коефіцієнт дорівнює

$$\frac{10!}{8!\,1!\,1!} 2^1 \cdot (-3)^1 + \frac{10!}{7!\,3!\,0!} 2^3 \cdot (-3)^0 = 10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot (-3) + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} \cdot 8 = \\ = -540 + 960 = 420.$$

Відповідь: 420.

Задачі для самостійної роботи студентів

1. Знайти розклад біномів:

а) $(x+1)^6$;

б) $(x^2-2y)^7$;

в) $\left(\sqrt{x}+y\right)^5$;

г) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}-\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^5$.

2. Записати комплексне число А в алгебраїчній формі:

а) $A=\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)^8$;

б) $A=\left(3-i\sqrt{3}\right)^5$;

в) $A=\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$;

г) $A=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\,i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5$.

3. Знайти:

а) середній член розкладу $\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{14}$;

б) середній член розкладу $\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^{16}$;

в) вільний член розкладу $\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^8$;

г) вільний член розкладу $\left(\frac{1}{\sqrt[9]{x^8}}-\sqrt[3]{x^2}\right)^7$;

ґ) всі раціональні члени розкладу $\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[4]{12}\right)^{19}$;

д) всі раціональні члени розкладу $\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$.

4. Знайти номер члена розкладу А, який:

а) є вільним членом $A=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{16}$;

б) містить x^4 у $A=\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{12}$.

5*. Знайти найбільший член розкладу:

а) $\left(1+\sqrt{3}\right)^{100}$;

б) $\left(1+\sqrt{2}\right)^{50}$.

6*. У розкладі $\left(a^2\sqrt[9]{a^4}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^m$ знайти той член, який містить однакові степені a і b, якщо відомо, що коефіцієнти четвертого і дванадцятого членів розкладу рівні між собою.

7. Довести, що:

а) $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n\cdot 2^{n-1}$;

б) $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)C_n^k = (n+1)\cdot 2^n$;

в) $1+7C_n^1+12C_n^2+6C_n^3=(n+1)^3$;

г) $C_n^1+14C_n^2+36C_n^3+24C_n^4=n^4$.

8. Користуючись поліноміальною теоремою, знайти розклади поліномів:

а) $(x-y-z)^3$;

б) $(x^2+x+1)^5$;

в) $(x+y+z)^4$;

г) $(1-xy+x^2)^4$.

9. Знайти коефіцієнт при x^k у розкладі поліномів:

а) $(x^2-x+1)^8$, $k=4$;

б) $(5x^2-x-2)^7$, $k=3$.

10. Не розкриваючи дужки у виразі $(a+b+c+d)^{132}$, обчислити коефіцієнт при доданку $a^{131}b$.

11. Чому дорівнює коефіцієнт при $x^2y^3z^2$ у виразі $(x+y+z)^7$?

12*. Довести, що число $11^{10}-1$ ділиться на 100.

§ 3. Комбінаторні методи розв'язування задач

Основні теоретичні відомості

<u>Теорема 1.</u> Якщо $A_1,\dots,A_n$ – деякі скінченні множини, то

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{I\subseteq\overline{1,n};\, i\in I\\ |I|=k}}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|. \qquad (1)$$

Метод підрахунку за теоремою 1, який полягає в послідовному виконанні операцій додавання і віднімання, що чергуються між собою, називається ***методом включень і виключень.***

Означення. ***Генератрисою числової послідовності*** $\{\boldsymbol{a_n}\}$ називається формальна сума

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, s^n. \tag{2}$$

У розгорнутому вигляді генератрису числової послідовності записують $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n + \cdots$.

У літературі генератрису часто називають продуктивною функцією. Термін генератриса активно вживають учні школи М. Й. Ядренка.

Означення. **Многочленом генератриси** називається генератриса, у якої всі члени, починаючи з деякого, дорівнюють нулю.

Метод генератрис – математичний прийом, що дозволяє зводити завдання з теорії чисел, теорії ймовірностей і комбінаторики до завдань з математичного аналізу.

Ідея методу генератрис полягає в тому, що для знаходження всіх членів деякої послідовності $\{a_n\}$ використовують таку процедуру: за допомогою рекурентних співвідношень для членів послідовності $\{a_n\}$ обчислюють генератрису A(s), а потім, розкладаючи формальну суму, знаходять коефіцієнти при s^n, які є a_n.

Теорема 2. За генератрисою A(s) однозначно відновлюються коефіцієнти a_n.

У комбінаториці використовуються такі типи генератрис:

- степенева $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$;
- експоненціальна $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \frac{x^n}{n!}$.

Генератрису записувати у вигляді ряду буває незручно, тому часто використовують їх скорочені записи.

Означення. $(1+s)^n = 1 + \frac{n}{1!}s + \frac{n(n-1)}{2!}s^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}s^3 + \cdots$. (3)

Коефіцієнт при s^m в генератрисі $(1+s)^n$ називається комбінацією із n елементів по m без повторень.

Означення. $(1-s)^{-n} = (1 + s + s^2 + s^3 + \cdots)^n = 1 + C_n^1 s +$
$+ C_{n+1}^2 s^2 + \cdots + C_{n+m-1}^m s^m + \cdots$. (4)

Коефіцієнт при s^m в генератрисі $(1+s)^{-n}$ називається комбінацією із n елементів по m з повтореннями.

Запишемо деякі скорочені записи генератрис:

1) $e^s = 1 + \frac{1}{1!}s + \frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{3!}s^3 + \cdots$;

2) $ln\left(\frac{1}{1-s}\right) = s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \cdots$;

3) $\sin s = s - \frac{1}{3!}s^3 + \frac{1}{5!}s^5 - \cdots$;

4) $\cos s = 1 - \frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{4!}s^4 - \cdots$.

<u>Означення.</u> ***Композицією послідовностей*** $\{a_n\}$ ***і*** $\{b_n\}$ називається послідовність $\{c_n\}$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \qquad (5)$$

Надалі той факт, що послідовність $\{c_n\}$ є композицією послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, позначатимемо так: $\{a_n\} \cdot \{b_n\}$.

<u>Теорема 3.</u> Нехай генератриси послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ дорівнюють відповідно A(s) і B(s), а послідовність $\{c_n\}$ є композицією послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$. Тоді генератриса $\{c_n\}$ дорівнює $C(s) = A(s) \cdot B(s)$.

<u>Теорема 4.</u> Нехай генератриси послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ і $\{c_n\}$ відповідно дорівнюють A(s), B(s) і C(s), причому члени послідовності $\{c_n\}$ обчислюються за формулою $c_n = \alpha a_k \pm \beta b_k$. Тоді має місце рівність:

$$C(s) = \alpha A(s) \pm \beta B(s) = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \pm \beta \sum_{i=0}^{\infty} b_i s^i. \qquad (6)$$

<u>Означення.</u> ***Підстановкою генератриси B(s)*** $(B(0) = b_0 = 0)$ ***в генератрису A(s)*** називається генератриса $A\big(B(s)\big) = a_0 + a_1 b_1 s +$
$+(a_1 b_2 + a_2 b_1^2)s^2 + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3)s^3 + \cdots$. (7)

<u>Означення.</u> ***Похідною генератриси числової послідовності*** називається функція $A(s)' = a_1 + 2a_2 s + \cdots + n a_n s^{n-1} + \cdots$.
(8)

<u>Означення.</u> ***Інтегралом генератриси числової послідовності*** називається функція

$$\int A(s)ds = a_0 s + \frac{a_1 s^2}{2} + \frac{a_2 s^3}{3} + \cdots + \frac{a_n s^{n+1}}{n+1} + \cdots. \qquad (9)$$

Приклади розв'язування задач

<u>Задача 1.</u> У туристичній групі, що їде до Африки, 30 людей. Із них 15 знають англійську мову, 10 – французьку, 6 – німецьку, 5 – англійську і французьку, 3 – англійську і німецьку, 3 – французьку і німецьку, 2 – англійську, французьку і німецьку мови. Скільки людей в групі не зможуть спілкуватися іноземною мовою?

Розв'язання

Нехай A – множина туристів, що знає англійську мову, F – множина туристів, що знає французьку мову, N – множина туристів, що знає німецьку мову, а X – множина туристів, які не знають іноземних мов. За умовою задачі маємо: $|\mathrm{A}| = 15$, $|F| = 10$, $|N| = 6$, $|\mathrm{A} \cap F| = 5$, $|\mathrm{A} \cap N| = 3$, $|F \cap N| = 3$, $|\mathrm{A} \cap F \cap N| = 2$, $|A \cup F \cup N \cup X| = 30$.

За теоремою 1 маємо:

$$|A \cup F \cup N \cup X| = |\mathrm{A}| + |F| + |N| + |\mathrm{X}| - |\mathrm{A} \cap F| - |\mathrm{A} \cap N| -$$
$$-|F \cap N| + |\mathrm{A} \cap F \cap N|.$$
$$30 = 15 + 10 + 6 + |\mathrm{X}| - 5 - 3 - 3 + 2;$$
$$|\mathrm{X}| = 30 - 22 = 8.$$

Відповідь: 8 туристів.

Задача 2. Скільки натуральних чисел, які не більші за 1000 і не діляться на жодне з чисел 2, 5 і 9?

Розв'язання

Позначимо кількість шуканих в задачі чисел буквою M, а $[n]$ – цілу частину числа n. Очевидно, що для розв'язання задачі слід знайти всі числа, які діляться на вказані в умові числа, та відняти їх кількість від 1000.

За теоремою 1 маємо:

$$\mathrm{M} = 1000 - \left[\frac{1000}{2}\right] - \left[\frac{1000}{5}\right] - \left[\frac{1000}{9}\right] + \left[\frac{1000}{10}\right] + \left[\frac{1000}{18}\right] + \left[\frac{1000}{45}\right] -$$
$$-\left[\frac{1000}{90}\right] = 1000 - 500 - 200 - 111 + 100 + 55 + 22 - 11 = 355.$$

Відповідь: 355.

Задача 3. Підрахувати кількість різних перестановок цифр даного числа 3744753, при яких жодні 2 однакові цифри не йдуть одна за одною.

Розв'язання

Загальна кількість різних перестановок цифр числа 3744753 дорівнює $P_7(2,2,2,1) = \frac{7!}{2!2!2!1!} = 630$.

Якщо деякі дві однакові цифри стоять поруч, то можна вважати їх єдиним символом. Тоді кількість перестановок, що містять цей символ, дорівнює $P_6(2,2,1,1) = \frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$. Зауважимо, що кількість таких випадків дорівнює $C_3^1 = 3$.

Аналогічно, кількість перестановок, в яких присутні два подвійні символи, дорівнює $P_5(2,1,1,1) = \frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$, а кількість таких випадків дорівнює $C_3^2 = 3$.

У разі перестановок всіх пар подвійних цифр загальна кількість дорівнює $P_4 = 4! = 24$.

За теоремою 1 маємо:

$$630 - 3 \cdot 180 + 3 \cdot 60 - 24 = 296.$$

Відповідь: 296.

Задача 4. Знайти генератрису числової послідовності $\{a_n\}$, де $a_n = 4(n-3) + 3^{n+2}$.

За означенням генератриси маємо

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} [4(k-3) + 3^{k+2}]\, s^k = \sum_{k=0}^{\infty} 4ks^k - 12 \sum_{k=0}^{\infty} s^k + 9 \sum_{k=0}^{\infty} 3^k\, s^k =$$

$$= 4s \sum_{k=0}^{\infty} ks^k - 12 \sum_{k=0}^{\infty} s^k + 9 \sum_{k=0}^{\infty} (3s)^k \,.$$

Згадаємо, що $\sum_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{1}{1-s}$ – нескінченно спадна геометрична прогресія ($|s| < 1$).

Тому маємо:

$$A(s) = 4s \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1-s}\right) - \frac{12}{1-s} + \frac{9}{1-3s} = \frac{4s}{(1-s)^2} - \frac{12}{1-s} + \frac{9}{1-3s}.$$

Відповідь: $\frac{4s}{(1-s)^2} - \frac{12}{1-s} + \frac{9}{1-3s}$.

Задача 5. Знайти генератрису числової послідовності $\{a_n\}$, яка задана рекурентним співвідношенням

$$a_0 = 1;\ a_n = 3a_{n-1} + 2^n.$$

Розв'язання

За означенням генератриси маємо:

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n + \cdots.$$

Оскільки коефіцієнт при a_{n-1} дорівнює 3, то знайдемо:

$$3sA(s) = 3a_0 s + 3a_1 s^2 + 3a_2 s^3 + \cdots + 3a_n x^{n+1} + \cdots.$$

За формулою (4):

$$\frac{1}{1-2s} = 1 + 2s + 2^2s^2 + \dots + 2^ns^n + \cdots,$$

що дає 2^ns^n. Тому рекурентне співвідношення можна записати:

$$A(s) - 3sA(s) - \frac{1}{1-2s} = a_0 - 1 + (a_1 - 3a_0 - 2)s + (a_2 - 3a_1 - 2^2)s^2 +$$
$$+ \dots + (a_n - 3a_{n-1} - 2^n)s^n + \cdots.$$

Оскільки $a_n - 3a_{n-1} - 2^n = 0$ для всіх $n \geq 1$, то маємо:

$$A(s) - 3sA(s) - \frac{1}{1-2s} = 0,$$

$$A(s) - 3sA(s) = \frac{1}{1-2s},$$

$$A(s) = \frac{1}{(1-2s)(1-3s)}.$$

<u>Відповідь:</u> $A(s) = \frac{1}{(1-2s)(1-3s)}$.

<u>Задача 6.</u> Знайти загальний член a_n числової послідовності, для якої генератрисою є функція $f(x) = arctgx$.

Розв’язання

З курсу математичного аналізу відомо, що

$$arctgx = \int_0^x \frac{ds}{1+s^2}. \qquad (9)$$

Розкладемо $f(s) = \frac{1}{1+s^2}$ в ряд. Для цього у формулі $\frac{1}{1-s} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k$ зробимо заміну $s \to -s^2$. Тоді отримаємо:

$$\frac{1}{1+s^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s^{2k}. \qquad (10)$$

Тепер підставимо (10) у (9) та проінтегруємо:

$$f(x) = \int_0^x \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s^{2k}\right] ds = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x s^{2k} ds = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

З означення генератриси маємо: $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

<u>Відповідь:</u> $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

<u>Задача 7.</u> Скільки існує способів вибору 20 об’єктів з множини об’єктів п’яти типів, якщо кількість обраних об’єктів першого типу кратна 5, кількість обраних об’єктів другого типу кратна 3, об’єктів третього типу слід вибрати не більше 4, об'єктів четвертого типу – не менше 3, а об'єктів п'ятого типу – не більше 2?

Розв'язання

Кількість об'єктів кратна 5 означає, що можна вибирати об'єктів першого типу 0, 5, 10 і т. д., показники степенів у розкладі також кратні 5: $1+s^5+s^{10}+\cdots$. Аналогічний розклад запишеться для об'єктів другого типу: $1+s^3+s^6+\cdots$. Оскільки об'єктів третього типу слід вибрати не більше 4, то розклад запишеться: $1+s+s^2+s^3+s^4$. Записуємо розклад для об'єктів четвертого типу $s^3+s^4+\cdots$ та п'ятого типу − $1+s+s^2$.

У результаті генератриса має вигляд:

$$(1+s^5+s^{10}+\cdots)(1+s^3+s^6+\cdots)(1+s+s^2+s^3+s^4)\times$$
$$\times(s^3+s^4+\cdots)(1+s+s^2).$$

Дану генератрису можна подати у вигляді:

$$\frac{1}{1-s^5}\cdot\frac{1}{1-s^3}\cdot\frac{1-s^5}{1-s}\cdot\frac{s^3}{1-s}\cdot\frac{1-s^3}{1-s}=\frac{s^3}{(1-s)^3}.$$

Використовуючи формулу (4), отримаємо:

$$s^3(1+C_3^1s+C_4^2s^2+\ldots+C_{n+3-1}^n s^n+\ldots).$$

Звідси коефіцієнт при s^{20} дорівнює: $C_{17+3-1}^{17}=C_{19}^{17}=\frac{19!}{17!\cdot 2!}=171$.

Відповідь: 171 спосіб.

Задачі для самостійної роботи студентів

1. У групі навчаються 25 студентів. Після здачі екзаменаційної сесії 4 студенти мають заборгованість з математичного аналізу, 4 − з аналітичної геометрії та 3 − з дискретної математики. І математичний аналіз і аналітичну геометрію потрібно перескладати 3 студентам, математичний аналіз і дискретну математику − 2 студентам, аналітичну геометрію і дискретну математику − 2 студентам. Один студент в групі має борг з усіх цих предметів. Скільком студентам перездачі з цих предметів не знадобилися?

2. Кожен студент групи – або дівчина, або білявий, або любить читати детективи. У групі 20 дівчат, з них 12 білявих і одна білява дівчина любить читати детективи. Усього в групі 24 білявих студента, з них 12 люблять

читати детективи, а всього студентів (хлопців та дівчат), які люблять читати детективи, 17, з них 6 дівчат. Скільки студентів у групі?

3. На першому курсі факультету 95 студентів захоплюються спортом. З них 50 займаються волейболом, 48 – баскетболом, 36 – тенісом, 21 – волейболом і баскетболом, 15 – волейболом і тенісом, 18 – баскетболом і тенісом. Скільки студентів займаються іншими видами спорту, якщо 5 студентів займаються баскетболом, волейболом і тенісом?

4. На фізико-математичному факультеті 60 % студентів факультету читають журнал "CHIP", 30 % − "Інформатика в школі", 20 % − "Motor News", 15 % − "Інформатика в школі" та "CHIP", 5 % − "CHIP" та "Motor News", 2 % − "Інформатика в школі" та "Motor News", 1 % − всі ці три журнали. Скільки відсотків студентів не читають жодного з названих журналів?

5. На фізико-математичному факультеті 47 студентів 2 курсу знають мову С++, 35 − мову Паскаль, 23 − мову Паскаль і С++, 20 − знають Visual Basic, 12 – С++ та Visual Basic, 11 − Паскаль і Visual Basic, 5 − всі три мови. Скільки студентів на 2 курсі знають хоча б одну мову програмування?

6*. На дискотеці були студенти першого та другого курсів фізико-математичного факультету. Усі вони в майбутньому або вчителі інформатики, або інженери-програмісти. Хлопців було 16, а майбутніх вчителів інформатики 24. Дівчат-програмістів було рівно стільки, скільки хлопців-інформатиків. Скільки студентів було на дискотеці?

7. Доповідаючи про маркетингові дослідження ринку, заввідділу повідомляє президенту кондитерської компанії такі дані: з 1000 опитаних 811 подобається шоколад, 752 подобаються шоколадні цукерки та 418 − льодяники, 570 подобається шоколад і шоколадні цукерки, 356 − шоколад і льодяники, 348 − шоколадні цукерки і льодяники, а 297 − всі три види солодощів. Чи правий президент компанії, що не довіряє цим даним?

8. Голова ОСББ на загальних зборах стверджував, що він провів соціальне опитування щодо підняття цін на житлово-комунальні послуги. Він з'ясував, що 100 жителів готові підняти плату за прибудинкове прибирання, 120 − не проти підняття ціни за прибирання у під'їзді, 112 − підняти зарплату голові. Серед тих, хто не проти підняти зарплату голові, 72 готові підняти плату за прибудинкове прибирання і 68 не проти підняття ціни за прибирання у під'їзді. 64 жителів готові підняти плату за прибудинкове прибирання, не проти підняття ціни за прибирання у під'їзді,

притому серед них 60 ще й не проти підняти зарплату голові. Відомо, що всього в будинку живе 180 чоловік. Чи правдиві навів дані голова ОСББ?

9*. Підрахувати кількість різних перестановок цифр даного числа 123132, при яких жодні 2 однакові цифри не йдуть одна за одною.

10. Знайти кількість натуральних чисел, які не більші за 1000 і не діляться на жодне з чисел 3, 5 і 7.

11. Знайти кількість натуральних чисел в межах від 100 до 500, які не діляться на жодне з чисел 2, 3 і 5.

12*. Скільки існує цілих чисел від 1 до 33000, які не діляться ні на 3, ні на 5, але діляться на 11?

13. Знайти генератрису числової послідовності a_n:

а) $a_n = n,\ n = 0, 1, 2, \dots;$

б) $a_n = n(n-1),\ n = 0, 1, 2, \dots;$

в) $a_n = n^2,\ n = 0, 1, 2, \dots;$

г) $a_n = n\alpha^n,\ n = 0, 1, 2, \dots;$

ґ) $a_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 0, \\ \frac{\alpha^n}{n!}, & n = 1, 2, \dots; \end{cases}$

д)* $a_n = sin\alpha n\ ,\ n = 0, 1, 2, \dots;$

е)* $a_n = \ cos\alpha n,\ n = 0, 1, 2, \dots.$

14. Знайти загальний член a_n числової послідовності, для якої функція $f(s)$ є генератрисою:

а) $f(s) = \dfrac{1}{1-s};$

б) $f(s) = (q + ps)^n;$

в)* $f(s) = \arcsin s;$

г)* $f(s) = \int\limits_0^x e^{-s} ds.$

15. Знайти генератрису числової послідовності $\{a_n\}$, яка задана рекурентним співвідношенням:

а) $a_0 = 1;\ a_n = 3a_{n-1} + 4^n;$

б) $a_0 = 3;\ a_n = 2a_{n-1} + n.$

16. Використовуючи генератриси, визначте, скільки існує способів вибору 12 об’єктів із сукупності об’єктів п’яти типів, якщо необхідно вибрати не більше 2 об’єктів перших трьох типів і необмежену кількість об’єктів інших двох типів.

17. В урні знаходиться 3 червоні, 4 сині і 2 зелені кулі. Скільки способів вибору 6 куль з урни, якщо з обраних куль є не менше ніж по одній кулі кожного кольору?

18. Щоб отримати додаткові 5 балів до модуля "Комбінаторика" з дискретної математики, студент може розв’язати 10 задач підвищеної складності з тем "Комбінаторні схеми", "Задачі з обмеженнями" і "Генератриси", причому серед розв’язаних задач повинно бути не менше ніж по дві задачі з кожної теми. Скількома способами студент може вибрати задачі для розв’язання?

19. Студент вирішив подарувати своїй дівчині 9 червоних, білих і рожевих троянд. Скількома способами можна це зробити, якщо у букеті повинно бути не більше двох білих і двох рожевих троянд?

20. На першому курсі фізико-математичного факультету за державним замовленням навчається 70 студентів, з них 40 за спеціальністю "Математика*", 15 "Інформатика" і 15 "Фізика". Після складання сесії виявилося, що у другому семестрі 40 студентів отримуватимуть стипендію, причому серед них не менше 15 студентів – математиків, не менше 10 інформатиків і не більше 10 – фізиків. Скількома способами можуть бути розподілені стипендії за спеціальностями?

21. 25 першокласників до Дня матері (друга неділя травня) готували подарунки для своїх матусь. Відомо, що не менше 7-ми дітей виготовили серветки, не більше 15-ти – намалювали малюнки, не менше 5-ти - виготовили аплікації, не більше 2-х – склали вірші про своїх мам. Скількома способами могли розподілитися подарунки за їх видами?

22. Для проходження виробничої практики 15 студентів-інформатиків були розподілені на фірми "Електронік", "Меркурій", "Богатир". Скількома способами міг відбутися розподіл студентів між фірмами, якщо відомо, що фірма "Електронік" погодилася прийняти від 2-х до 5-ти студентів, "Меркурій" – не більше 7-ми, "Богатир" – не більше 10-ти?

§ 4. Рекурентні рівняння, методи їх розв'язання

Основні теоретичні відомості

Означення. ***Рекурентним рівнянням*** називається таке рівняння, яке описує правило для знаходження членів послідовності через один або кілька попередніх, причому задається відповідна кількість початкових елементів.

Розв'язком рекурентного рівняння називається послідовність, яка задовольняє це рівняння.

Метод рекурентних співвідношень – це такий метод, який дає можливість знайти розв'язок задачі через розв'язок аналогічної задачі з меншим числом об'єктів за допомогою деякого співвідношення.

Загального методу розв'язування рекурентних рівнянь немає. Хоча є класи рівнянь, які розв'язуються єдиним методом.

Означення. Лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами порядку *k* називається рекурентне рівняння вигляду

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}, \qquad (1)$$

де $c_1, \dots, c_k$ – дійсні числа та $c_k \neq 0$.

Розв'язок рекурентних рівнянь k-го порядку називають **загальним**, якщо він залежить від k довільних сталих $B_1, \dots, B_k$ і будь-який його розв'язок можна отримати підбором цих сталих. Для визначення із рекурентного рівняння конкретної послідовності достатньо задати k початкових умов: $a_0 = A_0$, $a_1 = A_1$, …, $a_{k-1} = A_{k-1}$. Із цих умов визначають сталі $B_1, \dots, B_k$.

Теорема 1. Якщо послідовності $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(k)}$ є розв'язками рекурентного рівняння (1), то для довільних чисел $B_1, \dots, B_k$ послідовність $a_n = B_1 a_n^{(1)} + \cdots + B_k a_n^{(k)}$ також є розв'язком цього рівняння.

Теорема 2. Якщо число r_1 є коренем рівняння

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_k, \qquad (2)$$

то послідовність r_1^n (n = 0,1,...) є розв'язком рекурентного рівняння (1).

Рівняння (2) називають **характеристичним** для рекурентного рівняння (1). Дане рівняння є алгебраїчним рівнянням степеня k, його корені можуть бути як простими, так і кратними.

Коли корені характеристичного рівняння прості, то k різними розв'язками рівняння (1) будуть: r_1^n, r_2^n, …, r_k^n де r_i $(i = \overline{1,k})$ − корені рівняння (2). Причому всі $r_i \neq \mathbf{0}$**,** бо інакше б $c_k = 0$.

Якщо усі корені характеристичного рівняння прості, то загальний розв'язок рекурентного рівняння має вигляд:

$$a_n = B_1 r_1^n + \cdots + B_k r_k^n. \tag{3}$$

Коли корінь, наприклад, r_1 характеристичного рівняння має кратність k_s, то рівність (3) не буде загальним розв'язком. У цьому випадку загальний розв'язок має вигляд:

$$a_n = \left(B_1 + B_2 n + \cdots + B_{k_s} n^{k_s - 1}\right) r_1^n + B_{k_{s+1}} r_2^n + \cdots + B_{k_{s+m-1}} r_m^n. \tag{4}$$

<u>**Теорема 3.**</u> Якщо рівняння (2) має два комплексні корені $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд:

$$a_n = \rho^n (B_1 cos\, n\varphi + B_2 \sin n\varphi), \tag{5}$$

де $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $cos\varphi = \frac{\alpha}{\rho}$, $sin\varphi = \frac{\beta}{\rho}$.

Розглянемо ***лінійні неоднорідні рекурентні рівняння*** зі сталими коефіцієнтами:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + q_n, \tag{6}$$

де q_n – відома послідовність.

<u>**Теорема 4.**</u> Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (6) дорівнює сумі його будь-якого часткового розв'язку $\tilde{a}_n$ і загального розв'язку b_n відповідного лінійного однорідного рівняння.

<u>**Теорема 5.**</u> Якщо в (6) $q_n = A \cdot n^k c^n$, то частковий розв'язок (6) може бути знайдений у вигляді:

$$\tilde{a}_n = D n^k c^n,$$

де k – кратність, з якою константа *c* входить в число коренів характеристичного рівняння, а D – деяка константа.

Позначимо $P_s(n) = \sum_{m=0}^{n} l_m n^m$.

<u>**Теорема 6.**</u> Якщо в (6) q_n має вигляд $q_n = P_s(n)$, то його частковий розв'язок може бути знайдено у вигляді:

$$\tilde{a}_n = n^k Q_s(n),$$

де k – кратність, з якою константа *1* входить в число коренів характеристичного рівняння, а $Q_s(n)$ – деякий многочлен того ж степеня s, що й многочлен $P_s(n)$).

Приклади розв'язування задач

<u>Задача 1.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$.

Розв'язання

Дане рівняння є лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами порядку 2. Для нього запишемо характеристичне рівняння:

$$r^2 = r + 6$$

та розв'яжемо його.

Перенісши всі члени ліворуч, отримаємо рівняння $r^2 - r - 6 = 0$.

За теоремою, яка обернена до теореми Вієта, розв'язками рівняння є: $r_1 = -2, r_2 = 3$.

Тому загальний розв'язок рекурентного рівняння запишеться:

$$a_n = B_1(-2)^n + B_2 3^n.$$

<u>Відповідь:</u> $a_n = B_1(-2)^n + B_2 3^n$.

<u>Задача 2.</u> Знайти розв'язок рекурентного рівняння $a_n = 4a_{n-1} -$ $-4a_{n-2}$ при $n > 2$, якщо $a_0 = 2$, $a_1 = 6$.

Розв'язання

Дане рівняння є лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами порядку 2.

Знайдемо спочатку загальний розв'язок рекурентного рівняння. Запишемо для нього характеристичне рівняння: $r^2 = 4r - 4$ та розв'яжемо його. Перенісши всі члени ліворуч, отримаємо рівняння: $r^2 - 4r + 4 = 0$.

Оскільки $(r-2)^2 = 0$, то $r_{1,2} = 2$. Використовуючи формулу (4), отримали загальний розв'язок рекурентного рівняння: $a_n = B_1 2^n + B_2 n 2^n$. Використовуючи початкові умови, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} B_1 = 2, \\ 2B_1 + 2B_2 = 6; \end{cases} \begin{cases} B_1 = 2, \\ B_1 + B_2 = 3; \end{cases} \begin{cases} B_1 = 2, \\ 2 + B_2 = 3; \end{cases} \begin{cases} B_1 = 2, \\ B_2 = 1. \end{cases}$$

Тоді розв'язок рекурентного рівняння запишеться так:

$$a_n = 2 \cdot 2^n + +n2^n = 2^n(n+2).$$

<u>Відповідь:</u> $a_n = 2^n(n+2)$.

<u>Задача 3.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$.

Розв'язання

Дане рівняння є лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами порядку 2. Для нього запишемо характеристичне рівняння:

$$r^2 = r - 1$$

та розв'яжемо його.

$r^2 - r + 1 = 0,\ D = 1 - 4 = -3, r_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

З теореми 3 маємо: $\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \sin\varphi = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Тоді розв'язок рекурентного рівняння запишеться так:

$$a_n = 1^n \left(B_1 cos\frac{n\pi}{3} + B_2 sin\frac{n\pi}{3} \right) = B_1 cos\frac{n\pi}{3} + B_2 sin\frac{n\pi}{3}.$$

<u>Відповідь:</u> $a_n = B_1 cos\frac{n\pi}{3} + B_2 sin\frac{n\pi}{3}$.

<u>Задача 4.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} - 6 \cdot 3^n = 0$.

Розв'язання

Дане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. За теоремою 4 знайдемо спочатку загальний розв'язок лінійного однорідного рекурентного рівняння: $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$. Запишемо для даного рівняння характеристичне рівняння: $r^2 - 5r + 6 = 0$. З оберненої до теореми Вієта теореми маємо: $r_1 = 2, r_2 = 3$.

Тому загальний розв'язок однорідного рекурентного рівняння запишеться:

$b_n = B_1 2^n + B_2 3^n$.

Оскільки у загальному розв'язку однорідного рекурентного рівняння є складова $B_2 3^n$ і в заданому рекурентному рівнянні є складова $6 \cdot 3^n$, то згідно з теоремою 5 $\tilde{a}_n = Dn3^n$. Підставимо даний розв'язок у рекурентне рівняння: $Dn3^n - 5D(n-1)3^{n-1} + 6D(n-2)3^{n-2} - 6 \cdot 3^n = 0$. Поділимо праву й ліву частину рівняння на 3^{n-2}:

$9Dn - 15D(n-1) + 6D(n-2) - 6 \cdot 9 = 0$,

$9Dn - 15Dn + 15D + 6Dn - 12D - 54 = 0$,

$3D = 54, D = 18$

Тому загальний розв'язок рекурентного рівняння запишеться:

$$a_n = B_1 2^n + B_2 3^n + 18n \cdot 3^n.$$

<u>Відповідь:</u> $a_n = B_1 2^n + B_2 3^n + 18n \cdot 3^n$.

<u>Задача 5.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 5$.

Розв'язання

Дане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. За теоремою 4 знайдемо спочатку загальний розв'язок лінійного однорідного рекурентного рівняння $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$.

Для нього запишемо характеристичне рівняння:

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

та розв'яжемо його. З оберненої до теореми Вієта теореми маємо:

$r_1 = 1, r_2 = 1$.

Тому загальний розв'язок однорідного рекурентного рівняння запишеться:

$$b_n = B_1 1^n + B_2 n 1^n = B_1 + B_2 n.$$

Кратність константи 1 є 2, тому за теоремою 6 частковий розв'язок може бути знайдено у вигляді: $\tilde{a}_n = n^2 l_0$. Підставимо даний розв'язок у рекурентне рівняння:

$$(n+2)^2 l_0 - 2(n+1)^2 l_0 + n^2 l_0 = 5.$$

Піднесемо до квадрата вирази в дужках:

$$(n^2 + 4n + 4)l_0 - 2(n^2 + 2n + 1)l_0 + n^2 l_0 = 5.$$

Розкриваємо дужки та спрощуємо вираз у лівій частині. У результаті маємо рівняння $2l_0 = 5$. Отже, маємо: $l_0 = 2{,}5$.

Тоді розв'язок рекурентного рівняння запишеться так:

$$a_n = B_1 + B_2 n + 2{,}5n^2.$$

Відповідь: $a_n = B_1 + B_2 n + 2{,}5n^2$.

Задачі для самостійної роботи студентів

1. Знайти загальний розв'язок рекурентного рівняння:

а) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$;

б) $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$;

в) $a_{n+3} + 2a_{n+2} - 3a_{n+1} - 6a_n = 0$;

г) $a_{n+3} + 3a_{n+2} - 10a_{n+1} - 24a_n = 0$;

ґ) $a_n = 2\sqrt{2}a_{n-1} - 4a_{n-2}$;

д) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 4a_n = 0$;

е) $a_n - 5a_{n-1} + 9a_{n-2} - 7a_{n-3} + 2a_{n-4} = 0$;

є) $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$;

ж)* $a_{n+5} = 2\sqrt{3}a_{n+4} - 4a_{n+3} - 2a_{n+2} + 4\sqrt{3}a_{n+1} - 8a_n$;

з)* $a_{n+4} - 3a_{n+3} - 8a_{n+1} + 24a_n = 0$.

2. Знайти розв'язок рекурентного рівняння:

а) $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$ при $n > 2$;

б) $a_0 = 2, a_1 = 17$, $a_{n+2} + a_{n+1} - 20a_n = 0$ при $n > 2$;

в) $a_0 = 0, a_1 = 10,\ a_2 = 10,\ \ a_{n+3} + 3a_{n+2} - 4a_{n+1} - 12a_n = 0$ при $n > 3$;

г) $a_0 = 13, a_1 = 13,\ a_2 = 115,\quad a_{n+3} - 5a_{n+2} - 2a_{n+1} + 24a_n = 0$ при $n \geq 3$;

ґ) $a_0 = 5, a_1 = 19,\ a_2 = 68,\ a_{n+3} - 11a_{n+2} + 42a_{n+1} - 60a_n = 0$ при $n \geq 3$;

д) $a_0 = 2, a_1 = -4 + 2\sqrt{2},\ a_2 = 20,\ a_{n+3} + \left(4 - 2\sqrt{2}\right)a_{n+2} + (4 - -8\sqrt{2})a_{n+1} + 16a_n = 0$ при $n \geq 3$.

3. Знайти загальний розв'язок рекурентного рівняння:

а) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n$;

б) $a_{n+2} - 4a_{n+1} - 5a_n = 8 \cdot 3^n$;

в) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2$;

г) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4$.

4. Знайти розв'язок рекурентного рівняння:

а) $a_{n+2} - a_{n+1} + 3a_n = -2n + 3$, якщо $a_0 = 1,\ a_1 = -7$;

б) $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = n$, якщо $a_0 = 1,\ a_1 = -2$;

в) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$, якщо $a_0 = 1,\ a_1 = 2$;

г) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (-3)^n$, якщо $a_0 = 2,\ a_1 = -\frac{21}{2}$.

Модуль 3. Теорія графів

§1. Основні поняття теорії графів

Основні теоретичні відомості

Нехай V – деяка непорожня множина. Позначимо $V^{(2)}$ – множину всіх неупорядкованих різних двохелементних підмножин множини V, а $MV^{(2)}$ – мультимножину множини $V^{(2)}$, тобто в $MV^{(2)}$ можуть входити однакові пари елементів із V, причому цих пар може бути скільки завгодно. Декартовий квадрат множини V позначатимемо V^2.

__Означення.__ **Неорієнтованим мультиграфом *G*** називається пара (V, E), у якій $E \subseteq MV^{(2)}$.

Елементи множини V називаються **вершинами**, а елементи множини E – **ребрами**. Ребра позначаються парами $\{u, v\}$, де u, v – вершини з V.

Якщо $G = (V, E)$ – мультиграф, то E може мати кілька ребер, що з'єднують одні й ті самі вершини u і v. Такі ребра називаються **кратними ребрами**.

__Означення.__ **Скінченним мультиграфом** називається мультограф, у якого множини V і E скінченні.

__Означення.__ **Графом n-го порядку** називається скінченний граф з n вершинами.

Інколи розглядають графи, які мають ребра {u,u}. Таке ребро називається **петлею**, а мультиграф, який має петлі, – **псевдографом**. Псевдограф є узагальненням поняття графа й мультиграфа, оскільки він може мати петлі, кратні ребра.

Дві вершини u і v графа $G = (V, E)$ **суміжні**, якщо $\{u, v\} \in E$, і **несуміжні** – у протилежному випадку. Якщо $\{u, v\} \in E$, то вершини u і v називаються **кінцями ребра** $\{u, v\}$. У цьому випадку ще говорять, що ребро $\{u, v\}$ з'єднує вершини u і v. Множину вершин графа, суміжних з деякою вершиною u, будемо позначати См(u).

Два ребра називаються **суміжними**, якщо вони мають спільний кінець. Множину вершин графа, суміжних з деякою вершиною u, будемо позначати См(u).

Вершина u і ребро e називаються **інцидентними,** якщо u є кінцем ребра e, і **неінцидентними** – у протилежному випадку.

__Означення.__ **Степенем вершини u графа G** називається число інцидентних їй ребер.

Надалі позначатимемо степінь вершини u – deg(u).

Вершина степені 0 називається **ізольованою**, а вершина степені 1 – **висячою**, або **кінцевою**. Ребро, інцидентне кінцевій вершині, також називається **кінцевим**.

Лема про рукостискання. Сума степенів всіх вершин графа є парним числом.

Теорема 1. Неорієнтований граф має парну кількість вершин непарного степеня.

Означення. Повним графом називається граф, будь-які дві вершини якого суміжні.

Означення. Регулярним (однорідним) графом називається граф, усі вершини якого мають один і той самий степінь.

Регулярні графи степеня 3 називають також **кубічними**, або **тривалентними, графами**.

Означення. Платоновими графами називаються графи, утворені вершинами і ребрами п'яти правильних многогранників – платонових тіл: тетраедра, куба, октаедра, додекаедра та ікосаедра.

Пам'ятаємо, що тетраедр має 4 грані, куб – 6, октаедр – 8, додекаедр – 12, а ікосаедр – 20.

Означення. Двочастинним графом називається граф, для якого існує таке розбиття множини його вершин на два класи, при котрому кінці кожного ребра лежать у різних класах.

Якщо в двочастинному графі будь-які дві вершини з різних класів суміжні, то такий граф називається **повним двочастинним графом**.

Повний двочастинний граф, у якого один клас має m вершин, а другий – n вершин, позначають $K_{m,n}$.

Повний двочастинний граф $K_{1,n}$ називається **зірковим графом**.

Граф називається **k-частинним графом**, якщо існує таке розбиття множини його вершин на k класів, за якого будь-яке ребро графа з'єднує дві вершини з різних класів.

Означення. Орієнтованим графом (орграфом) називається граф $G = (V, E)$ у якого $E \subseteq V^2$.

Згідно з означенням, вершини всіх ребер орієнтованого графа упорядковані. Якщо $(u, v) \in E$, то вершину u називають **початковою**, а v – **кінцевою** вершиною ребра. Орграфи зображуються так, як і графи, з тією лише різницею, що їх ребра позначаються стрілками, які ведуть з початкової вершини ребра в кінцеву. Інакше кажучи, якщо (u,v) – ребро орграфа, то з вершини u у вершину v веде стрілка.

<u>Означення.</u> Півстепенем виходу вершини v орієнтовного графа G називається кількість дуг орграфа G, початком яких є вершина v.

Півстепінь виходу вершини v позначається $deg^{+}(v)$.

<u>Означення.</u> Півстепенем входу вершини *v* орієнтовного G називається кількість дуг орграфа G, кінцем яких є вершина v.

Півстепінь входу вершини v позначається $deg^{-}(v)$.

Тоді степінь вершини v орієнтованого графа визначатиметься: $\deg(v) = deg^{+}(v) + deg^{-}(v)$.

Орграф називається ***функціональним***, якщо кожна його вершина має півстепінь виходу, що дорівнює 1.

Орграф називається ***ін'єктивним***, якщо півстепінь входу кожної його вершини дорівнює 1.

Орграф $G = (V, E)$ називається ***транзитивним***, якщо з того, що $(v, w) \in E$ і $(w, u) \in E$, випливає $(v, u) \in E$.

Існують такі способи задання графів: графічний, алгебраїчний, матрицями інцидентності, суміжності тощо.

Графічний спосіб задання графа – це рисунок на площині. Він дуже гарно унаочнює всі взаємозв'язки між елементами графа, проте його не можна застосовувати при розв'язуванні задач на комп'ютері.

При алгебраїчному способі задання графа множини вершин і ребер задаються повним переліком. У випадку неорієнтованого графа будемо ребра задавати у фігурних дужках, оскільки напрям вершин неважливий. Коли ж граф орієнтовний, то ребра будемо задавати у круглих дужках, бо перша вершина графа є початком ребра, а друга – його кінцем.

<u>Означення.</u> Матрицею інцидентності неорієнтованого псевдографа G, яка відповідає заданій нумерації вершин і ребер, називають прямокутну матрицю M розмірності $n \times m$ з елементами m_{ij} $(i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m})$, де

$$\boldsymbol{m_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо вершина } \boldsymbol{v_i} \text{ та ребро } \boldsymbol{e_j} \text{ інцидентні,} \\ \mathbf{0}, & \text{якщо вершина } \boldsymbol{v_i} \text{ та ребро } \boldsymbol{e_j} \text{ не інцидентні,} \\ \mathbf{2}, & \text{якщо ребро } \boldsymbol{e_j} \text{ є петлею, яка виходить із } \boldsymbol{v_i}. \end{cases}$$

<u>Означення.</u> Матрицею інцидентності орієнтованого псевдографа G, яка відповідає заданій нумерації вершин і ребер, називають прямокутну матрицю M розмірності $n \times m$ з елементами m_{ij} $(i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m})$, де

$$\boldsymbol{m_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{якщо дуга } \boldsymbol{e_j} \text{ виходить з вершини } \boldsymbol{v_i}, \\ \mathbf{-1}, \text{якщо дуга } \boldsymbol{e_j} \text{ входить у вершину } \boldsymbol{v_i}, \\ \mathbf{2}, \text{якщо дуга } \boldsymbol{e_j} \text{ є петлею у вершину } \boldsymbol{v_i}, \\ \mathbf{0} \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

<u>Означення.</u> Матриця суміжності неорієнтовного графа – це квадратна матриця Δ, кожен елемент якої δ_{ij} дорівнює 1, якщо вершини v_i і v_j – суміжні, та 0 – у протилежному випадку.

У мультиграфа може бути елемент $\delta_{ij} > 1$ – залежно від кратності ребер.

Задамо **матрицю суміжності для орієнтовного графа**. Уважають вершину v_i суміжною v_j, якщо $(v_i, v_j) \in E$. Тоді означення матриці суміжності неорієнтованого графа буде справедливим і для орієнтованого графа.

<u>Означення.</u> Підграфом $H = (V_1, E_1)$ **графа** $G = (V, E)$ називається граф, для якого справедливо, що $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$.

<u>Означення.</u> Каркасним підграфом *H* графа *G* називається підграф, для якого справедлива рівність $V(H) = V(G)$.

Каркасний підграф часто називають суграфом.

Нехай $G = (V, E)$ – граф і $e \in E$ – деяке його ребро. Говорять, що граф $G_1 = G - e$ отримали з графа G унаслідок операції вилучення ребра *e*, якщо $G_1 = (V, E\backslash\{e\})$.

<u>Теорема 2.</u> Для довільних ребер e і e_1 графа G виконується тотожність: $(G - e) - e_1 = (G - e_1) - e$.

<u>Означення.</u> Операцією вилучення вершини *v* графа *G* називається така операція *G*-*v*, унаслідок якої вершина *v* вилучена з *V*, а з множини ребер *E* вилучені всі ребра інцидентні з вершиною *v*.

<u>Означення.</u> Введенням вершини *ω* у ребро $\{u, v\}$ називається така операція, внаслідок якої одержують два ребра $\{u, \omega\}$, $\{\omega, v\}$, а ребро $\{u, v\}$ при цьому вилучається з графа *G*.

<u>Означення.</u> Граф *F* називається об'єднанням графів $G = (V, E)$ і $H = (V_1, E_1)$**,** якщо $F = (V \cup V_1, E \cup E_1)$.

<u>Означення.</u> Диз'юнктивним об'єднанням графів називається таке об'єднання графів, для якого виконується рівність $V \cap V_1 = \emptyset$.

<u>Означення.</u> Добутком графів $G = (V_1, E_1)$ **і** $H = (V_2, E_2)$ **називається граф** $\boldsymbol{F = G \times H}$ у якого $V = V_1 \times V_2$, а Е визначається так:

вершини (u, u_1) і (v, v_1) суміжні в F тоді і тільки тоді, коли $u = v$, а u_1 і v_1 суміжні в H або $u_1 = v_1$, а u і v суміжні в G.

Якщо $G = (V, E)$ – граф, u, v – дві його вершини і $\text{См}(u) = \{u_1, \dots, u_k\}$, $\text{См}(v) = \{v_1, \dots, v_l\}$, то граф $H = G$ одержаний приєднанням нової вершини u' до множини вершин H і множини ребер $\{u', u_i\}$, $\{u', u_j\}$, $(i = \overline{1, k}, j = \overline{1, l})$ графа H, називається **графом, одержаним із G ототожненням вершин u і v.**

Операція стягування ребра $\{u, v\}$ у графі $G = (V, E)$ означає ототожнення вершин u і v у графі G.

Завдяки операції стягування ребра вводять нове поняття.

<u>Означення.</u> Граф G називається графом, який стягується до графа H, якщо H можна одержати з G за допомогою деякої послідовності операцій стягування ребра.

Нехай $G = (V_1, E_1)$ і $H = (V_2, E_2)$, у яких $V \cap V_1 = \emptyset$.

Операція з'єднання графів G і H полягає в тому, що множини V і V_1 об'єднуються, а потім з'єднуються ребрами кожна вершина графа G з кожною вершиною графа H.

Позначатимемо операцію з'єднання $F = G + H$.

<u>Означення.</u> Доповненням $\overline{G}$ графа G називається граф із множиною вершин V, у якому дві вершини суміжні тоді і тільки тоді, коли вони не суміжні у графі G.

Надалі будемо доповнення до графа G позначати як $\overline{G} = (V, \overline{E})$.

Приклади розв'язування задач

<u>Приклад 1.</u> Граф задано графічно (див. рис. 3.1). Задати граф алгебраїчно. Побудувати матриці суміжності та інцидентності. Визначити півстепені виходу та входу вершин, степені вершин. Установити, які ребра інцидентні вершині x_3.

Розв'язання

Із графічного зображення видно, що множина вершин V графа $G = (V, E)$ містить: $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Тоді множину ребер E можна записати:

$E = \{(x_2, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1),\ (x_3, x_4),\ (x_4, x_3),\ (x_4, x_4).\}$

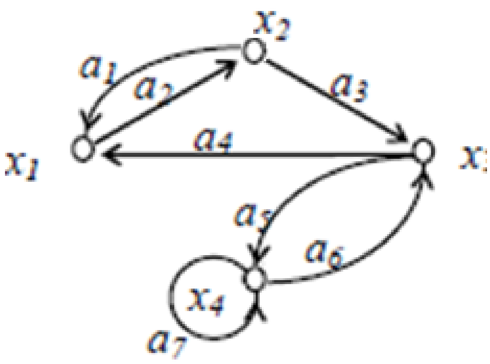


Рис. 3.1

Отже, маємо алгебраїчне задання графа: $G = (V, E)$, де $V = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}$,
$E=\{(x_2, x_1),\ (x_1, x_2),\ (x_2, x_3),\ (x_3, x_1),\ (x_3, x_4),\ (x_4, x_3),\ (x_4, x_4)\}$.

Для побудови матриці суміжності використаємо допоміжну таблицю (див. таблицю 1).

Таблиця 1

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	0
x_2	1	0	1	0
x_3	1	0	0	1
x_4	0	0	1	1

Запишемо власне матрицю суміжності орієнтованого графа:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 2

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
x_1	-1	1	0	-1	0	0	0
x_2	1	-1	1	0	0	0	0
x_3	0	0	-1	1	1	-1	0
x_4	0	0	0	0	-1	1	2

Для побудови матриці інцидентності також будемо використовувати допоміжну таблицю. Позначимо ребро $(x_2, x_1) = a_1$, $(x_1, x_2) = a_2$, $(x_2, x_3) = a_3$, $(x_3, x_1) = a_4$, $(x_3, x_4) = a_5$, $(x_4, x_3) = a_6$, $(x_4, x_4) = a_7$. Маємо таблицю 2.

Запишемо матрицю інцидентності орієнтованого графа:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи відповідні означення, визначимо півстепені виходу та входу кожної вершини графа G.

$$deg^+(x_1) = 1, deg^-(x_1) = 2;$$
$$deg^+(x_2) = 2, deg^-(x_2) = 1;$$
$$deg^+(x_3) = 2, deg^-(x_3) = 2;$$
$$deg^+(x_4) = 2, deg^-(x_4) = 2.$$

Тоді легко обчислити степені вершин графа G:

$deg(x_1) = 3, deg(x_2) = 3, deg(x_3) = 4, deg(x_4) = 4.$

З таблиці 2, використовуючи зроблені нами позначення, досить легко визначити, які ребра інцидентні вершині x_3: (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_3). ■

<u>Приклад 2.</u> Граф задано алгебраїчно: $G = (V, E)$, де $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_1\}, \{x_3, x_4\}\}$. Зобразити граф графічно, побудувати матриці суміжності та інцидентності. Визначити степені вершин та множину См(x_3). Указати, якщо є такі, висячі та ізольовані вершини.

Розв'язання

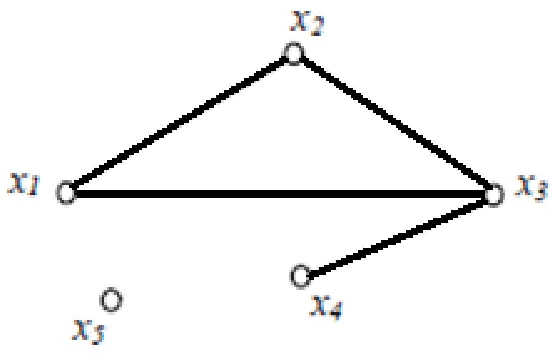


Рис.3.2

Щоб зобразити граф графічно помічаємо, що він має 5 вершин. Будуємо ці вершини на площині та позначаємо їх (див. рис. 2). Оскільки у множині ребер використовуються фігурні дужки для позначення кожного ребра – граф неорієнтований. З'єднуємо лінією вершини x_1 і x_2. Аналогічно будуємо й інші ребра (див. рис. 3.2).

Для побудови матриці суміжності, як і в прикладі 1, використаємо допоміжну таблицю (див. таблицю 3).

Таблиця 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	0	0
x_2	1	0	1	0	0
x_3	1	1	0	1	0
x_4	0	0	1	0	0
x_5	0	0	0	0	0

Запишемо власне матрицю суміжності неорієнтованого графа:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для побудови матриці інцидентності також буде використовувати допоміжну таблицю (див. таблицю 4).

Таблиця 4

	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_3, x_1\}$	$\{x_3, x_4\}$
x_1	1	0	1	0
x_2	1	1	0	0
x_3	0	1	1	1
x_4	0	0	0	1
x_5	0	0	0	0

Запишемо тепер матрицю інцидентності неорієнтованого графа:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи означення, визначимо степені вершин графа G:
$deg(x_1) = 2$, $deg(x_2) = 2$, $deg(x_3) = 3$, $deg(x_4) = 1$, $deg(x_5) = 0$.
За означенням маємо $См(x_3) = \{x_1, x_2, x_4\}$.

Оскільки $deg(x_4) = 1$, то x_4 – висяча вершина, врахувавши $deg(x_5) = 0$ – x_5 є ізольованою вершиною. ■

<u>Приклад 3.</u> Нехай V=$\{a,b,c,d,e\}$. Граф G =(V,E) задано за допомогою матриці суміжності A. Визначити множину ребер E графа G. Побудувати його графічне зображення та матрицю інцидентності графа G. Визначити степені вершин даного графа.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Проаналізувавши матрицю суміжності графа G, можна стверджувати:

- G – неорієнтований граф, бо матриця суміжності симетрична відносно головної діагоналі;
- G – неорієнтований мультиграф, бо деякі елементи матриці більші за 1;
- G – неорієнтований псевдограф, бо деякі елементи головної діагоналі не дорівнюють 0.

Для зручності визначення елементів графа сформуємо допоміжну таблицю (див. табл.5).

Таблиця 5

	a	b	c	d	e
a	0	1	2	0	1
b	1	0	0	1	1
c	2	0	1	0	1
d	0	1	0	0	0
e	1	1	1	0	1

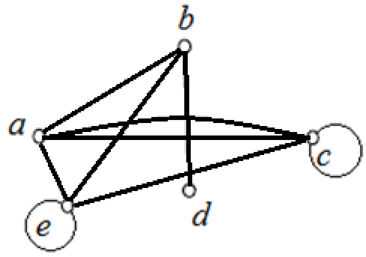


Рис.3.3

На основі таблиці 5 та раніше сформульованих тверджень легко визначити множину ребер $E = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,c\}, \{a,e\}, \{b,d\}, \{b,e\}, \{c,c\},\{c,e\},\{e,e\}\}$.

Врахувавши множину вершин та множину ребер неорієнтованого псевдо графа будуємо його графічне подання (див. рис. 3.3).

Створимо допоміжну таблицю для побудови матриці інцедентності (див. табл. 6).

Таблиця 6

	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,e\}$	$\{b,d\}$	$\{b,e\}$	$\{c,c\}$	$\{c,e\}$	$\{e,e\}$
a	1	1	1	1	0	0	0	0	0
b	1	0	0	0	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0	2	1	0
d	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e	0	0	0	1	0	1	0	1	2

На основі допоміжної таблиці записуємо матрицю інцидентності:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

За матрицею інцидентності знаходимо степені вершин псевдографа G: $\deg(a) = 4, \deg(b) = 3, \deg(c) = 5, \deg(d) = 1, \deg(e) = 5.$ ■

<u>Приклад 4.</u> Побудувати граф відношення «$x + y <= 5$» на множині M={1, 2, 3, 4}.

Розв'язання

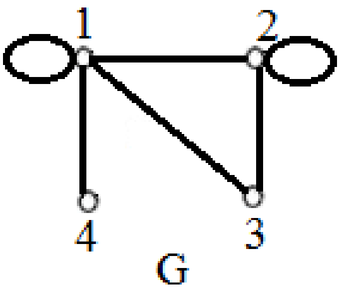


Рис.3.4

Побудуємо граф G з множиною вершин V={1, 2, 3, 4}, причому дві вершини i та j з'єднуються лише тоді, коли справджується нерівність $i + j \leq 5$. Враховуючи той факт, що відношення «$x + y <=$ 5» є симетричним, граф повинен бути не орієнтовним. Зображення графа відношення подано на рис. 3.4. ■

<u>Приклад 5.</u> Чому дорівнює степінь кожної вершини в повному графі з 5 вершинами.

Розв'язання

За означенням повного графа, кожна його вершина суміжна з іншими 4 вершинами. А тому $\deg(v) = 4$, де v – будь-яка вершина повного графа.■

Відповідь: 4.

Приклад 6. Графи G_1 і G_2 задані графічно на рис. 3.5. Знайти об'єднаня цих графів, подати його графічно та алгебраїчно.

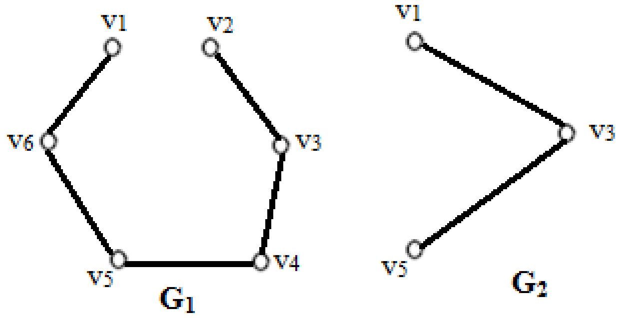


Рис. 3.5

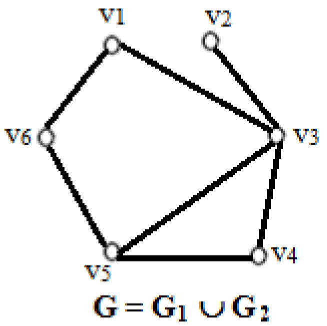


Рис. 3.6

Розв'язання

Використовуючи означення об'єднання двох графів, на рис. 3.6 задамо графічне подання результуючого графа $G = G_1 \cup G_2$.

Щоб подати алгебраїчно об'єднання двох графів, спочатку задамо алгебраїчно графи G_1 та G_2: $G_1 = (V_1, E_1)$, де $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E_1 = \{\{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$; $G_2 = (V_2, E_2)$, де $V_2 = \{v_1 v_3, v_5\}$, $E_2 = \{\{v_1, v_3\}, \{v_3, v_5\}\}$.

Використовуючи означення об'єднання двох графів, маємо:

$G = (V, E)$, де $V = V_1 \cup V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = E_1 \cup E_2 = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$.■

Приклад 6. Граф задано алгебраїчно: $G = (V, E)$, де $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{\,\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}\}$. Знайти $\bar{G}$, подати його графічно та алгебраїчно.

Розв'язання

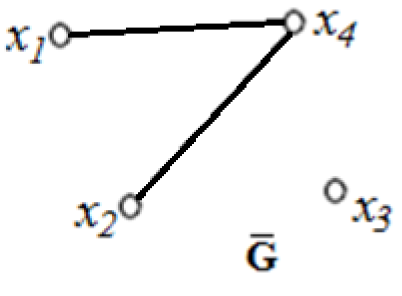


Рис. 3.7

Використовуючи означення доповнення графа, задамо алгебраїчне подання утвореного графа: $\bar{G} = (V_1, E_1)$, де $V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E_1 = \{\,\{x_1, x_4\},\ \{x_2, x_4\}\}$.

На рис. 3.7 зображено графічне подання $\bar{G}$.■

Приклад 7. На рис. 3.8 зображено графи G і K_2. Знайти граф $H = G \times K_2$.

Розв’язання

Нехай $G = (V_1, E_1)$, $K_2 = (V_2, E_2)$, де $V_1 = \{a, b, c, d\}$, $V_2 = \{1, 2\}$. Причому $\text{См}(a) = \{b, d\}$, $\text{См}(b) = \{a, c\}$, $\text{См}(c) = \{b, d\}$, $\text{См}(d) = \{a, c\}$. Тоді, за означенням добутку графів, знайдемо алгебраїчне подання графа $H = (V, E)$: $V = V_1 \times V_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2), (d, 1), (d, 2)\}$. Щоб знайти множину ребер, знайдемо множини суміжності вершин графа: $\text{См}((a, 1)) = \{(b, 1), (d, 1), (a, 2)\}$, $\text{См}((a, 2)) = \{(b, 2), (d, 2), (a, 1)\}$, $\text{См}((b, 1)) = \{(a, 1), (c, 1), (b, 2)\}$, $\text{См}((b, 2)) = \{(a, 2), (c, 2), (b, 1)\}$, $\text{См}((c, 1)) = \{(b, 1), (d, 1), (c, 2)\}$, $\text{См}((c, 2)) = \{(b, 2), (d, 2), (c, 1)\}$, $\text{См}((d, 1)) = \{(a, 1), (c, 1), (d, 2)\}$, $\text{См}((d, 2)) = \{(a, 2), (c, 2), (d, 1)\}$. Тоді маємо $E = \{\{(a, 1), (b, 1)\}, \{(a, 1), (d, 1)\}, \{(a, 1), (a, 2)\}, \{(b, 1), (c, 1)\}, \{(b, 1), (b, 2)\}, \{(c, 1), (d, 1)\}, \{(c, 1), (c, 2)\}, \{(d, 1), (d, 2)\}, \{(a, 2), (b, 2)\}, \{(a, 2), (d, 2)\}, \{(b, 2), (c, 2)\}, \{(c, 2), (d, 2)\}\}$.

Графічне зображення графа $H = G \times K_2$ подано на рис. 3.9. ■

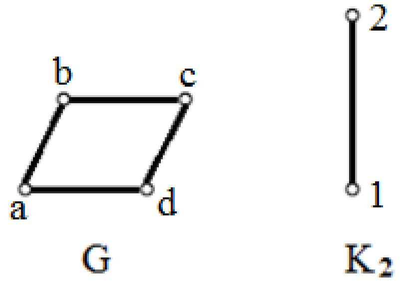


Рис. 3.8

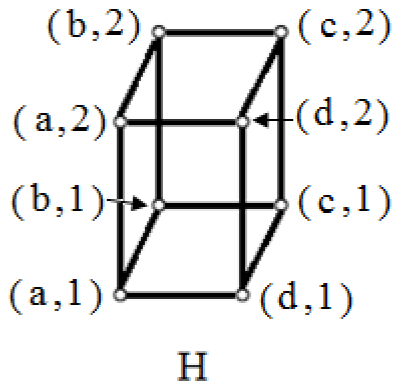


Рис. 3.9

<u>Приклад 8.</u> На хуторі Савки є 15 будинків. Кожен із хуторян купив собі стаціонарний телефон. Чи можна їх поєднати телефонним кабелем так, щоб кожен телефон був з’єднаний рівно з п’ятьма іншими?

Розв’язання

Перефразуємо дану задачу таким чином: чи існує регулярний граф, що містить 15 вершин, степінь вершини якого дорівнює 5?

Нехай такий граф існує, тоді знайдемо кількість його ребер. Для цього знайдемо добуток кількості вершин на степінь вершини. При цьому кожне ребро буде враховано двічі, тому добуток поділимо на два: $\frac{15 \cdot 5}{2} = 37{,}5$. Але кількість ребер повинно бути цілим числом – висунуте нами припущення хибне. Отже, не можна побудувати регулярний граф, який містить 15 вершин, степінь кожної вершини якого дорівнює 5. Тому з’єднати телефони вказаним в умові способом не можна. ■

Відповідь: ні.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Граф задано графічно (див. рис. 3.10). Задати граф алгебраїчно. Побудувати матриці суміжності та інцидентності. Визначити степені вершин. Установити, які ребра інцидентні вершині: а) 2; б) d; в) E; г) v_5.

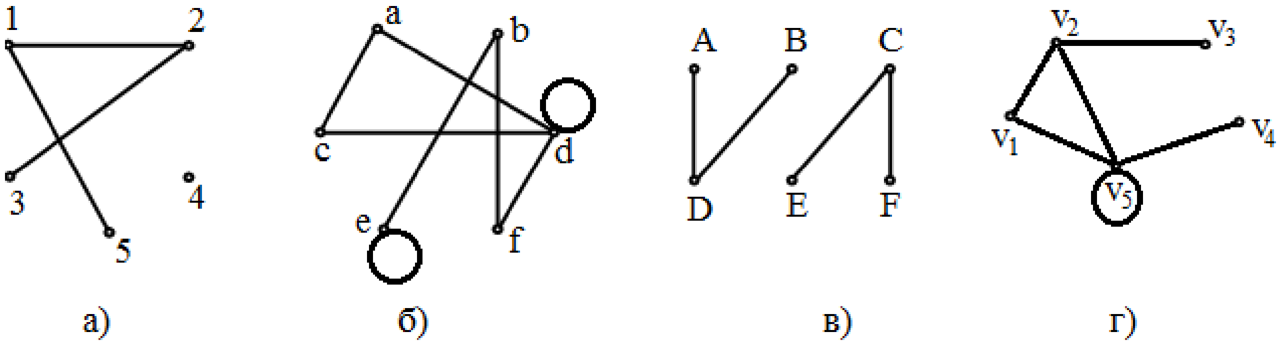


Рис. 3.10

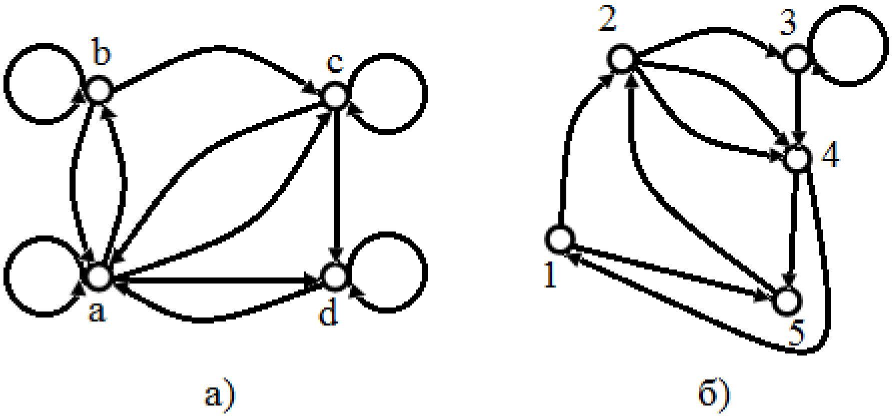


Рис. 3.11

2. Граф задано графічно (див. рис. 3.11). Задати граф алгебраїчно. Побудувати матриці суміжності та інцидентності.

3. Граф задано алгебраїчно. Зобразити граф графічно, побудувати матриці суміжності та інцидентності. Визначити, де потрібно півстепені виходу та входу вершин, степені вершин та множину $Cм(x_3)$. Указати, якщо є такі, висячі та ізольовані вершини.

а) $V = \{1,2,3,4\}$, $E = \{(1,3),(2,3),(3,4),(4,1),(4,2)\}$;

б) $V = \{a,b,c,d,e\}$, $E = \{\{a,d\},\{b,c\},\{b,e\},\{c,e\},\{d,b\},\{d,e\},\{e,a\}\}$;

в) $V = \{1,2,3\}$, $E = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$;

г) $V = \{A,B,C,D\}$, $E = \{\{A,B\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,A\},\{C,D\}\}$.

4. Нехай $V=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Граф $G=(V, E)$ задано за допомогою матриці суміжності A. Визначити множину ребер E графа G. Побудувати його графічне зображення та матрицю інцидентності графа G. Визначити степені вершин даного графа.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Побудувати граф відношення R на множині M, його матриці суміжності та інцидентності, якщо:

а) R=«$x + y <= 7$», M={1, 2, 3, 4, 5, 6};

б) R=«$x < y$», M={1, 2, 3, 4, 5}.

6. Чому дорівнює степінь кожної вершини в повному графі з n вершинами, якщо:

а) $n = 4$; в) $n = 100$;

б) $n = 6$; г) $n = k$?

7. Скільки ребер містить повний граф із n вершинами, якщо

а) $n = 3$; в) $n = 5$;

б) $n = 4$; г) $n = k$?

8. Побудувати граф із n вершинами, степені яких задані вектором степенів R, якщо:

а) n=5, R=(1, 2, 2, 2, 3); б) n=6, R=(2, 2, 2, 3, 4, 4).

9. Чи можна з повного графа K_{17} вилучити деякі ребра так, щоб степінь кожної вершини дорівнював:

а) 15; б) 2; в) 1?

10. Скільки ребер має повний двочастковий граф $K_{n,m}$?

11. Чи існує кубічний граф із n вершинами, якщо:

а) $n = 100$; в) $n = 2k - 1$;

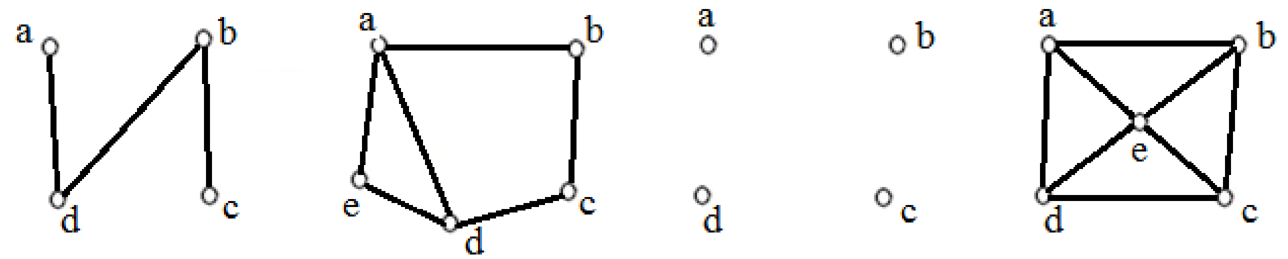
б) $n = 101$; г) $n = 2k$.

12. Яку найменшу кількість ребер потрібно вилучити в повному графі з п'яти вершин, щоб він став повним двочастковим графом?

13. Неорієнтований граф G має 15 ребер, граф $\overline{\mathrm{G}}$ має 13 ребер. Знайти кількість вершин графа G.

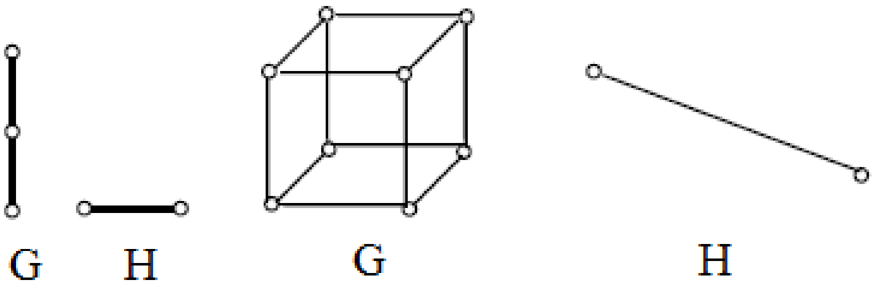
14. Неорієнтований граф G має n вершин та m ребер. Знайти кількість ребер графа $\overline{\mathrm{G}}$.

15. Скількома ребрами потрібно доповнити граф, зображений на рис. 3.12, щоб він став повним?



а) б) в) г)

Рис. 3.12

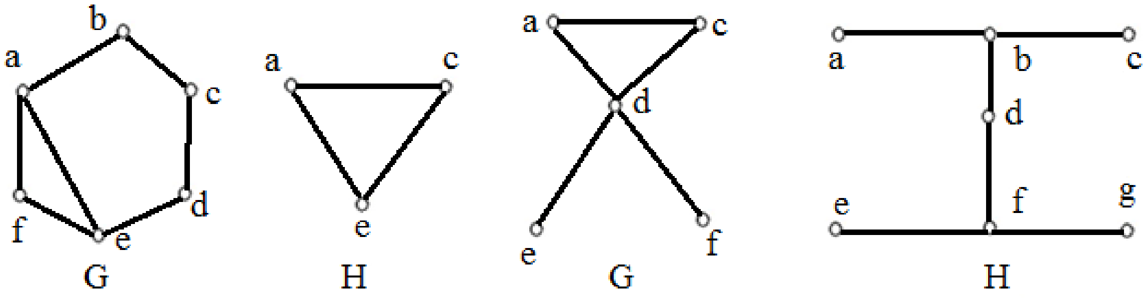


а) *б)*

Рис. 3.13

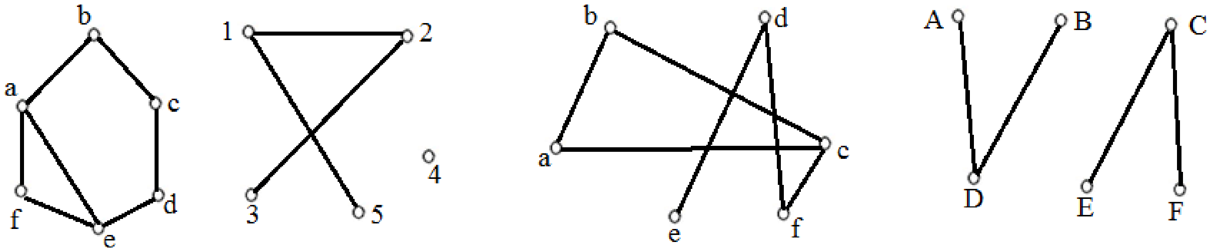
16. На рис. 3.13 зображено графи G і H. Побудуйте зображення графа F, який задається як $F = G \times H$.

17. Знайти об’єднання та переріз графів G і H, що зображені на рис. 3.14.



а) б)

Рис. 3.14



а) б) в) г)

Рис. 3.15

18. Знайти граф $\overline{G}$ для графа G, який зображений на рис. 3.15.

19. Кілька осіб (більше двох) проводять шаховий турнір в одне коло. У певний момент виявилося, що тільки двоє шахістів зіграли однакову кількість партій. Довести, що тоді є або тільки один учасник, який не зіграв жодної партії, або тільки один, який зіграв усі партії.

20. 27 команд проводять футбольний турнір в одне коло. Довести, що в будь-який момент знайдеться команда, яка зіграла парну кількість матчів.

21. У державі 100 міст, і з кожного з них виходить 4 дороги. Скільки всього доріг у державі?

22. У турнірі беруть участь 17 шахістів. Чи може бути, щоб у певний момент часу кожен із них зіграв рівно 5 партій?

23. У школі 1157 учнів. Одні з них знайомі, інші не знайомі один з одним. Довести, що хоча б в одного з них число знайомих серед учнів цієї школи парне.

24. Для будь-якого натурального числа k визначимо граф Q_k наступним чином. Вершинами його є різні впорядковані двійкові набори довжини k. Усього, таким чином, у цьому графі 2^k вершин. Вершини $x = \{x_1, \dots, x_k\}$ і $y = \{y_1, \dots, y_k\}$ суміжні тоді і тільки тоді, коли набори x і y відрізняються точно однією координатою. Цей граф називається k-мірним кубом. Визначте число ребер в графі Q_k.

§2. Алгебраїчні властивості графів

Основні теоретичні відомості

<u>**Означення.**</u> **Маршрутом із вершини u до вершини v у заданому графі G=(V, E)** називається скінченна послідовність його ребер, яка має вигляд $(\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\})$, де $v_0 = u$, $v_k = v$, k – натуральне число.

Маршрут досить часто називають ще **шляхом**. Шлях, який з’єднує вершини u та v, позначають $< u, v >$ і називають $< u,v >$-шляхом. Позначатимемо маршрут з вершини v до вершини u так:

$< u, v >= (\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\})$.

Якщо розглядати не мультиграф, а неорієнтований граф, то шлях можна задати послідовністю вершин:

$< u, v >= (u, v_1, \dots, v_{k-1}, v)$.

Число k ребер вказаного в означенні маршруту називається **довжиною цього маршруту**. Інакше кажучи, довжина маршруту – це кількість ребер у маршруті. Тривіальним, або 0-маршрутом, називають маршрут, який складається з єдиної вершини й має довжину 0. Усі інші шляхи називають нетривіальними. Вершини $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k$ називаються **вершинами маршруту**. Одне й те саме ребро може зустрічатись у маршруті кілька разів.

Якщо в шляху відсутні ребра, що передують e_0, то v_0 називається **початковою вершиною маршруту**, а якщо відсутні ребра, наступні за e_{k-1}, то v_k називається **кінцевою вершиною маршруту**. Початкову й кін цеву вершини шляху часто називають **крайніми**. Будь-яка вершина v_i маршруту, яка належить двом сусіднім ребрам e_{i-1} та e_i, називається **внутрішньою**, або **проміжною**, **вершиною**. Оскільки ребра і вершини в маршруті можуть повторюватися, то внутрішня вершина може виявитись початковою або кінцевою вершиною.

Теорема 1. Нехай G – граф із вершинами $v_1, \dots, v_n$, матрицею суміжності A і $B = A^k = \|b_{ij}\|$, де $1 \le \mathrm{k} \le n$. Із вершини v_i до вершини v_j є m шляхів довжини k тоді і тільки тоді, коли $b_{ij} = m$.

Наслідок. У графі G з N вершинами та матрицею суміжності A тоді і тільки тоді існує маршрут з вершини v_i до вершини v_j $(v_i \neq v_j)$, коли (i,j)-й елемент матриці $A + A^2 + \dots + A^{N-1}$ не дорівнює нулю.

Означення. **Ланцюгом** називається маршрут, у якого всі його ребра різні.

Означення. **Простим ланцюгом** називається маршрут, у якого всі його вершини, крім, можливо, першої й останньої, різні.

Означення. **Циклом у неорієнтованому графі** називається шлях, який з'єднує вершину саму з собою.

Означення. **Простим циклом** називається простий ланцюг, який з'єднує вершину саму з собою.

Безпосередньо з означень маршруту і циклу випливають такі твердження:

а) будь-який маршрут, який з'єднує які-небудь дві вершини графа, має простий ланцюг, що з'єднує ці вершини;

б) будь-який цикл в графі має простий цикл.

Теорема 2. Якщо в нетривіальному замкненому маршруті всі сусідні ребра різні, то він містить цикл.

Теорема 3. Якщо у графі G є цикл, що проходить через ребро (a, b), то в підграфі, отриманому видаленням цього ребра, є маршрут, що з'єднує вершини a і b.

Теорема 4. Довільний цикл Z, що не є простим, можна подати у вигляді $Z = Z_1 \cdot Z_0 \cdot Z_2$ так, що Z_0 є простим циклом, а $Z_1 \cdot Z_2$ – циклом.

Означення. Маршрутом, або шляхом, в орієнтованому графі *G*=(*V*,E) називається послідовність його вершин і дуг $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_{k+1})$ така, що $e_i = (v_i, v_{i+1}),\ i = \overline{1, \dots k}$.

Кажуть, що цей маршрут ***веде*** з вершини v_1 у вершину v_{k+1}. Число k дуг у маршруті називається його ***довжиною***.

Означення. Ланцюгом називається маршрут, у якому всі дуги попарно різні.

Означення. Простим ланцюгом називається маршрут, у якому всі вершини попарно різні.

Маршрут називається ***замкненим*** (або ***циклічним***), якщо початкова вершина є й кінцевою. Замкнений ланцюг називається ***циклом,*** а замкнений простий ланцюг – ***простим циклом***, або ***контуром***.

Орграф називається ***ациклічним*** (або ***безконтурним***), якщо він не має жодного циклу.

Маршрут в орграфі *G* називають ***каркасним***, якщо він містить усі вершини орграфа *G*.

Якщо існує маршрут, який веде з вершини *v* у вершину *w*, то кажуть, що вершина *w* є ***досяжною*** з вершини *v*. У цьому випадку ***відстанню*** $d(v, w)$ від вершини *v* до вершини *w* називається довжина найкоротшого маршруту, що веде з *v* у *w*. Відстань між вершиною *v* і вершиною *w*, яка є недосяжною з *v*, позначається символом ∞.

Вилучення деяких вершин або ребер може привести до перетворення зв'язного графа у незв'язний (або до збільшення компонент зв'язності незв'язного графа).

Означення. Мостом графа називається таке його ребро, вилучення якого збільшує кількість компонент зв'язності.

Означення. Точкою з'єднання графа називається така його вершина, вилучення якої збільшує кількість компонент зв'язності.

Означення. Нероздільним називається зв'язний граф, який не має точок з'єднання.

Граф, який має хоча б одну точку з'єднання, є роздільним. Він розбивається на **блоки**, кожний з яких є максимальним нероздільним підграфом.

<u>Означення.</u> Відстанню між вершинами *u* і *v* називається довжина найкоротшого маршруту між вершинами u і v.

Сам найкоротший шлях називають **геодезичним.** Надалі відстань від вершини u до вершини v позначатимемо *d(u,v).* Для відстані виконуються такі аксіоми:

1) $d(u, v) \geq 0$;
2) $d(u, u) = 0$;
3) $d(u, v) = d(v, u)$;
4) $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ (нерівність трикутника).

Нехай u – деяка фіксована вершина графа $G = (V, E)$.

<u>Означення.</u> Ексцентриситетом вершини u графа G називається максимальна відстань від вершини u до інших вершин графа G.

Ексцентриситет позначають $e(u) = \max d(u, v)$, де $u, v \in V$.

<u>Означення.</u> Діаметром графа G називається максимальний серед усіх ексцентриситетів вершин графа G.

Діаметр графа G позначатимемо *d(G)*: $d(G) = \max e(u)$, де $u \in V$.

Вершина v графа G називається ***периферійною***, якщо$e(v) = d(G)$.

<u>Означення.</u> Радіусом графа G називається мінімальний серед всіх ексцентриситетів вершин графа G.

Радіус графа G позначатимемо $r(G)$. Вершина v графа G називається ***центральною***, якщо $e(v) = r(G)$.

Нехай $G = (V, E)$, $H = (V_1, E_1)$ – графи і θ – взаємно однозначне відображення множини $V(G)$ на множину $V_1(H)$: $\theta: \boldsymbol{V} \to V_1$.

Говорять, що θ є ізоморфним відображенням (коротше, **ізоморфізмом)** графа G на граф H, якщо виконується умова: вершина u суміжна вершині v у графі G тоді і тільки тоді, коли вершина $\theta(u)$ вершині $\theta(v)$ в графі H.

<u>Означення.</u> Графи G і H називаються ізоморфними, якщо для них існує ізоморфне відображення θ.

Надалі ізоморфізм графів будемо позначати $G \cong H$.

Досить часто означення ізоморфності переформульовують таким чином:

<u>Означення.</u> Два графи G і H називаються ізоморфними, якщо між множинами їх вершин існує взаємно однозначне відображення $\theta: V \to V_1$, яке зберігає суміжність.

Означення. Автоморфізмом графа називається ізоморфізм графа на себе.

Означення. Самодоповнювальним називається граф, ізоморфний своєму доповненню.

Теорема 5. Відношення ізоморфізму на множині графів є відношенням еквівалентності.

Теорема 6. Графи ізоморфні тоді й тільки тоді, коли ізоморфні їхні доповнення.

Теорема 7. Графи ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх матриці суміжності можна одержати одну з другої однаковими перестановками рядків і стовпчиків.

Теорема 8. Якщо θ – ізоморфізм графа G на H, то вершини v у графі G і $\theta(v)$ у H мають однакові степені.

Теорема 9. В ізоморфних графах для довільного k $(k \geq 0)$ існує взаємно однозначна відповідність:

а) між множинами простих ланцюгів довжини k;

б) між множинами простих циклів довжини k.

Теорема 10. Кількість вершин будь-якого нетривіального самодоповнювального графа дорівнює або $4k$, або $4k+1, k \in N$.

Теорема 11. Довільний самодоповнювальний граф містить або $4k^2 - k$, або $4k^2 + k$ ребер, де $k \in N$.

Для того щоб показати неізоморфність графів G і H, слід виявити порушення властивостей, які інваріантні щодо ізоморфізму.

Під інваріантом графа G розуміють числовий параметр, що пов’язаний з G, значення якого однакові для всіх графів, ізоморфних G.

Такими інваріантами є:

- кількість вершин;
- кількість ребер;
- кількість вершин певного степеня.

Зауважимо, що з теореми 9 випливає:

- ізоморфізм зберігає відстань між вершинами;
- для зв’язного графа ексцентриситет вершин, діаметр та радіус є інваріантами.

<u>Означення.</u> Регулярним (однорідним) графом називається граф, усі вершини якого мають один і той самий степінь.

Нехай G – регулярний граф степеня k. Степінь регулярного графа позначають $\deg(G)$, $\rho(G)$ або ж $\delta(G)$. Ми будемо позначати $\deg(G)$.

<u>Теорема 12.</u> Повний граф є регулярним графом.

<u>Теорема 13</u>. Не існує регулярного графа $G = (V, E)$ з n вершинами степеня k, у якого k і n непарні.

<u>Теорема 14.</u> Нехай $n, d \in N$ – натуральні числа, одне з яких парне і для яких виконується нерівність $0 \leq d \leq n - 1$. Тоді існує регулярний граф порядку n і степеня d.

<u>Означення.</u> Двочастинним графом називається граф, для якого існує таке розбиття множини його вершин на два класи, при котрому кінці кожного ребра лежать у різних класах.

Двочастинні графи часто називають дводольними.

Якщо у двочастинному графі будь-які дві вершини з різних класів суміжні, то такий граф називається **повним двочастинним графом**.

Повний двочастинний граф, у якого один клас має m вершин, а другий – n вершин, позначають $K_{m,n}$.

Повний двочастинний граф $K_{1,n}$ називається **зірковим графом**.

<u>Теорема 15</u>. Нехай $G = (V \cup V_1, E)$ – непорожній регулярний двочастинний граф. Тоді $|V| = |V_1|$, де V, V_1 – класи розбиття множини вершин графа G.

<u>Теорема 16</u>. Сума степенів вершин частин двочастинного графа рівна.

<u>Теорема (Кеніга)</u>. Граф $G = (V, E)$ є двочастинним тоді і тільки тоді, коли він не має циклів непарної довжини.

<u>Наслідок.</u> Граф двочастинний тоді і тільки тоді, коли він не має простих циклів непарної довжини.

Спосіб розпізнавання двочастинності:

- Вибирають довільну вершину u графа G і приписують їй 0.
- Кожній вершині з множини суміжних вершин $\text{См}(u)$ приписують 1.
- Для всіх вершин, суміжних з вершинами множини $\text{См}(u)$, приписують 0 і т.д.
- Після того, як усі вершини пронумеровані, будують дві множини: V_0 – до якої входять усі вершини, яким приписано 0, і V_1 – з вершинами, яким приписано 1.

- Якщо графи $G_1 = (V_0, E_0)$ і $G_2 = (V_1, E_1)$ порожні, то граф G двочастинний, а якщо – ні, то граф G – не двочастинний.

Означення. **Зв'язним графом** називається граф, який не можна подати у вигляді диз'юнктивного об'єднання двох підграфів.

Якщо ж граф можна подати у вигляді диз'юнктивного об'єднання підграфів, то граф називають **незв'язним**, а його зв'язні підграфи називаються **компонентами зв'язності**.

Означення. **Зв'язним графом** називається граф, у якого довільні дві його вершини зв'язані маршрутом.

Означення. **Зв'язний підграф *H* графа *G*** називається **максимальним**, якщо *H* не міститься в жодному зв'язному підграфі графа *G*.

Максимальний зв'язний підграф графа *G* називається **компонентою зв'язності**.

Означення. **Розділювальною множиною** зв'язного графа називається така множина його ребер, вилучення якої приводить до незв'язного графа.

Означення. **Розрізом** називається така розділяюча множина, жодна власна підмножина якої не є розділювальною.

Означення. **Сильно зв'язним орграфом** називається орієнтований граф, у якого для будь-яких різних двох вершин є орієнтований шлях.

Дане означення можна сформулювати так:

Сильно зв'язним орграфом називається орієнтований граф, у якого будь-які дві його вершини є досяжними одна з одної.

Орграф називається ***однобічно зв'язним***, якщо для будь-яких двох його вершин принаймні одна з них є досяжною з іншої.

Означення. **Слабко зв'язним орієнтованим графом** називається такий орграф, для якого існує шлях у відповідному для нього неорієнтованому графі.

Перефразуємо означення: орграф є ***слабко зв'язним***, якщо для будь-яких двох його вершин існує напівмаршрут, що веде з однієї вершини в іншу. Орграф називається **незв'язним**, якщо він не є слабко зв'язним. У незв'язному орграфі не має ні стоків, ні джерел.

Маршрут в орграфі *G* називають ***каркасним***, якщо він містить усі вершини орграфа *G*.

Теорема 17. Кожен граф є диз'юнктивним об'єднанням своїх компонент зв'язності.

Теорема 18. Граф зв'язний тоді і тільки тоді, коли його не можна представити у вигляді диз'юнктивного об'єднання двох графів.

Теорема 19. Нехай $G = (V, E)$ – зв'язний граф і $e \in E$ – деяке його ребро. Тоді якщо e належить деякому циклу, то $G - e$ – зв'язний. Якщо ж e не належить жодному циклу, то граф $G - e$ має рівно дві компоненти зв'язності.

Теорема 20. Нехай G – граф з n вершинами і k компонентами зв'язності. Тоді число d його ребер задовольняє нерівності $n - k \leq d \leq \frac{(n-k)\cdot(n-k+1)}{2}$.

Наслідок 1. Будь-який граф порядку n, який має більше $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ребер, зв'язний.

Наслідок 2. Довільний зв'язний граф з n вершинами містить не менше ніж n–1 ребро.

Теорема 21. Для будь-якого графа G або він сам, або його доповнення G є зв'язним.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Для графа, зображеного на рис. 3.16,

а) знайти всі ланцюги, що ведуть із вершини 1 у вершину 7;

б) знайти всі прості ланцюги, що ведуть із вершини 1 у вершину 7;

в) знайти ланцюг, що веде із вершини 1 у вершину 7 і містить усі вершини графа;

г) знайти кількість маршрутів довжиною 2;

ґ) знайти простий цикл, що містить 4 ребра;

д) визначити відстань між вершинами 2 і 7;

е) визначити центральні та периферійні вершини графа;

є) визначити мости, точки з'єднання та блоки.

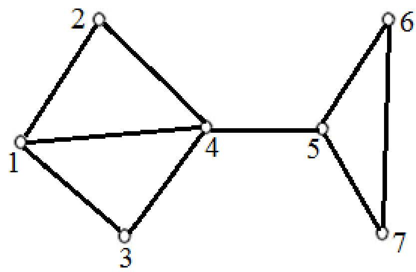


Рис. 3.16

Розв’язання

а) Для відшукання усіх ланцюгів графа, що з’єднують вершини 1 і 7, можна використати схему всіх можливих розгалужень (див. рис. 3.17).

Шуканий ланцюг може розпочатися одним із трьох ребер {1, 2}, {1,4} або {1,3}. У випадку, коли в маршруті не задіяне ребро {1, 4}, можливі два шляхи з його використанням. Далі в усіх випадках слід дійти до вершини 5, причому це можна зробити 7 способами. З вершини 5 у кожному з випадків з’являється два способи прийти до вершини 7.

Перебравши всі можливі випадки, одержимо 14 ланцюгів: (1, 2, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 7), (1, 2, 4, 3, 1, 4, 5, 7), (1, 2, 4, 5, 6, 7), (1, 2, 4, 5, 7), (1, 2, 4, 3, 1, 4, 5, 6, 7), (1, 2, 4, 3, 1, 4, 5, 7), (1,4, 5, 6, 7), (1,4, 5, 7), (1, 3, 4, 1, 2, 4, 5, 6, 7), (1, 3, 4, 1, 2, 4, 5, 7), (1, 3, 4, 5, 6, 7), (1, 3, 4, 5, 7), (1, 3, 4, 2, 1, 4, 5, 6, 7), (1, 3, 4, 2, 1, 4, 5, 7).

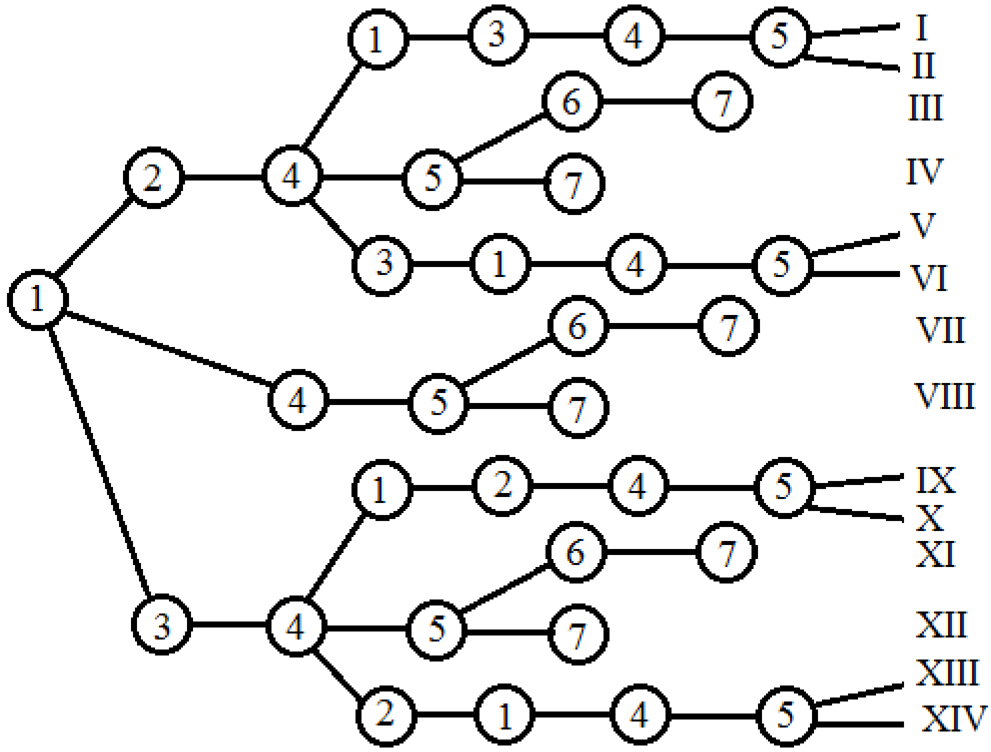


Рис. 3.17

б) Використовуючи означення простого ланцюга та результат виконання завдання а), отримаємо 6 таких простих ланцюгів: (1, 2, 4, 5, 6, 7), (1, 2, 4, 5, 7), (1,4, 5, 6, 7), (1,4, 5, 7), (1,4, 5, 6, 7), (1, 3, 4, 5, 7).

в) Проаналізувавши результат виконання завдання а), маємо 4 ланцюги, які містять усі вершини графа: (1, 2, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 7), (1, 2, 4, 3, 1, 4, 5, 6, 7), (1, 3, 4, 1, 2, 4, 5, 6, 7), (1, 3, 4, 2, 1, 4, 5, 6, 7).

г) Для знаходження кількості маршрутів довжиною 2 застосуємо теорему 1 даного параграфа.

Перш за все, знайдемо матрицю суміжності заданого в умові задачі графа:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо елементи A^2 за формулою:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{kj}.$$

Зокрема, $b_{11} = a_{11} \cdot a_{11} + a_{12} \cdot a_{21} + a_{13} \cdot a_{31} + a_{14} \cdot a_{41} + a_{15} \times$ $\times\, a_{51} + a_{16} \cdot a_{61} + a_{17} \cdot a_{71} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 +$ $+0 \cdot 0 = 3.$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Значення $b_{11} = 3$ означає, що існують 3 шляхи <1,1> довжиною 2: ({1,2},{2,1}), ({1,3},{3,1}), ({1,4},{4,1}).

Знайдемо суму елементів матриці A^2 – це і буде кількість шляхів довжини 2 : 50. Зауважимо, що у даному разі враховані маршрути <1,3> і <3,1> як різні.

г) Простим циклом, що містить 4 ребра, буде <1,1>=(1,2,4,3,1).

д) З означення відстані випливає d(2,7)=3.

е) Щоб визначити центральні та периферійні вершини графа, необхідно знайти ексцентриситети вершин графа, його радіус та діаметр.

Знайдемо ексцентриситет вершини 1. Знайдемо відстані від вершини 1 до всіх інших вершин: d(1,2)=1, d(1,3)=1, d(1,4)=1, d(1,5)=2, d(1,6)=3, d(1,7)=3. За означенням ексцентриситета маємо e(1)=3.

Аналогічно знаходимо e(2). Оскільки d(2,1)=d(2,4)=1, d(2,3)= d(2,5)=2, d(2,6)=d(2,7)=3, то e(2)=3.

Виконавши дії, аналогічні до попередніх, отримуємо e(3)=3, e(4)=2, e(5)=2, e(6)=3, e(7)=3.

За означеннями радіуса та діаметра маємо *r(G)*=2, *d(G)*=3. Тоді вершини 1, 2, 3, 6, 7 є периферійними, а вершини 4 та 5 – центральними.

є) Виходячи з означень, ребро {4,5} є мостом графа, а вершини 4 і 5 – точками з'єднання.

Ураховуючи точки з'єднання графа, його можна розбити на такі максимально нероздільні підграфи, кожен з яких містить множину вершин: $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6, 7\}$. ■

<u>Приклад 2.</u> Граф $G=(V,E)$ задано матрицею суміжності A. Визначити кількість маршрутів довжиною 2 та 3 без використання інших способів задання графа.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Оскільки матриця суміжності несиметрична, то граф є орієнтованим. Для знаходження кількості маршрутів довжиною 2 знайдемо A^2, застосовуючи теорему 1 даного параграфа. Елементи матриці обчислюємо, як і в попередньому прикладі.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&2&0&0\end{pmatrix}.$$

Тому кількість шляхів довжиною 2 дорівнює 4.

Для знаходження кількості маршрутів довжиною 3 знайдемо A^3:

$$A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Згідно з теоремою 1 є лише 2 шлях довжиною 3. ■

Приклад 3. Довести твердження: якщо два різних цикли графа містять ребро e, то в графі є цикл, серед ребер якого немає e.

Доведення

Нехай $e = (v, w)$. Тоді можна вважати, що вказані у твердженні цикли мають вигляд $(w, v, Z1, w)$ та $(w, Z2, v, w)$, де $Z1$ і $Z2$ – різні ланцюги, що не містять ребра e. У замкненому маршруті $(v, Z1, w, Z2, v)$ вилучимо всі пари однакових сусідніх ребер (включаючи ті, що утворюються після попередніх вилучень). Оскільки цикли були різні, одержимо нетривіальний замкнений маршрут з різними сусідніми ребрами, який не містить ребра e. За теоремою 2 він містить цикл. ■

Приклад 4. Перевірте, чи є цикл довжини 3 в орієнтованому графі, що зображений на рис. 3.18.

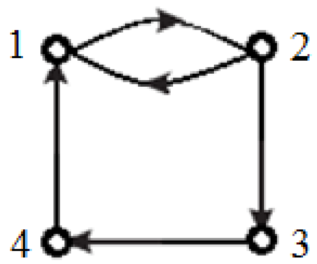


Рис. 3.18

Розв'язання

Для перевірки існування циклів довжини 3 знайдемо A^3 та визначимо існування ненульових елементів a_{ii}, де $i = \overline{1,4}$.

Запишемо матрицю суміжності графа:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо A^2 за формулою, яка подана в прикладі 1:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно знаходимо A^3:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки діагональні елементи матриці A^3 є нульовими, то орієнтований граф циклів довжини 3 не має.

Зауважимо, що даний граф має цикли довжиною 2 та 4.

<u>Приклад 5.</u> Дослідити, чи ізоморфні графи G і H, що зображені на рис. 3.19.

Розв'язання

Перевіримо спочатку чи не порушуються інваріантні властивості для заданих графів. У графах G і H по 5 вершин та 8 ребер, тому два вказаних у теоретичній частині інваріанти не порушені. Залишається перевірити кількість вершин певного степеня у графах. Обчислимо степені вершин графа G: $\deg(v_1) = 1, \deg(v_2) = 5, \deg(v_3) = 4, \deg(v_4) = 3, \deg(v_5) = 3$. Вектор степенів вершин графа G запишеться: $R_1 = (1, 3, 3, 4, 5)$. Обчислимо степені вершин графа H: $\deg(v) = 3, \deg(u) = 4, \deg(w) = 3, \deg(x) = 5, \deg(y) = 1$. Оскільки $R_2 = (1,3,3,4,5)$, то властивість не порушена.

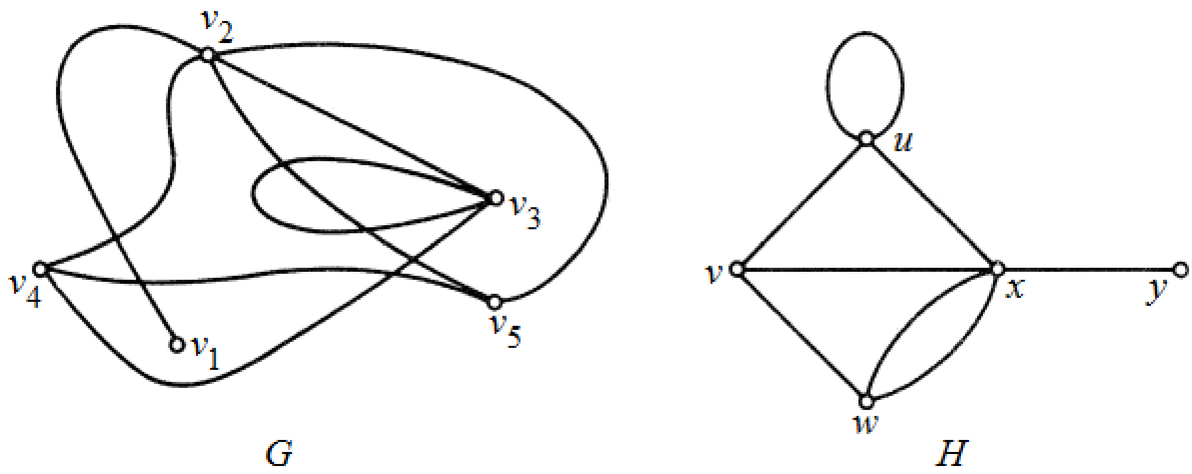


Рис. 3.19

Таблиця 7

Вершина графа G	**Суміжні вершини**	**Вершина графа H**	**Суміжні вершини**
v_1	v_2	y	$x = \theta(v_2)$
v_2	v_1, v_3, v_4, v_5	x	$y = \theta(v_1), u = \theta(v_3), y = \theta(v_1),$ $w = \theta(v_5)$
v_3	v_2, v_3, v_4	u	$x = \theta(v_2), u = \theta(v_3), v = \theta(v_4)$
v_4	v_2, v_3, v_5	v	$x = \theta(v_2), u = \theta(v_3), w = \theta(v_5)$
v_5	v_2, v_4	w	$x = \theta(v_2), v = \theta(v_4)$

Спробуємо установити взаємно однозначне відображення θ між вершинами графів G і H. Враховуючи степені вершин графів, цілком очевидно поставити у відповідність вершини v_1 і y, v_2 і x та v_3 і u: $\theta(v_1) = y,\ \theta(v_2) = x,\ \theta(v_3) = u$. У випадку з вершинами v_4 і v_5 можливі два варіанти: v і w. Поставимо у відповідність $\theta(v_4) = v, \theta(v_5) = w$. Перевіримо, чи зберігає таке взаємно однозначне відображення суміжність вершин (див. табл. 7).

Оскільки відповідність між вершинами θ зберігає суміжність вершин, то $G \cong H$.■

<u>Приклад 6.</u> Графи G і H задані матрицями суміжності A_1 та A_2. Дослідити, чи суміжні ці графи.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Оскільки кількість одиниць у матрицях суміжності однакова, то для дослідження використаємо теорему 7 даного параграфа.

У матриці A_2 дві одиниці знаходяться у першому рядку, а в A_1 – у третьому. Тому в матриці A_2 поміняємо спочатку 1-й і 3-й рядки, а потім 1-й і 3-й стовпці:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 і 3 рядки}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 і 3 стовпці}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Врахувавши, що $A_1 = A_2$, то за теоремою 7 – $G \cong H$.■

<u>Приклад 7.</u> Побудувати два попарно неізоморфні графи із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють 2, 2, 2, 3, 3, 4.

Розв'язання

Виберемо довільну пару степенів графа, наприклад (3, 3), і побудуємо графічне подання двох графів, в одному з яких вершини вибраних степенів суміжні, а в іншому – ні. Тоді не можна побудувати взаємно однозначне відображення, яке б зберігало суміжність між вершинами степені 3. А це означає, що графи не будуть ізоморфними.

Графічне подання графів матиме вигляд, що вказаний на рис. 3.20.

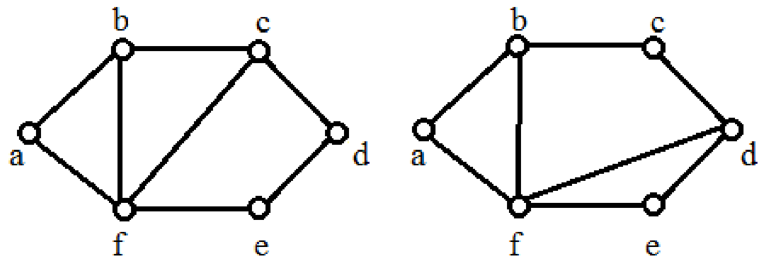


Рис. 3.20

Приклад 8. Доведіть, що не існує регулярного графа, порядок і степінь якого непарні.

Розв'язання

За лемою про рукостискання, сума степенів вершин є парним числом, а добуток двох непарних чисел – число непарне. Тому не існує регулярних графів із вказаними числовими характеристиками. ■

Приклад 9. Довести, що граф, у якому степінь кожної вершини є парним числом, можна подати у вигляді об'єднання циклів, які не перетинаються.

Доведення

Застосуємо індукцію за кількістю ребер графа $G = (V, E)$.

Для графа з двома ребрами твердження очевидне.

Нехай справджується дане твердження для випадку, коли $|E| = 2k$.

Візьмемо тепер довільний граф $G = (V, E)$, $|E| = 2k + 2$ і будемо йти по його ребрах, вийшовши з деякої вершини v_0 і не проходячи двічі по одному і тому самому ребру. З кожної вершини v_i виходить парне число ребер, тому ми можемо продовжувати обхід доти, поки не потрапимо в вершину, в якій вже побували (ця вершина не обов'язково та, з якої ми вийшли). У результаті вийде деякий цикл. Викинувши всі ребра, що входять у цей цикл, ми отримаємо граф з меншим числом ребер, у якому знову з кожної вершини виходить парне число ребер. За припущенням індукції, цей граф можна розбити на неперетинні цикли. ■

Приклад 10. На вечірці було 28 чоловік. Кожна дівчина знайома з 4 хлопцями, а кожен хлопець – з 3 дівчатами. Скільки на вечірці було хлопців та дівчат?

Розв'язання

Позначимо множину хлопців на вечірці A, а дівчат – B. Побудуємо двочастинний граф, який з'єднує вершину множини A із 3 вершинами множини B, а кожну вершину із множини B – із 4 вершинами множини A.

Нехай $|A| = x$, а $|B| = y$. Тоді за умовою задачі $|V| = |A| + |B|$, або $x + y = 28$.

Запишемо рівність, що визначатиме кількість ребер побудованого графа. З одного боку, $|E| = 3x$, а з іншого – $|E| = 4y$. Тоді маємо рівняння $3x = 4y$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 28, \\ 3x = 4y. \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} x = 28 - y, \\ 84 - 3y = 4y; \end{cases} \begin{cases} 7y = 84, \\ x = 28 - y; \end{cases} \begin{cases} y = 12, \\ x = 16. \end{cases}$$

Отже, на вечірці було 16 хлопців і 12 дівчат.

Відповідь: 16 хлопців і 12 дівчат.

Приклад 11. Довести, що зв'язний граф із n вершинами містить не менше ніж n-1 ребро.

Доведення

Оскільки граф є зв'язним, то у нього є одна компонента зв'язності. Тоді, згідно з теоремою 12 даного параграфа, кількість ребер буде визначатися нерівністю $n - 1 \leq d \leq \frac{(n-1)\cdot n}{2}$. Отже, зв'язний граф містить не менше $n - 1$ ребра. ■

Приклад 12. У студентській групі навчаються 15 юнаків і 15 дівчат. На Новий рік деякі юнаки подзвонили деяким дівчатам і привітали їх зі святом (жоден юнак не дзвонив одній і тій самій дівчині двічі). Виявилося, що студентів можна єдиним чином розбити на 15 пар так, щоб у кожній парі виявилися хлопець з дівчиною, якій він дзвонив. Яке найбільше число дзвінків могло бути зроблено?

Розв'язання

Позначимо юнаків $U_1, U_2, \dots, U_{15}$, а дівчат – $D_1, D_2, \dots, D_{15}$ так, щоб $U_1 - D_1, U_2 - D_2, \dots, U_{15} - D_{15}$ було єдиною розбивкою на пари за умовою задачі. Нехай кожен юнак зателефонував хоча б двом дівчатам. Побудуємо стрілку від кожної дівчини D_i до юнака U_i, з яким вона перебуває в парі, а від кожного юнака U_i – до іншої (відмінної від D_i) дівчини, якій він дзвонив. Тоді від кожного студента групи веде по стрілці. Якщо ми будемо рухатися по стрілках (почавши від довільної дівчини), то рано чи пізно ми потрапимо до дівчини, яка вже зустрічалася в утвореному ланцюжку. Таким чином, у відповідному графі є цикл. Об'єднаємо в цьому циклі кожного юнака з дівчиною, до якої від нього веде стрілка; інші пари залишимо без зміни. Ми отримали інше розбиття на пари, що суперечить умові.

Отже, знайдеться юнак, який дзвонив тільки одній дівчині. Якщо відкинути цю пару, кількість дзвінків зменшиться не більше ніж на 15 – максимально можливу кількість дзвінків цій дівчині. Після цього знову знайдеться юнак, який зробив один дзвінок одній із решти дівчат. Відкинувши цю пару, зменшимо кількість дзвінків не більш, ніж на 14, і т. д. Разом було зроблено не більше ніж 15 + 14 + ... + 2 + 1 = 120 дзвінків.

Рівно 120 дзвінків виходить, наприклад, якщо кожній дівчині D_i дзвонили юнаки $U_1, U_2, \dots, U_i$.

Відповідь: 120 дзвінків.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Для графів, зображених на рис. 3.21:

а) знайти всі ланцюги, що ведуть із вершини a у вершину i;

б) знайти всі прості ланцюги, що ведуть із вершини a у вершину i;

в) знайти ланцюг, що веде із вершини a у вершину i й містить усі вершини графа;

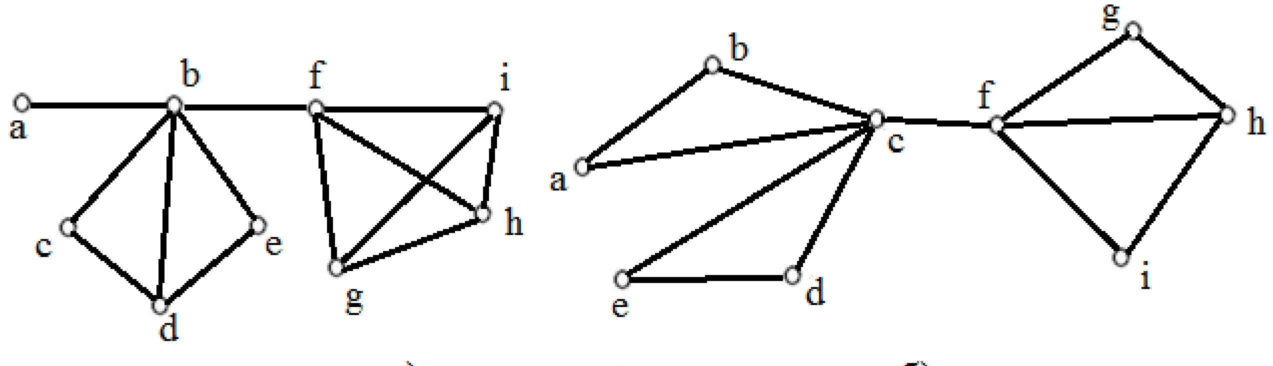
г) знайти кількість маршрутів довжиною 2;

ґ) знайти простий цикл, що містить 4 ребра;

д) визначити відстань між вершинами b і h;

е) визначити центральні та периферійні вершини графа;

є) визначити, чи є мости і точки з’єднання.



а) б)

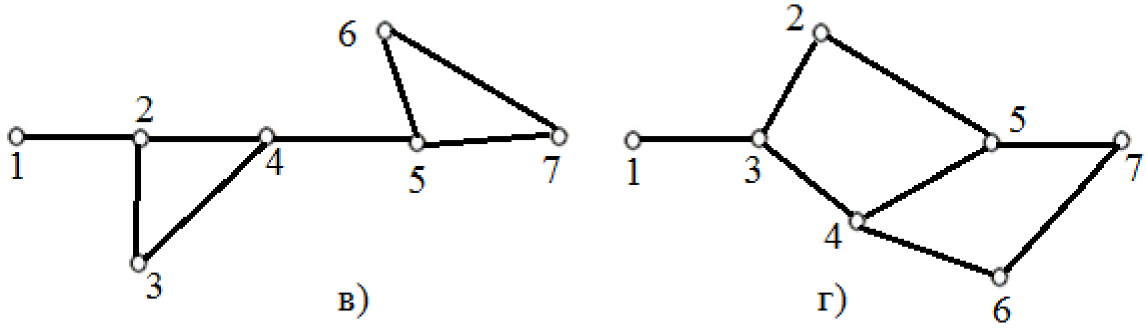


Рис. 3.21

2. Граф $G = (V, E)$ задано матрицею суміжності А. Визначити кількість маршрутів довжиною 2 та 3 без використання інших способів задання графа.

$$а)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ б)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

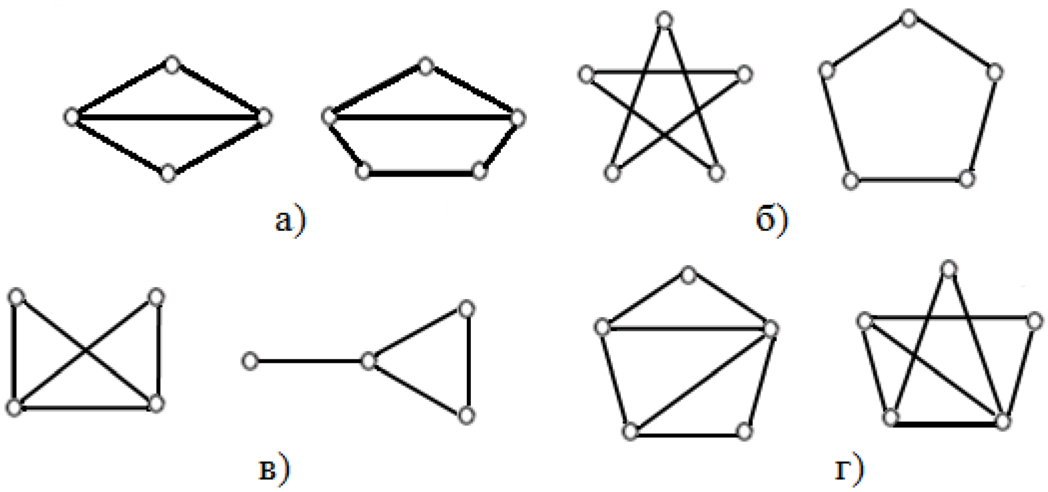
3. Довести, що у графі, степені всіх вершин якого більші 1, є цикл.

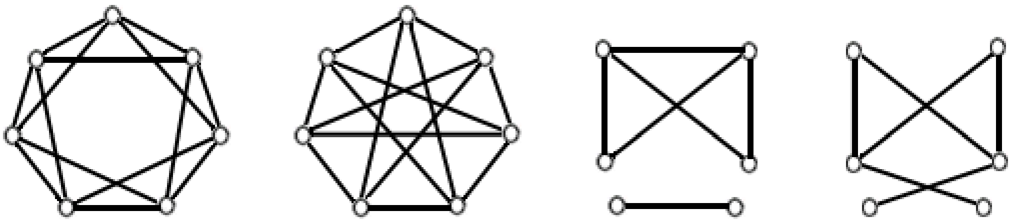
4. Довести, що у графі, усі прості цикли якого мають парну довжину, немає жодного замкненого маршруту непарної довжини.

5. Довести, що вершина u належить найкоротшому простому ланцюгу між вершинами v і w тоді й тільки тоді, коли $d(v, w) = d(v, u) + d(u, w)$.

6. Довести, що ізоморфні графи мають однакові кількості компонент зв'язності.

7. Визначити, чи ізоморфні графи, що зображені на рис. 3.22. Відповідь обґрунтувати.





д) е)

Рис. 3.22

8. Визначити, чи ізоморфні графи G_1 і G_2, що задані матрицями суміжності A_1 і A_2:

а) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Побудувати нетривіальний граф з найменшою кількістю вершин, який не має нетривіальних автоморфізмів.

10. Побудувати нетривіальний ациклічний граф з найменшою кількістю вершин, який не має нетривіальних автоморфізмів.

11. Побудувати всі попарно неізоморфні графи із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють 2, 2, 3, 3, 3, 5.

12. Чи існує самодоповнювальний граф, у якого кількість вершин дорівнює:

а) 5; б) 7; в) $4k - 1$, $k \in N$?

13. Довести, що існує тільки один самодоповнювальний граф із чотирма вершинами.

14. Знайдіть усі (з точністю до ізоморфізму) графи з 6 вершинами, у яких степінь кожної вершини дорівнює 3.

15. Побудувати регулярний граф степеня 3, який містить n вершин:

а) $n = 8$; б) $n = 12$.

16. З'ясуйте, при яких n існують регулярні графи степеня 3 з n вершинами.

17. На математичній каруселі було запропоновано 20 задач. Участь у змаганні брало 20 учнів. Кожен із них розв'язав по дві задачі, причому у ході змагання виявили, що кожну задачу розв'язало рівно по два учні. Доведіть, що можна так організувати розбір задач, щоб кожен розповів про одну розв'язану ним задачу і щоб усі задачі були розібрані.

18. На конференції з проблем дискретної математики студент Петренко познайомився з 36 студентами з різних міст України. Після закінчення конференції деякі пари студентів обмінялися адресами, причому у кожного з учасників конференції виявилося не менше 18 адрес. Через деякий час Петренку знадобилася адреса студента Правденка, який також брав участь у конференції. Доведіть, що Петренко може дізнатися адресу Правденка.

19. Як з'єднати 50 міст найменшим числом авіаліній так, щоб з будь-якого міста можна було потрапити в будь-яке, зробивши не більше двох пересадок?

20. У країні з кожного міста виходить 100 доріг і від будь-якого міста можна дістатися до будь-якого іншого. Одну дорогу закрили на ремонт. Доведіть, що і тепер від будь-якого міста можна дістатися до будь-якого іншого.

21. Кожен із семи хлопчиків має не менше трьох братів. Доведіть, що всі хлопчики – брати.

§3. Дерева

Основні теоретичні відомості

Означення. **Деревом** називається зв'язний граф, який не містить циклів.

Означення. **Лісом з *k* дерев** називається граф, який не містить циклів і складається з k компонент.

Означення. **Суттєвим ребром** називається ребро зв'язного графа, вилучення якого веде до порушення зв'язності цього графа.

Означення. **Листком дерева** називається така його вершина, яка інцедентна єдиному ребру дерева.

Інші вершини дерева називають **внутрішніми**.

Вершина v називається **центральною**, якщо $e(v)=R(G)$. **Центром** дерева *G* називається множина всіх його центральних вершин.

Теорема 1. Центр дерева складається із однієї або двох суміжних вершин.

Розглянемо властивості дерева, що зв'язані з центром.

1) Центр дерева не змінюється, якщо у дерева видалити всі висячі вершини.
2) Радіус і діаметр дерева зв'язані співвідношенням: $d(D) = 2 \cdot r(D)$, якщо центр складається із однієї вершини, і $d(D) = 2 \cdot r(D) - 1$, якщо центр складається із двох вершин.
3) Кожен ланцюг найбільшої довжини проходить через центр дерева.

Гілка до вершини *v* дерева *D* – це максимальне піддерево, що містить *v* в якості висячої вершини. Таким чином, число гілок до v дорівнює deg(v). **Вага вершини *v*** дерева *D* визначається як найбільше число ребер по всіх гілках до *v*.

Вершина *v* називається **центроїдною вершиною дерева** *D*, якщо *v* має найменшу вагу; центроїд дерева *D* складається з усіх таких вершин.

Теорема Жордана. Кожне дерево має центроїд, що складається або з однієї вершини, або з двох суміжних вершин.

Означення. **Орієнтованим деревом *D*** називається вільний від петель орієнтований граф, який є деревом.

Теорема 2. Граф є деревом тоді і тільки тоді, коли будь-які дві вершини зв'язані лише одним ланцюгом.

Наслідок 1. Якщо D – дерево і u – його кінцева вершина, то граф $D - u$ – дерево.

Наслідок 2. Будь-яке непорожнє дерево має щонайменше дві кінцеві вершини і одне кінцеве ребро.

Наслідок 3. У дереві кожне ребро суттєве.

Теорема 3. Будь-яке дерево має хоча б дві висячі вершини.

Теорема 4. Нехай граф D має n вершин. Тоді еквівалентними є такі твердження:

1) D є деревом;
2) D не має циклів і має $n - 1$ ребро;
3) D – зв'язний граф і має $n - 1$ ребро;
4) D – зв'язний граф і кожне його ребро є мостом;
5) будь-які дві вершини графа D з'єднані рівно одним простим ланцюгом;
6) D не має циклів, але введення нового довільного ребра в D сприяє виникненню рівно одного циклу.

Наслідок. Нехай G – ліс з n вершинами і k компонентами; тоді G має $n - k$ ребер.

Нехай G – простий зв'язний граф, який має n вершин та m ребер. Для отримання каркасу часто використовують процедуру вилучення ребер, що належить простим циклам. При цьому слід вилучити $\gamma(G) = m - (n-1) = m - n + 1$ ребро.

Означення. Цикломатичним числом графа G називається невід'ємне ціле число $\gamma(G) = m - n + 1$.

Цикломатичне число характеризує степінь зв'язності графа. Цикломатичне число дерева дорівнює 0.

У багатьох деревах певну вершину v_0 виділяють і визначають її як **корінь**. Тоді для кожної вершини $a \in D, d(a) = d(v_0, a)$, а для кожного ребра α з кінцями a та b має місце $d(a) - d(b) = 1$.

Означення. Кореневим деревом називається дерево з виділеним коренем.

Не кореневі дерева іноді в літературі називають **вільними**. Задання кореня у вільному дереві перетворює неорієнтоване дерево на орієнтоване дерево.

Кореневе дерево будують так, що або з кожної вершини можна потрапити в корінь, рухаючись уздовж дуг (вхідне дерево), або в кожну вершину можна попасти з кореня, рухаючись уздовж дуг (вихідне дерево).

Дерево може бути розкладене на рівні, при цьому гілкам, які потрапили в один рівень, відповідає однакова довжина шляху початкового графа. Число шляхів у кожному дереві відповідає числу висячих вершин (листків).

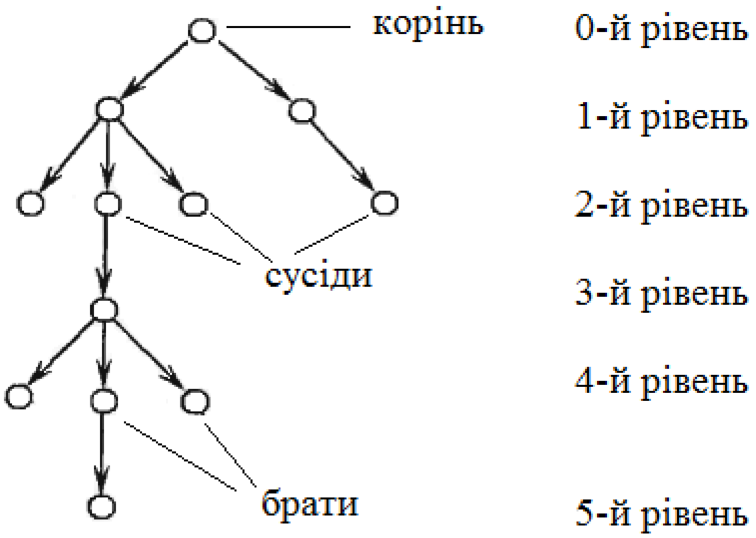


Рис. 3.38

Нехай D – дерево з множиною вершин $\{v_1, \ \dots, v_n\}$, і вершина z обрана в якості кореня. **Рівнем вершини v в кореневому дереві** називається число, що є довжиною шляху із кореня до вершини v.

Означення. **Висотою дерева** називається довжина найдовшого шляху від кореня дерева до листка.

При розгляді кореневих дерев часто вживають поняття предків та нащадків або ж батьків та дітей, сусідів чи братів (див. рис. 3.38).

Означення. **Батьком вершини v** називається вершина u орієнтованого дерева $D = (V, E)$, якщо $(u, v) \in E$.

Вершина v називається **сином вершини u**. У випадку, коли u є батьком для вершин v і w, v і w називаються **братами**.

Якщо існує орієнтований шлях із вершини u до вершини v, то u називають **предком** вершини v, а вершину v – **нащадком** для вершини u.

Означення. Два кореневих дерева $D(V, E)$ і $D'(V', E')$ **ізоморфні**, якщо існує ізоморфізм f із D в D' такий, що:

а) v_i – лівий син вершини v_j тоді і тільки тоді, коли $f(v_i)$ – лівий син вершини $f(v_j)$;

б) v_i – правий син вершини v_j тоді і тільки тоді, коли $f(v_i)$ – правий син вершини $f(v_j)$;

в) *f* відображає корінь r дерева *D* в корінь r' дерева D'.

Означення. ***m*-арним деревом *D*** називається дерево, у якого найбільший із степенів виходу для вершин дорівнює m.

Означення. **Бінарним,** або **двійковим, деревом** називається дерево, в якому для кожної вершина степінь виходу не більший за 2.

У кожному бінарному дереві кожен син батьків позначається як лівий син або як правий син.

Означення. **Збалансованим** деревом називається m-арне орієнтоване дерево висоти h, у якого рівень кожного листка дорівнює h або h-*1*.

Теорема 5. Якщо повне m-арне орієнтоване дерево має n вершин, i внутрішніх вершин та *l* листків, то $n = mi + 1$.

Теорема 6. Якщо повне m-арне орієнтоване дерево має n вершин, i внутрішніх вершин та *l* листків, то $l = (m-1)i + 1$.

Теорема 7. Повне m-арне орієнтоване дерево висоти h має $\frac{m^{h+1}-1}{m-1}$ вершин і m^h листків. Зокрема, повне бінарне орієнтоване дерево висоти h має $2^{h+1} - 1$ вершин і 2^h листків.

Теорема 8.

а) Якщо повне m-арне дерево висоти h має *l* листків, то $h = \log_m l$.

б) Якщо повне m-арне дерево висоти h має *l* листків, то $h \geq \log_m l$.

в) Якщо повне бінарне дерево висоти h має v вершин, то $h = \log_2(v+1) - 1$.

г) Якщо повне бінарне дерево висоти h має v вершин, то $h \geq \log_2(v+1) - 1$.

Теорема 9. Число неізоморфних бінарних дерев з n вершинами дорівнює числу Каталана $C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)\cdot(n!)^2}$.

Теорема 10. Число неізоморфних кореневих дерев з m ребрами не більше 4^m.

Означення. **Каркасним деревом *D*** графа *G* називається такий його підграф, який є деревом і містить усі вершини графа *G*.

Алгоритм виділення каркасного дерева

1. Вибрати в G довільну вершину v_1. Ця вершина утворює підграф G_1 графа G, що є деревом. Вважати $i = 1$.

2. Якщо $i = n$, то G_n – каркасне дерево графа G і слід зупинитися. В іншому разі – перейти до пункта 3.

3. Нехай уже побудований граф G_i, який містить вершини $v_1, \ldots, v_i$ графа G, $1 \le i \le n-1$, і є деревом. Побудувати граф G_{i+1}, додаючи до графа G_i нову вершину $v_{i+1} \in V$, яка суміжна з деякою вершиною v_j графа G_i, а також ребро $\{v_{i+1}, v_j\} \in E$. Присвоїти $i = i + 1$ та перейти до пункта 2.

Теорема Келі. Число різних дерев, які можна побудувати на n вершинах, дорівнює n^{n-2}.

Дерева, як особливий вид графів, можна задавати кортежем, який називається послідовністю Келі. Послідовність Келі – це послідовність номерів вершин виду $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, які з'єднані з висячими вершинами від найменшого номера до найбільшого. Дана послідовність визначає дерево з n вершинами єдиним чином.

Для заданого дерева записують послідовність Келі за таким алгоритмом:

1. Перевірити, чи кількість вершин графа не дорівнює 2. Якщо це так – то зупинитись, а інакше – перейти до кроку 2.

2. Вибрати висячу вершину з найменшим номером і вилучити її разом з ребром, що їй інцидентне.

3. Записати у послідовність Келі номер вершини, яка була суміжна із вилученою вершиною. Перейти до пункту 1.

Досить часто послідовність Келі називають кодом Прюфера.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Використовуючи алгоритм виділення каркасного дерева, виділити каркасне дерево графа G, зображеного на рис. 3.39.

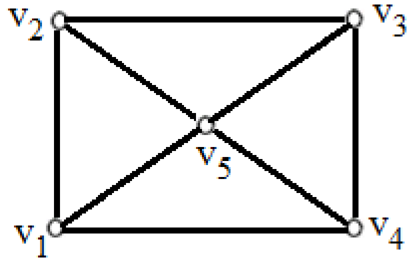


Рис. 3.39

Розв'язання

1. Виберемо у графі G довільну вершину v_1. Ця вершина утворює підграф G_1 графа G, що є деревом. Вважаємо $i = 1$.

2. Оскільки $1 \neq 5$, то переходимо до пункта 3.

3. Будуємо граф G_2, додаючи до графа G_1 нову вершину $v_2 \in V$, яка суміжна з вершиною v_1 графа G_1, а також ребро $\{v_2, v_1\} \in E$ (див. рис. 40). Присвоїмо $i = 2$ та перейдемо до пункта 2.

II ітерація. 2. Оскільки $2 \neq 5$, то переходимо до пункта 3.

3. Будуємо граф G_3, додаючи до графа G_2 нову вершину $v_3 \in V$, яка суміжна з вершиною v_2 графа G_2, а також ребро $\{v_2, v_3\} \in E$ (див. рис. 40). Присвоїмо $i = 3$ та перейдемо до пункта 2.

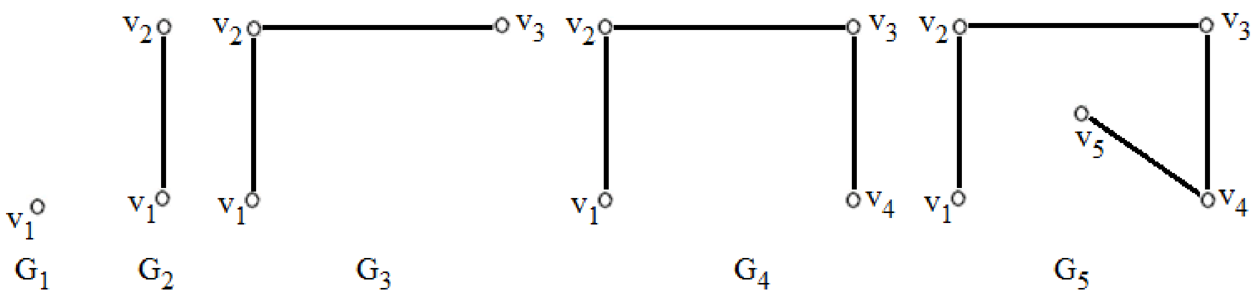


Рис. 3.40

III ітерація. 2. Оскільки $3 \neq 5$, то переходимо до пункта 3.

3. Будуємо граф G_4, додаючи до графа G_3 нову вершину $v_4 \in V$, яка суміжна з вершиною v_3 графа G_3, а також ребро $\{v_3, v_4\} \in E$ (див. рис. 40). Присвоїмо $i = 4$ та перейдемо до пункта 2.

IV ітерація. 2. Оскільки $4 \neq 5$, то переходимо до пункта 3.

3. Будуємо граф G_5, додаючи до графа G_4 нову вершину $v_5 \in V$, яка суміжна з вершиною v_4 графа G_4, а також ребро $\{v_5, v_4\} \in E$ (див. рис. 40). Присвоїмо $i = 5$ та перейдемо до пункта 2.

V ітерація. 2. Оскільки $5 = 5$, то граф G_5 – каркасне дерево (див. рис. 40).■

Приклад 2. Довести, що граф з $n \geq 2$ вершинами є деревом тоді й тільки тоді, коли для будь-яких різних вершин v і w в ньому існує тільки один простий ланцюг, що веде з v в w.

Розв'язання

Доведемо необхідну умову твердження методом від супротивного. Нехай для вершин v і w існують два різних простих ланцюги, що ведуть з v в w $L1 = (v, \dots, w)$, $L2 = (v, \dots, w)$, $L1 \neq L2$. Тоді у графі існує замкнений маршрут $L1 \cdot (L2)^{-1}$. Вилучимо з нього всі пари сусідніх рівних ребер. Ланцюги були різні, тому одержимо замкнений маршрут, у якому всі сусідні ребра різні. Тоді за теоремою 2 §2 у графі є цикл, а це приводить до суперечності.

Доведемо достатню умову твердження. Оскільки будь-які дві різні вершини зв'язані простим ланцюгом, то граф зв'язний. Доведемо відсутність у ньому циклів. Знову використаємо метод від супротивного. Нехай у графі є цикл. Тоді у ньому є й простий цикл. А це означає, що для будь-яких двох різних вершин простого цикла є два різних простих ланцюги, що їх зв'язують. Прийшли до суперечності. Отже, граф ациклічний, а тому є деревом. ■

Приклад 3. Записати послідовність Келі для дерева, що зображене на рис. 3.41.

Розв'язання

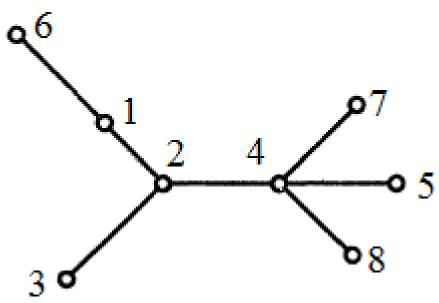


Рис. 3.41

1. Перевіримо чи кількість вершин графу не дорівнює 2. Оскільки у початковому графі 8 вершин, то перейдемо до кроку 2.

2. Вибираємо висячу вершину з найменшим номером – вершина 3, вилучаємо її разом з ребром, що їй інцедентне (див. рис. 3.42).

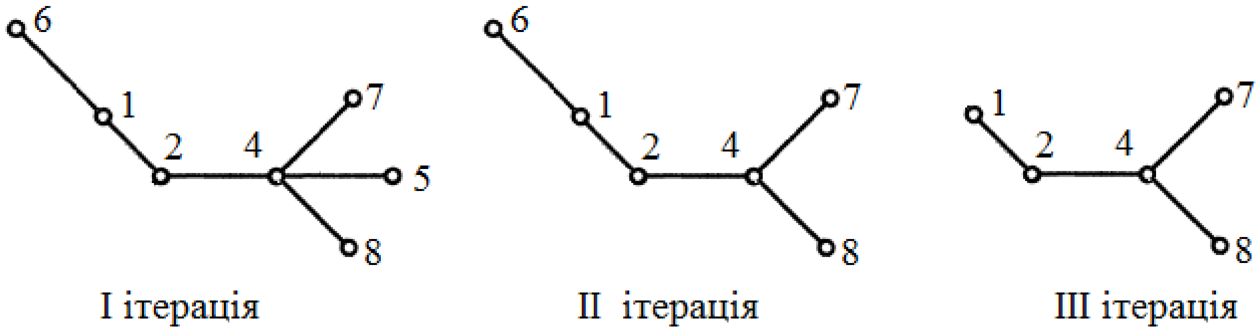


Рис. 3.42

3. Записуємо у послідовність Келі номер вершини 2, яка була суміжна із вилученою вершиною 3. Переходимо до кроку 1.

II ітерація. 1. Перевіримо, чи кількість вершин графу не дорівнює 2. Оскільки після вилучення вершини у графі 7 вершин, то перейдемо до кроку 2.

2. Вибираємо висячу вершину з найменшим номером – вершина 5, вилучаємо її разом з ребром, що їй інцедентне (див. рис. 3.42).

3. Записуємо у послідовність Келі номер вершини 4, яка була суміжна із вилученою вершиною 5. Переходимо до кроку 1.

III ітерація. 1. Перевіримо, чи кількість вершин графу не дорівнює 2. Оскільки після вилучення вершини у графі 6 вершин, то перейдемо до кроку 2.

2. Вибираємо висячу вершину з найменшим номером – вершина 6, вилучаємо її разом з ребром, що їй інцедентне (див. рис. 3.42).

3. Записуємо у послідовність Келі номер вершини 1, яка була суміжна із вилученою вершиною 6. Переходимо до кроку 1.

IV ітерація. 1. Перевіримо, чи кількість вершин графу не дорівнює 2. Оскільки після вилучення вершини у графі 5 вершин, то перейдемо до кроку 2.

2. Вибираємо висячу вершину з найменшим номером – вершина 1, вилучаємо її разом з ребром, що їй інцедентне.

3. Записуємо у послідовність Келі номер вершини 2, яка була суміжна із вилученою вершиною 1. Переходимо до кроку 1.

V ітерація. 1. Перевіримо, чи кількість вершин графу не дорівнює 2. Оскільки після вилучення вершини у графі 4 вершини, то перейдемо до кроку 2.

2. Вибираємо висячу вершину з найменшим номером – вершина 2, вилучаємо її разом з ребром, що їй інцедентне.

3. Записуємо у послідовність Келі номер вершини 4, яка була суміжна із вилученою вершиною 2. Переходимо до кроку 1.

VI ітерація. 1. Перевіримо, чи кількість вершин графу не дорівнює 2. Оскільки після вилучення вершини у графі 3 вершини, то перейдемо до кроку 2.

2. Вибираємо висячу вершину з найменшим номером – вершина 7, вилучаємо її разом з ребром, що їй інцедентне.

3. Записуємо у послідовність Келі номер вершини 4, яка була суміжна із вилученою вершиною 7. Переходимо до кроку 1.

VII ітерація. 1. Перевіримо, чи кількість вершин графу не дорівнює 2. Оскільки після вилучення вершини у графі 2 вершини, то отримана послідовність (2, 4, 1, 2, 4, 4) є послідовністю Келі.

Відповідь: (2, 4, 1, 2, 4, 4).

Приклад 4. Побудувати дерево для послідовності Келі (1, 5, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2).

Розв’язання

Оскільки у послідовності 9 чисел, то дерево містить 11 вершин. Процес відновлення дерева за послідовністю оформимо у вигляді таблиці (див. таблицю 15).

Таблиця 15

k	Вершини D	Послідовність Келі	$\{a_k, b_k\}$
1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	1, 5, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2	{3, 1}
2	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	5, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2	{4, 5}
3	1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	2, 2, 1, 1, 2, 2, 2	{5, 2}
4	1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11	2, 1, 1, 2, 2, 2	{6, 2}
5	1, 2, 7, 8, 9, 10, 11	1, 1, 2, 2, 2	{7, 1}
6	1, 2, 8, 9, 10, 11	1, 2, 2, 2	{8, 1}
7	1, 2, 9, 10, 11	2, 2, 2	{1, 2}
8	2, 9, 10, 11	2, 2	{9, 2}
9	2, 10, 11	2	{10, 2}
10	2, 11		{11, 2}

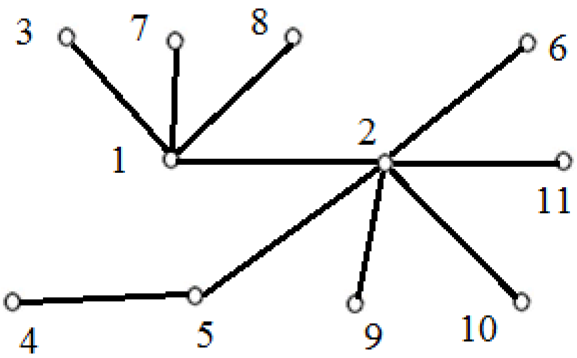


Рис. 3.43

Зробимо деякі пояснення до таблиці. Оскільки на першому кроці найменшою висячою вершиною є 3, а перша вершина послідовності Келі – 1, то з’єднуємо ці вершини ребром. Після цього із множини вершин дерева та послідовності Келі викреслюємо використані вершини. Після кроку 2 висячою вершиною стає вершина 5. Саме тому на кроці 3 з’єднуємо вершини 5 і 2. Аналогічно на 7 кроці вершина 1 стає висячою і ми її з’єднуємо із першою на той час вершиною із послідовності – 2.

Записане у вигляді послідовності дерево зображене на рис. 3.43.

<u>Приклад 5.</u> Знайти найменшу вагу вершин дерева, що зображене на рис. 3.44, та його центроїд.

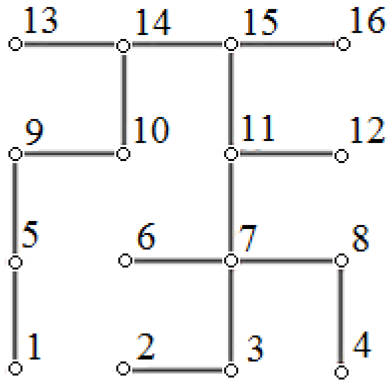


Рис. 3.44

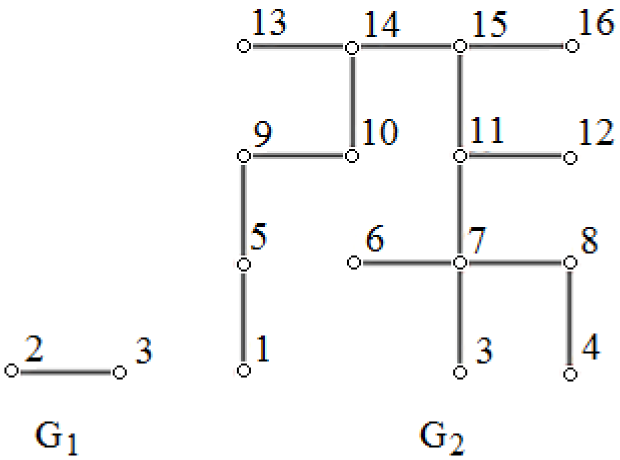


Рис. 3.45

Розв’язання

За теоремою 4 випливає, що вага кожної висячої вершини дерева порядку 16 дорівнює 15. Оскільки вага висячих вершин не буде мінімальною, то вони не можуть скласти центроїд. Тому при розв’язуванні даної задачі не будемо розглядати вершини 1, 2, 4, 6, 12, 13 та 16. Для інших вершин потрібно знайти їх вагу, обчислюючи довжину їх гілок. Будемо враховувати, що кількість гілок вершини дорівнює її степеню.

Знайдемо вагу вершини 3. На рис. 3.45 показано дві гілки даної вершини. Очевидно, що розмір гілки G_1 дорівнює 1, а G_2 – 14. Тому вага вершини 3 дорівнює 14: $c_3 = 14$. Аналогічно знаходимо $c_5 = 14, c_8 = 14$. До вершини 9 також підходить дві гілки розміром 2 та 13, а тому $c_9 = 13$. Легко встановити, що $c_{10} = 12$.

До вершин 11, 14 та 15 підходять три гілки. Як і в попередніх випадках, установлюємо, що $c_{11} = 8$, $c_{14} = 10$, $c_{15} = 8$. До вершини 7 підходить чотири гілки розміром 1, 2, 2 та 10, тому $c_7 = 10$.

Мінімальна вага вершин становить 8, тому центроїд дерева утворюють дві вершини – 11 і 15.

Відповідь: $\min(c_v) = 8$, центроїд – 11, 15.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Які із графів, що наведені на рис. 3.46, є деревами?

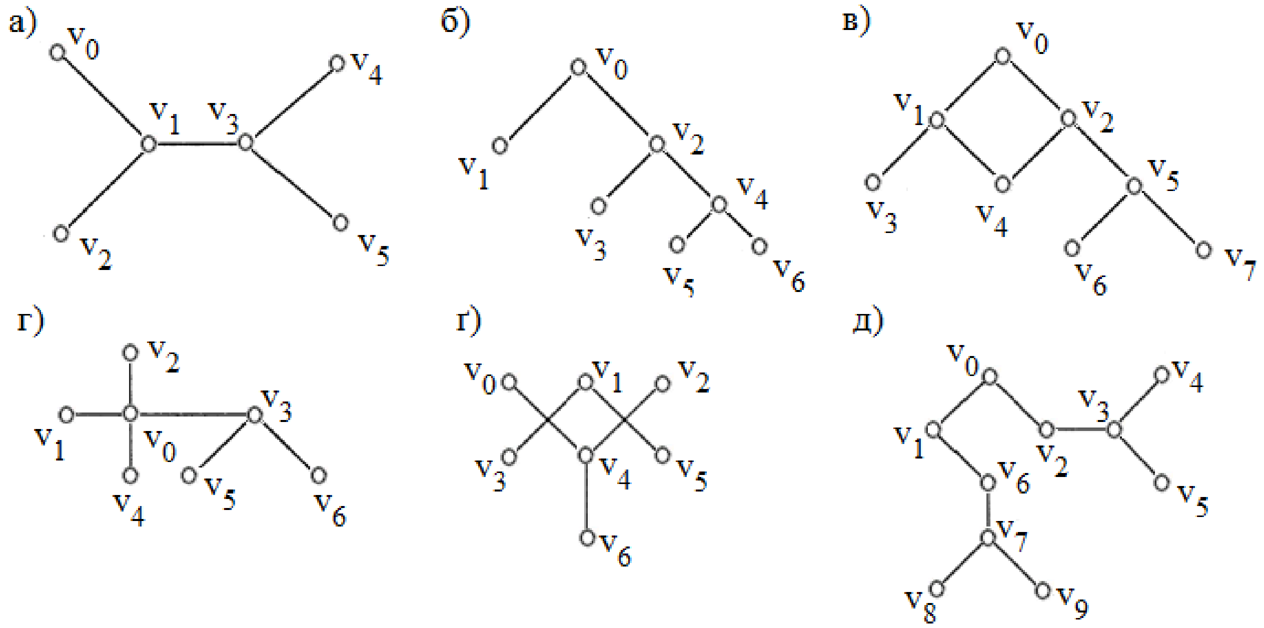


Рис. 3.46

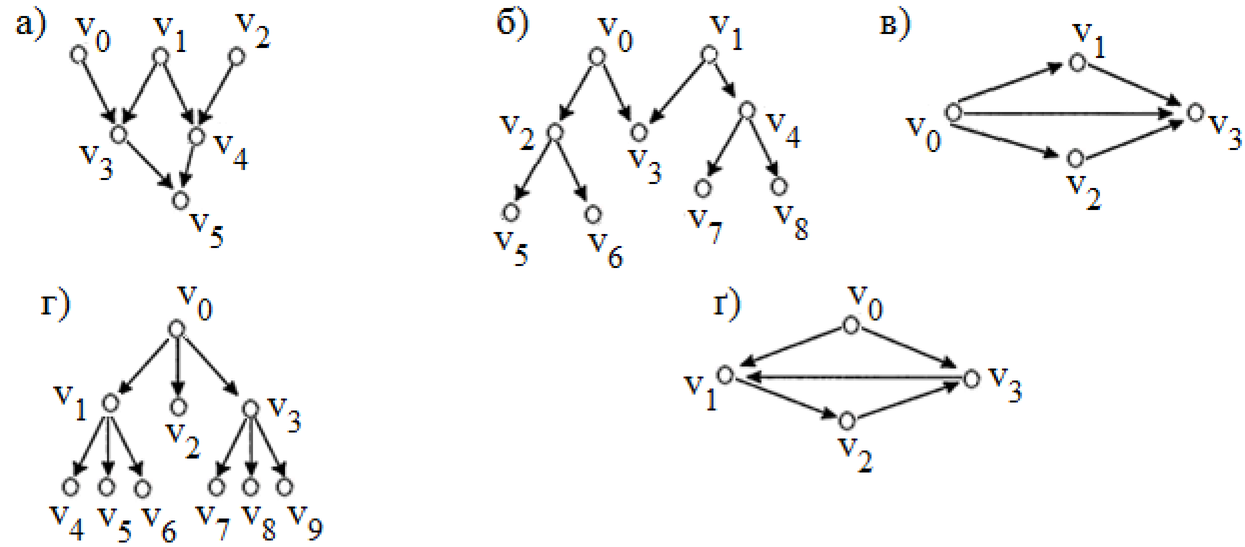


Рис. 3.47

2. Для кожного дерева із попередньої вправи:

а) використайте в якості кореня вершину v_2 і побудуйте кореневе дерево;

б) використайте в якості кореня вершину v_3 і побудуйте кореневе дерево.

3. Які із графів, що наведені на рис. 3.47, є кореневими деревами?

4. Для кореневого дерева, що зображене на рис. 3.48:

а) знайти потомків вершини v_3;

б) знайти предків вершини v_8;

в) знайти батька вершини v_5;

г) визначити рівень вершини v_6;

ґ) знайти синів вершини v_3;

д) знайти висоту дерева;

е) знайти листки дерева;

є) визначити, чи є дерево бінарним?

5. Для кореневого дерева, що зображене на рис. 49 виконайте завдання задачі 4.

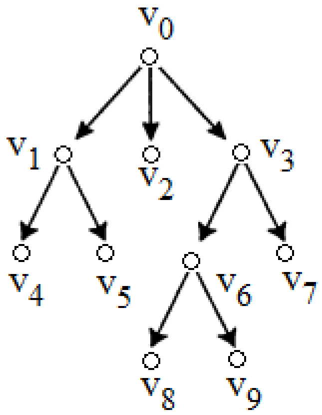


Рис. 3.48

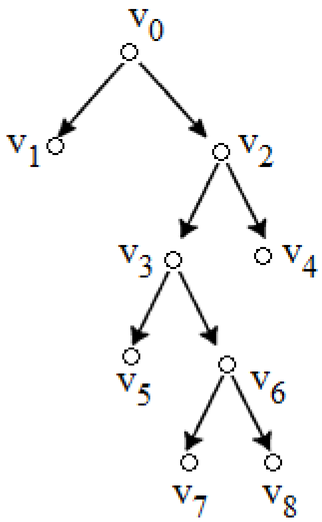


Рис. 3.49

6. Знайти неізоморфні кореневі бінарні дерева з n вершинами коли:

а) $n = 3$; б) n=4; в) n=5.

7. Скільки існує неізоморфних кореневих бінарних дерев з n вершинами:

а) $n = 5$;

б) $n = 6$;

в) $n = 8$;

г) $n = 10$;

ґ) $n = 20$.

8. Скільки в повному m-арному дереві висоти h є листків, вершин та внутрішніх вершин за умови:

а) $m = 2, h = 5$;

б) $m = 3, h = 4$;

в) $m = 2, h = 8$;

г) $m = 4, h = 3$;

ґ) $m = 1, h = 10$.

9. Для дерева, що зображене на рис. 3.50, визначте:
(1) висоту кореневого дерева;
(2) рівень вершини *e*;
(3) рівень вершини *g*;
(4) рівень вершини *a*;
(5) яка вершина є батьком *i*;
(6) які вершини є синами вершини *b*;
а) якщо коренем вибрана вершина *d*;
б) якщо коренем вибрана вершина *f*;
в) якщо коренем вибрана вершина *c*;
г) якщо коренем вибрана вершина *j*;
ґ) якщо коренем вибрана вершина *b*.

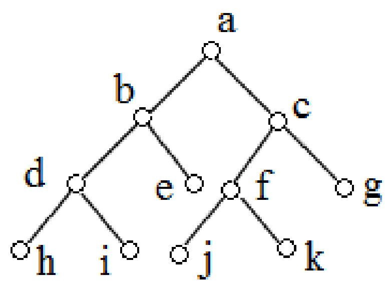


Рис. 3.50

10. Які з наведених на рис. 3.51 дерев є збалансованими?

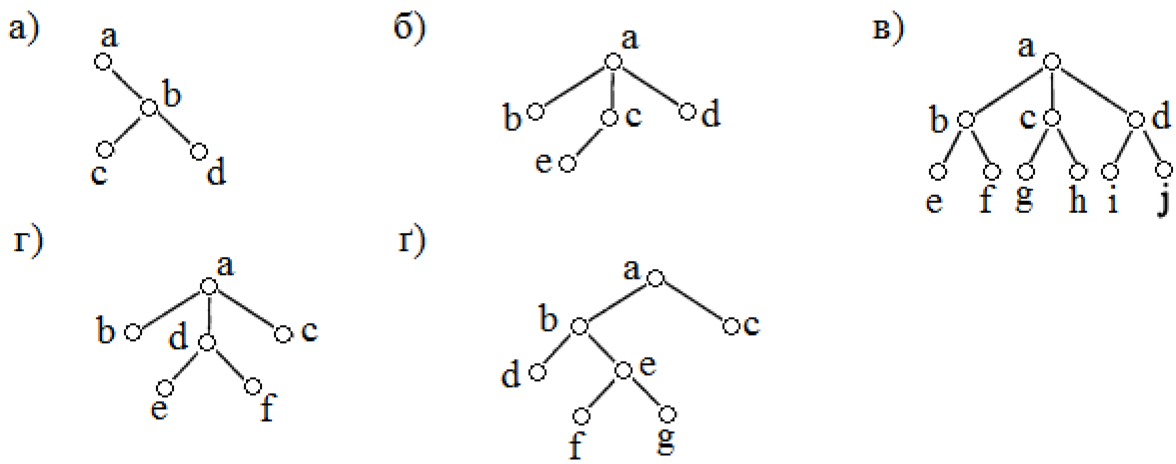


Рис. 3.51

11. Для дерева, що зображене на рис. 3.52 знайти центр, найменшу вагу вершин дерева та центроїд.

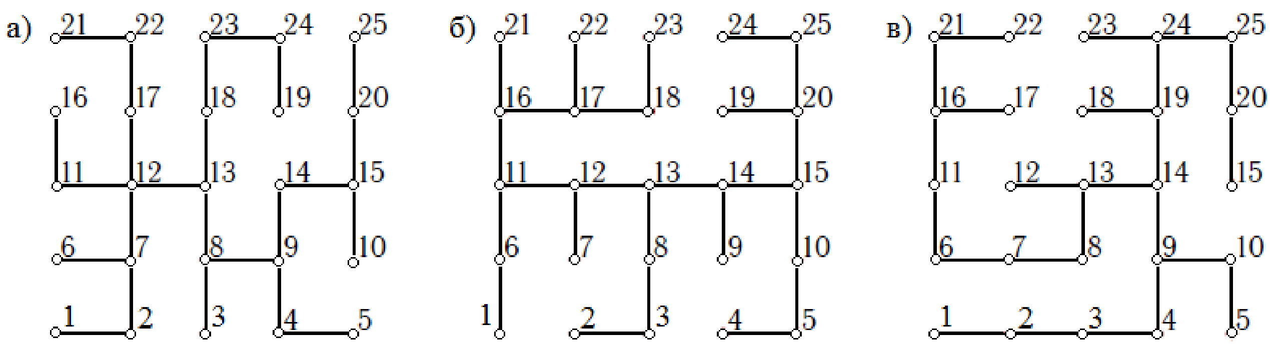


Рис. 3.52

12. Побудуйте каркасне дерево для графа, що зображений на рис. 3.53.

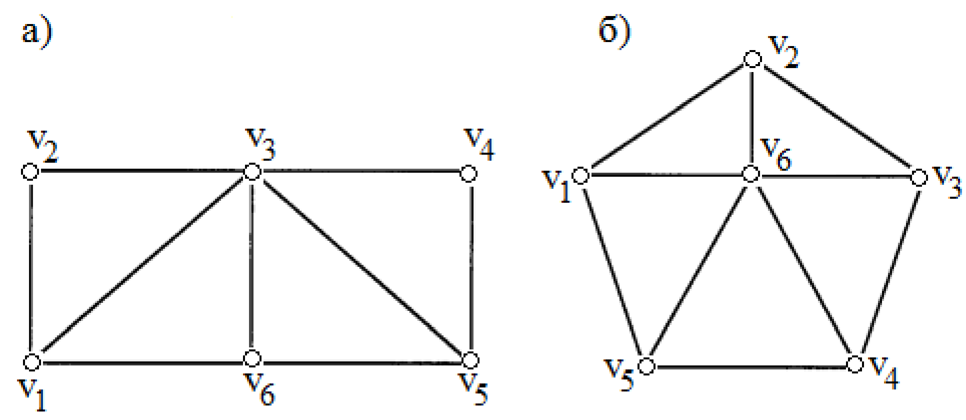


Рис. 3.53

13. Записати послідовність Келі для дерева, що зображене на рис. 3.54.

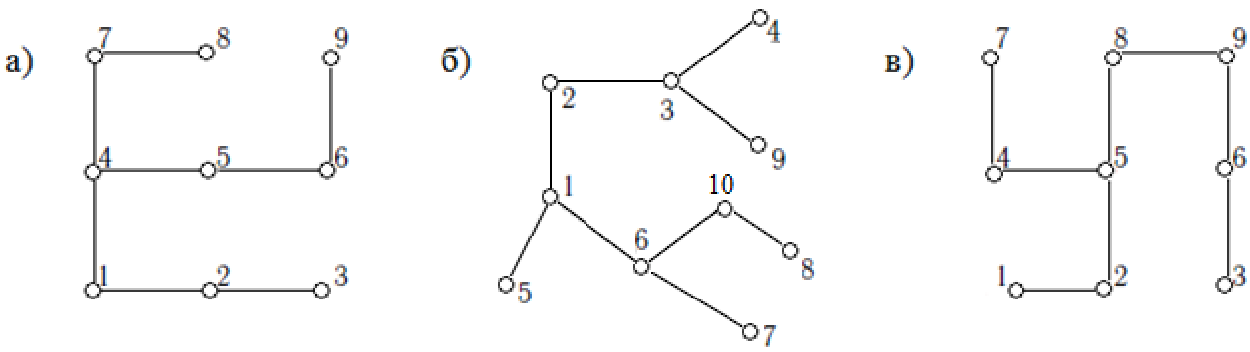


Рис. 3.54

14. Побудувати дерево для послідовності Келі:

а) (2, 3, 6, 4, 5, 6, 9);

б) (2, 5, 3, 2,5, 8, 8);

в) (4, 5, 6, 5, 5, 8, 8);

г) (2, 1, 2, 5, 8, 5, 6);

ґ) (4, 5, 6, 7, 5, 8, 8);

д) (4, 2, 5, 9, 4, 5, 8).

15. Довести, що ліс, який має n вершин і складається з k дерев, містить $n - k$ ребер.

16. Довести, що будь-яке дерево з n вершинами ($n \geq 2$), у якому є хоча б одна вершина степеня s, має не менше s кінцевих вершин.

17. Довести, що в дереві з n вершинами ($n \geq 3$), у якому найбільший степінь вершини дорівнює s, кількість кінцевих вершин не більше $\frac{n(s-2)+2}{s-1}$.

18. Нехай $\gamma(G)$ – цикломатичне число графа G. Довести, що:

а) $\gamma(G) = 1$ тоді й тільки тоді, коли граф G має лише один простий цикл;

б) $\gamma(G) = 1$ тоді й тільки тоді, коли у графі G є ребро, після вилучення якого одержується ліс і при цьому кількість компонент зв'язності графа не змінюється.

19. У країні 100 міст, деякі з яких з'єднані авіалініями. Відомо, що з будь-якого міста можна долетіти до будь-якого іншого (можливо, з пересадками). Доведіть, що можна побувати в кожному місті, зробивши не більше: а) 198 перельотів, б) 196 перельотів.

20. У деякій країні є 30 міст, причому кожне сполучене з кожним дорогою. Яке найбільше число доріг можна закрити на ремонт так, щоб з кожного міста можна було проїхати в кожне інше?

21. Андрій пішов з батьком до тиру. Вони домовилися, що Андрій робить п'ять пострілів і за кожний влучний постріл отримує право ще на два постріли. Андрій вистрілив 25 раз. Скільки разів він влучив у мішень?

§4. Пошук шляхів у графі

Основні теоретичні відомості

Означення. **Зваженим неорієнтованим графом** називається граф, кожному ребру e якого приписане дійсне число $W(e)$.

Число $W(e)$ називають вагою ребра e.

Означення. **Зваженим орієнтованим графом** називається такий орієнтований граф, кожній дузі e якого приписане дійсне число $W(e)$ – вагу дуги.

Означення. **Довжиною шляху у зваженому графі** називається сума ваг ребер (дуг), які утворюють цей шлях.

Якщо граф незважений, то вагу ребер (дуг) вважають рівною одиниці та отримують раніше введене поняття довжини шляху як кількості ребер (дуг) у ньому.

Перш ніж розглядати алгоритм Дейкстри, зробимо деякі попередні міркування.

Фіксованою початковою вершиною вважаємо вершину a; довжину найкоротшого шляху шукаємо до вершини z.

Для алгоритму слід ввести мітки. Мітки вершин можуть бути тимчасовими або постійними. Вершини з постійними мітками групують у множину М, яку називають **множиною позначених вершин**. Решта вершин має тимчасові мітки, і множину таких вершин позначають через $\Gamma(x)$ ($\Gamma(x) = V\backslash M$). Позначатимемо мітку вершини *v* через *l(v)*. Величина постійної мітки *l(v)* дорівнює довжині найкоротшого шляху, який проходить через вершини з постійними мітками. Крім міток *l(v)*, деякі вершини $v \neq a$ при роботі алгоритму наділяються мітками $\theta(v)$: на кожному кроці алгоритму $\theta(v)$ дорівнює номеру вершини, яка передує *v* у маршруті найменшої ваги від *a* до *v* серед усіх тих маршрутів, які проходять через вершини, що вже мають постійні мітки. Мітки $\theta(v)$ використовують для запису послідовності вершин $a, \dots, v$, які задають маршрут найменшої ваги від a до *v*.

Алгоритм Дейкстри

Присвоювання початкових значень

1. Виконати $l(a) := 0$ і вважати цю мітку постійною. Виконати $l(v) := \infty$ для всіх $v \neq a$, вважати ці мітки тимчасовими. Виконати: $p \coloneqq a$ (біжуча вершина з постійною міткою), $M \coloneqq \{a\}$ (вершина a включена в множину вершин з постійними мітками М).

Оновлення міток

2. Для кожної вершини $v \in \Gamma(x)\backslash M$ замінити мітки: $l(v) \coloneqq \min\{l(v); l(x) + W(x, v)\}$, тобто оновлювати тимчасові мітки вершин, у які з вершини x іде дуга. Причому якщо $l(x) + W(x, v) < l(v)$, то прийняти $\theta(v) = x$.

Перетворення мітки на постійну

3. Серед усіх вершин з тимчасовими мітками знайти вершину з мінімальною міткою, тобто знайти v*: $l(v^*) = \min\{l(v) |\ v \in \Gamma\}$, де $\Gamma = V\backslash M$.

4. Уважати мітку вершини v* постійною і покласти $M = M \cup \{v^*\}$ (вершина $v*$ включена в множину М), $p \coloneqq v^*$, $\Gamma = V\backslash M$.

5. (а) (Якщо потрібно знайти шлях від a до *z*.) Якщо $p = z$, то $l(z)$ – довжина шуканого шляху і алгоритм дає маршрут $(a, \dots, \theta(v), v)$, тому – зупинитись, в іншому разі – перейти до кроку 2.

(б) (Якщо потрібно знайти шлях від a до всіх інших вершин.) Якщо $\Gamma = \emptyset$, то ці мітки дають довжини найкоротших шляхів – зупинитись, в іншому разі – перейти до кроку 2.

Зауваження. Для знаходження шляху слід розпочати з кінцевої вершини *z*, знайти попередню вершину із значення мітки $\theta(z)$. Для кожної вершини шляху v_j знаходять їй попередню вершину шляху, поки не буде досягнута початкова вершина a. Перестановка вершин у зворотному порядку дає найкоротший шлях.

Теорема 1. Описаний алгоритм Дейкстри є коректним і будує маршрут найменшої ваги від a до всіх інших вершин.

У багатьох алгоритмах на графах в основі є систематичний перебір їхніх вершин. **Алгоритми обходу вершин графа називають методами пошуку.**

Пошук углиб у зв'язаному графі

Даний метод ще називають DFS-методом (від. Depth First Search).

Нехай метод $G = (V, E)$ – зв'язний граф, усі вершини якого позначені попарно різними символами. У процесі пошуку вглиб вершинам графа G надають номери (DFS-номери), які для вершини x позначають DFS(x), та певним чином позначають ребра.

У процесі роботи алгоритму використовують структуру даних для збереження множин, яку називають стеком. Із стека можна вилучати тільки той елемент, який був до нього доданий останнім: «останнім прийшов – першим вийшов» (last in, first out – LIFO). Отже, додавання і віднімання елементів стека відбувається з одного кінця, який називають **верхівкою стека.**

Алгоритм пошуку вглиб

1) Почати з довільної вершини v_s. Покласти $DFS(v_s) = 1$. Включити цю вершину в стек.

2) Розглянути вершину, яка знаходиться у верхівці стека: нехай це буде вершина x. Якщо всі ребра, що інциденті вершині x позначені, то перейти до кроку 4, а інакше – до кроку 3.

3) Нехай $\{x, y\}$ – це непозначене ребро. Якщо $DFS(y)$ уже визначений, то ребро $\{x, y\}$ позначити штрихованою лінією і перейти до кроку 2), якщо $DFS(y)$ невизначений, то ребро $\{x, y\}$ позначити потовщеною суцільною лінією, визначити $DFS(y)$ як черговий DFS-номер, включити до себе цю вершину й перейти до кроку 2.

4) Виключити вершину x зі стека. Якщо стек порожній, то зупинитись, інакше – перейти до кроку 2.

Для однозначності вибору номерів доцільно домовитися, що аналіз вершин, суміжних з вершиною, яка вже отримала DFS-номера, здійснюють за зростанням їх порядкового номера (або в алфавітному порядку).

Теорема 2. Нехай G – зв’язний граф, що містить n вершин та m ребер. Тоді пошук углиб проглядає кожну вершину точно один раз.

Пошук вшир у зв’язному графі

У процесі пошуку вшир вершини графа проглядають в іншій послідовності, ніж у методі пошуку вглиб, і їм надають BFS-номери (від Breadth First Search). BFS-номер вершини x позначають $BFS(x)$. Назва пояснюється тим, що під час пошуку йдуть вшир, а не вглиб: спочатку проглядають усі сусідні вершини, після цього – сусідів сусідів і т.д.

Для реалізації алгоритму використовують структуру даних для збереження множин, яку називають **чергою** (англ. queue). Із черги можна вилучати тільки той елемент, який перебував у ній довше за всіх: «першим прийшов – першим вийшов» (first in, first out – скорочено FIFO). Елемент включають у хвіст черги, а виключають з голови черги.

Алгоритм пошуку вшир

1. Почати з довільної вершини v_s. Покласти $BFS(v_s) = 1$. Включити вершину v_s у чергу.

2. Розглянути вершину, яка знаходиться на початку черги; нехай це буде вершина x. Якщо для всіх вершин, суміжних з вершиною x, уже визначені BFS-номери, то перейти до кроку 4, а інакше – до кроку 3.

3. Нехай $\{x, y\}$ – ребро, в якому номер $BFS(y)$ невизначений. Позначити це ребро потовщеною суцільною лінією, визначити $BFS(y)$ як черговий BFS-номер, включити вершину y до черги й перейти до кроку 2.

4. Виключити вершину x з черги. Якщо черга порожня, то зупинитись, інакше – перейти до кроку 2.

Для того щоб результат виконання алгоритму був однозначним, вершини, суміжні з вершиною x, аналізуємо за зростанням їх порядкових номерів (або в алфавітному порядку).

Зауваження. У процесі роботи наведених алгоритмів будують зв’язний граф, який не має циклів, – дерево пошуку вглиб і вшир.

Теорема 3. Будь-яке BFS-дерево є геодезичним деревом.

Теорема 4. Нехай G – зв’язний граф, що містить n вершин та m ребер. Тоді пошук у ширину проглядає кожну вершину точно один раз.

Алгоритм Краскала

Нехай G – зважений зв’язний граф, що має n вершин. Потрібно вибрати каркасне дерево графа G, яке має найменшу вагу.

1. Узяти граф T_0, що складається лише з вершин графа G і не має ребер. Присвоїти $i := 1$.

2. Якщо $i < n$, то додати до графа T_{i-1} будь-яке ребро l_i з найменшою вагою і таке, що:

а) l_i має найменшу вагу серед тих ребер графа G, які не входять у T_{i-1};

б) l_i не утворює циклів з ребрами, які входять у T_{i-1}.

Позначити одержаний граф T_i. Присвоїти $i \coloneqq i + 1$.

3. Якщо $i = n$, то T_{n-1} – шуканий граф, а інакше – перейти до кроку 2.

Теорема 5. Описаний алгоритм Краскала є коректним і дає на $n - 1$ кроці каркасне дерево найменшої ваги.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти найкоротший маршрут від вершини 1 до вершини 5 графа, що зображений на рис. 55.

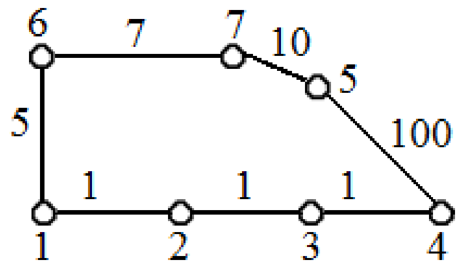


Рис. 3.55

Розв'язання

Присвоювання початкових значень

1. $l(1) := 0, l(2) = l(3) = l(4) = l(5) = l(6) = l(7) := \infty$. Виконаємо $M \coloneqq \{1\}$, $\Gamma(x) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $p \coloneqq 1$.

1 ітерація. *Оновлення міток.*

2. $l(2) \coloneqq \min\{\infty, 0 + 1\} = 1, \theta(2) \coloneqq 1, l(3) \coloneqq \min\{\infty, \infty\} = \infty$, $l(4) \coloneqq \min\{\infty, \infty\} = \infty$, $l(5) \coloneqq \min\{\infty, \infty\} = \infty, l(6) \coloneqq \min\{\infty, 0 + 5\} = 5$, $\theta(6) \coloneqq 1, l(7) \coloneqq \min\{\infty, \infty\} = \infty$.

Перетворення мітки у постійну.

3. $\min\{1, \infty, \infty, \infty, 5, \infty\} = 1$. $l(2^*) = 1$.

4. $M = \{1, 2\}$, $\Gamma(x) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $p \coloneqq 2$.

5. Оскільки $\Gamma(x) \neq \emptyset$, то перейдемо до кроку 2.

2 ітерація. *Оновлення міток.*

2. $l(3) \coloneqq \min\{\infty, 1 + 1\} = 2$, $\theta(3) \coloneqq 2, l(4) \coloneqq \min\{\infty, 1 + \infty\} = \infty, l(5) \coloneqq \min\{\infty, 1 + \infty\} = \infty, l(6) \coloneqq \min\{5, 1 + \infty\} = 5, l(7) \coloneqq \min\{\infty, 1 + \infty\} = \infty$.

Перетворення мітки у постійну.

3. $\min\{2, \infty, \infty, 5, \infty\} = 1$. $l(3^*) = 2$.

4. $M = \{1, 2, 3\}$, $\Gamma(x) = \{4, 5, 6, 7\}$, $p \coloneqq 3$.

5. Оскільки $\Gamma(x) \neq \emptyset$, то перейдемо до кроку 2.

3 ітерація. *Оновлення міток.*

2. $l(4) \coloneqq \min\{\infty, 2+1\} = 3$, $\theta(4) \coloneqq 3$, $l(5) \coloneqq \min\{\infty, 2+\infty\} = \infty$, $l(6) \coloneqq \min\{5, 2+\infty\} = 5$, $l(7) \coloneqq \min\{\infty, 2+\infty\} = \infty$.

Перетворення мітки у постійну.

3. $\min\{3, \infty, 5, \infty\} = 1$. $l(4^*) = 3$.

4. $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $\Gamma(x) = \{5, 6, 7\}$, $p \coloneqq 4$.

5. Оскільки $\Gamma(x) \neq \emptyset$, то перейдемо до кроку 2.

***4 ітерація**. Оновлення міток.*

2. $l(5) \coloneqq \min\{\infty, 3+100\} = 103$, $\theta(5) \coloneqq 4$, $l(6) \coloneqq \min\{5, 3+\infty\} = 5$, $l(7) \coloneqq \min\{\infty, 3+\infty\} = \infty$.

Перетворення мітки у постійну.

3. $\min\{103, 5, \infty\} = 5$. $l(6^*) = 5$.

4. $M = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $\Gamma(x) = \{5, 7\}$, $p \coloneqq 6$.

5. Оскільки $\Gamma(x) \neq \emptyset$, то перейдемо до кроку 2.

***5 ітерація**. Оновлення міток.*

2. $l(5) \coloneqq \min\{103, 6+\infty\} = 103$, $l(7) \coloneqq \min\{\infty, 5+7\} = 12$, $\theta(7) \coloneqq 6$.

Перетворення мітки у постійну.

3. $\min\{103, 12\} = 12$. $l(7^*) = 12$.

4. $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $\Gamma(x) = \{5\}$, $p \coloneqq 7$.

5. Оскільки $\Gamma(x) \neq \emptyset$, то перейдемо до кроку 2.

***6 ітерація**. Оновлення міток.*

2. $l(5) \coloneqq \min\{103, 12+10\} = 22$, $\theta(5) \coloneqq 7$.

Перетворення мітки у постійну.

3. $\min\{22\} = 22$. $l(7^*) = 22$.

4. $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 5\}$, $\Gamma(x) = \emptyset$, $p \coloneqq 5$.

5. Оскільки $\Gamma(x) = \emptyset$, то зупинитися.

Таким чином, $d(1,2) = 1$ – маршрут (1, 2), бо $\theta(2) \coloneqq 1$. Найкоротша відстань до 3 вершини – $d(1,3) = 2$, для визначення маршруту знайдемо вершину попередню до вершини 3 – $\theta(3) \coloneqq 2$. Оскільки $\theta(2) \coloneqq 1$, то запишемо вершини у зворотному порядку (1, 2, 3) – це і буде найкоротший маршрут між вершинами 1 та 3. Аналогічно знаходимо $d(1,4) = 3$ – маршрут (1, 2, 3, 4), $d(1,5) = 22$ – маршрут (1, 6, 7, 5), $d(1,6) = 5$ – маршрут (1, 6), $d(1,7) = 12$ – маршрут (1, 6, 7).

Відповідь: $d(1,2) = 1$, $d(1,3) = 2$, $d(1,4) = 3$, $d(1,5) = 22$, $d(1,6) = 5$, $d(1,7) = 12$.

Приклад 2. Знайти найкоротший маршрут від вершини s до вершини v графа $G = (V, E)$ де $V = \{s, u, v, x, y\}$, що заданий матрицею ваг W:

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ \infty & 3 & 9 & 0 & 2 \\ 7 & \infty & 6 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Перш ніж розпочати застосовувати алгоритм Дейкстри, побудуємо на основі матриці ваг додаткову таблицю 16.

Присвоювання початкових значень

1. $l(s) := 0, l(u) = l(x) = l(v) = l(y) := \infty$. Виконаємо $M \coloneqq \{s\}$, $\Gamma(x) = \{u, x, v, y\}$, $p \coloneqq s$.

1 ітерація*. Оновлення міток.*

2. $l(u) \coloneqq \min\{\infty, 0 + 10\} = 10, \theta(u) \coloneqq s, l(x) \coloneqq \min\{\infty, 0 + 5\} = 5$, $\theta(x) \coloneqq s, l(v) \coloneqq \min\{\infty,\ 0 + \infty\} = \infty,\ l(y) \coloneqq \min\{\infty, 0 + \infty\} = \infty$.

Таблиця 16

	s	u	v	x	y
s	0	10	∞	5	∞
u	∞	0	1	2	∞
v	∞	∞	0	∞	4
x	∞	3	9	0	2
y	7	∞	6	∞	0

Перетворення мітки у постійну.

3. $\min\{10, 5, \infty, \infty\} = 5$. $l(x^*) = 5$.

4. $M = \{s, x\}$, $\Gamma(x) = \{u, v, y\}$, $p \coloneqq x$.

5. Оскільки $p \neq v$, то перейдемо до кроку 2.

2 ітерація*. Оновлення міток.*

2. $l(u) \coloneqq \min\{10, 5 + 3\} = 8, \theta(u) \coloneqq x$, $l(v) \coloneqq \min\{\infty,\ 5 + 9\} = 14, \theta(v) \coloneqq x, l(y) \coloneqq \min\{\infty, 5 + 2\} = 7,\ \theta(y) \coloneqq x$.

Перетворення мітки у постійну.

3. $\min\{8, 14, 7\} = 7$. $l(y^*) = 7$.

4. $M = \{s, x, y\}$, $\Gamma(x) = \{u, v\}$, $p \coloneqq y$.

5. Оскільки $p \neq v$, то перейдемо до кроку 2.

3 ітерація*. Оновлення міток.*

2. $l(u) \coloneqq \min\{8, 7 + \infty\} = 8,\ l(v) \coloneqq \min\{14,\ 7 + 6\} = 13$,
$\theta(v) \coloneqq y$.

Перетворення мітки у постійну.

3. $\min\{8, 13\} = 8$. $l(u^*) = 8$.

4. $M = \{s, x, y, u\}$, $\Gamma(x) = \{v\}$, $p \coloneqq y$.

5. Оскільки $p \neq v$ то перейдемо до кроку 2.

4 ітерація*. Оновлення міток.*

2. $l(v) \coloneqq \min\{\ 13,\ 8 + 1\} = 9, \theta(v) \coloneqq y$.

Перетворення мітки у постійну.

3. $\min\{9\} = 8$. $l(u^*) = 9$.

4. $M = \{s, x, y, u, v\}$, $\Gamma(x) = \emptyset$, $p \coloneqq v$.

5. Оскільки $p = v$ то зупинитися.

Отже, $d(s, v) = 9$, а маршрут при цьому буде (s, x, y, u, v).

Відповідь: $d(s, v) = 9, (s, x, y, u, v)$.

<u>Приклад 3.</u> Виконати обхід графа з рис. 3.56 пошуком углиб, починаючи з вершини 1.

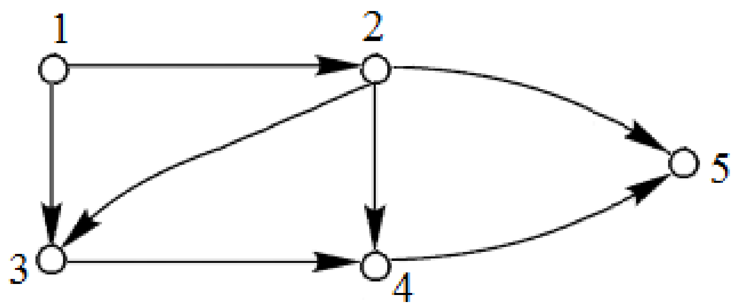


Рис. 3.56

Розв’язання

Розв’язок подано на рис. 3.57, а протокол пошуку вглиб – у таблиці 17.

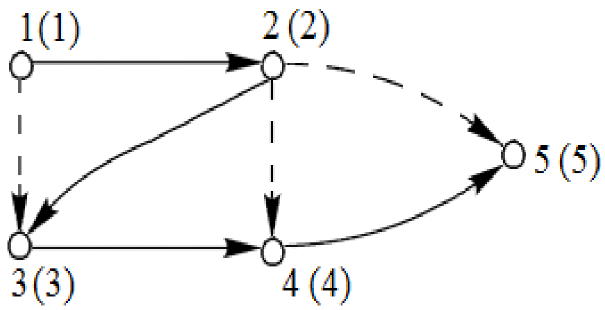


Рис. 3.57

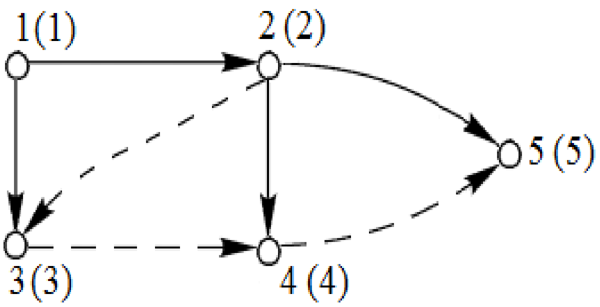


Рис. 3.58

Таблиця 17

Вершина	DFS-номер	Вміст стека	Вилучена вершина
1	1	1	-
2	2	1, 2	-
3	3	1, 2, 3	-
4	4	1, 2, 3, 4	-
5	5	1, 2, 3, 4, 5	5
-	-	1, 2, 3, 4	4
-	-	1, 2, 3	3
4	-	1, 2	-
-	-	1, 2	2
3	-	1	-
-	-	∅	1

Приклад 4. Виконати обхід графа з рис. 56 пошуком вшир, починаючи з вершини 1.

Розв’язання

Розв’язок подано на рис. 3.58, а протокол пошуку вшир – у таблиці 18.

Таблиця 18

Вершина	BFS-номер	Вміст черги	Вилучена вершина
1	1	1	-
2	2	1, 2	-
3	3	1, 2, 3	-
-	-	2, 3	1
3	-	2, 3	-
4	4	2, 3, 4	-
5	5	2, 3, 4, 5	-
-	-	3, 4, 5	2
4	-	3, 4, 5	-
-	-	4, 5	3
5	-	4, 5	-
-	-	5	4
-	-	∅	5

Приклад 5. Побудувати каркасне дерево найменшої ваги для графа, що зображений на рис. 3.59.

Розв’язання

1. Нехай граф T_0 – граф, який містить усі 5 вершин графа G і не має ребер. Присвоїмо $i \coloneqq 1$.

1 ітерація

2. Оскільки $1 < 5$, то до графа T_0 додаємо будь-яке ребро l_1 з найменшою вагою. Таких ребер виявилося три (x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_4). Візьмемо ребро $l_1 = (x_1, x_2)$ (див. рис. 60). Позначимо одержаний граф T_1. Присвоїмо $i \coloneqq 1 + 1 = 2$.

3. Оскільки $2 < 5$, то перейдемо до кроку 2 алгоритму.

2 ітерація

2. Оскільки $2 < 5$, то слід додати чергове ребро найменшої ваги. До графа T_1 додамо ребро $l_2 = (x_1, x_4)$ як ребро з найменшою вагою, яке не утворює цикл у графі (див. рис. 60). Позначимо одержаний граф T_2. Присвоїмо $i \coloneqq 3$.

3. Оскільки $3 < 5$, то перейдемо до кроку 2 алгоритму.

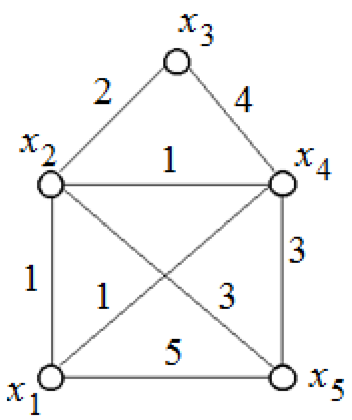


Рис. 3.59

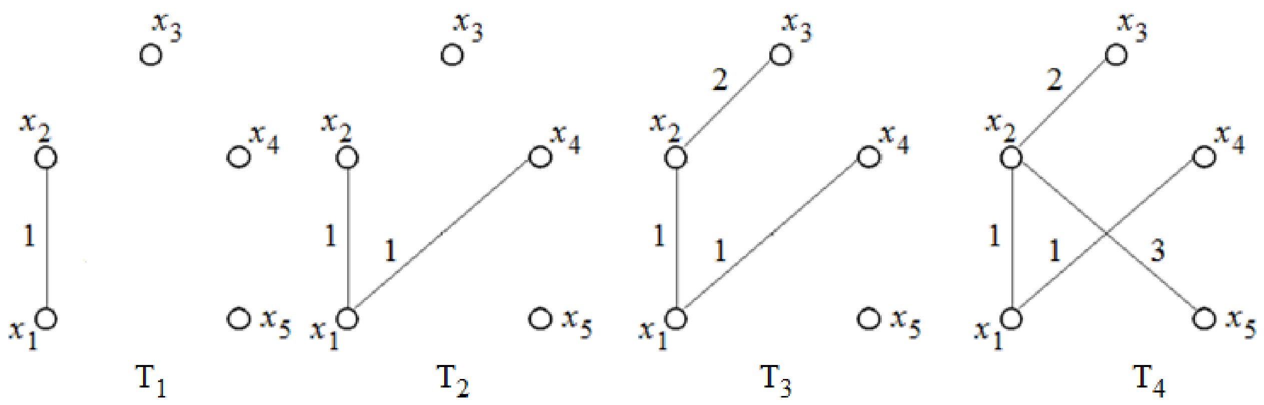


Рис. 3.60

3 ітерація

2. Оскільки $3 < 5$, то слід додати чергове ребро найменшої ваги. Серед ребер графа G, що залишилися, найменшу вагу має ребро (x_2, x_4), але при цьому утворюється цикл. Це суперечить умові б) алгоритму, тому дане ребро відкидаємо. Наступне за вагою ребро – (x_2, x_3). Воно не утворює циклу при додаванні його до T_2, тому вважатимемо його l_3. У результаті додавання вказаного ребра утворюється граф T_3 (див. рис. 3.60). Позначимо одержаний граф T_3. Присвоїмо $i \coloneqq 4$.

3. Оскільки $4 < 5$, то перейдемо до кроку 2 алгоритму.

4 ітерація

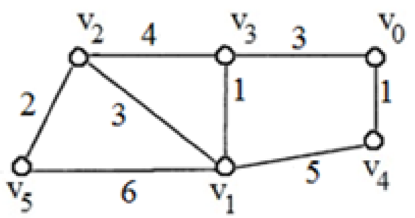
2. Оскільки $4 < 5$, то слід додати чергове ребро найменшої ваги. Серед ребер графа G, що залишилися, найменшу вагу має ребро (x_2, x_4), але при цьому утворюється цикл. Це суперечить умові б) алгоритму, тому дане ребро відкидаємо. Наступне за вагою ребро – (x_2, x_3). Воно не утворює цикл при додаванні його до T_4, тому вважатимемо його l_3. У результаті додавання вказаного ребра утворюється граф T_3 (див. рис. 3.60). Позначимо одержаний граф T_4. Присвоїмо $i \coloneqq 5$.

3. Оскільки $5 = 5$, то граф T_4 – шукане дерево мінімальної ваги (див. рис. 3.60).

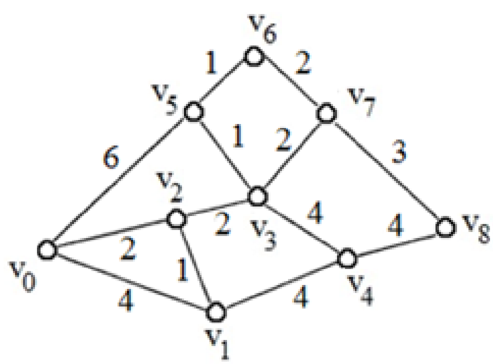
Задачі для самостійного опрацювання

1. Знайти довжину найкоротшого маршруту від вершини v_0 до всіх інших вершин графа, що зображений на рис. 61, а також власне найкоротші маршрути, використовуючи алгоритм Дейкстри.

а)



б)



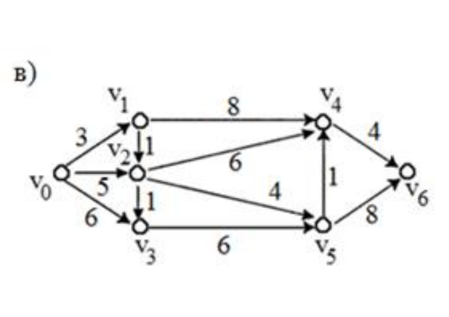


Рис. 3.61

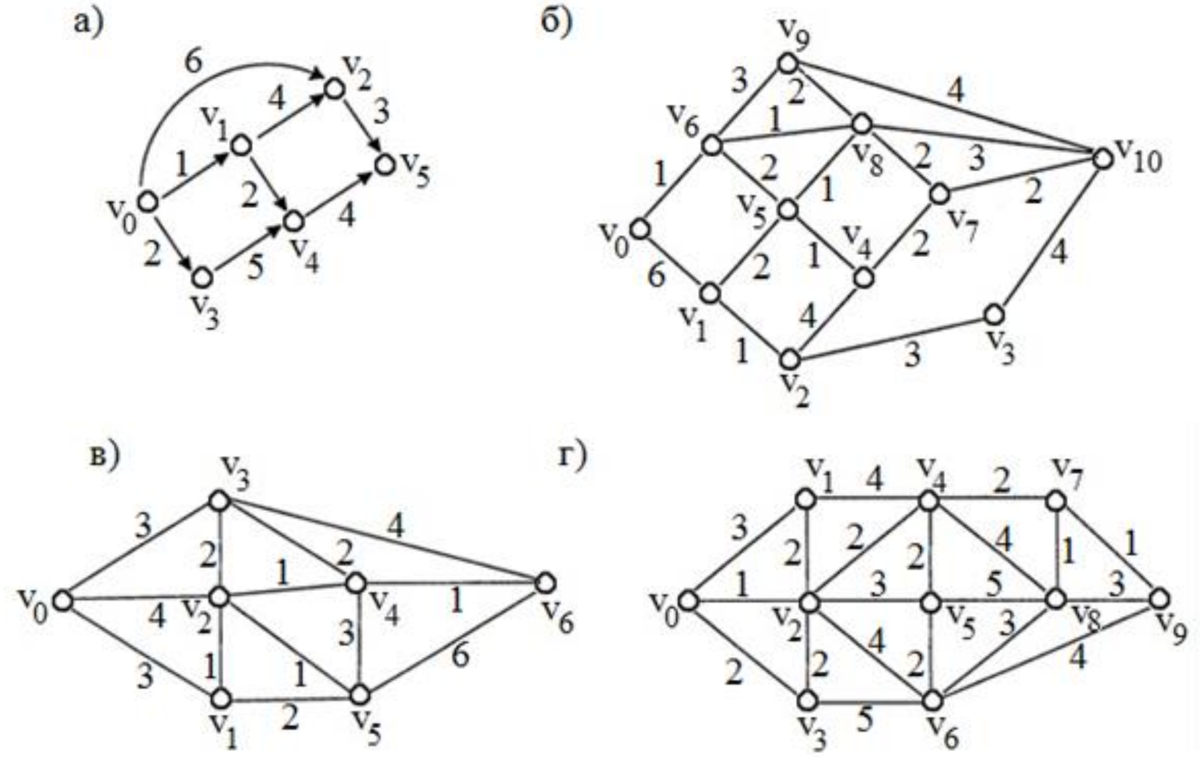


Рис. 3.62

2. Знайти довжину найкоротшого маршруту та власне маршрут графа (див. рис. 62), використовуючи алгоритм Дейкстри, від вершини v_0 до вершини:

а) v_5; б) v_{10}; в) v_6; г) v_8.

3. Знайти найкоротший маршрут від вершини *1* до вершини *6* графа $G = (V, E)$ де $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, що заданий матрицею ваг W:

$$
\text{а)} \begin{pmatrix} 0 & 6 & \infty & 5 & 7 & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty & 5 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & 3 \\ \infty & 1 & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}
\text{б)} \begin{pmatrix} 0 & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty \\ \infty & 0 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.
$$

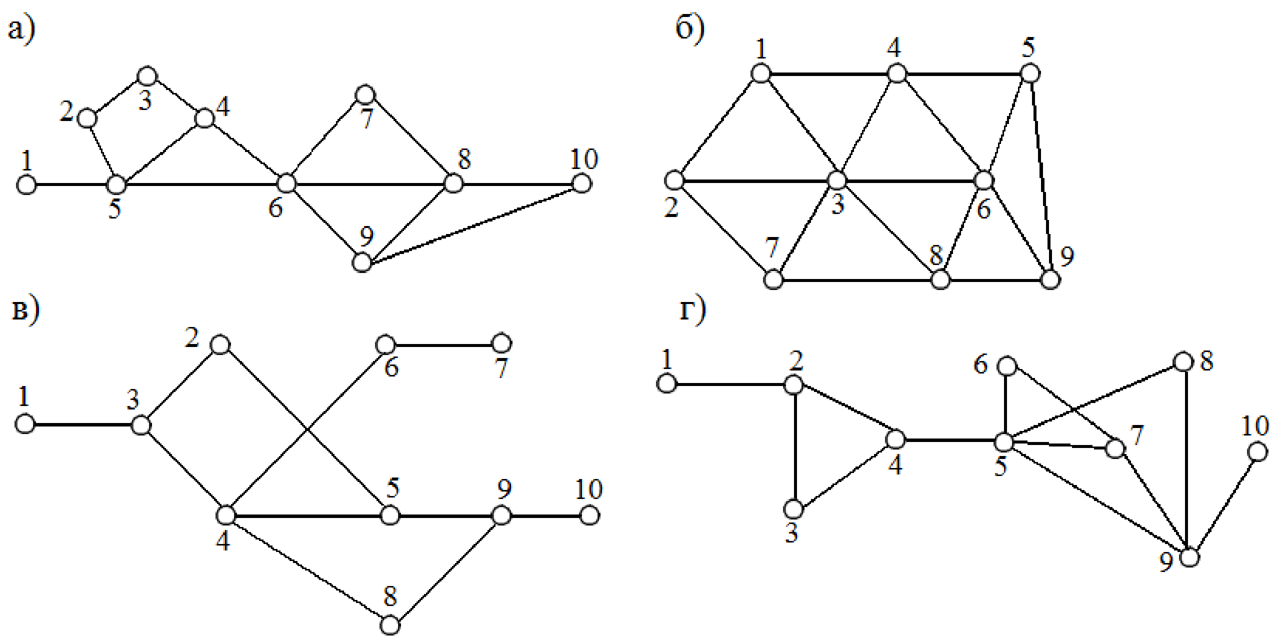


Рис. 3.63.

4. Виконати обхід графа з рис. 3.63 пошуком углиб, починаючи з вершини 1.

5. Виконати обхід графа з рис. 3.63 пошуком ушир, починаючи з вершини 1.

6. Побудувати каркасне дерево найменшої ваги для графа, що зображений на рис. 3.64.

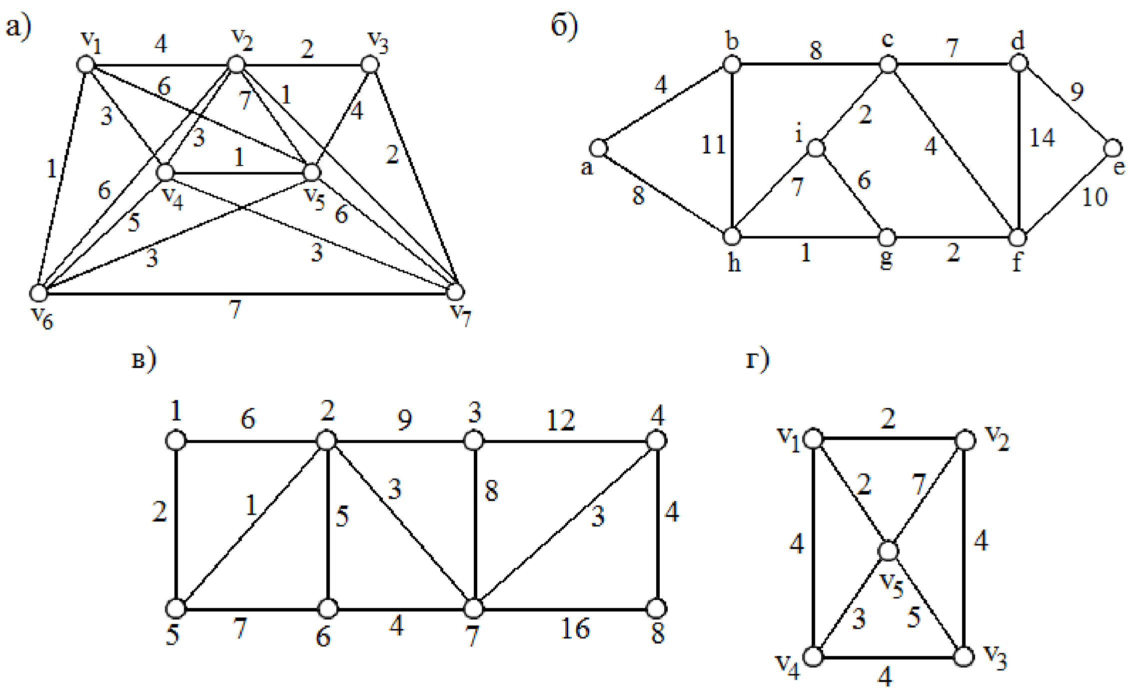


Рис. 3.64

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

Модуль 1. §1

1. а) {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}, **б)** {а, е, є, и, і, ї, о, у, ю, я}, **в)** {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}, **г)** {3, 5, 7, 9}.

2. а) $\{x \mid x = 3 \cdot i,\ i \in N,\ i \leq 8\}$; б) $\{x \mid x = i^3, -5 \leq i \leq 5, i \in Z\}$, **в)** $\{x \mid x = i, i \in N,\ i \leq 5\}$, **г)** $\{x_i \mid x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_i = x_{i-2} + x_{i-1},\ i \in N, 3 \leq i \leq 7\}$.

3. а) неправильне, **б)** правильне, **в)** неправильне, **г)** правильне,

4. г) неправильне, **д)** правильне.

5. а) $|A| = 2$, **б)** $|A| = 1$, **в)** $|A| = 4$, **г)** $|A| = 3$, **г)** $|A| = 1$, **д)** $|A| = 6$.

6. а) $\beta(X) = \{\emptyset\}$; **б)** $\beta(X) = \{\emptyset, \{a\}\}$; **в)** $\beta(X) = \{\emptyset, \{a\},\ \{b\},\ \{a, b\}\}$; $\beta(X) = \{\ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. **6.** 5. **7.** $|X| = 4$.

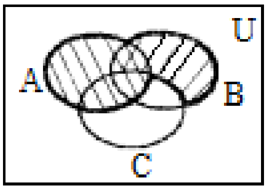
8. $\beta(A) \backslash \beta(B) = \big\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1,3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$, $\beta(B) \backslash \beta(A) = \big\{\{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}\big\}$.

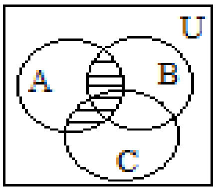
9. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \backslash B = \{1, 3\}$, $A\Delta B = \{1, 3, 6, 7\}$, $(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) \cup (B \backslash A) = \{1, 3, 6, 7\}$.

10. $A \cup B = \{t, u, v, x, y, z\}$, $A \cap B = \{t, x\}$, $B \backslash A = \{u, v, y, z\}$, $A\Delta B = \{u, v, y, z\}$.

11. $|A \cup B| = 5$, $|A \cap B| = 1$, $|A \backslash B| = 2$, $|B \backslash A| = 1$, $|A\Delta B| = 3$, $|\overline{A \cup B}| = 4$.

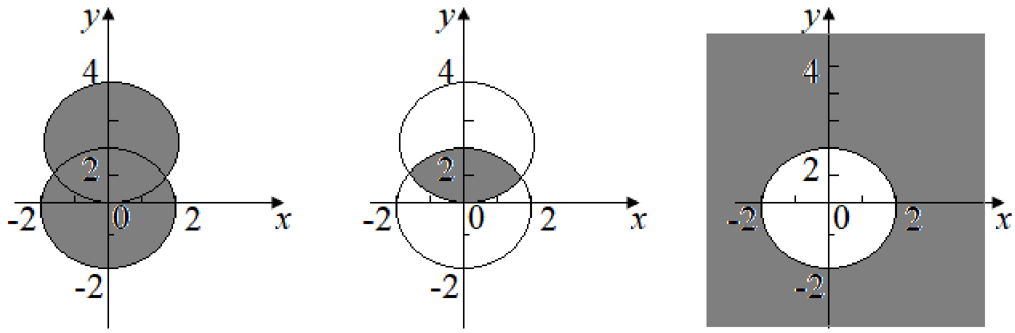
12. $|A \cup B| = 5$, $|A \cap B| = 2$, $|A \backslash B| = 0$, $|B \backslash A| = 3$, $|A\Delta B| = 3$, $|\overline{A \cap B} \cap \bar{B}| = 4$.

13. а) 

б) 

14. 2. **15.** 8.

18.



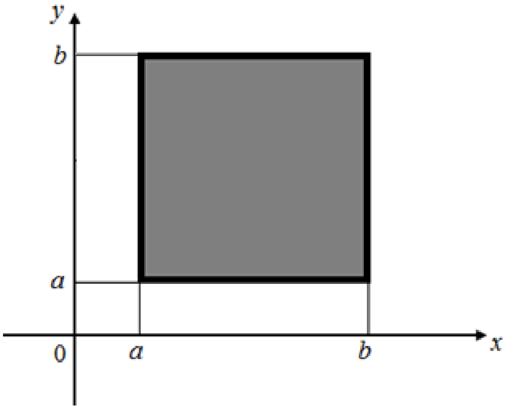
$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $R^2 \backslash A$

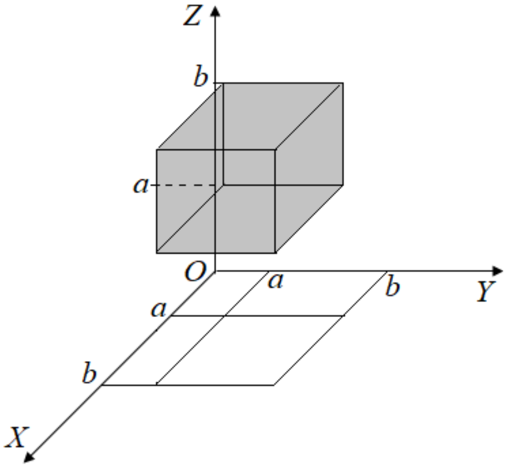
§2 1. а) U; **б)** C; **в)** A; **г)** $\mathrm{A} \cap B$; **г)** $\mathrm{A} \cup B$; **д)** U; **е)** $A \cup (B \cap C)$; **є)** $(A \cup B) \cap \bar{C}$; **ж)** $(A \cup B) \cap \mathrm{C}$; **з)** $\mathrm{A} \cap B$.

§3 1. а) $A \times B = \{(1;2),\ (1;3),\ (1;4),\ (2;2),\ (2;3),\ (2;4)\}$; **б)** $B \times A = \{(2;1),\ (2;2),\ (3;1),\ (3;2),\ (4;1),\ (4;2)\}$; **в)** $B^2 = \{(2;2),\ (2;3),\ (2;4),\ (3;2),\ (3;3),\ (3;4),\ (4;2),\ (4;3),\ (4;4)\}$; **г)** $(B \backslash A) \times A = \{(3;1),\ (3;2),\ (4;1),$

$(4;2)\}$; **г)** $A \times B \times A = \{(1;2;1),\ (1;2;2),\ (1;3;1),\ (1;3;2),\ (1;4;1),\ (1;4;2), (2;2;1),\ (2;2;2), (2;3;1),\ (2;3;2), (2;4;1), (2;4;2)\}$; **д)** $A \times (A \cup B) = \{(1;1),\ (1;2),\ (1;3),\ (1;4),\ (2;1),\ (2;2),\ (2;3),\ (2;4)\}$.

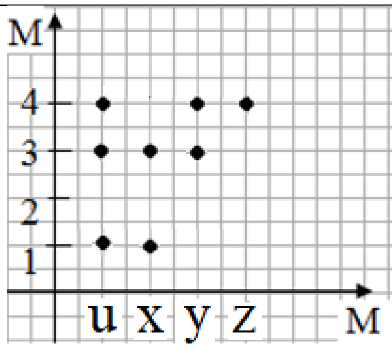
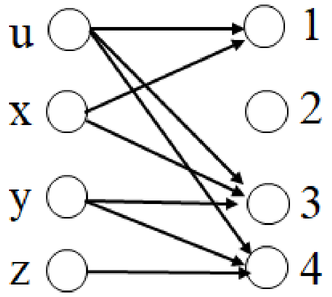
2. а) $Pr_1 X = \{1;2\}; Pr_3 X = \{1;3\}; Pr_{1,3} X = \{(2;1),(2;3),(1;3)\}$;
б) $Pr_1 X = \{1;2;3\}; Pr_3 X = \{5;6;7\}; Pr_{1,3} X = \{(1;2),(2;6),(3;7)\}$.

3. а) 

б) 

в) вся площина **OXY; г)** увесь простір **OXYZ.**

4. для $\boldsymbol{R_1}$

$\Delta=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ Матриця відповідності	 Графік $\boldsymbol{R_1}$	 Граф $\boldsymbol{R_1}$

5. а) $\boldsymbol{C_1} \cup \boldsymbol{C_2} = \{\ (a,1),\ (a,3),\ (a,4),\ (a,5),\ (b,1),\ (b,2),\ (b,3),\ (c,1),\ (d,2),\ (d,3),\ (d,4),(d,5)\}$;

в) $\boldsymbol{C_1} \cup \boldsymbol{C_2} = \{(a,5),\ (b,3),\ (d,3)\}$;

г) $\overline{\boldsymbol{C_1}} = \{\ (a,2),\ (a,4),(b,2),\ (b,4),(b,5),\ (c,1),\ (c,2),\ (c,3),\ (c,4),\ (c,5),\ \ (d,1),\ (d,2)\ \}$.

6. а) $\boldsymbol{C}_3^{-1} = \{(x,y)|\ (y+x) \in Z\}$; **в)** $C_2 * C_3 = \{(x,y)|\exists z \in Z, z\ \le 2 - x, (z+y) \epsilon Z\}$.

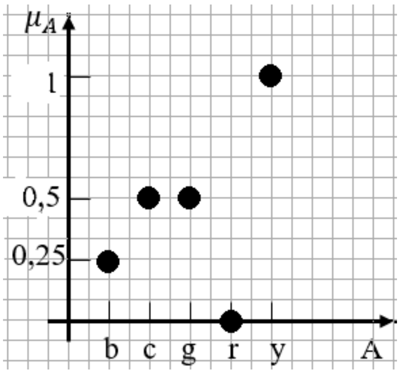
7. а) $\rho(\varphi) =$ "бути дружиною батька"; $\varphi(\rho) =$ "бути батьком дружини";

в) $\rho(\varphi) =$ "бути братом матері"; $\varphi(\rho) =$ "бути матір′ю брата".

8. а) R – відношення еквівалентності; **б)** R – симетричне відношення.

§4

1. а) $A = 0{,}25/b\ + 0{,}5/c\ + 0{,}5/g + 0/r + 1/y$; $A_{0,25} = \{b, c, g, y\}$, $A_{0,5} = \{c, g, y\}$, $A_1 = \{y\}$. $supp(A) = \{\,b. c, g, y\}$, $core(A) = \{y\}$, $boun(A) = \{b, c, g\}$, $cros(A) = \{c, g\}$, $alt(A) = 1$.



2. а) $\bar{A} = \{(b; 0{,}8), (c;\ 0{,}5), (g; 0{,}4), (r; 1), (y; 0{,}2)\}$;
$0{,}3 \cdot A = \{(b; 0{,}06), (c;\ 0{,}15), (g; 0{,}18), (r; 0), (y; 0{,}06)\}$;
$con(A) = 0{,}04/b\ + 0{,}25/c\ + 0{,}36/g + 0/r + 0{,}64/y$;
$dil(A) = 0{,}45/b\ + 0{,}71/c\ + 0{,}77/g + 0/r + 0{,}89/y$.

3. а) $A \cup B = 0{,}25/a + 0{,}4/b + 0{,}8/c + 1/d + 0{,}5/e$;
$A \cap B = 0/a + 0/b + 0{,}4/c + 0{,}6/d + 0/e$;
$A \dotplus B = 0{,}25/a + 0{,}4/b + 0{,}88/c + 1/d + 0{,}5/e$;
$A \cdot B = 0/a + 0/b + 0{,}32/c + 0{,}6/d + 0/e$;
$A \backslash B = 0{,}25/a + 0{,}4/b + 0{,}4/c + 0/d + 0/e$;
$A \Delta B = 0{,}25/a + 0{,}4/b + 0{,}4/c + 0{,}4/d + 0{,}5/e$.

4. а) $C = A \times B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. а) $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0{,}3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; R – рефлексивне і симетричне відношення.

6. а) $R_0 \circ R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $R_0 \cdot R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Модуль 2. § 1

1. 72. ***2.*** 1024; 2016; 496. ***3.*** 49; 42. ***4.*** 252. ***5.*** 125; 60. ***6.*** 7. ***7.*** 18. ***8.*** 720. ***9.*** 4!=24. ***10. а)*** $P_{11}(5, 2, 1, 1, 2) = 83160$***; б)*** $P_7(3, 1, 1, 1, 1) = 840$. ***11.*** Чотири авторучки і два олівці не вважаються різними між собою. Тому $P_7(2, 4, 1) = 105$. ***12.*** $P_{11}(5, 4, 2)$ =6930. ***13.*** 151 200. ***14.*** A_{15}^{10}. ***15.*** 1680. ***16.*** $\overline{A}_5^{12} = 5^{12}$. ***17.*** $\overline{A}_3^{5} = 243$. *Підказка.* Екзаменатор міг поставити кожному зі студентів одну з трьох оцінок: "Відмінно", "Добре" або "Задовільно". ***18.*** $C_{10}^4 = 210$. *Підказка.* Визначте, скільки потрібно вершин, щоб була точка перетину двох різних діагоналей. ***19.*** C_{48}^6. ***20.*** $\overline{C_5^8} = 495$. ***21.*** $\overline{C_9^7} = 6435$. ***22.*** 651. ***23.*** 16. *Підказка.* Число 210 має дільником 1, а також прості дільники 2, 3, 5, 7. Решта дільників є добутком цих простих дільників. ***24.*** 125; 69375. 2***5.*** 160. *Підказка.* Від загальної кількості комісій із 3 чоловік відніміть кількість повторів подружніх пар. 2*6.* $3 \cdot C_{80}^{3} = 246480$. ***27.*** $1 + C_n^4 + + \frac{n\cdot(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$. *Підказка.* Число частин, які утворилися після проведення всіх діагоналей, дорівнює 1 плюс число точок перетину, плюс число діагоналей. **28.** ***а)*** 321440; ***б)*** 372652.

§ 2

1. а) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$; ***б)*** $x^{14} - 14x^{12}y + +84x^{10}y^2 - 280x^8y^3 + 560x^6y^4 - 672x^4y^5 + 448x^2y^6 - 128y^7$;
в) $\sqrt{x^5} + +5x^2y + 10\sqrt{x^3}y^2 + 10xy^3 + 5\sqrt{x}y^4 + y^5$;
г) $\frac{b\sqrt[3]{b^2}-5b\sqrt[3]{ab}+10b\sqrt[3]{a^2}-10a\sqrt[3]{b^2}+5a\sqrt[3]{ab}-a\sqrt[3]{a^2}}{ab\sqrt[3]{a^2b^2}}$.

2. а) $433 + i184\sqrt{6}$; ***б)*** $-432 - i144\sqrt{3}$; ***в)*** $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; ***г)*** $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. ***3. а)*** $T_8 = -\frac{1}{128}C_{14}^7x^{\frac{7}{6}} = -26\frac{13}{16}x^{\frac{7}{6}}$; ***б)*** $T_9 = C_{16}^8x^{-4} = 12870x^{-4}$; ***в)*** $T_5 = 5670$; ***г)*** $T_5 = 35$; ***ґ)*** $T_5 = C_{19}^4 \cdot 2^{22} \cdot 3$, $T_{17} = C_{19}^{16} \cdot 2^{12} \cdot 3^4$; ***д)*** $T_3 = 6080$, $T_9 = 125970$, $T_{15} = 1211\frac{1}{4}$, $T_{21} = 2^{-10}$. ***4. а)*** 9; ***б)*** 1. ***5. а)*** $T_{65} = C_{100}^{64}3^{32}$; ***б)*** $T_{30} = C_{50}^{29}\left(\sqrt{2}\right)^{29}$. ***6.*** $T_{12} = 364(ab)^{\frac{11}{2}}$. ***8. а)*** $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y - 3x^2z + +3xy^2 + 3xz^2 - 3y^2z - -3yz^2 + 6xyz$; ***б)*** $x^{10} + 5x^9 + 15x^8 + 30x^7 + +45x^6 + 51x^5 + 45x^4 + 30x^3 + 15x^2 + 5x + 1$; ***в)*** $x^4 + y^4 + z^4 + 4x^3y + +4x^3z + 4xy^3 + 4y^3z + 4xz^3 + 4yz^3 + 6x^2y^2 + 6x^2z^2 + 6y^2z^2 + +12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2$; ***г)*** $1 + x^4y^4 + x^8 - 4xy + 4x^2 - 4x^3y^3 - -4x^5y^3 + 4x^6 - 4x^7y + 6x^2y^2 + 6x^4 + 6x^6y^2 - 12x^3y + 12x^4y^2 - -12x^5y$. ***9. а)*** 266; ***б)*** 6160. ***10.*** 132. ***11.*** 210. ***12.*** *Підказка.* Подайте число $11^{10} - 1$ у вигляді $(10 + 1)^{10} - 1$ і скористайтеся біномом Ньютона.

§ 3

1. 20. ***2.*** 32. ***3.*** 10. ***4.*** 11 %. ***5.*** 61. ***6*.*** 40. ***7.*** Так. Бо 811+752+418-570--356-348+297=1004, а не 1000. ***8.*** Ні. Бо 100+120+112-72-68-64+60=188, а не 180. ***9*.*** 30. ***10.*** 457. ***11.*** 108. ***12*.*** 1600. *Підказка.* На 11 діляться 3000 чисел. З них на 3 діляться 3000:3 = 1000 чисел, а на 5 − 3000:5 = 600 чисел. На 3, на 5 і на 11 діляться 600:3 = 200 чисел. Отже, 3000 - 1000 - 600 + 200 = 1600 чисел. ***13 а)*** $\frac{s}{(1-s)^2}$; ***б)*** $\frac{2s^2}{(1-s)^3}$; ***в)*** $\frac{s(1+s)}{(1-s)^3}$; ***г)*** $\frac{\alpha s}{(1-\alpha s)^2}$; ***ґ)*** $e^{\alpha s} - 1$; ***д)*** $\frac{s\cdot sin\alpha}{1-2scos\alpha+s^2}$; ***е)*** $\frac{1-s\cdot cos\alpha}{1-2scos\alpha+s^2}$. ***14. а)*** 1; ***б)*** $C_n^mq^{n-m}p^m$; ***в)*** $\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$. *Підказка.* $arcsins = \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; ***г)*** $\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$. *Підказка.* Розкладіть e^{-s} та проінтегруйте. ***15. а)*** $\frac{1}{(1-4s)(1-3s)}$; ***б)*** $\frac{3-5s+3s^2}{(1-2s)(1-s)^2}$. ***16.*** $C_{5+12-1}^{12} - 3 \cdot C_{5+9-1}^{9} + 3 \cdot\cdot C_{5+6-1}^{6} - C_{5+3-1}^{3} =$

270. ***17.*** $C_{15}^{12} - 3 \cdot C_{10}^{7} + 3 \cdot C_5^2 = 125$ або $C_{19}^{16} - 3 \cdot C_{14}^{4} + 3 \cdot C_9^6 - C_4^1 = 125$. ***18.*** 6. ***19.*** $C_6^4 = 15$. ***20.*** 9. ***21.*** 66. ***22.*** 235. ***23.*** 26.

§ 4

1. а) $B_1 + B_2 3^n$; ***б)*** $B_1 + B_2 2^n$; ***в)*** $B_1(-2)^n + B_2(\sqrt{3})^n + B_3(-\sqrt{3})^n$; ***г)*** $B_1(-2)^n + B_2 3^n + B_3(-4)^n$; ***ґ)*** $2^n(B_1 cos\frac{n\pi}{4} + B_2 sin\frac{n\pi}{4})$; ***д)*** $2^n(B_1 cos\frac{n\pi}{3} + B_2 sin\frac{n\pi}{3})$; ***е)*** $B_1 + B_2 n + B_3 n^2 + B_4 2^n$; ***є)*** $B_1 + B_2 n + +B_3(-1)^n$; ж) $B_1\left(-\sqrt[3]{2}\right)^n + (\sqrt[3]{2})^n\left(B_2 cos\frac{n\pi}{3} + B_3 sin\frac{n\pi}{3}\right) + 2^n(B_4 cos\frac{n\pi}{6} + +B_4 sin\frac{n\pi}{6})$; ***з)*** $B_1 2^n + B_2 3^n + 2^n(B_3 cos\frac{2n\pi}{3} + B_4 sin\frac{2n\pi}{3})$. ***2. а)*** $4 \cdot 3^n - 2 \cdot 4^n$; ***б)*** $3 \cdot 4^n - (-5)^n$; ***в)*** $2 \cdot (-3)^n - 5 \cdot (-2)^n + 3 \cdot 2^n$; ***г)*** $6 \cdot (-2)^n + 3^{n+1} + +4^{n+1}$; ***ґ)*** $2 \cdot 5^n + 3 \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^n cos\frac{\pi n}{6}$; ***д)*** $(-4)^n + 2^n(cos\frac{n\pi}{4} + sin\frac{n\pi}{4})$. ***3. а)*** $B_1 2^n + B_2(-4)^n + 5^n$; ***б)*** $B_1(-1)^n + B_2 5^n - 3^n$; ***в)*** $B_1 \cdot 2^n + B_2 n \cdot 2^n + +n^2 + 8n + 20$; ***г)*** $B_1 2^n + B_2 3^n + 2$. ***4. а)*** $\frac{67\sqrt{11}i}{99}\left(\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\right)^n - \frac{22+67\sqrt{11}i}{99} \times \times \left(\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right)^n - \frac{2}{3}n + \frac{11}{9}$; ***б)*** $\frac{1}{27} + \frac{26}{27}(-2)^n + n\frac{3n-5}{18}$; ***в)*** $2^{n-3}(n^2 - n + 8)$; ***г)*** $(-3)^n(\frac{1}{2}n^2 + n + 2)$.

Модуль 3.

§1

6. а) 3; **б)** 5; **в)** 99; **г)** k-1. **7. а)** 3; **б)** 6; **в)** 10; **г)** $\frac{k\cdot(k-1)}{2}$. **9. а)** Ні. **б)** Так. **в)** Ні. **Вказівка**. Використайте лему про рукостискання. **10.** $n \cdot m$. **11. а)** Так. **б)** Ні. **в)** Ні. **д)** Так при $k \geq 2$, ні при $k = 1$. **12.** 6 для $K_{1,4}$, або 4 для $K_{2,3}$. **13.** 8. **14.** $\frac{n(n-1)}{2} - m$. **15. а)** 3; **б)** 5; **в)** 6; **г)** 2. **19. Вказівка**. Слід перефразувати задачу: у графі з *n* (*n* > 2) вершинами тільки дві вершини мають однакові степені. Довести методом від супротивного, що є або лише одна вершина степеня 0, або лише одна степеня *n*-1. **20. Вказівка**. Врахуйте, що число 29 – непарне. Використайте метод від противного та лему про рукостискання. **21.** 200. **22.** Ні, не існує графа з 17 вершинами, степені яких непарні. **23. Вказівка**. Використайте лему про рукостискання і твердження, що сума двох непарних чисел є число парне. **24.** $k \cdot 2^{k-1}$. **Розв'язання.** Для кожного двійкового набору довжини k є рівно k наборів, що відрізняються від нього однією координатою (щоб отримати набір, що відрізняється від даного однією координатою, достатньо вказати цю координату, а її можна вибрати k способами). Отже, степінь кожної вершини в графі Q_k дорівнює k. За лемою про рукостискання, число ребер дорівнює половині суми степенів усіх вершин.

§2

2. а) маршрутів довжиною 2 – 11, маршрутів довжиною 3 – 18; **б)** маршрутів довжиною 2 – 26, маршрутів довжиною 3 – 66. **3. Вказівка**. Побудуйте шуканий цикл. Зафіксуйте довільну вершину графа та зробіть її початком маршруту. На деякому кроці матимете простий ланцюг, наприклад, $L_n = (v_0, v_1, \dots, v_n)$. Вершина v_n, крім v_{n-1}, має ще хоча б одну суміжну вершину, скажімо, v_{n+1}, відмінну від v_{n-1}. Для вершини v_{n+1} розгляньте такі можливості: 1) $v_{n+1} = v_i$, при деякому i, $0 \le i < n-1$; 2) v_{n+1} не входить до L_n. Майте на увазі, що множина вершин графа скінченна. **4. Вказівка**. Доведіть, що цикл, який не є простим, також має парну довжину. Використайте метод від супротивного і теорему 4 даного параграфа. Врахуйте, що довжина циклу Z скінченна. **5. Вказівка**. Використайте аксіоми відстані і той факт, що ланцюг можна подати у вигляді $L = L_1 \cdot (u) \cdot L_2$. **6. Вказівка**. Використайте твердження, що ізоморфізм зберігає відстань між вершинами. **7. а)** не ізоморфні; **б)** ізоморфні; **в)** не ізоморфні; **г)** ізоморфні; **ґ)** ізоморфні; **д)** не ізоморфні. **8. а)** не ізоморфні; **б)** ізоморфні; **в)** ізоморфні; **г)** ізоморфні. **9. Вказівка**. Якщо граф має нетривіальний автоморфізм і є незв'язним, то деяка його компонента зв'язності також має нетривіальний автоморфізм, тому достатньо розглядати тільки зв'язні графи. Якщо доповнення графа незв'язне й не є порожнім графом, то деяка його компонента зв'язності має нетривіальний автоморфізм. Тому достатньо розглядати зв'язні графи зі зв'язними доповненнями. Перебираючи послідовно всі такі графи з 2, 3, 4, 5, 6 вершинами, знайти шуканий граф (див. рис. 95, а). **10.** Див. вказівку до задачі 9. Граф наведено на рис. 95, б.

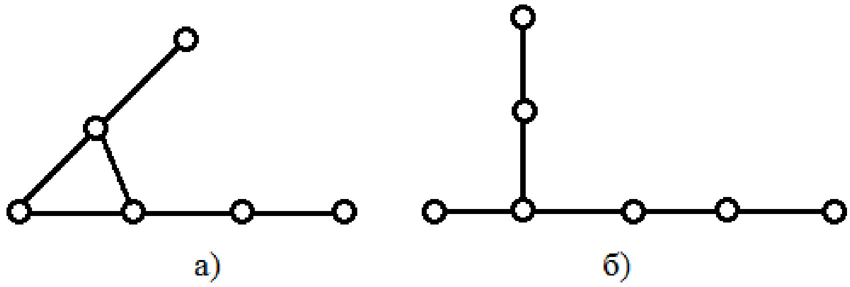


Рис. 95

11. Вказівка. Вилучити з графа вершину, суміжну з усіма іншими, одержати новий набір степенів (1, 1, 1, 2, 2), підрахувати кількість ребер (залишок має 5 вершин та 4 ребра; для нього є 2 варіанти). Додати вилучену вершину і одержати 2 графи. **12. а)** так; **б)** ні; **в)** ні. **13.** За умовою задачі та теоремою 11 такий граф повинен мати 3 ребра й бути зв'язним. Таких варіантів два – $K_{1,3}$ та P_4 – граф $G = (V, E)$, у якого для кожного розбиття множини V на підмножини V_1 і V_2, що не перетинаються, знайдеться деякий ланцюг без хорд з чотирма вершинами і трьома ребрами, який містить вершини як з V_1, так і з V_2. З них самодоповнювальним є тільки P_4.

14. Два графи див. рис. 96. **16.** При будь-якому парному $n \ge 4$.

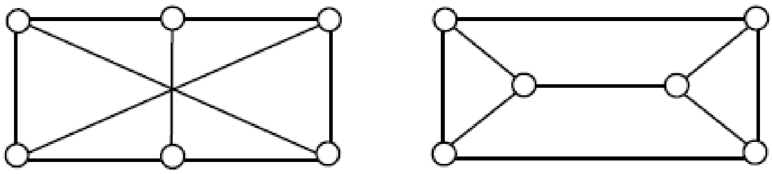


Рис. 96

17. Вказівка. Побудуйте двочастинний граф, одна частка якого – завдання, а інша – учні. Кожна вершина цього графа буде мати степінь два. Тому даний граф може мати кілька простих циклів, що не перетинаються. Розподіліть завдання між учнями всередині кожного циклу. **18. Вказівка**. Побудуйте граф, у якому вершинами позначені студенти, що брали участь у конференції. Покажіть, використовуючи метод від супротивного, що граф є зв'язним. **19. Вказівка**. Виділити одне місто і з'єднати його авіалінією з кожним з інших 49 міст. **20. Вказівка**. Використайте доведення із прикладу 2. **21. Вказівка**. Використайте доведення від супротивного та $\deg(K_n) = n - 1$.

§3

1. а); б); г); д). **3.** а); г). **4. а)** v_6, v_7, v_8, v_9; **б)** v_0, v_3, v_6; **в)** v_1; **г)** 2; **ґ)** v_6, v_7; **д)** 3; **е)** $v_2, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9$; **є)** ні, v_0 має степінь виходу 3. **5. а)** відсутні **б)** v_0, v_2, v_3, v_6; **в)** v_3; **г)** 3; **ґ)** v_5, v_6; **д)** 4; **е)** v_1, v_4, v_5, v_7, v_8; **є)** так. **7. а)** 42; **б)**132; **в)** 1430; **г)** 167960; **ґ)** 6564120420. **8. а)** 63 вершини, 32 листки і 31 внутрішня вершина; **б)** 121 вершина, 81 листок і 40 внутрішніх вершин; **в)** 511 вершин, 256 листків і 255 внутрішніх вершин; **г)** 85 вершин, 64 листки і 21 внутрішня вершина; **ґ)** 10 вершин, 1 листок і 9 внутрішніх вершин. **9. а)** (1) 3, (2) 2, (3) 2, (4) 0, (5) d, (6) e, a; **б)** (1) 5, (2) 4, (3) 2, (4) 2, (5) d, (6) e, d; **в)** (1) 4, (2) 3, (3) 1, (4) 1, (5) d, (6) e, d; **г)** (1) 6, (2) 5, (3) 3, (4) 3, (5) d, (6) e, d; **ґ)** (1) 4, (2) 1, (3) 3, (4) 1, (5) d, (6) a, e, d. **10. а)** збалансоване; **б)** збалансоване; **в)** збалансоване. **11. а)** центр – 8, $\min(c_v) = 10$, центроїд – 13; **б)** центр – 12, 13, $\min(c_v) = 11$, центроїд – 13; в) центр – 8, 13, $\min(c_v) = 10$, центроїд – 14. **13. а)** (2, 1, 4, 7, 4, 5, 6); **б)** (3, 1, 6, 10, 3, 2, 1, 6); **в)** (2, 5, 6, 9, 4, 5, 8). **15. Вказівка**. Нехай ліс має k компонент зв'язності з кількостями вершин $n_1, n_2, \dots, n_k$, причому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Використайте теорему 4. **16. Вказівка**. Нехай у дереві є m кінцевих вершин. Тоді всі інші (їх n-m) мають степені не менше 2, причому одна з них має степінь s. Використайте теорему 4 даного параграфа та лему про рукостискання. **17. Вказівка**. Припустивши, що в дереві є m кінцевих вершин, аналогічно до задачі 16 одержати $2 \cdot (n-1) \leq m + (n-m) \cdot s$. **18. а) Вказівка**. *Необхідність.* Якщо граф має лише один простий цикл, то цей цикл належить тільки одній компоненті зв'язності графа, а всі інші компоненти (якщо є) ациклічні. Вилучивши з циклу одне ребро, одержите ациклічний граф, тому $\gamma(G) = 1$. *Достатність.* Нехай $\gamma(G) = 1$. Цикломатичне число незв'язного графа дорівнює сумі невід'ємних цикломатичних чисел його зв'язних компонент, тому лише одне з них дорівнює 1, а всі інші – 0. Компоненти зв'язності з цикломатичним числом 0 є деревами і не мають циклів. Розгляньте компоненту з цикломатичним числом 1. **б)** *Необхідність.* Якщо $\gamma(G) = 1$, то за пунктом *а)* граф має рівно один простий цикл. Вилучивши одне ребро цього циклу, одержите ациклічний граф з тією самою кількістю зв'язних компонент. *Достатність.* Якщо після вилучення одного ребра граф стає лісом і при цьому не змінюється кількість компонент зв'язності k, то у графі виконується рівність $|E|$-1 = $|V|$-k, звідки знайдіть $\gamma(G)$. **19. Вказівка**. а), б) Розглянути «максимальне» дерево і вибрати шлях, що з'єднує дві висячі вершини. **20.** 406. **21.** 10.

§4

1. а) $d(v_0, v_1) = 4, < v_0, v_1 >= (v_0, v_3, v_1)$; $d(v_0, v_2) = 7, < v_0, v_2 >= (v_0, v_3, v_1, v_2)$; $d(v_0, v_3) = 3, < v_0, v_3 >= (v_0, v_3)$; $d(v_0, v_4) = 1, < v_0, v_4 >= (v_0, v_4)$; $d(v_0, v_5) = 9, < v_0, v_5 >= (v_0, v_3, v_1, v_2, v_5)$; **б)** $d(v_0, v_1) = 3, < v_0, v_1 > = (v_0, v_2, v_1)$; $d(v_0, v_2) = 2, < v_0, v_2 >= (v_0, v_2)$; $d(v_0, v_3) = 4, < v_0, v_3 >= (v_0, v_2, v_3)$; $d(v_0, v_4) = 7, < v_0, v_4 >= (v_0, v_2, v_1, v_4)$; $d(v_0, v_5) = 5, < v_0, v_5 >= (v_0, v_2, v_3, v_5)$; $d(v_0, v_6) = 6, < v_0, v_5 >= (v_0, v_2, v_3, v_5, v_6)$; $d(v_0, v_7) = 6, < v_0, v_7 >= (v_0, v_2, v_3, v_7)$; $d(v_0, v_8) = 9, < v_0, v_8 >= (v_0, v_2, v_3, v_7, v_8)$; **в)** $d(v_0, v_1) = 3, < v_0, v_1 >= (v_0, v_1)$; $d(v_0, v_2) = 4, < v_0, v_2 >= (v_0, v_1, v_2)$; $d(v_0, v_3) = 5, < v_0, v_3 >= (v_0, v_1, v_2, v_3)$; $d(v_0, v_4) = 9, < v_0, v_4 >= (v_0, v_1, v_2, v_5, v_4)$; $d(v_0, v_5) = 8, < v_0, v_5 >= (v_0, v_1, v_2, v_5)$; $d(v_0, v_6) = 13, < v_0, v_6 >= (v_0, v_1, v_2, v_5, v_4, v_6)$; **г)** $d(v_0, v_1) = 2, < v_0, v_1 >= (v_0, v_1)$; $d(v_0, v_2) = 1, < v_0, v_2 >= (v_0, v_2)$; $d(v_0, v_3) = 4, < v_0, v_3 >= (v_0, v_1, v_3)$; $d(v_0, v_4) = 4, < v_0, v_4 >= (v_0, v_1, v_4)$;$d(v_0, v_5) = 5, < v_0, v_5 >= (v_0, v_1, v_3, v_5)$. **2. а)** $d(v_0, v_5) = 7, < v_0, v_5 >= (v_0, v_1, v_4, v_5)$; **б)** $d(v_0, v_5) = 5, < v_0, v_{10} >= (v_0, v_6, v_8, v_{10})$; **в)** $d(v_0, v_6) = 6, < v_0, v_6 >= (v_0, v_3, v_4, v_6)$; **г)** $d(v_0, v_8) = 7, < v_0, v_8 >= (v_0, v_2, v_4, v_8)$. **3. а)** $d(1,6) = 10, < 1,6 >= (1, 5, 6)$; **б)** $d(1,6) = 10, < 1,6 >=>= (1, 5, 6)$. **4.** див. рис. 97. **5. а) б)** див. рис. 98. **6.** див. рис. 99.

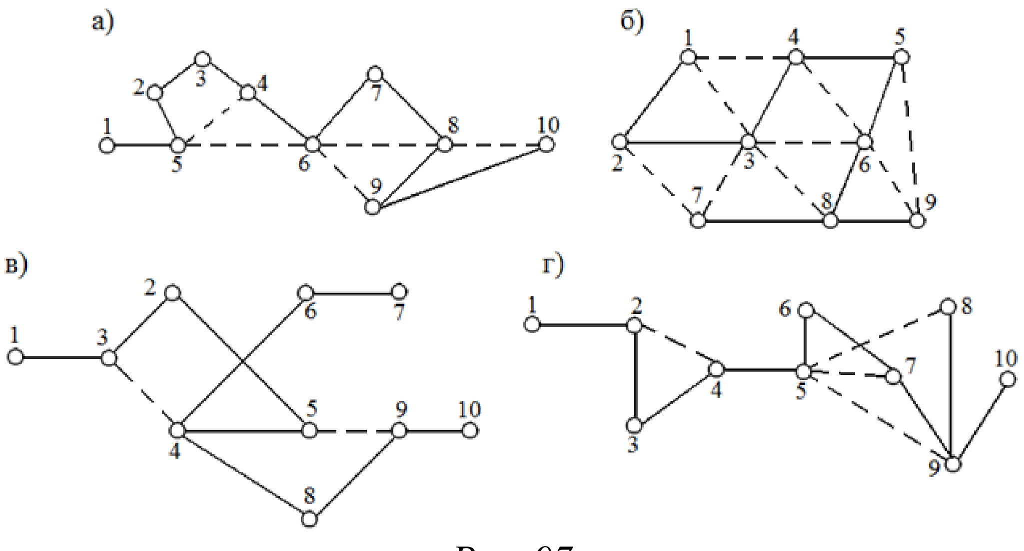


Рис. 97

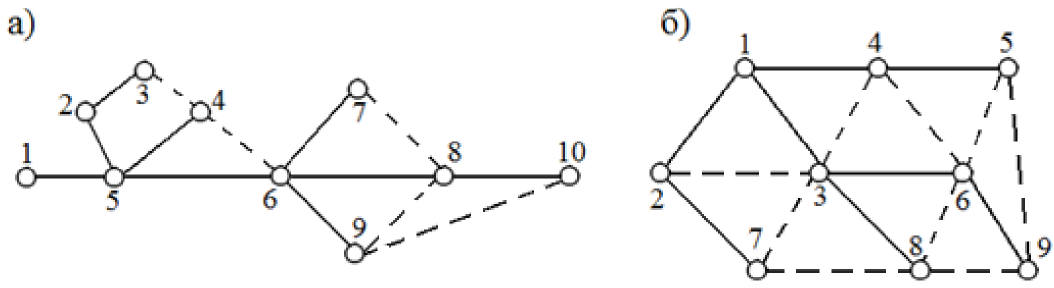

а)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
б)
1
4
5
2
3
6
7
8
9

Рис. 98

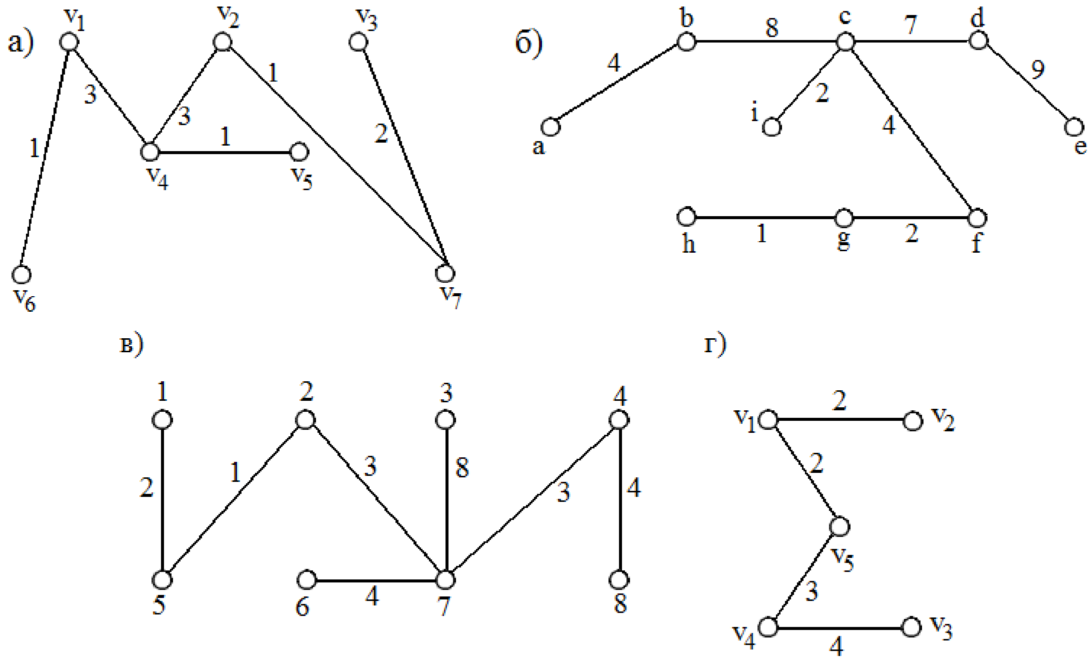

а)
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
3
3
1
1
2
б)
a
b
c
d
e
f
g
h
i
4
8
7
9
2
4
1
2
в)
1
2
3
4
5
6
7
8
2
1
3
8
3
4
4
г)
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
2
2
3
4

Рис. 99

ЛІТЕРАТУРА

1. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А. і Ходаков В.Є. Дискретна математика. – К.: Вища шк., 2002. – 287 с.
2. Зароський Р. І., Кошкін К. В., Книрік Н. Р. Основи дискретної математики: Підручник. – Миколаїв: НУК, 2010. – 312 с.
3. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – 579 с.
4. Кривий С. Л. Дискретна математика: Вибр. питання: Навч. посібник для студ. вищ. навч. закл.– К.: Вид. дім. «Києво-Могилянська академія», 2007. – 572 с.
5. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика: Підручник. – Львів: Магнолія плюс, 2005. – 608 с.
6. Харченко В.М. Дискретна математика: Курс лекцій. вид. 2-ге, перероблене. – Ніжин: Видавництво НДУ ім. Миколи Гоголя, 2017. – 100 с.
7. Харченко В.М. Практикум з дискретної математики. Ч.1. – Ніжин: ПП Лисенко М.М., 2012. – 120 с.
8. Харченко В.М. Практикум з дискретної математики. Ч.2. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2012. – 119 с.
9. Харченко В.М. Практикум з дискретної математики: навч. посіб.: у трьох частинах / В.М. Харченко – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2014. – Ч.3.– 138 с.
10. Ядренко М.Й. Дискретна математика: Навч. посібник / Михайло Йосипович Ядренко – К.: Експрес, 2003. – 244 с.
11. Anderson J. A. Discrete mathematics with combinatorics / James Andrew Anderson. – New Jersey: Prentice Hall, 2001. – 807 p.
12. Johnsonbaugh R. Discrete mathematics / Richard Johnsonbaugh. – 8th. ed. – New York: Pearson Education, 2018. – 747 p.
13. Rosen K. H. Discrete mathematics and its applications / Kenneth H. Rosen. – 7th ed. – New York: McGraw-Hil, 2012. – 1071 p.
14. Zimmermann, H.-J. Fuzzy set theory and its applications / Hans-Jiirgen Zimmermann. - 4th ed. – New York: Springer Science + Business Media, 2001. – 514 p.

Навчальне видання

Харченко В. М.

ПРАКТИКУМ З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Технічний редактор – І. П. Борис

Видання друкується за авторським редагуванням

Підписано до друку 02.11.2022 р.	Формат 60x84/16	Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman	Обл.-вид. арк. 6,34	Ел. видання
Замовлення №	Ум. друк. арк. 8,67	

Видавництво
Ніжинського державного університету
імені Миколи Гоголя.
м. Ніжин, вул. Воздвиженська, 3А
(04631) 7-19-72
E-mail: vidavn_ndu@ukr.net

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 2137 від 29.03.05 р.