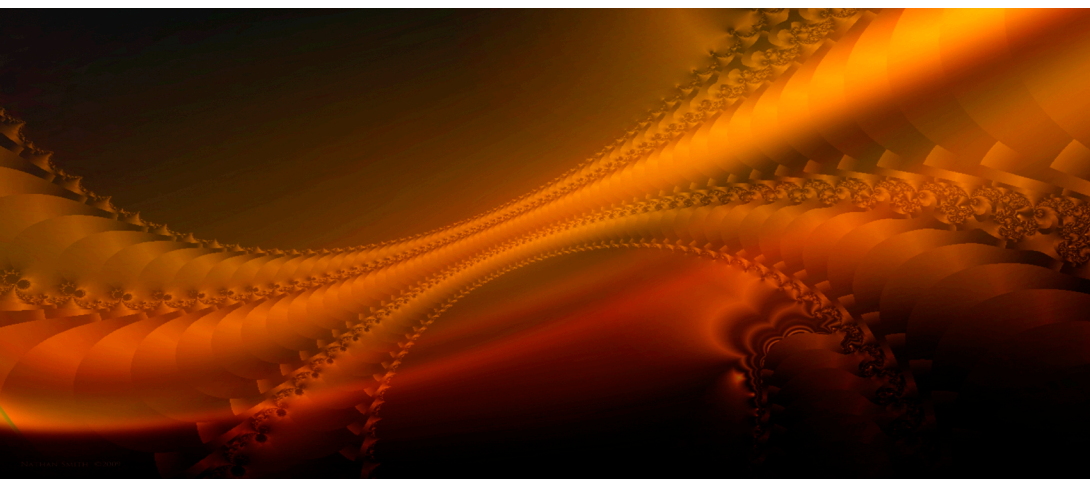


Ніжинський державний університет
імені Миколи Гоголя

Казачков І.В.

**ГРАНИЧНЕ ПАРАМЕТРИЧНЕ
УПРАВЛІННЯ КОЛИВАНЬ
В ПОТОКАХ РІДИНИ ТА ТЕПЛОТИ**



Ніжин – 2023

Ніжинський державний університет
імені Миколи Гоголя

Казачков І.В.

**ГРАНИЧНЕ ПАРАМЕТРИЧНЕ
УПРАВЛІННЯ КОЛИВАНЬ
В ПОТОКАХ РІДИНИ ТА ТЕПЛОТИ**

Ніжин – 2023

УДК 532.59:537.84:534.1

K14

Рекомендовано Вченою радою
Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя
(НДУ імені Миколи Гоголя)
Протокол № 9 від 31.03.2023

Рецензенти:

Чернишенко С. В. – д. ф.-м. н., професор
Мельничук О. В. – д. ф.-м. н., професор

Казачков І. В.

K14 Граничне параметричне управління коливань в потоках рідини та теплоти: монографія. Ніжин. НДУ ім. М. Гоголя, 2023. 316 с. ISBN 978-617-527-281-7

Актуальність розглянутих у монографії проблем обумовлена інтенсивним розвитком нових технологій і створенням пристроїв високої продуктивності та ефективності. Такі технології засновані на використанні параметричних коливань в неперервних середовищах, що служать робочим тілом, або на використанні явищ, які неможливі при відсутності ефективного придушення різного роду нестабільності.

Періодичні або квазіперіодичні впливи, регулярні чи випадкові, широко поширені в технологічних апаратах і процесах. Це - коливання поля (електричні, магнітні, акустичні, температурні, вібраційні і т.д.) або такі умови, при яких неперіодичні зміни певних параметрів системи викликають коливання інших параметрів, які в свою чергу викликають параметричні коливання системи.

Параметричне збудження і придушення коливань в неперервних середовищах дає підстави сподіватися на появу нових фізичних принципів побудови процесів або значне поліпшення продуктивності існуючих і прогнозованих процесів і установок. Особливо перспективними є методи, засновані на використанні сильних - резонансних - ефектів, що дозволяють розвивати нові енерго- і ресурсозберігаючі технології, важливі для інтенсивного розвитку економіки країни.

Монографія в основному є авторським перекладом з російського видання 2016 року з невеликими змінами.

ISBN 978-617-527-281-7

© Казачков І. В., 2023

© НДУ ім. М. Гоголя, 2023

UDC 532.59: 537.84: 534.1

K14

Reviewers:

D.Sc., Prof. S. V. Chernyshenko;

D.Sc., Prof. O. V. Melnychuk

Kazachkov I. V.

K14 Boundary parametric control of oscillations in heat and fluid flows: monograph. Mykola Gogol NSU. 2023. 316 p.
ISBN 978-617-527-281-7

Vitality of the problems addressed in the book is due to the intensive development of new technologies, the creation of high-performance and cost-effective devices. These technologies are based on the use of parametric oscillations in continua as working media or on the use of phenomena, impossible in the absence of effective suppression of various kinds of instabilities.

The periodic or quasi-periodic effects have a regular or random are widely applied in the aggregates and processes. These are fields' oscillations (electric, magnetic, acoustic, thermal, vibration, etc.) or the conditions under which non-recurring change in certain parameters of the system cause the oscillations of other parameters, causing in due some parametric oscillation in the system.

Parametric excitation and suppression of oscillations in continua rise the hopes for the emergence of new physical principles for construction unique processes or significant improvement of existing and projecting ones. Especially promising are methods based on the use of strong - resonance - effects, allowing the development of new energy-saving technologies, which are important for the rapid development of the national economy.

ISBN 978-617-527-281-7

© Kazachkov I.V., 2023

© Mykola Gogol NSU, 2023

Зміст

Основні позначення	6
Вступ	9
Розділ 1. Сучасний стан проблеми параметричного збудження-придушення коливань у суцільних середовищах	17
1.1 Фізико-математичні моделі суцільних середовищ.....	18
1.2 Постановка крайових задач параметричних коливань.....	27
1.3 Параметричне збудження та придушення коливань на межах розділу провідної рідини.....	31
1.4 Параметричні коливання на межах розділу непровідних середовищ.....	36
Розділ 2. Параметричне збудження та придушення коливань плівок в'язких нестисливих рідин	42
2.1 Фізико-математична модель параметричних коливань плоскої плівки, яка розтікається по горизонтальній площині.....	42
2.2 Збудження коливань поверхні плівки вертикальною електромагнітною хвилею.....	54
2.3 Вплив горизонтальної електромагнітної хвилі.....	71
2.4 Висновки по розділу 2.....	80
Розділ 3. Нелінійні хвилі	82
3.1 Основні типи хвиль та їх взаємодія.....	82
3.2 Диференціальні рівняння та інтегральні співвідношення параметричних коливань у радіально повсюджуваних плівках.....	91
3.3 Обчислювальний експеримент: власні та параметрично збуджувані коливання поверхні плівки.....	101
3.4 Дисперсія електромагнітних і поверхневих хвиль у плівці, що радіально розтікається.....	115
3.5 Вібраційне збудження коливань поверхні рідких плівок та розпад плівок на краплі.....	118
3.6 Нелінійні хвилі та резонансні ефекти.....	123
3.7 Висновки по розділу 3.....	131
Розділ 4. Параметричне збудження та придушення коливань міжфазового переходу з рідкого стану у тверде	134
4.1 Власні коливання фронту затвердіння розплаву в циліндричному каналі.....	137
4.2 Взаємовплив параметрів системи та умова стійкості тонкого	

шару твердої фази на поверхні стінки каналу.....	145
4.3 Вплив руху рідкої фази на нестійкість фронту кристалізації.....	160
4.4 Області нестійкості системи.....	182
4.5 Параметричне придушення збурень межі фазового переходу.....	188
4.6 Нелінійні коливання межі фазового переходу	194
4.7 Висновки по розділу 4.....	199
Розділ 5. Параметричні коливання на межах розділу фаз у суцільних гетерогенних середовищах.....	202
5.1 Фізико-математична модель суцільного гетерогенного середовища з урахуванням розривів полів на межах розділу фаз.....	202
5.2 Кінцево-різницеві схеми для чисельного моделювання параметричних коливань у суцільному гетерогенному середовищі.....	209
5.3 Обчислювальний експеримент з параметричних коливань у газонасиченому гранулярному середовищі, оточеному непроникним масивом.....	213
5.4 Вплив параметрів фаз і структури гетерогенного середовища на параметричні коливання.....	228
5.5 Нелінійні та резонансні явища.....	229
5.6 Висновки по розділу 5.....	233
Розділ 6. Експериментальне дослідження параметричних коливань на межах розділу суцільних середовищ.....	235
6.1 Експериментальні установки та методики проведення експериментів з електромагнітного збудження коливань у плівках провідної рідини.....	235
6.2 Взаємозв'язок, взаємовплив параметрів плівки та електромагнітного поля. Умови розпаду плівок на краплі.....	249
6.3 Установки для дослідження вібраційного збудження коливань плівок в'язкої рідини та закономірностей краплеутворення	258
6.4 Параметричні резонанси, м'які та жорсткі режими втрати стійкості.....	274
6.5 Висновки по розділу 6.....	279
Заключні висновки.....	281
Список літератури.....	285

Основні позначення

- a - товщина плівки, m ; ε - безрозмірна товщина плівки
- a_j - коефіцієнт температуропровідності j -ого середовища, m^2/c
- \vec{B} - вектор магнітної індукції, $Tl = Bb/m^2 = \kappa c \cdot c^{-2} \cdot A^{-1}$
- b - характерний радіус частинок гранулярного середовища, а також радіус вертикального струменя, що натікає на площину, m
- b_1 - характерний радіус пір гранулярного середовища, m
- c_p, c_v - питомі ізобарна та ізохорна теплоємності, $Дж/кг \cdot K$
- \vec{D} - вектор електричної індукції, $Кл/м^2$
- d - діаметр частинок (гранул), m
- \vec{E} - вектор напруженості електричного поля, $В/м$
- e - питома густина енергії, $Дж/м^3$
- \vec{f} - щільність об'ємної сили, $Н/м$
- g - прискорення вільного падіння, $м/с^2$
- $G_{k,m}$ - параметр зворотного зв'язку обмотки з хвильовими числами k і m системи управління (що має розмірність коефіцієнта тепловіддачі), $Вт/(м^2 \cdot K)$
- \vec{H} - вектор напруженості магнітного поля, $А/м$
- h - висота гранулярного шару, m
- I - сила току, A i - уявна одиниця, $i = \sqrt{-1}$
- J_n, Y_n - функції Бесселя першого та другого роду n -го порядку
- I_n, K_n - модифіковані функції Бесселя першого та другого роду
- k, m - хвильові числа
- P - тензор напруг, p - тиск, $Н/м^2$
- $\vec{F}_{\mu k}$ - вектор поверхневих сил, $Н/м^2$
- Q - потік теплоти, $Вт/м^2$
- q_v - питомий приплив енергії за рахунок об'ємних джерел, $Вт/м^3$
- q_n - питомий приплив енергії через граничну поверхню, $Вт/м^2$
- r_0 - радіус сопла або циліндричного каналу, m

$R = (8,3143 \pm 0,0012) \cdot 10^3$ Дж / (К · кмоль) - універсальна газова стала,

S - площа, м; s - ентропія, Дж/К

S_{12} - питома міжфазна поверхня гетерогенного середовища, 1/м

S_{ij} - міжфазна поверхня для фаз з індексами i та j , м²

t - час, с; V - об'єм, м³

T - температура, К; Θ - безрозмірна температура

U - напруга, В

u, v, w - складові вектора швидкості \vec{v} в декартовій хуз або циліндричній системі координат $r\varphi z$, м/с

α_j - відносний об'ємний вміст j -ої фази в суміші

β_p, β_T - коефіцієнти баричного та термічного розширення, м²/Н, 1/К

γ_e - питома електрична провідність, 1/(Ом · м)

δ - глибина скін-шару, м

κ - коефіцієнт теплопровідності, Вт / (м · К)

λ_{21} - питома теплота переходу фази 2 у фазу 1, Дж/кг

λ_{jc} - коефіцієнт тепловіддачі j -середовища в навколишнє, Вт / (м² · К)

μ - динамічний коефіцієнт в'язкості рідини, Па·с

μ_e - діелектрична проникність середовища, Ф/м

μ_m - магнітна проникність середовища, Гн/м

ν - кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини, м²/с

ν_m - коефіцієнт магнітної в'язкості, м²/с

ξ - параметр структури гранулярного середовища

ρ - щільність речовини, кг/м³

ρ_e - об'ємна щільність зарядів, Кл/м³

σ - коефіцієнт поверхневого натягу, Н/м

χ - амплітуда збурення межі розділу, м

ζ - безрозмірна амплітуда збурення межі розділу
 ω - кругова частота, $l/c = \Gamma c$

Індекси та математичні символи:

вн, зш - внутрішній, зовнішній
O - параметр незбуреного середовища
m - параметри електромагнітного поля
n, τ - проекції величини на нормаль та дотичну до поверхні
re, im - дійсна та уявна частини комплексної величини
c - оточуюче середовище
*** - параметри власних коливань (індекс знизу) чи параметри речовини межі плавлення; також критичні значення величин (індекс зверху)
ij - відношення величин з індексами *i* та *j*
s, l - параметри твердої та рідкої фази, відповідно
 ∇, Δ - градієнт та оператор Лапласа (також прирощення)
div - дивергенція
x, · - векторні та скалярні добутки векторів, відповідно

Визначальні безрозмірні критерії:

Eu, Re, We, Fr - гідродинамічні критерії: числа Ейлера, Рейнольдса, Вебера, Фруда
Oh, Ga, Pr, Ve, Vo - кінематичні безрозмірні критерії: числа Онезорге, Галілея, Прандтля, Бетчелора, Бонда
Nu, Pe, Bi - теплообмінні критерії: числа Нуссельта, Пекле та Біо
Bi_{k,m} - модифіковане число Біо
Gr, Da, Ra - числа Грасгофа, Дарсі та Релея
Ja, K - критерії фазового переходу: числа Якобі та Кутателадзе
Al, Ha - електромагнітні критерії Альфвена та Гартмана
Eu_m, Re_m, We_m - магнітні числа Ейлера, Рейнольдса, Вебера
Fo - число Фур'є (критерій теплової гомохронності)
Eu_g - вібраційне число Ейлера
Ca, Ar - капілярне число та число Архімеда

*Присвячую пам'яті моїх дорогих батьків
Василя Фатєєвича та Ганни Андріївни*

Вступ

Параметричні коливання в суцільних середовищах і особливо - на межах розділу суцільних середовищ (рідких, газоподібних, твердих) - здавна привертала увагу багатьох дослідників своєю оригінальністю та широким поширенням у природі, у технологічних та технічних процесах та пристроях. Проте помітний розвиток теорії таких коливань почався лише у 19 столітті фундаментальними працями Фарадея, Савара, Магнуса, Плато, Буффо, Релея, Бенара, Чернова, Остроградського, Коші, Кортвега, Орра, Рейнольдса та інших класиків науки. Надалі теорію інтенсивно розвивали Н. Бор, К. Вебер, К. Бусман, А. Генлейн, Дж. Тейлор, Б.В. Тейлор, Р.Г. Магарві, В. Толмін, В. Онезорге, С. Чандрасекар, Лінь Цзя-цзяо, Г. Шліхтінг, В. Вюст, Т. Бенджамен, Л.Д. Ландау, П.Л. Капіца, Я.Б. Зельдович, М.О. Лаврентьєв, Г.І. Петров, С.С. Кутателадзе та інші вчені.

Значний внесок у розвиток різних областей теорії власних та параметричних коливань у суцільних середовищах та їх використання у техніці і технології внесли Дж. Лайтхілл, Дж. Уїзем, Дж. Джозеф, М. Крамер, Г.А. Остроумов, Г.О. Любімов, Х.А. Рахматулін, В.Є. Накоряков, Р.І. Нігматулін, О.О. Бармін, А.Г. Бутковський, Ю.П. Ладіков, Ю.І. Самойленко, В.І. Меркулов, І.Т. Селезов, Л.Ф. Козлов, Ю.М. Гельфгат, А.Ф. Колесніченко, А.В. Тананаєв, В.М. Єнтов, А.І. Накорчевський, А.П. Сухоруков, Л.А. Островський та інші.

Актуальність проблеми обумовлена інтенсивним розвитком нових технологій, створенням апаратів та пристроїв високої продуктивності та економічності, заснованих на використанні параметричних коливань у суцільних середовищах (які слугують робочим тілом) або неможливих без ефективного придушення різноманітних нестійкостей. Періодичні або квазіперіодичні впливи, що мають регулярний чи випадковий характер, широко поширені в технологічних установках та процесах [48, 89, 99, 200, 299, 435, 469]: коливання поля (електричного, магнітного, акустичного, температурного, вібраційного тощо) або такі умови, за яких неперіодичні зміни певних параметрів системи викликають осциляцію інших параметрів, що викликають параметричні коливання системи.

Параметричне збудження та придушення коливань у суцільних середовищах дає підстави сподіватися на появу нових фізичних

принципів побудови процесів або значне покращення показників існуючих та проєктованих установок. Особливо перспективними є методи, засновані на використанні сильних – резонансних – ефектів, що дозволяють розробити нові енерго- та ресурсозберігаючі технології, які мають важливе значення для інтенсивного розвитку народного господарства країни.

В даний час добре відомі численні явища параметричної нестійкості в течіях газів і рідин, ускладнених фазовими перетвореннями та хімічними реакціями [2, 35, 62, 88, 194, 195, 277], в магнітній гідродинаміці та фізиці плазми [45, 68, 7 91, 222, 226-228, 389], термогідродинаміці гранулярних та підземних природних систем [66, 104, 198, 216, 345], біології [115, 256, 497] та інші [75, 95, 20 299].

Проблема дослідження параметричних коливань у суцільних середовищах представляє великий теоретичний інтерес і має практичні застосування, що постійно розширюються, стимулюючи інтенсивний розвиток теорії. Причому як для теорії, так і для практики однаково важливі як випадок параметричного збудження коливань заданого виду, незмінного або наростаючого по амплітуді в часі та (або) просторі, так і випадок параметричного придушення випадкових або регулярних коливань (збурень) для стабілізації системи чи процесу.

На можливість різкого підвищення ефективності технологічних процесів з допомогою параметричних коливань суцільного середовища звернули увагу ще у 19 столітті: наприклад, Д.К. Чернов [393] в 1879 р. вперше відзначив позитивний вплив механічних коливань на якість зливка, що кристалізується. Проте досі рекомендації щодо вибору параметрів зовнішніх впливів часто суперечливі або відсутні. При керуванні кристалізаційною структурою металів рекомендований діапазон коливань охоплює область 1-250 Гц [89] і відомо, що низькочастотні механічні, електромагнітні, теплові коливання або їх комбінації найчастіше подрібнюють структуру металу в 2-10 разів [318, 356], а пульсуюче теплове поле може спричинити посилення орієнтації кристалів великих розмірів.

Модуляція в часі параметрів суцільних середовищ впливає на стійкість фізико-механічних і хімічних процесів, що протікають в них, і може призводити до стабілізації певного роду нестійкостей [66, 75, 155, 226-228, 238, 435] або ж, навпаки, до порушення стійкості [3, 61, 68, 79, 89, 111, 120, 129, 160-163, 281-283, 466]. Отже, процеси параметричного збудження і придушення коливань в суцільних середовищах, взагалі кажучи, тісно взаємопов'язані, особливо за наявності сильного прояву

нелінійності процесів і різних таких ускладнюючих факторів: неоднорідності фізичних властивостей середовища, релаксації і т.д.

Швидкий розвиток техніки генерації параметричних коливань у суцільних середовищах пов'язаний з їх успішним застосуванням у багатьох галузях народного господарства: управління структурою МГД-потоків [78, 91, 315], інтенсифікація хіміко-технологічних процесів [2, 190, 192, 254, 321, 331-333]. Значного поширення набули вібраційні та акустичні методи інтенсифікації технологічних процесів [3, 26, 35, 48, 56, 89, 200, 280, 299, 508, 521], які також не до кінця досліджені [7, 321, 326].

За характером впливу параметричних коливань на суцільні середовища (технологічні процеси) можна запровадити таку їх класифікацію:

- оптимізація процесів,
- інтенсифікація,
- перетворення та стабілізація.

Перші дозволяють лише впорядкувати перебіг процесу або його окремих ланок (акустична грануляція і центрифугування і т.п. [299]). Другі збільшують швидкість процесу або його ланок (МГД-гранулювання [201, 202], акустичне розчинення). Треті призводять до отримання принципово нового режиму або процесу, неможливого за відсутності параметричних впливів (вібророзпил рідини, подрібнення структури злитка, фонтанування крапель з поверхні віброуючого шару рідини або в звуковому полі). А четверті дають можливість здійснювати стійкий перебіг процесів у суцільних середовищах: зниження гідравлічного опору рідини руху шляхом стабілізації ламінарного режиму течії [199, 432, 563], забезпечення протікання хімічних реакцій з нестійкими ланками тощо. Чіткого розмежування між цими чотирма типами параметричного впливу на процеси в суцільних середовищах немає.

Ефекти від параметричних коливань в суцільних середовищах можуть бути *першого порядку* (малоамплітудні коливання, що визначаються частотою, інтенсивністю та швидкістю поширення в середовищі) та *другого порядку* (потужні збурення середовища, що викликають нелінійні явища, порушення суцільності тощо).

Незважаючи на велику кількість робіт з окремих класів параметрично збуджуваних (придушуваних) коливань у суцільних середовищах, дослідження проблеми параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ знаходиться у початковому стані. Тому предмет досліджень даної роботи становить зазначена проблема, що розглядається на прикладі трьох

класів маловивчених задач (інтенсивні плівкові течії при визначальному вкладі сил інерції, межі фазового переходу з рідкого стану в тверде, гранулярні газонасичені середовища) з різними видами параметричних впливів: електромагнітні та теплові поля, вібрації, їх комбінації та ін. Параметричні коливання, переважно, третього (перетворюючі) і четвертого (стабілізуючі) типів. Рідше - другого типу.

Головна увага приділяється прогнозуванню реакції суцільних середовищ на різні зовнішні впливи, особливо резонансні. Останні можуть бути основою створення принципово нових високоєфективних енерго- та ресурсозберігаючих технологій. Таких, наприклад, як отримання порошків та гранул за допомогою плівкових МГД- та вібраційних грануляторів [81, 100, 202]. Розглядаються параметричні коливання, що призводять на межі розділу суцільних середовищ ефекти як першого, так і другого порядку.

Для досліджуваних явищ характерний значний вплив закономірностей просторової зміни параметрів суцільного середовища, внаслідок чого параметричні коливання, взагалі кажучи, є полями різної фізичної природи, що описуються диференціальними рівняннями у частинних похідних. Тому з кібернетичного принципу необхідного розмаїття Ешбі [406] випливає, що зовнішні впливи повинні бути також полями, розподіленими у просторі та в часі, які описуються диференціальними рівняннями математичної фізики.

Зовнішні дії можуть передаватися кожній точці суцільного середовища (об'ємне управління) або її межі (граничне управління). При цьому найефективніший вплив на процеси в суцільних середовищах рідко фізично реалізується: так, змінне електромагнітне поле проникає в електропровідне середовище лише на відстань порядку товщини скін-шару, звукова хвиля також згасає в об'ємі середовища і т.п.

Найпростіше реалізується граничне управління у суцільних середовищах, теорію якого розробляли А.Г. Бутковський із співробітниками [66, 67], Т.К. Сиразетдінов [354, 355], Ю.П. Ладіков зі співробітниками [227, 228] та інші. Для електромагнітного управління процесами у суцільних середовищах Ю.І. Самойленко запропонував лінійні шаруваті і волокнисті штучні середовища [339], що мають високу роздільну здатність (реакція середовища на зовнішнє збурення може бути як завгодно близька до дельта-функції), теорія яких розвинена в [226, 340].

За характером впливів завдання граничного управління поділяються на три класи [227]: управління потоками маси, імпульсу та енергії, у

кожному з яких є три види управління: зі зворотним зв'язком [227], програмне, і визначення динамічних властивостей об'єкта за граничними значеннями його визначальних параметрів.

Ця робота присвячена, в основному, завданням другого (руйнування плівок параметричними колюваннями для отримання заданого розміру крапель) та третього (стабілізація меж фазового переходу тонких плівок твердої фази) класів з першим та другим видами впливів. При цьому в завданнях придушення параметричних колювань межфазового переходу вирішальне значення належить обміну енергією, у той час як при електромагнітному або вібраційному збудженні колювань поверхні плівок в'язкої рідини основну роль відіграє обмін імпульсом.

Для збудження і придушення параметричних колювань в суцільних середовищах застосовуються розімкнені і замкнуті системи управління (із зворотним зв'язком): перші - коли зворотний вплив суцільного середовища на керуючий пристрій можна нехтувати (наприклад, електромагнітний вплив на середовище у разі малих магнітних чисел Рейнольдса), другі - для нелінійних середовищ та процесів стабілізації швидкоплинних процесів і т.д. При цьому на першому етапі досліджень в обох випадках необхідно виявити закономірності граничного впливу на технологічний процес, на другому - визначити структуру і параметри пристрою, що забезпечує необхідний вплив на суцільне середовище.

У сучасній механіці суцільних середовищ, що відрізняється злиттям з багатьма областями фізики, проникненням в різні технічні та біологічні системи і широким застосуванням математичного моделювання та обчислювальної техніки, розглядалися завдання програмного розімкнутого управління у зв'язку з проблемами поліпшення структури злитків [318], інтенсифікації теплообміну [89, 200], стабілізації технологічних процесів [75, 97, 227], параметричного збудження хвиль на поверхні рідини [163, 214, 521], стабілізації течії в приміжовому шарі при відсмоктуванні та вдуді [192, 563] та інші [27, 96, 130, 279, 421, 440, 461]. Багато нових завдань розглянуто наприкінці минулого сторіччя [25, 42, 129, 215, 236, 255, 326, 334, 335, 359, 437, 515] і продовжується зараз.

У загальному вигляді задачу параметричного збудження та придушення колювань у суцільних середовищах можна сформулювати в такий спосіб. Після схематизації фізичного явища, виділення його найістотніших і другорядних параметрів та побудови фізико-математичних моделей з подальшим вибором оптимальної з них (у певному сенсі) необхідно досліджувати закономірності розвитку збурень системи у просторі-часі. Це призводить до встановлення зв'язків виду

$F_n(A_j, \omega_j, \vec{k}_j; \vec{A}_j^*, \omega_j, \vec{k}_j) = 0$, де A_j, ω_j, \vec{k}_j - амплітуда, частота і хвильовий вектор j -го збурення, \vec{A}_j^* - вектор збурених параметрів системи (процесу) розмірності J . Зірочками відзначені параметри власних коливань системи, F_n - шукані зв'язки параметрів (наприклад, диференціальні), $n = \overline{1, N}$, $N \geq J$ (при $N < J$ виникає невизначеність задачі).

Поведінка суцільного середовища визначається параметрами власних коливань і зовнішніх впливів, тому завдання збудження (придушення) параметричних коливань можна звести до визначення параметрів, що фізично реалізуються, A_j, ω_j, \vec{k}_j , що забезпечують необхідний режим, або заданий вид векторної функції $\vec{A}_j^*(x, y, z, t)$. Зокрема, у разі параметричних коливань на межах розділу найчастіше вдається звести завдання до вирішення рівняння коливань межі (поверхні кристалізації, плівки тощо) та рівняння зміни зовнішньої сили (поля). Завдання параметричного збудження та придушення коливань заданого виду в суцільних середовищах вимагають контролю всіх інших збурень, оскільки накачування енергії у певну моду в нелінійних системах може призвести до перекачування її в інші моди, внаслідок чого картина значно ускладнюється.

Мета даної роботи - розробка комплексу фізико-математичних та чисельних моделей параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ, проведення обчислювального, фізичного та натурного експериментів з виявлення нових закономірностей та параметричних ефектів з метою їх подальшого використання для покращення існуючих та створення нових перспективних високотехнологічних процесів. Розвинута теорія і застосування параметричного збудження і придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ на прикладі трьох класів задач: плоско і радіально розповсюджуваних плівок електропровідної та непровідної рідин, поверхонь фазового переходу з рідкого стану в тверде, гетерогенних середовищ. Зовнішні дії - змінні електромагнітні, вібраційні, акустичні та теплові поля. Поряд із лінійними досліджуються також нелінійні параметричні коливання (у тому числі - сильно нелінійні). Результати теоретичних робіт підтверджуються і доповнюються даними експериментальних досліджень.

Виявляються загальні та специфічні закономірності параметрично збуджуваних коливань та нові параметричні ефекти. У першому розділі,

що носить, в основному, постановочний та оглядовий характер, з єдиних методологічних позицій розглядаються різноманітні параметричні коливання в суцільних середовищах, дається оцінка сучасного стану проблеми, аналіз її особливостей, перспектив подальшого розвитку та основних труднощів методологічного, математичного та прикладного характеру.

Другий і третій розділи присвячені розробці класу задач параметричного збудження і придушення коливань поверхні плоских і радіальних плівок в непровідному середовищі, вільних і обмежених плівок провідної та непровідної в'язкої нестисливої рідини при впливі вібрації, електромагнітних та акустичних полів у вигляді прогресивних або стоячих хвиль. Четвертий розділ містить результати досліджень параметрів збуджуваних і пригнічуваних збурень межфазового переходу з рідкого стану в тверде (в основному стосовно стабілізації поверхні оплавлення плівок твердої фази) за допомогою електромагнітних полів і теплових регуляторів - автоматичних систем управління.

У п'ятому розділі розглядаються параметричні коливання на межах розділу фаз у гетерогенних суцільних середовищах за наявності температурних збурень з урахуванням нелінійності процесів та фізичних властивостей середовищ, а також ефектів гетерогенності. Експериментальне підтвердження закономірностей, встановлених теоретично, а також виявлення нових параметричних ефектів на фізичних моделях та напівпромислових установках міститься у шостому розділі.

Даний новий науковий напрям - це дослідження на фізико-математичних моделях та експериментальних установках різних параметричних коливань меж розділу суцільних середовищ та виявлення нових ефектів, що дають суттєві технологічні переваги порівняно з відомими методами та пристроями. Математичні моделі побудовані, наскільки можливо, прості, але адекватні щодо досліджуваного процесу або хоча б його окремих, найбільш істотних рис. Складні нелінійні моделі реалізуються з допомогою чисельних методів на комп'ютері.

У роботі наводяться відомості про нові технологічні процеси, засновані на виявлених закономірностях, а також про винаходи на способи та пристрої і результати їх впровадження. Зокрема, дано опис розробленого та впроваджененого автором спільно зі співробітниками (проф. А.Ф. Колесніченко, к.т.н. В.В. Малахов та В.П. Кучинський) плівкового гранулятора магнію та його сплавів ДПА-1, що не має аналогів у світовій практиці. Для даного гранулятора важливі всі три

класи розглянутих нами задач: параметричне управління розпадом рідкометалевих плівок (вузол диспергування), стабілізація меж фазового переходу (захист стінок каналів від руйнувань та розплаву від забруднення), тепломасоперенос в гранулярному середовищі (висока швидкість охолодження крапель при їх застиганні у гранули).

Методи дослідження. В основі проведених теоретичних досліджень лежать рівняння збереження маси, імпульсу та енергії гомогенних та гетерогенних середовищ досить загального виду, рівняння Максвелла для провідних середовищ та різні рівняння стану. Для утворення тонких плівкових течій розглядаються явища гідравлічного удару. Застосовуються методи математичної фізики (теорія інтегральних перетворень, усереднення диференціальних та інтегродиференціальних операторів тощо), редуційні методи збурень (зведення нелінійних систем до стандартного нелінійного еволюційного рівняння), чисельні методи та методи фізичного моделювання взаємодії полів та середовищ.

За влучним висловом Нобелівського лауреата з фізики С. Чандрасекара, "в магнітогідродинаміці настільки легко помилитися, що не слід вірити результату довгих і складних математичних викладок, якщо не можна зрозуміти його фізичного сенсу; в той же час не можна також покладатися на довгий і складний ланцюг фізичних аргументів, якщо не можна продемонструвати їх математично" [390]. Ці слова можна повною мірою віднести і до проблеми параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ. Тому в роботі прийнято концепцію: дослідити з єдиних методологічних позицій завдання параметричного збудження та придушення коливань у трьох різних системах (плівки, межі фазового переходу та гранулярні середовища) та виявити як специфічні риси кожної з них, так і загальні закономірності. При цьому для розширення областей досліджуваних явищ застосовується як математичне, так і фізичне моделювання і дається їхній порівняльний аналіз в областях перетину, що дозволяє отримати відомості про адекватність і достовірність побудованих математичних моделей, застосовуваних методів.

Таким чином, у цій монографії представлені:

1. Теорія параметричного збудження та придушення коливань поверхні плівок під дією електромагнітних полів та вібрацій.
2. Теоретично встановлені та експериментально підтверджені нові явища солітонного та ударно-хвильового руйнування плівок на краплі.
3. Теорія параметричного управління коливаннями меж фазового переходу розплавів з рідкого стану у твердий на стінках каналів.

4. Результати дослідження термогідродинамічних коливань у насичених гранулярних середовищах: явище локалізації диссипативних процесів та аномального нагріву внаслідок нелінійності фізичних властивостей середовища рухомого газу або пари та інші.
5. Експериментальні дослідження та натурні випробування процесів (і установок на їх основі) параметричного управління коливань плівок та створені нові установки та процеси.

Розділ 1. Сучасний стан проблеми параметричного збудження-придушення коливань у суцільних середовищах

Інтенсивний розвиток сучасної промисловості та техніки вимагає дослідження параметрично збуджуваних або просто параметричних коливань у суцільних середовищах: динамічна стійкість пружних систем, коливання пластин, оболонок, стрижнів, коливання рідин у віброуючих судинах, трубах. Наразі відомі численні способи параметричного збудження та придушення коливань у суцільних середовищах, зокрема, рідких: фізика поверхневих явищ і тонких плівок [20, 46, 61, 62, 77, 84, 85, 95-97, 10, 127-134, 206-209, 423].

Нові напрями у сучасному природознавстві [98, 213-215, 279-284, 365] виникли у зв'язку з дослідженням нелінійних процесів різної фізико-механічної та іншої природи: теплогідролічні та магнітогідродинамічні нестійкості, катастрофи, біфуркації. В останні декади встановлено, що ідеальним способом перенесення енергії в нелінійних системах є солітони [277, 285-289, 497], математичний опис яких дали Кортевег і де Вріз [492], а доказ існування для рідини кінцевої глибини - М.О. Лаврентьев [223]. Стійкі усамітнені (солітонні) хвилі утворюються в результаті взаємної компенсації нелінійності та дисперсії і поєднують дивним чином властивості частки та хвилі [115, 497].

Ряд нових цікавих явищ встановлено щодо теплових хвиль [86, 140, 337], де нелінійність зумовлена, зокрема, залежністю фізичних властивостей середовища від координат і часу: коефіцієнта теплопровідності від температури, обернення його в нуль на фронті теплової хвилі, присутність в середовищі джерел і стоків, тощо. Це призводить до інерційного уповільнення швидкості поширення збурень. Відкритий механізм об'ємного поглинання теплоти [219] був використаний як одне з можливих пояснень теплової самоізоляції кульової блискавки [253]. Математичні моделі нелінійної

теплопровідності з адаптацією на конкретні випадки дозволяють описувати широкий клас завдань дифузії, поширення теплових та електромагнітних полів і т.д.

Проблеми параметричного збудження і придушення коливань у суцільних середовищах, зокрема, межі розділу суцільних середовищ, пов'язані з дослідженням властивостей самих середовищ. Побудова адекватних фізико-математичних моделей середовищ і процесів, що відбуваються в них, пошук способів ефективного впливу на ці процеси, управління ними – одне з найбільш важливих завдань сучасної механіки суцільних середовищ. Деякі особливості класу задач, що розглядаються, вже відзначалися у вступі. Далі тут будуть описані застосовувані математичні моделі суцільних середовищ, способи збудження і придушення коливань в них (основна увага приділена межам розділу середовищ), труднощі методологічного, математичного та прикладного характеру. Крім того, цікаво розглянути постановку невирішених задач, що становлять предмет сучасних та майбутніх досліджень.

1.1. Фізико-математичні моделі суцільних середовищ

Побудова фізико-математичних моделей суцільних середовищ і дослідження фізико-механічних та інших процесів в них частіше всього ґрунтується на гіпотезах континууму та неперервної диференціації n разів функцій, що описують параметри середовища, майже всюди, окрім окремих частинок, ліній або поверхонь, на яких допускаються розриви. Це дозволяє використовувати феноменологічний підхід із застосуванням розвиненого апарату математичного аналізу та математичної фізики. Однак, хоча феноменологічний підхід дозволив вирішити безліч класичних проблем механіки суцільного середовища і є одним із найбільш застосовуваних, необхідно враховувати, що багато процесів у суцільних середовищах не відображають цю фізичну модель.

Наприклад, в турбулентній течії рідини поля швидкості і прискорень не описуються в класі неперервних або майже всюди неперервних функцій, а стиснута в напрямі дотичної до вільної поверхні плівка стає ніде не диференційованою в цьому напрямку, навіть якщо залишається неперервною (пилоподібна поверхня із зубцями, перпендикулярними до неї). При ударі струменя об поверхню утворюється тонка плівка, яку неможливо описати в рамках рівнянь Нав'є-Стокса, без розгляду явища гідравлічного удару. Інші приклади: розбризкування, кавітація. Тут не можна провести індивідуалізацію навіть об'ємів, тому що суцільне

середовище перетворюється на сукупність вільних малих об'ємів (точок). У гетерогенних середовищах поля швидкостей, температур і інших параметрів розривні. Суміщення двох різних полів в одному континуумі, багатозначність параметрів відносяться не до індивідуалізованої точки середовища, а до точки простору, в якій поєднані індивідуалізовані точки з різними параметрами.

Для неklasичних задач механіки суцільних середовищ, що не задовольняють гіпотези феноменологічної теорії, застосовуються статистичний підхід та різні варіанти варіаційних методів [31, 53, 125, 138, 308, 410]. Зважаючи на математичну складність, статистичний (мікроскопічний) підхід найчастіше використовується для обґрунтування феноменологічних (макроскопічних) моделей суцільних середовищ, якщо тільки він не є єдиним можливим: розріджені гази, плазма тощо. Взагалі у природі немає суцільних середовищ, але гіпотеза суцільності добре визначає їх на макрорівні, і модель континууму дозволяє використовувати потужний апарат теорії неперервних функцій, диференціального та інтегрального числення. Для систем, що не відповідають гіпотезі неперервності займаного простору, більш адекватною є теорія фракталів¹ (об'єктів дробової розмірності) та апарат інтегро-диференціального числення довільного порядку.^{2,3}

У цій монографії використовується в основному феноменологічний підхід, при якому побудова математичних моделей суцільних середовищ ґрунтується на припущенні, що кожна точка середовища – фізично нескінченно малий об'єм, фізико-математичний стан якого характеризується набором визначальних параметрів, що вводяться на основі досвіду та теоретичних досліджень.

В даний час з позиції феноменологічного підходу розроблено таку безліч математичних моделей різного класу задач з урахуванням їх специфічних особливостей, що назріла необхідність їх систематизації та розробки основних принципів математичного моделювання процесів у суцільних середовищах. Тому при розробці нових комплексів математичних та чисельних моделей необхідно виходити з модульного принципу, що дозволяє максимально уніфікувати процес моделювання і полегшити використання математичних та комп'ютерних чисельних моделей різними дослідниками у різноманітних задачах.

Рівняння динаміки суцільних середовищ

При феноменологічному підході побудова математичних моделей суцільних середовищ ґрунтується на припущенні, що кожна точка

середовища - фізично нескінченно малий об'єм, фізико-механічний стан якого характеризується набором визначальних параметрів, що вводяться як статистичні середні величини (температура, наприклад). Загальні рівняння динаміки суцільного середовища будь-якої структури (у тому числі гетерогенної суміші, що розглядається без урахування міжфазної взаємодії, яку можна не брати до уваги при вивченні руху гетерогенної системи як єдиного складного суцільного середовища), записуються у вигляді:

$$\partial \rho / \partial t = -\operatorname{div}(\rho \vec{v}), \quad (1.1.1)$$

$$\rho(\partial \vec{v} / \partial t + \vec{v} \nabla \vec{v}) = \operatorname{div} P + \rho \vec{F} - \sum_{j=1}^N \vec{v} \nabla (\rho_j \vec{v}_j), \quad (1.1.2)$$

$$\rho(\partial e / \partial t + \vec{v} \nabla e) = \operatorname{div}(\vec{q} + P \vec{v}) + \rho \vec{F} \vec{v} + \sum_{j=1}^N \left[\rho_j \vec{F}_j \vec{v} - \operatorname{div}(\rho_j e_j \vec{v}) \right], \quad (1.1.3)$$

де ρ - щільність гетерогенного середовища, \vec{v} - вектор швидкості гетерогенного середовища, t - час, P - тензор напружень, \vec{F} - об'ємна (масова) сила, ρ_j, \vec{v}_j - параметри компонентів середовища (як і інші параметри, відмічені індексами), e - питома густина енергії, q - питома об'ємна приплив енергії. Рівняння (1.1.1) виражає закон збереження маси, (1.1.2) – баланс імпульсу, (1.1.3) – енергії. Для оборотних процесів некомпенсована теплота дорівнює нулю. Крім внутрішньої енергії та ентропії використовуються й інші функції стану та додаткові термодинамічні співвідношення.

У разі гетерогенного середовища необхідно враховувати обмін масою, імпульсом та енергією між фазами всередині об'єму або на межі розділу фаз. У системі рівнянь (1.1.1)-(1.1.3) необхідно розкрити члени з обміном масою, імпульсом та енергією між фазами гетерогенної суміші. Саме це і становить основну проблему механіки гетерогенних середовищ, оскільки в більшості випадків не ясно, яким чином визначити відповідні інтенсивності обміну масою, імпульсом та енергією між фазами суцільного гетерогенного середовища.

Кожна фаза займає частину об'єму гетерогенного середовища:

об'ємні частки N фаз α_j задовольняють співвідношення $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, щільність середовища виражається через дійсні щільності фаз за

формулою $\rho = \sum_{j=1}^N \rho_j \alpha_j$. У кожній точці гетерогенного середовища визначено N параметрів, які стосуються свого континууму (щільностей, швидкостей, температур тощо). Сукупність континуумів, кожен з яких належить до своєї фази і заповнює той самий об'єм, називається багатшвидкісним континуумом.

Підсумовування рівнянь суміші по всіх фазах дає рівняння гетерогенного середовища, взятого як єдина система, без урахування внутрішньої структури. Така модель не виявляє особливостей міжфазної взаємодії усередині гетерогенної суміші. На противагу цьому, урахування взаємодії фаз як макроскопічних включень призводить до необхідності розгляду умов спільного деформування та руху фаз, впливу форми та розмірів включень, розподілу їх у просторі, фазових перетворень тощо.

Якщо фізико-механічні процеси в суцільному середовищі досить точно описуються неперервними або майже всюди неперервними функціями координат і часу, можна від системи інтегральних співвідношень збереження перейти до відповідних диференціальних рівнянь. Однак для реальних суцільних середовищ, схильних до зовнішніх впливів, класичні методи можуть виявитися неприйнятними, внаслідок чого застосовуються варіаційні та чисельні методи, засновані на використанні інтегральних законів збереження, що залишаються в силі і у разі розривних полів та середовищ, якщо в них провести заміну інтегрування за Ріманом інтегруванням по Лебегу.

В області неперервного або майже всюди неперервного руху суцільного середовища, використовуючи формулу Гаусса-Остроградського, можна від інтегральних балансових рівнянь перейти до системи диференціальних рівнянь, що описує термогідродинамічні процеси в гетерогенному середовищі з урахуванням спільного руху фаз і міжфазного обміну маси. Основна проблема у використанні цієї системи при математичному моделюванні гетерогенних середовищ викликається необхідністю конкретизації законів взаємодії фаз, що в більшості випадків є вкрай складним чи неможливим.

Закон деформації гетерогенного середовища залежить не тільки від полів швидкості, тиску, температури фаз, тому визначення закономірностей міжфазної взаємодії навіть для окремих випадків - дуже складне завдання. І все-таки для деяких практично важливих завдань (подібних до розглянутої в четвертому розділі) облік розривів полів на межах розділу фаз абсолютно необхідний. При порівняно слабкому

прояві міжфазної взаємодії в гетерогенному середовищі для опису процесів, що відбуваються, можна використовувати систему диференціальних рівнянь, що отримується з рівнянь збереження покомпонентно, підсумовуючи по всій суміші. При цьому рівняння балансу імпульсу та енергії залежать від відносного руху фаз.

Надалі з масових сил розглядатимуться переважно лише гравітаційні та електромагнітні, а приплив зовнішньої енергії - джоулева теплота чи енергія вібраційного впливу, що передається через межу розділу середовищ. Тому систему диференціальних рівнянь слід доповнити рівняннями електромагнітного поля:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \partial \vec{B} / \partial t = -\operatorname{rot} \vec{E}, \quad \vec{j} = \partial \vec{D} / \partial t + \operatorname{rot} \vec{H}; \quad (1.1.4)$$

$$\rho d\vec{v} / dt = \operatorname{div} P + \rho \vec{g} + \rho_e \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}, \quad \rho_e = \operatorname{div} \vec{D}; \quad (1.1.5)$$

$$\rho de / dt = \vec{E}' \cdot \vec{j}' + \Phi + \operatorname{div} (\vec{q}^{enu} - \vec{q}^{en}) - p \operatorname{div} \vec{v} + \rho \vec{g} \vec{v}, \quad (1.1.6)$$

де $\vec{E}' \cdot \vec{j}'$ - джоулева теплота, Φ - дисипативна функція, $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$, $\vec{j}' = \vec{j} - \rho_e \vec{v}$ - вектори електричної напруженості і щільності струму в системі координат, пов'язаній з аналізованим об'ємом суцільного середовища, що рухається.

Тензор напруги для Ньютонівської рідини представляється у вигляді суми кульового тензора і девіатора: $P_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik}$, де по "німому" індексу мається на увазі підсумовування, δ_{ik} - символ Кронекера. Дисипативна функція $\Phi = \tau_{ik} v_{i,k}$, де i, k - "німі" індекси, $v_{i,k}$ - похідна від i -ої компоненти функції швидкості по k -ій координаті. Тепловий потік визначається за законом Фур'є: $\vec{q} = -\kappa \nabla T$, κ - коефіцієнт теплопровідності. Закон Ома для щільності електричного струму:

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v} + \gamma_e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.1.7)$$

Система (1.1.1)-(1.1.3) може бути приведена до дивергентного вигляду, що дуже важливо для чисельного моделювання. Для її замикання, крім наведених вище, використовуються ще й інші визначальні співвідношення, а також емпіричні залежності фізичних характеристик середовищ від параметрів стану (тиску, температури) і т.п.

Так, κ - взагалі кажучи, функція тиску та температури, а вектори магнітної та електричної індукції пов'язані з векторами напруженості електричного та магнітного полів співвідношеннями:

$$\vec{B} = \mu_m \vec{H}, \quad \vec{D} = \mu_e \vec{E}. \quad (1.1.8)$$

Припускається, що всі розглянуті тут суцільні середовища (як гомогенні, так і гетерогенні) є двопараметричними [350], тобто їх термодинамічні функції (e , p , s тощо) визначаються лише двома параметрами стану. Це дозволяє використовувати співвідношення Гіббса

$$de = Tds - pdV, \quad (1.1.9)$$

де ентропія у разі нестисливої рідини

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^{c_p/c_v}} + const, \quad (1.1.10)$$

і тому $de = c_v dT + const$, а для ідеального газу з урахуванням закону Клапейрона:

$$p = \rho RT, \quad c_p dT = c_v dT + d(p/\rho), \quad (1.1.11)$$

Тут c_p - у загальному випадку функція температури.

При розгляді гетерогенних середовищ передбачається, що властивості кожної фази визначаються за умови заповнення цією фазою всього об'єму. Температура фаз вводиться на підставі гіпотези локальної термодинамічної рівноваги у межах фази. Далі використовуються нестационарні диференціальні рівняння неізотермічного руху в'язкої стислої рідини (1.1.1)-(1.1.3), (1.1.4)-(1.1.6) (провідної або непровідної) у декартовій та циліндричній системах координат. Тому доцільно навести їх тут для досить загального випадку при постійних μ_m, ν_m та змінних ρ, μ, κ . При цьому в кожному випадку використовуються співвідношення (1.1.7)-(1.1.11), що конкретизують модель суцільного середовища.

Декартова система координат

Не обмежуючи загальності, приймається, що вісь z спрямовано проти сили тяжіння. Тоді, вважаючи магнітну силу значно більшою електричної, з урахуванням вищевикладеного, запишемо систему диференціальних рівнянь (1.1.5), (1.1.6):

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(p + 0,5 \mu_m |\vec{H}|^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\
& = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mu_m \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} \right), \\
& \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{\mu_m}{2} |\vec{H}|^2 \right) = \mu_m \left(H_x \frac{\partial H_y}{\partial x} + \right. \\
& \quad \left. + H_y \frac{\partial H_y}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\
& \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{\mu_m}{2} |\vec{H}|^2 \right) = \mu_m \left(H_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + \right. \\
& \quad \left. + H_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\
& \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \tag{1.1.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) + p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial q_x^{su}}{\partial x} + \frac{\partial q_y^{su}}{\partial y} + \frac{\partial q_z^{su}}{\partial z} + \\
& \quad + v_m \left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
& \quad + 0,5 \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\
& \frac{\partial H_x}{\partial t} = v_m \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (u H_y - v H_x) + \frac{\partial}{\partial z} (u H_z - w H_x), \\
& \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v H_z - w H_y) + \frac{\partial}{\partial x} (v H_x - u H_y) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +V_m \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (wH_x - uH_z) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} (wH_y - vH_z) + V_m \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0
 \end{aligned}$$

У системі рівнянь (1.1.12) виділено потенційну частину електромагнітного поля, що становить магнітний тиск, унаслідок чого ця форма запису називається симетричною.

Циліндрична система координат

В циліндричній системі (r, φ, z) , координатними поверхнями якої є циліндри $r = const$, напівплощини $\varphi = const$ і площини $z = const$, рівняння (1.1.12) перетворюються на вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{\rho u}{r} + \frac{\partial(\rho v)}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \\
 & \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v \partial u}{r \partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{\mu_m |\vec{H}|^2}{2} \right) = \\
 & = \mu_m \left(H_r \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{H_\varphi \partial H_r}{r \partial \varphi} + \frac{H_z \partial H_r}{\partial z} - \frac{H_\varphi^2}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial(\mu u)}{r \partial r} - \frac{\mu}{r^2} \left(2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right), \\
 & \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v \partial v}{r \partial \varphi} + \frac{w \partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(p + \frac{\mu_m |\vec{H}|^2}{2} \right) = \\
 & = \mu_m \left(H_r \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi \partial H_\varphi}{r \partial \varphi} + H_z \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} + \frac{H_r H_\varphi}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial(\mu v)}{r \partial r} + \frac{\mu}{r^2} (2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v), \\
 & \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v \partial w}{r \partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{\mu_m |\vec{H}|^2}{2} \right) + \rho g =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_m \left(H_r \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{H_\varphi \partial H_z}{r \partial \varphi} + H_z \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (\mu \frac{\partial w}{\partial r}) + \\
&\quad + \frac{\partial}{r^2 \partial \varphi} (\mu \frac{\partial w}{\partial \varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial w}{\partial z}) + \frac{\partial (\mu w)}{r \partial r}, \tag{1.1.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v \partial T}{r \partial \varphi} + \frac{w \partial T}{\partial z} \right) + p \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\
= \frac{\partial}{\partial r} (\kappa \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{r^2 \partial \varphi} (\kappa \frac{\partial T}{\partial \varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (\kappa \frac{\partial T}{\partial z}) + \frac{\partial (\kappa T)}{r \partial r} + \\
+v_m \left[\left(\frac{\partial H_z}{r \partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} - \frac{\partial H_\varphi}{r \partial \varphi} \right)^2 \right] + \\
+ \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{r \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
+ \frac{\partial q_r^{su}}{\partial r} + \frac{q_r^{su}}{r} + \frac{\partial q_\varphi^{su}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial q_z^{su}}{\partial z} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_r}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (u H_\varphi - v H_r) + r \frac{\partial}{\partial z} (u H_z - w H_r) \right] + \\
+v_m \left(\frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 H_r}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} + \frac{\partial H_r}{r \partial r} - \frac{2 \partial H_\varphi}{r^2 \partial \varphi} - \frac{H_r}{r^2} \right), \\
\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} (v H_r - u H_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (v H_z - w H_\varphi) + \\
+v_m \left(\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial H_\varphi}{r \partial r} + \frac{2 \partial H_r}{r^2 \partial \varphi} - \frac{H_\varphi}{r^2} \right), \\
\frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} r (w H_r - u H_z) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (w H_\varphi - v H_z) \right] + \\
+v_m \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 H_z}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \frac{\partial H_z}{r \partial r} \right), \quad \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{r \partial \varphi} = - \frac{\partial H_z}{\partial z}.
\end{aligned}$$

У представленому загальному вигляді системи диференціальних рівнянь у частинних похідних (1.1.12), (1.1.13) мають, головним чином, евристичне значення і можуть використовуватися для чисельного і тим більше - аналітичного рішення лише за відповідних додаткових спрощуючих припущень про характер досліджуваних фізичних процесів. Але такі системи для багатьох важливих завдань можуть вирішуватися також у досить загальній постановці.

Чисельне вирішення багатьох завдань у загальній постановці все ще є важким навіть на швидкодіючих ЕОМ з продуктивністю понад 100 мільйонів операцій за секунду, тому що існуюча математична теорія чисельного рішення нелінійних рівнянь у частинних похідних поки що неадекватна. Відсутність точних оцінок похибки чисельних рішень систем диференціальних рівнянь, доказів стійкості та збіжності чисельних алгоритмів викликає необхідність комплексного підходу до вирішення проблеми, що включає такі основні етапи:

- дослідження спрощених лінеаризованих завдань (із залученням евристичного обґрунтування та фізичної інтуїції),
- обчислювальний експеримент на ЕОМ,
- встановлення адекватності фізико-математичної моделі.

Значні труднощі у математичному моделюванні фізико-механічних процесів у суцільних середовищах пов'язані з незавершеністю теорії існування та єдиності рішень рівнянь у частинних похідних, що описують термо- та магнітогідродинамічні явища. Причому, теорія далека від завершення як щодо самих рівнянь, і їх кінцево-різницевої чи кінцево-елементних аналогів. Математичні питання збіжності та стійкості чисельних схем досить добре розроблені лише для лінійних задач, тоді як нелінійні задачі досі недостатньо вивчені.

Як початкові наближення нелінійних задач використовуються результати лінійних теорій. У багатьох випадках розв'язання нелінійних задач сильно залежить від точності і адекватності постановки граничних умов. Дестабілізуючий вплив граничних умов має визначальне значення, внаслідок чого виведенню граничних умов з фізичних законів та дослідженню їх впливу на характер рішень приділяють значну увагу.

1.2. Постановка крайових задач по параметричним коливанням у суцільних середовищах

Постановка крайових задач по параметричним коливанням у суцільних середовищах вимагає конкретизувати тип параметричного

впливу: зовнішнього електромагнітного поля, вібраційного чи теплового впливу тощо. Вібраційну дію можна характеризувати вектором віброприскорення і розглядати процес у рухомій системі координат, пов'язаній з віброуючою поверхнею, по якій розтікається рідина, враховуючи дію вібрацій в осцилюючій масовій силі.

Фізичне обґрунтування крайових (початкових та граничних) умов є також важливим етапом досліджень. У загальному випадку необхідно задати просторовий розподіл визначальних параметрів середовища у початковий час і відповідні умови на межах аналізованої області простору. Але в задачах стійкості та поширення хвиль у лінійній постановці рішення можна розшукувати у вигляді суперпозиції прогресивних або стоячих хвиль. Тоді початкові умови принципово не впливають на характер процесу, оскільки основним є питання про закономірності наростання (загасання) хвиль, а не абсолютне значення амплітуди в початковий момент часу.

У лінійній теорії розглядаються прогресивні хвилі

$$\tilde{q}_j = Q_j(y, z, \omega) \exp i(kx - \omega t), \quad (1.2.1)$$

що біжать уздовж осі x зі швидкістю ω/k . Тут Q_j - комплексна амплітуда. Виділення дійсної частини можна проводити в остаточному результаті.

Одержання і обґрунтування граничних умов - важливе завдання, якому приділяється все більше уваги [449] у зв'язку з проблемами отримання умов, що виникають, а також виникнення сингулярностей і впливу збурення граничних умов на характер модельованих фізичних процесів. Встановлено, що адекватність будь-якої граничної умови залежить від інших умов (граничних та початкових) та прийнятої математичної моделі і становить істотну особливість обчислювального експерименту в кожному конкретному випадку. При цьому чисельність визначальних факторів часто ускладнює, а іноді унеможливає аналітичне дослідження параметричних коливань у суцільних середовищах або обмежує його застосування [327, 335, 373].

Як показують обчислювальні експерименти, питання адекватності граничних умов пов'язані з типом різницевої схем, співвідношенням визначальних безрозмірних критеріїв тощо. В аналітичних дослідженнях адекватність завдання граничних умов впливає на адекватність одержуваного рішення. У обчислювальному експерименті граничні умови визначають як точність одержуваного рішення, так і стійкість

самого обчислювального алгоритму, тобто можливість одержання рішення. Річардсон ще в 1910 році дав чітку характеристику проблеми адекватної постановки граничних умов [528], але належну увагу їй стали приділяти значно пізніше [109, 123, 391, 416, 512, 549, 550]. Найчастіше дослідження граничних умов проводилося на ЕОМ з допомогою досить простих двошарових явних кінцево-різницевих схем для граничних умов першого і другого роду. Завдання зі змішаними та нелінійними граничними умовами практично не вивчені [11].

Вплив граничних умов на вирішення краєвих задач параметричних коливань у суцільних середовищах особливо суттєвий при наявності складних границь розділу середовищ, ліній контакту, поблизу яких має місце сильний прояв локальної динаміки системи: проскальзування, гістерезис кутових контактів і т.д. Так, наявність гістерезиса кута контакту не дозволяє побудувати коректну теорію параметричних коливань навіть у лінійному наближенні [449], у той час як нелінійність сама по собі може бути причиною некоректності постановки краєвої задачі.

Девіс і Вейланд показали [560], що глобальна нестійкість плівкових течій на нахилених поверхнях сильно залежить від граничних умов на лінії контакту. Сингулярність задач з наявністю міжфазних і вільних границь, еволюціонуючих в просторі-часі, зумовлена мікроструктурною лінією контакту і точок переходу, положення яких змінюється невідомим чином.

В загальному випадку граничні умови на динамічних поверхнях розділу суцільних середовищ є нелінійними і нестационарними. Нелінійність може бути зумовлена кінематичними (у разі вільної межі) або динамічними особливостями: гістерезис кута контакту, релаксаційні явища, відрив рідини від стінки в окремих місцях і т.д. Невідомі умови, замінюючи класичні умови прилипання на рухомій контактній поверхні [453] не дозволяють побудувати достатньо загальну адекватну теорію параметричних коливань границь розділу суцільних середовищ.

Особливості термогідродинамічних процесів на міжфазних поверхнях визначають взаємодію середовищ в дуже тонкому шарі, що має товщину порядку радіуса молекулярної взаємодії (нано-розміри): $a' \sim 10^{-9}$ м. У цьому шарі взаємодії молекул фаз приводять до того, що фізико-механічні та хімічні властивості середовища та його термодинамічні параметри відрізняються від властивостей і параметрів фази. Для розгляду вказаних явищ використовуються різні підходи,

наприклад, з введенням поняття поверхневої Σ - фази [294] і розглядом мікроявищ, а також іншими методами [95, 221, 295-297]. Рівняння термогідродинамічних процесів на поверхні розділу середовищ можна записати у вигляді [294]:

$$\begin{aligned}
 P_2 \cdot \vec{n} &= P_1 \cdot \vec{n} + \rho_1^0 (\vec{v}_1 - \vec{v}_\Sigma) \cdot \vec{n} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \frac{1}{a' S_{12}} \oint_{\delta L'} \vec{p}_\Sigma(l') dl' , \\
 \rho_j^0 (\vec{v}_j - \vec{v}_\Sigma) \cdot \vec{n} &= idem, \quad P_2 \cdot \vec{n} \cdot \vec{v}_2 = P_1 \cdot \vec{n} \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{a' S_{12}} \left[\oint_{\delta L'} \vec{p}_\Sigma(l') \vec{v}_2 dl' - \frac{d}{dt} a' e_\Sigma S_{12} \right] + \\
 &+ \rho_1^0 (\vec{v}_1 - \vec{v}_\Sigma) \cdot \vec{n} \left[e_1 - e_2 + \frac{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2}{2} \right] + (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \cdot \vec{n} , \quad (1.2.2)
 \end{aligned}$$

де e_Σ , \vec{p}_Σ , \vec{v}_Σ - питома внутрішня енергія Σ - фази (віднесена до одиниці площі міжфазної поверхні), сила поверхневого натягу та швидкість руху межі поділу середовищ, відповідно. Тут $\delta L'$ - контур, що охоплює поверхню S_{12} . Рівняння (1.2.2) можуть використовуватися як граничні умови для рівнянь мікроруху, а також для виведення макроскопічних граничних умов.

Слід зазначити, що сила поверхневого натягу залежить від коефіцієнта поверхневого натягу, що визначається для будь-яких двох середовищ температурою і концентрацією домішок, що містяться. При цьому на межах розділу твердого і рідкого або газоподібного середовищ тяжіння між молекулами твердого середовища і рідини (газу) значно перевищує таке між молекулами рідини (газу), внаслідок чого в більшості практично важливих випадків досить хорошим наближенням є класична умова прилипання.

Макроскопічні граничні умови

При постановці макроскопічних граничних умов зазвичай застосовуються феноменологічний підхід, фізичні міркування та емпіричні закони. Наприклад, розглядаючи об'єм V , обмежений поверхнями S_1 та S_2 , паралельними поверхні розділу середовищ S_{12} , можна вибрати координатну систему, в якій S_{12} нерухома. Тоді, спрямовуючи відстань між поверхнями S_1 та S_2 до нуля та нехтуючи впливом перехідного шару (контактної поверхні), із системи (1.1.5), (1.1.6) можна отримати умови на межі розділу середовищ:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n} \vec{v}_1 &= (p_1 - p_2) \vec{n} + (\rho_1 - \rho_2) \vec{g} + (\rho_{e1} \vec{E}_1 - \rho_{e2} \vec{E}_2) \cdot \vec{n} + \\
 + \rho_2 \vec{v}_2 \vec{n} \cdot \vec{v}_2 + (\vec{j}_1 \times \vec{B}_1 - \vec{j}_2 \times \vec{B}_2) \cdot \vec{n} + p_s^{enu}, \quad \rho_j \vec{v}_j \vec{n} &= idem, \\
 \vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= 0, \quad \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j}_s \times \vec{n}, \\
 \vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) &= 0, \quad (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \rho_{es}, \\
 \rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n} \left(e_1 + \frac{1}{2} |\vec{v}_1|^2 \right) + (p_2 \vec{v}_2 - p_1 \vec{v}_1) \cdot \vec{n} + (\vec{q}_1^{enu} - \vec{q}_2^{enu}) \cdot \vec{n} &= + q_s^{enu} + \\
 = \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n} \left(e_2 + \frac{1}{2} |\vec{v}_2|^2 \right) + (\vec{E}_2 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_1 \times \vec{H}_1) \cdot \vec{n} + (\vec{q}_2^{enu} - \vec{q}_1^{enu}) \cdot \vec{n}
 \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Тут p_s^{enu} , q_s^{enu} - поверхневі щільності розподілу зовнішніх сил та потоків енергії, \vec{j}_s , ρ_{es} - поверхневі струм та щільність зарядів. Умови (1.2.3) є законами збереження потоків маси, імпульсу та енергії на межі розділу суцільних середовищ і є основними при розгляді параметричних коливань меж розділу. В них потоки енергії \vec{q} та щільність енергії \vec{q}_s мають нетепловий, немеханічний та неелектромагнітний характер (вони враховані в інших членах). Те саме стосується і p_s^{enu} .

Ці умови, як і (1.2.2), мають досить загальний вигляд, вони використовуються як відправні при постановці відповідних граничних умов у конкретних фізичних ситуаціях. Так, нами будуть розглядатися в основному задачі, для яких поверхневий струм і щільність зарядів можуть вважатись досить малими. Крім того, можуть виконуватись і інші умови, що відображають специфіку конкретної фізичної ситуації: рівність температур, потенціалів (гідродинамічних, хімічних тощо). А для моделей гетерогенних середовищ іноді необхідно використовувати також стохастичні граничні умови [109], якщо аналізовані процеси значною мірою недетерміновані.

1.3. Параметричні коливання на межах розділу провідної рідини

При розгляді задач параметричного збудження і придушення коливань меж розділу суцільних середовищ головне значення має обмін масою, імпульсом і енергією між взаємодіючими середовищами через поверхню розділу. Внаслідок такого обміну відбувається взаємодія

контактуючих середовищ, що веде до зміни межі та (або) параметрів середовищ.

У випадку гетерогенних середовищ структурні схеми аналізованих фізичних систем представлені для наочності на Рис. 1.3.1, 1.3.2, де однозв'язна границя розділу S_{12} областей Ω_1 і Ω_2 є поверхнею у просторі $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, а багатозв'язна границя розділу гетерогенної

системи $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$, де S_i - відповідні поверхні поділу фаз (включень). Тут кожна з областей Ω_i характеризується своїм набором параметрів, і поверхня розділу середовищ може бути деформованою або частково (іноді - повністю) недеформованою.

Особливості поведінки меж розділу середовищ визначаються властивостями цих середовищ, умовами їхньої взаємодії та характером зовнішніх впливів (наприклад, електромагнітних - для електропровідних середовищ). При цьому, оскільки в складних гетерогенних середовищах встежити за поведінкою кожної окремої межі розділу фаз неможливо, використовуються різні усереднені рівняння і моделі, отримані при врахуванні взаємодії середовищ на окремих межах розділу [36, 104, 294, 296, 344, 462]. Такий підхід використовується в розділі 5 при розгляді параметричних коливань на межах розділу фаз гетерогенного середовища.

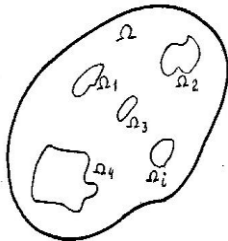


Рис. 1.3.1 Багатозв'язна границя

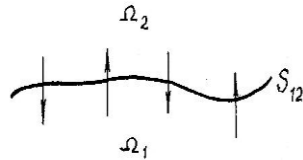


Рис. 1.3.2 Однозв'язна границя

Основне завдання цього дослідження - аналіз параметричних коливань меж розділу провідних та непровідних рідин з іншими, газоподібними та твердими середовищами. Управління межами розділу провідних рідин здійснюється за допомогою електричних та магнітних

полів [66, 85, 163, 169, 201]. Наприклад, системи стабілізації меж фазового переходу (кристалізації) засновані на використанні високочастотних електромагнітних полів та активних чотириполюсників з термоопірами та відповідними операційними підсилювачами. При переході з рідкої фази в тверду стрибок у провідності середовищ дозволяє контролювати форму поверхні солідифікації високочастотними електромагнітними полями.

Системи управління меж фазового переходу на зазначеному принципі працюють так. Збурення межі призводить до відповідного збурення магнітного поля, а зміна струму в керуючій обмотці системи управління, після належного посилення, наводить вторинний струм в тонкому скін-шарі поблизу межі розділу фаз і тим самим сприяє її вирівнюванню (джоульова стабілізація). Різноманітні особливості управління межами розділу провідних рідин, залежно від конкретної фізичної ситуації, розглядалися в багатьох роботах:

- збудження регулярних коливань поверхні розділу за допомогою постійного електричного поля великої напруженості, що створює пробій рідини [291];
- параметричний вплив на межі розділу схрещеними електричними та магнітними полями [61, 91, 228];
- збудження нестійкості Кельвіна-Гельмгольца в змінних магнітних полях [213, 496], нестійкості Релея-Тейлора [214, 215] та багато інших випадків збудження поверхневих хвиль на межах розділу [85, 97, 169, 2, 4].

Нами, в основному, досліджуються закономірності збудження та придушення коливань меж розділу провідних та непровідних середовищ за допомогою прогресивних або стоячих електромагнітних хвиль у випадку малих магнітних чисел Рейнольдса Re_m , коли індуковане електромагнітне поле мале порівняно із зовнішнім полем. При цьому розглядаються тонкі шари (плівки) провідної рідини, що виявляють дивовижні особливості.

Зважаючи на те, що поведінка системи визначається параметрами зовнішніх впливів і власних коливань, завдання параметричного (електромагнітного в даному випадку) збудження (придушення) коливань меж розділу формулюється як завдання визначення та вибору електромагнітних полів, що фізично реалізуються, які створюють необхідний ефект: стабілізацію (придушення нестійкості) фазового переходу (кристалізації) щодо випадкових або регулярних збурень [75, 85, 214, 227-229, 260, 452], збудження коливань поверхні плівок заданої

форми [35, 161, 200, 435, 521], диспергування [3, 160, 202, 517]. Досліджуються як силове, так і енергетичне (джоулеве тепловиділення) впливи електромагнітних полів на середовища.

Оскільки термогідродинамічні процеси на межах розділу відрізняються великою складністю та багатофакторністю і для низки фізичних ситуацій до кінця не з'ясовані [95, 118, 119, 137, 381, 454], у більшості робіт систему з двох фаз, розділених шаром міжфазного переходу (Σ -фаза), замінюють модельною поверхнею розділу нульової товщини, по обидва боки якої середовища однорідні до межі.

У загальному формулюванні задач із межами розділу фігурують два параметри [490, 560]: капілярне число $Ca = We/Re$ та коефіцієнт ковзання, що характеризується відношенням довжини прослизання до лінійного масштабу системи. При $\sigma \rightarrow 0, Ca \rightarrow \infty$ з'являється сингулярність у граничних умовах (1.2.3) (капілярні сили виявляються лише у вузькому примежовому шарі), тоді як у випадку $Ca \ll 1$ поверхня розділу визначається вже не в'язкою деформацією, а умовою локальної динаміки: зміни локальної течії та ковзання фаз.

Сингулярність у багатьох випадках дає умову прилипання (непроковзування). Ці особливості призводять до того, що у деяких фізичних ситуаціях малі зміни умов границі розділу сильно впливають зміну форми границі. Так, для систем з гістерезисом кута контакту не можна побудувати коректну теорію стійкості навіть у лінійному наближенні через нелінійність граничних умов [449] та сильну чутливість глобальних властивостей параметричних коливань меж розділу до умов контакту середовищ [560].

В силу зазначених особливостей взаємодія електромагнітних полів з межами розділу провідних середовищ багато в чому ще не до кінця зрозуміла, але для практики було розглянуто безліч окремих випадків, що дають іноді суперечливі результати і не дозволяють створити цілне уявлення про основні закономірності явищ. Це свідчить про важливість завдань, вирішення яких поки що знаходиться в початковій стадії, незважаючи на велику кількість публікацій [68, 85, 91, 162, 163, 201, 202, 389, 496, 506] і досягнуті успіхи.

Так, в [452] стверджується, що постійне поле більш ефективно пригнічує нестійкість тангенціального розриву, ніж змінне, а в [466] параметричні ефекти не розглядаються і зроблено висновок, що змінне електромагнітне поле завжди дестабілізує межу розділу, тоді як в [213] показано, що змінне електромагнітне поле стабілізує довгохвильову

частину спектра двовимірних збурень поверхні розділу провідної та непровідної рідин та викликає розвиток нестійкості, що має характер параметричного резонансу. Останнє важливе для вирішення задачі плівкового МГД-гранулювання металів [202], що розглядається нами.

Перші роботи з електромагнітного впливу на поверхню рідкометалевого струменя з метою його стабілізації належать Ладікову Ю.П. [227], який показав, що при частоті поля, яка задовольняє умові малості товщини скін-шару в порівнянні з капілярним радіусом, коливання поверхні струменя згасають (струмінь стійкий). Надалі для утримання рідких металів було запропоновано використати два поля кругової поляризації різної частоти. Дослідження цієї проблеми продовжили багато вчених. Це стимулювалося необхідністю стабілізації нестійкостей Релея-Тейлора [60, 68, 215, 552], Кельвіна-Гельмгольца [60, 141, 213, 233], Тонкса-Френкеля [60]. Особливий вид нестійкості тонких в'язких струменів та плівок - утворення зубів на поверхні розділу, так званої "зморшкуватості" поверхні розділу, досліджувався на 1-вимірних та 2-вимірних моделях [569], аналіз яких призвів до отримання умов виникнення нестійкості, пов'язаної з гіперболічністю рівнянь.

Багато нових теоретичних та експериментальних робіт з параметричного збудження коливань поверхонь розділу провідних та непровідних рідин за допомогою електромагнітних полів розглянуто в оглядах [279, 506], що містять також обговорення механізмів взаємодії полів та середовищ та аналіз кількісних і якісних особливостей розвитку нестійкості і стабілізації поверхонь розділу. Завдання стабілізації вільних та обмежених рідкометалевих струменів та плівок розглядалися у зв'язку з проблемами термоядерної технології [24, 269, 415], а порушення параметричної нестійкості та розпаду струменів – у зв'язку з проблемою гранулювання металів [160, 201, 202].

Завдання управління термогідродинамічними процесами на межах розділу фаз у гетерогенних системах вирішувалися для випадку руху рідин, що намагнічуються, в деформованих [367] і недеформованих середовищах [343, 366]. У разі непровідної рідини керування можливе шляхом зміни термогідродинамічних параметрів на межі (гранічне управління), для провідного гранулярного середовища пропусканням струму по частинках (виділення тепла в точках торкання гранул внаслідок локального підвищення опору призводить до появи об'ємного керування), для течії провідної рідини з непровідними частинками за допомогою спеціальних електромагнітних полів [107] та ін.

Загалом проблема параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу провідної рідини, що має важливі застосування, вимагає подальших досліджень. Представлені нами результати (розділи 2, 3, 4 та 6) відносяться до вирішення завдань, пов'язаних із руйнуванням та стабілізацією рідкометалевих плівок та фронтів кристалізації за допомогою прогресивних та стоячих електромагнітних хвиль. Це необхідно для підвищення можливостей управління процесами у суцільних середовищах та створення умов для розробки нових високоефективних ресурсо- та енергозберігаючих технологій та пристроїв, у тому числі автоматизованих та автоматичних.

Автоматичне управління (регулювання) процесів у суцільних середовищах може бути програмним [66] або адаптивним (із зворотним зв'язком) [75, 226-229], що особливо ефективно для швидкоплинних та нестійких процесів. Саме тому завдання, що розглядаються в монографії, актуальні в теоретичному і прикладному плані для технологічних процесів і пристроїв, описаних в останньому розділі.

1.4. Параметричне збудження та придушення коливань на межах розділу непровідних середовищ

Класифікацію досліджених фізичних процесів параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ можна наочно простежити за Табл. 1.3.1. Параметричне збудження та придушення коливань на межах розділу непровідних середовищ можливе за рахунок дії в об'ємах, які займають середовища, розподілені джерела енергії або обмін масою, імпульсом та енергією на межі розділу. Це дозволяє ефективно впливати на кінематичні та термодинамічні властивості середовищ, проводити управління процесами, що відбуваються: стабілізувати межі розділу середовищ у разі їх нестійкості щодо випадкових або регулярних збурень [75, 85, 155, 214, 280, 452], збудження [161, 163, 299, 435, 521], руйнувати межі розділу шляхом збудження наростаючих по амплітуді (у часі або за якоюсь координатою) коливань [3, 90, 160, 198, 202, 279].

У будь-якому випадку збудження параметричних коливань необхідно перевищити деякий бар'єр параметрів, який визначається тим, що енергія, що підводиться до системи, витрачається не тільки на накачування коливань, але і на дисипацію. Абсолютно пружних середовищ немає, тому нижній бар'єр параметрів визначається дисипацією енергії. Параметричне збудження коливань на межах розділу

суцільних середовищ [26, 84, 508] із нескінченної послідовності областей нестійких коливань дає максимальну ширину області частот $\omega/2$ половинної частоти ω сили, що збуджує коливання.

З безлічі різних способів збудження та придушення коливань меж розділу непровідних середовищ найбільш часто використовуються акустичні [56, 282, 457], вібраційні та вібротермічні [3, 26], механічні та газодинамічні [129, 431, 508], із застосуванням поверхнево активних речовин (ПАР) [105, 282], термокапілярного ефекту [105, 283, 290, 470, 554] та інші.

Параметрична стабілізація частини гармонік застосованими зовнішніми впливами може призвести до порушення нестійкості іншого роду або в іншій частині діапазону частот [213, 279]. У більшості робіт досліджувалися 3 основні типи нестійкості та можливість їх придушення параметричними впливами або посилення з метою руйнування середовища: диспергування, розбризкування. Одна з найбільш розвинених областей – теорія стійкості та розпаду рідких струменів – має численні застосування у промислових, технічних та інших пристроях [64, 130, 201, 266, 418].

Табл. 1.3.1 Класифікація процесів параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу

Процес	Електромагнітне управління коливаннями меж розділу провідних середовищ	Вібраційне управління розпадом струменів та плівок	Термогідродинамічні коливання на межах розділу суцільних середовищ
Вид меж розділу	Провідна рідина - непровідне середовище (рідина, газ, тверда фаза, вакуум)	Рідина-рідина, газ, вакуум	Тверда фаза - газ, рідка фаза, межі фазового переходу з рідкого стану в тверде
Вид збурення і редови	Прогресивні та стоячі електромагнітні хвилі, Джоулеви	Вібраційні дії Гомогенні середовища	Електромагнітні поля, потоки теплоти та маси на межах розділу, гомогенні та

ще	тепловиділення		гетерогенні середовища
Вид Течії явище	Плоскі та радіальні плівки, згинальні хвилі, розпад плівок	Плівки, що радіально розтікаються, згинальні хвилі, розпад плівок	Термогідродинамічні коливання в гранулярних середовищах та на межах кристалізації
Визначальні сили	Електромагнітні, капілярні, гравітаційні, в'язкі	Вібраційні, капілярні, гравітаційні, в'язкі	Термодинамічні, гравітаційні, в'язкі, міжфазні – гетерогенне середовище
Нелінійність процесів, середовищ	Нелінійність хвиль, дисперсія поверхневих та електромагнітних хвиль	Солітони та ударні хвилі, резонансний розпил плівок	Нелінійні термогідродинамічні хвилі, нелінійні фізичні характеристики середовищ

Дослідження розвитку зовнішніх збурень поверхні струменів показало, що майже завжди визначається переважно першою спектральною модою. Складний хвильовий процес, як правило, можливий лише за умови використання спеціальних полігармонічних збудників коливань [80, 81]. Резонансна взаємодія мод може призводити до перекачування енергії від однієї до іншої. Наприклад, явище генерації другої гармоніки, зване ефектом Вілтона [501], це коли в результаті взаємодії гравітаційно-капілярних хвиль з параметрами $k_2 = k_1, \omega_2 = \omega_1$ при швидкостях течії, близьких до порогових, відбувається посилення хвиль половинної довжини (перекачування енергії хвиль).

Гідродинамічною своєрідністю та широким практичним застосуванням відрізняється інший дивовижний об'єкт досліджень параметричних коливань – плівки. Це - завдання стійкості та руйнування (диспергування, розбризкування) меж розділу та вільних поверхонь та інші [32, 92, 132-134, 470, 500]. Течії тонких шарів (плівок) рідини завжди нестійкі навіть у лінійному наближенні, якщо тільки нижня з рідин, що межують, більш в'язка [483], а нелінійне насичення нестійкості в рухомих

плівках має місце при комбінованій дії зсуву і поверхневого натягу. Робилися спроби [423] пояснити загальний механізм нелінійного насичення нестійкості в тонких плівках на прикладі релей-тейлорівської нестійкості.

Встановлено, що в певному діапазоні зміни параметрів збурення розриває плівку, що стоїть, і не розриває рухоми. Дослідженню впливу зовнішніх збурень нестійких рідких плівок на дисперсний склад крапель, що утворюються в результаті їх розпаду, присвячені роботи [128, 130, 201, 277, 279, 420, 515]. Так, експериментальне вивчення вимушеного високочастотного впливу на стійкість тонких рідких плівок показало [443] його слабкий вплив на темп наростання збурень поверхні плівок, але вплив на дисперсний склад крапель значний: зменшення розмірів крапель в середньому на 15-20%, а при деяких частотах до 40%. У колоїдних системах спостерігалось [448] спонтанне руйнування плівок при критичній товщині. Явище розриву описано з урахуванням чисельного рішення нелінійної крайової завдання. І рядом авторів вказувалося необхідність врахування ще й термокапілярних ефектів. Вплив динамічної дії повітря, розпад плівок у прямоточному газовому потоці, коливання поверхні плівок, формоутворення межі розділу з навколишнім середовищем, характеристики розпилу круглої плівки досліджувалося в [129, 130, 420, 515] та в інших роботах. Поведінка меж розділу плівок нестисненої рідини, що розповсюджуються в іншому рідкому середовищі, розглядалася як у лінійному, так і в нелінійному наближеннях.

В рамках лінійної теорії показано [465], що за наявності негативних дотичних напруг розвиваються згинальні збурення поверхні плівки, що призводять до коливань без зміни товщини плівки. Такі коливання отримали назву згинальних – на відміну від осесиметричних коливань, пов'язаних із зміною товщини плівки (симетрично щодо міделевої поверхні).

Відомо, що довгохвильові збурення товщини плівки наростають у разі переважання негативних сил, що розтягують, над капілярними силами. Обчислювальні експерименти з нелінійної динаміки вільних рідких плівок показали, що параметричні коливання поверхні розділу з рідиною, що її оточує, посилюються нелінійними ефектами і призводять до її розриву. Дослідження стійкості двовимірної течії в'язкої рідини, проведене методом Галеркіна [500], показало: у лінійному випадку стійкість визначається числом Рейнольдса Re , тоді як у нелінійному випадку існує ще поріг стійкості (підтверджено експериментами).

Вібраційне збудження параметричних коливань поверхні плівок води, що радіально розтікаються, і розчинів полімерів досліджували В.М. Єнтов зі співробітниками [128]. Теоретично розглядалися два типи згинальних збурень поверхні плівок: концентричні хвилі, що біжать, створювані віброуючим у вертикальній площині диском-розсікачем, на який натікає струмінь, і стоячі хвилі, що утворюються від кромки диска і дефектів на його поверхні. Радіальні течії тонких рідких плівок, зміна їх товщини, профілів швидкості, флуктуації тиску на стінці, стійкість та перехід ламінарної течії в турбулентну досліджувалися японськими вченими [422]. Багато інших завдань параметричного збудження та придушення коливань у плівках та струменях непровідної рідини розглянуті у ряді оглядів та монографій [95, 120, 130, 221, 227, 237, 260, 418, 495, 525]. Як зовнішні впливи аналізувалися вібраційні, акустичні, термокапілярні, ПАР і т.д.

Термогідродинамічні коливання в гетерогенних середовищах та їх вплив на тепло-, масообмінні та гідродинамічні процеси досліджувалися у ряді робіт [26, 35, 87, 88, 344]. Так, результати експериментальних досліджень коефіцієнтів тепловіддачі та гідравлічного опору [87], (проведені при стаціонарному та пульсуючому русі газу в пористому середовищі) показали підвищення інтенсивності процесів: при резонансних частотах коефіцієнти для пульсуючого режиму в 2-3 рази перевищують відповідні стаціонарні.

Параметричне збудження і придушення коливань на межах розділу суцільних гомогенних та гетерогенних середовищ та їх вплив на інтенсивність перебігу технологічних процесів - нова область сучасної термогідродинаміки та теорії управління процесами з розподіленими параметрами. Це порівняно молода наука з великими можливостями у створенні нових ресурсо- та енергозберігаючих високоефективних технологій та економічних пристроїв великої продуктивності.

Внесення збурень порівняно низької інтенсивності зазвичай призводить до деякого зниження показників (нерезонансний випадок), у той час як за високої інтенсивності зовнішніх впливів технологічний процес визначається головним чином характером цих впливів і практично не залежить від характеру незбуреного стану системи. Для практичного використання особливо важливі резонансні ефекти, що дозволяють істотно підвищити інтенсивність процесу або навіть отримати принципово нове явище при порівняно низьких енергетичних витратах, що відкриває прямі шляхи створення нових і поліпшення існуючих технологій.

У цій роботі проблема параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу непровідних в'язких рідин розглядається на прикладі течій плівок (тонких шарів) та гетерогенних гранулярних середовищ (відповідно, глави 2, 4, 5). Побудовано фізико-математичні моделі процесів для випадків вібраційних та термічних впливів, створено матзабезпечення для ЕОМ, проведено обчислювальні та фізичні експерименти для виявлення закономірностей раніше недосліджених фізичних систем: збудження коливальних процесів заданого виду та руйнування плівок в'язких рідин на краплі. Також можливе підвищення інтенсивності термогідродинамічних процесів за наявності коливань параметрів на межах розділу фаз, тощо.

Розглянуто як малоамплітудні лінійні збурення, так і нелінійні (зокрема, великої амплітуди), і завдання вирішено у загальній постановці, що охоплює випадки як збудження, так і придушення параметричних коливань, які мають свої специфічні особливості та характерні сфери застосування. Математичні моделі побудовані за модульним типом, дозволяючи вирішувати клас задач з параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу непровідних середовищ та допускаючи просту адаптацію на інші близькі в математичному відношенні задачі.

У додатку показані практичні висновки та рекомендації. Наведено нові технологічні рішення, деякі конкретні конструкції та надано відомості про їх ефективність і натурні випробування. Поряд із покращенням показників відомих технологій отримані також принципово нові технологічні рішення. Розроблено пристрої, що базуються на оригінальних гідродинамічних явищах: розпил рідких плівок з вібруючого диска-розсікача при числах Ейлера, що істотно перевищують одиницю, використання резонансних електромагнітних явищ руйнування плівок, солітонні режими плівок тощо.

Проблема параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ вирішувалася у зв'язку із практичними потребами. Для розробки нових матеріалів на основі гранулярної технології створювалися методи та пристрої отримання частинок металів заданого розміру та з високою швидкістю кристалізації (швидкість охолодження досягнуто 10^4 °K/c!). Це так звані аморфні метали. Ідея їхнього створення пішла з оцінки міцності заліза, яку дав акад. Я.І. Френкель¹ на початку минулого століття, вказавши, що теоретична міцність заліза відрізняється від реальної за деякими показниками до 1000 разів. За останні два десятиліття в цій галузі не було

робіт, що пояснюється припиненням даного напрямку робіт, можливо, у зв'язку з розвитком нанотехнологій.

Розділ 2. Параметричне збудження та придушення коливань плівок в'язких нестисливих рідин

Течії плівок (тонких шарів рідин), що виходять при розтіканні малих кількостей рідин по твердих поверхнях і характеризуються малими розмірами в одному з напрямків (плоскі об'єкти малої, але кінцевої товщини) - це своєрідні гідродинамічні об'єкти, що мають широке технічне застосування. Однак, незважаючи на оригінальність та практичну важливість, повною мірою належного розвитку та систематичного викладу у спеціальних монографіях гідродинаміка плівок поки не отримала, хоча у ряді книг містяться розділи за цим напрямком [148, 233, 291, 418].

Що ж до параметричного збудження чи придушення коливань межі розділу плівок в'язких нестисливих рідин, то тут є лише окремі роботи, розглянуті нижче.

2.1 Фізико-математична модель параметричних коливань плоскої плівки, яка розтікається по горизонтальній площині

Прикладом плівки, що плоско розтікається, є течія, що утворюється при натіканні вертикального плоского струменя на горизонтальну поверхню, як показано на Рис. 2.1.1, де b -півширина струменя, u_0 -швидкість течії струменя. Зв'язок швидкості плівки u_0 з іншими параметрами (b , u_0) можна встановити, вважаючи вісь Oz декартової системи координат віссю симетрії системи, що розглядається. Так, у разі вільного зливу розплаву з висоти l над горизонтальною площиною, користуючись наближеною залежністю для швидкості струменя $u_{00} = \sqrt{2gl}$, можна визначити середню швидкість руху плівки з інтегральних співвідношень збереження маси та імпульсу:

$$au_0 = bu_{00}, \quad 0,5au_0^2 + 2v\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}(x-b) = 0,5bu_{00}^2, \quad (2.1.1)$$

де $u(z)$ - профіль миттєвої швидкості течії. Дисипацією енергії при ударі струменя об площину нехтуємо і (2.1.1) дають:

$$u_0 = (1/a) \int_0^a u(z) dz, \quad \frac{u_0}{u_{00}} = \frac{b}{a}, \quad \frac{b}{a} = 1 - \frac{4\nu}{u_{00}^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} \left(\frac{x}{b} - 1 \right), \quad (2.1.2)$$

Для багатьох рідин (у тому числі – металевих розплавів) величина коефіцієнта кінематичної в'язкості ν мала, тому при порівняно невеликих значеннях ν досить гарне наближення $u = 2z - z^2, (\partial u / \partial z)_{z=0} = 2$ спрощує модель рівноважної системи.

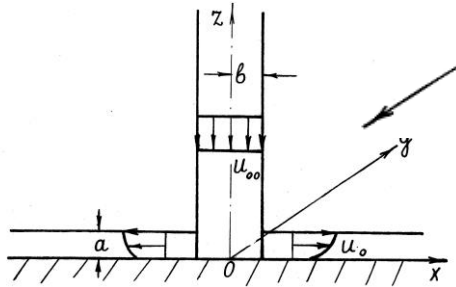


Рис. 2.1.1 Утворення течії плоскої плівки:

b, u_{00} - півширина вертикального плоского струменя і швидкість течії, l - відстань від зливного отвору до горизонтальної площини

У плівках співвідношення різних сил істотно залежить від їхньої товщини, фізичних властивостей рідини та навколишнього середовища, типу та інтенсивності зовнішніх впливів, що визначає велику різноманітність режимів таких течій. Помітну (іноді - основну) роль в них відіграють капілярні [202], в'язкі, електромагнітні сили (якщо рідина провідна), а при товщині порядку молекулярних розмірів - також Ван-дер-Ваальсові сили, які тут не розглядаються.

Завдання параметричного збудження та придушення (стабілізації) коливань у плівках за допомогою періодичних зовнішніх впливів розглядалися у зв'язку з МГД-гранулюванням металів [201, 202], для космічної технології [96, 280, 369] та інших [228, 277, 37]. Нами основна увага приділяється явищам розпаду плівок на краплі під дією електромагнітних хвиль або вібрацій, покладеним в основу створення перспективних плівкових МГД-[81] та вібраційних [100] грануляторів, що не мають аналогів у світовій практиці.

Особливо важливе значення мають режими параметричного резонансу системи, що дають максимальний технологічний ефект за

мінімальних витрат енергії. Відповідно до прийнятої структурної схеми (Рис. 2.1.1) і прийнятими припущеннями про характер досліджуваної фізичної системи представимо наступну фізико-математичну модель параметричних коливань плівки, що плоско розтікається. Вважатимемо суцільні середовища (плівку та навколишнє середовище) нестисливими, в'язкими, плівку - електропровідною. Припустимо, що в рівноважному стані характеристики системи не залежать від y (задача плоска) і розглянемо збурювальну силу від електромагнітної хвилі

$$H_z = H_m(z, t) \exp i(kx + my) \quad (2.1.3)$$

Умова соленоїдальності електромагнітного поля $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ показує, що вертикальна електромагнітна хвиля може існувати за умови $\partial H_z / \partial z = 0$ коли в (2.1.3) відсутня залежність поля від z . Це виконується, якщо товщина плівки істотно менша за товщину скін-шару, інакше поле має й інші складові. При великій провідності середовища змінне електромагнітне поле у ній поширюється у вигляді плоскої хвилі [251].

Оцінку характерних товщин скін-шару проведемо для середніх значень ν_m , користуючись формулою $\delta = \sqrt{2\nu_m / \omega}$. Ряд таких значень ν_m та відповідних δ для 6 різних металевих розплавів поблизу температури плавлення наведено в Табл. 2.1.1, звідки видно, що при частоті поля, що не перевищує 1кГц, товщина скін-шару більше $2 \cdot 10^{-2}$ м, що значно більше середньої товщини досліджуваних плівок.

Табл. 2.1.1 Товщина скін-шару для різних значень частоти поля

ω , Гц	<i>Al</i>	<i>Ga</i>	<i>Au</i>	<i>Sn</i>	<i>Hg</i>	<i>Fe</i>
1.0	0,570	0,65	0,71	0,89	1,26	1,48
50	0,080	0,09	0,10	0,13	0,18	0,21
10^3	0,018	0,02	0,022	0,028	0,040	0,047
10^6	$5,7 \cdot 10^{-4}$	$6,5 \cdot 10^{-4}$	$7,1 \cdot 10^{-4}$	$8,9 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$
10^9	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-5}$	$4,7 \cdot 10^{-5}$
ν_m	0,16	0,21	0,25	0,40	0,80	1,1

В інтервалі частот 10^3 - 10^9 Гц товщини плівки і скін-шару можуть бути сумірні, і тоді виникає необхідність урахування складових поля за координатами x і y , що суттєво ускладнює математичну модель. При $\omega > 10^9$ Гц скін-шар значно тонший за плівку, у першому наближенні його можна моделювати поверхнею нульової товщини, що збігається з межею розділу середовищ. МГД- рівняння збуреного руху плівки з урахуванням викладеного, вважаючи параметри незбуреного стану плівки відомими (їх можна задати приблизно виразами (2.1.2) або іншими, більш точними [129, 130, 277]), лінеаризовану систему магнітогідродинамічних рівнянь (1.1.12) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} & \rho_j \left[\frac{\partial u_j}{\partial t} + (2-j)u_0 \frac{\partial u_j}{\partial x} + u_j \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(p_j + \frac{2-j}{2} \mu_m H_z^2 \right) = \\ & = \mu_j \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} \right), \quad \rho_j \left[\frac{\partial v_j}{\partial t} + (2-j)u_0 \frac{\partial v_j}{\partial x} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(p_j + \frac{2-j}{2} \mu_m H_z^2 \right) = \mu_j \left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} + \frac{\partial w_j}{\partial z} = 0, \\ & \rho_j \left[\frac{\partial w_j}{\partial t} + (2-j)u_0 \frac{\partial w_j}{\partial x} \right] + \frac{\partial p_j}{\partial z} = \mu_j \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} \right), \\ & \frac{\partial H_z}{\partial t} + u_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + H_z \frac{\partial u_0}{\partial x} = \nu_m \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Збурення вважаємо малоамплітудними та лінеаризацію системи проводимо щодо заданого незбуреного стану. Отримані рівняння (2.1.4) будемо використовувати для опису збуреного стану ізотермічної плівки та параметричних коливань при постійних щільності та в'язкості середовищ (ρ_j, μ_j).

Збурювальна сила створюється вертикальною електромагнітною хвилею виду (2.1.3), на закономірності поширення якої впливає, у свою чергу, незбурений рух плівки (збурене мале). При цьому збурення тиску p і складових швидкості u_1, v_1 визначаються підкачуванням енергії у провідне середовище від електромагнітного поля, а збурення вертикальної складової швидкості плівки w_1 зумовлені змінами тиску. Все це призводить до появи коливань поверхні плівки, якими можна

керувати за допомогою електромагнітних полів, що змінюються за заданим законом, тому необхідно дослідження основних особливостей взаємодії полів та середовищ. Картина розтікання струму, що індукується в плівці, схильної до впливу електромагнітної хвилі заданого виду, приблизно така, як показано на Рис. 2.1.2:

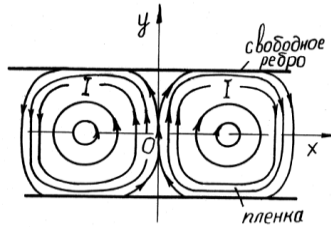


Рис. 2.1.2 Картина розтікання наведеного струму плівці

де вільні ребра – це потовщення, або валики розвантаження від поверхневих сил [130], що є лініями мінімального електричного опору. Останнє призводить до того, що лінії струму, що індукується, зміщуються до зовнішніх меж плівки і симетричною картина розтікання струму є лише в середній частині плівки, де вплив крайових ефектів ослаблений. На достатньому віддаленні від початкового перерізу $x=0$ лінії розтікання струму майже паралельні осі Oy і внаслідок цього електромагнітні сили діють плівку вздовж осі Ox .

Таким чином, рідина в плівці або розганяється, або гальмується по x , що викликає хвилю розрідження-стиснення по цій координаті, що призводить до відповідної деформації поверхні. Аналіз практичних випадків показує [81, 163, 202], що для плівок магнітні числа Рейнольдса R_{em} малі, тому індуковане електромагнітне поле можна не враховувати. Це дозволяє вирішувати автономно систему гідродинамічних рівнянь, що містять у правих частинах напруженість електромагнітного поля, що визначається з рівнянь індукції поля, до якого входить лише складова швидкості руху плівки.

Для малоамплітудних параметричних коливань поверхні плівки в лінійному наближенні завдання зводиться до системи двох диференціальних рівнянь, що описують поширення електромагнітної хвилі в провідному середовищі і коливань поверхні (межі розділу провідного та непровідного середовищ), що викликаються нею [160-162, 174].

Крайові умови

Для подальшої конкретизації фізико-математичної моделі параметричних коливань плоскої провідної плівки в полі прогресивної електромагнітної хвилі потрібно обумовити вид граничних та початкових (крайових) умов, яким повинна задовольняти фізична система, що розглядається. З урахуванням вищевикладеного, в лінійному наближенні можна шукати відгук системи на зовнішній вплив у вигляді, аналогічному (2.1.3), а початкові умови залишити довільними, якщо цікавить поведінка коливань поверхні, а не абсолютне значення амплітуди. Тоді для повної конкретизації математичної моделі достатньо задати умови на межах середовищ, використовуючи як ілюстрацію фізичної ситуації Рис. 2.1.3, на якому $\vec{n}, \vec{\tau}_x, \vec{\tau}_y$ - миттєві нормальні та дотичні одиничні вектори супутньої декартової системи координат у точці $(x, y, a + \chi)$ на поверхні плівки:



Рис. 2.1.3 Збурення поверхні розділу двох рідин

На нижній межі плівки розглядатимемо умови контакту в'язкої рідини з твердою поверхнею або з навколишнім непровідним середовищем. Найбільш поширеною на твердій поверхні є умова прилипання, хоча вона не завжди адекватно відображає фізичну картину, особливо у разі незмочуваних поверхонь (незмочуючих рідин). Питання правомочності цієї умови для дотичних складових швидкості неодноразово ставилося, починаючи зі Стокса (1845), Ламба (1947), Жуковського (1948). В огляді [533] показано, що при незмочуваній твердій поверхні можливе помітне прослизання рідини. Хапфель і Бреннер [386] вважають, що найбільш правдоподібною є гіпотеза: дотична складова швидкості рідини щодо твердого тіла в точці на його поверхні пропорційна дотичним напруженням у цій точці з постійною

β' , званою коефіцієнтом тертя ковзання. Передбачається, що β' залежить тільки від природи рідини та твердої поверхні. Про застосування в різних завданнях руху в'язких рідин умов ковзання на стінці в різний час йшлося в роботах Серріна [353], Богоряда [54] та ін. В останній дано математичне обґрунтування умови часткового ковзання.

Питання обчислення ковзання рідини на твердій поверхні непросте і останнім часом робилися спроби визначення ковзання в різних фізичних ситуаціях:

- з використанням двоментної граничної умови в лінійному за кількістю Кнудсена наближенні обчислена швидкість ковзання неоднорідного за температурою та масовою швидкістю розрідженого газу вздовж твердої сферичної поверхні¹,
- чисельно визначався аеродинамічний опір автомобіля, вирішуючи рівняння Нав'є-Стокса з граничною умовою прослизання замість умови прилипання²,
- оглядові роботи з мікрогідродинаміки умови прилипання та експериментальним дослідженням ковзання на межі з твердою поверхнею^{3,4}.

Течія плоских плівок по твердій поверхні нестійка, навіть у лінійному наближенні побудувати коректну теорію неможливо внаслідок гістерези кута контакту, можливого відриву потоку від поверхні тощо. [453]. На верхній поверхні плівки розглянемо такі граничні умови. У відсутність ковзання середовищ покладемо на збуреній поверхні $z = a + \chi(x, y, t)$.

¹ Латышев А. В., Попов В. Н., Юшканов А. А. Вычисление скорости скольжения разреженного газа вдоль твердой сферической поверхности с учетом коэффициентов аккомодации.- Прикладная механика и техническая физика.- 2004.- Т. 45, № 1.

² Hoffmann J., Johnson C. Computational Turbulent Incompressible Flow.- Springerю-2007.- 397 p.

³ Lauga E., Brenner M.P., Stone H.A. Microfluidics: The no-slip boundary condition / Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics (ed. by Tropea C., Yarin A.L., Foss J.F.).- Springer, 2007.- 1557 p.

⁴ Neto C., Evans D.R., Bonaccorso E., Butt H.-J., Craig V.S.J., Williams D.R.M. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // Rep. Prog. Phys.- 2005.- Vol.68.- P.2859-2897

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2, \quad \tilde{v}_1 = \tilde{v}_2, \quad \tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \tilde{u}_1 \frac{\partial \chi}{\partial x} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \chi}{\partial y}. \quad (2.1.5)$$

У цій кінематичній умові використано позначення $\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}_0$, де \vec{v}_0 - незбурена швидкість, а \vec{v} - її збурення.

Динамічна умова межі розділу середовищ включає баланс дотичних і нормальних напруг, причому, за значної кривизни деформованої поверхні розділу слід врахувати капілярний тиск $p_\sigma = \sigma K_{cp}$, що визначається з використанням формул диференціальної геометрії для

середньої кривизни K_{cp} поверхні $z = a + \chi(x, y, t)$ в точці (x, y, t) [212]:

$$K_{cp} = \frac{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (2.1.6)$$

У лінійному наближенні (2.1.6) збігається з отриманим Л.Д. Ландау [232] вирішенням варіаційної задачі про мінімум повної вільної енергії для випадку малих відхилень межі від рівноважного стану. Цей вираз не містить членів парних порядків, чим можна тлумачити причину успішного застосування лінійного наближення при вирішенні слабонелінійних задач. В умові динамічної рівноваги поверхні у лінійному наближенні можна спроектувати всі сили на незбурну поверхню $z=a$.

Якщо ж необхідно враховувати значну амплітуду збурень, коли вектори нормалі і дотичних до поверхні розділу середовищ істотно відхиляються від незбурених положень, необхідно проектувати напруги, що діють, на нормаль і дотичну площину в розглянутій точці. Орти дотичних і нормального векторів миттєвої супутньої декартової системи рівні [212]:

$$\vec{n} = \frac{\left\{ -\frac{\partial \chi}{\partial x}, -\frac{\partial \chi}{\partial y}, 1 \right\}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2}}, \quad \vec{\tau}_x = \frac{\left\{ 1, 0, \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2}}, \quad \vec{\tau}_y = \frac{\left\{ 0, 1, \frac{\partial \chi}{\partial y} \right\}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2}}. \quad (2.1.7)$$

З урахуванням (2.1.7) миттєві сили, що діють на елементарну поверхню з нормаллю \vec{n} , визначаються такими виразами складових гідродинамічних напруг:

$$\begin{aligned} p_{nn} &= n_x p_{nx} + n_y p_{ny} + n_z p_{nz}, \quad p_{tx} = \tau_{xx} p_{nx} + \tau_{xy} p_{ny} + \tau_{xz} p_{nz}, \quad p_{ty} = \tau_{yx} p_{nx} + \tau_{yy} p_{ny} + \tau_{yz} p_{nz}, \\ p_{nx} &= n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx}, \quad p_{ny} = n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy}, \quad \vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}, \\ p_{nz} &= n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz}, \quad \vec{\tau}_x = \{\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}\}, \quad \vec{\tau}_y = \{\tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz}\}. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Необхідно врахувати вирази для компонентів тензора напруг:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad p_{xy} = p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad p_{yz} = p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad p_{xz} = p_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

де індекси $j=1,2$ і тильди опущені для простоти, оскільки вирази ідентичні. Тут p є статичним тиском, μ -коефіцієнтом динамічної в'язкості. Враховуючи наведені вирази, а також електромагнітні та гравітаційні сили, умови динамічної рівноваги межі розділу середовищ запишемо у вигляді

$$\left[p_m \right]_2^1 + \left[\rho \right]_2^1 g n_z \chi + \left[f \right]_2^1 n_z \chi = \sigma K_\varphi, \quad (2.1.9)$$

$$\left[p_{tx} \right]_2^1 + \left[\rho \right]_2^1 g \tau_x \chi + \left[f \right]_2^1 \tau_x \chi = 0, \quad \left[p_{ty} \right]_2^1 + \left[\rho \right]_2^1 g \tau_y \chi + \left[f \right]_2^1 \tau_y \chi = 0,$$

де $\left[\right]_2^1$ означає стрибок відповідного параметра середовища межі. Наприклад, $\left[\rho \right]_2^1 = \rho_1 - \rho_2$. З урахуванням (2.1.6)-(2.1.9) можна записати умову локальної динамічної рівноваги збуреної межі розділу середовищ $z = a + \chi(x, y, t)$ у досить загальному вигляді. У проєкції на нормаль до поверхні розділу середовищ, на дотичну площину у напрямку x та у проєкції на дотичну площину у напрямку y , відповідно:

$$\begin{aligned} & (p_2 - p_1) \left[1 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} + 2 \left[1 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot \\ & \cdot \left[\frac{1}{2} \left[(\rho_1 - \rho_2) g \chi + \frac{1}{2} \mu_m H_z^2 \right] + \left[\mu_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) - \mu_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial \chi}{\partial y} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\mu_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \mu_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \chi}{\partial x} + \\
 & + \left[\mu_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \mu_1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} - \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} + \\
 & + \left(\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \Bigg\} = \sigma \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 + \right. \\
 & \quad \left. - 2 \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 \right], \tag{2.1.10} \\
 & \left[1 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 \right] \left[\mu_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) - \mu_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \right] + \left\{ 2 \left[\mu_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \right. \right. \\
 & + \mu_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) + \left[\mu_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) - \mu_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial \chi}{\partial y} \Bigg\} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \\
 & + \left[\mu_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - \mu_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial \chi}{\partial y} + \left[(\rho_1 - \rho_2) g \chi + \frac{1}{2} \mu_m H_z^2 \right] \cdot \\
 & \cdot \left\{ \left[1 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0, \\
 & \left[1 - \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] \left[\mu_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) - \mu_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \right] + \\
 & + \left[\mu_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) - \mu_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right] \frac{\partial \chi}{\partial x} \Bigg\} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \\
 & + \left[\mu_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - \mu_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \chi}{\partial x} + [(\rho_1 - \rho_2) g \chi + \\
 & + \frac{1}{2} \mu_m H_z^2] \left\{ \left[1 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0.
 \end{aligned}$$

Рівняння (2.1.10) істотно спрощуються для двовимірних збурень, коли $\partial/\partial y = 0$ чи $\partial/\partial x = 0$. В отриманих рівняннях локальної динамічної

рівноваги збуреної межі розділу середовищ можна виключити члени, що містять \bar{v}_{j0} і не містять \bar{v}_j , якщо врахувати граничні умови, що накладаються на незбурену систему:

$$z = a, \quad w_{10} = w_{20} = 0,$$

$$\mu_1 \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial y} + \frac{\partial v_{10}}{\partial x} \right) = \mu_2 \left(\frac{\partial u_{20}}{\partial y} + \frac{\partial v_{20}}{\partial x} \right), \quad \mu_1 \frac{\partial u_{10}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_{20}}{\partial z},$$

$$\mu_1 \frac{\partial v_{10}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial v_{20}}{\partial z}, \quad p_{10} = p_{20} + 2 \left(\mu_1 \frac{\partial w_{10}}{\partial z} - \mu_2 \frac{\partial w_{20}}{\partial z} \right).$$

Як видно, у загальному вигляді математична модель фізичної системи є громіздкою і мало придатною для практичних розрахунків. У більшості випадків використовуються різні спрощені лінійні та порівняно прості нелінійні математичні моделі [95, 231, 377, 400], а системи типу (2.1.10) служать як вихідні при виведенні спрощених систем рівнянь, заснованих на використанні додаткових відомостей та гіпотез про характер явищ.

Лінеаризовані граничні умови

У разі малоамплітудних збурень системи значне спрощення її математичної моделі дає процедура лінеаризації граничних умов та рівнянь. Так, для лінеаризації граничних умов (2.1.5), (2.1.10) необхідно розкласти в них функції в околі $z=a$ в ряди за степенями малого параметра (наприклад χ), і відкинути члени другого і вищих порядків:

$$z = a, \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2, \quad w_1 = w_2 = \frac{\partial \chi}{\partial t} + u_{j0} \frac{\partial \chi}{\partial x} + v_{j0} \frac{\partial \chi}{\partial y};$$

$$p_1 = p_2 + (\rho_1 - \rho_2) g \chi + \frac{\mu_m}{2} H_z^2 + 2 \left(\mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} - \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) - \sigma \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right);$$

$$2 \left[2 \left(\mu_2 \frac{\partial u_{20}}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial u_{10}}{\partial x} \right) + \left(\mu_2 \frac{\partial v_{20}}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial v_{10}}{\partial y} \right) \right] - \mu_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) +$$

$$+ \mu_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \frac{\mu_m}{2} H_z^2 \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0, \quad \mu_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - \mu_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) +$$

$$2 \left[2 \left(\mu_2 \frac{\partial v_{20}}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial v_{10}}{\partial y} \right) + \left(\mu_2 \frac{\partial u_{20}}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial u_{10}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\mu_m}{2} H_z^2 \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0,$$

Аналогічним чином лінеаризується система рівнянь (2.1.4):

$$\begin{aligned} \rho_j \frac{\partial v_j}{\partial t} + (2-j)(\bar{v}_0 \nabla \bar{v}_j + \bar{v}_j \nabla \bar{v}_0) + \nabla \left(p_j + \frac{2-j}{2} \mu_m H^2 \right) &= \mu_j \Delta \bar{v}_j, \\ \operatorname{div} \bar{v}_j &= 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \bar{v}_0 \nabla H = v_m \Delta H. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Система рівнянь (2.1.12) та умов (2.1.11) дає лінеаризоване крайове завдання для визначення параметричних коливань плівки провідної рідини в полі вертикальної електромагнітної хвилі. При цьому, оскільки, як випливає з (2.1.4), в останніх двох рівняннях системи (2.1.11) складові електромагнітної сили мають другий порядок малості, їх можна опустити, після чого граничні умови для провідного та непровідного середовищ будуть ідентичними.

Умови на інших границях розділу вже частково обговорювалися і далі будуть конкретизовані для аналізованих фізичних ситуацій. Для жорсткої межі $z=0$ задаються умови згасання збурень. Якщо $z=0$ - вільна поверхня, на ній задають умови типу (2.1.11). Аналогічні граничні умови мають місце на верхній поверхні шару непровідного середовища: при значній товщині шару збурення в ньому повністю гасяться. При малій товщині шару ця умова буде при контакті непровідного середовища з твердою поверхнею.

Початкові умови

У завданнях про поширення збурень (хвиль) не завжди можливе адекватне трактування початкових умов і, крім того, часто важливо знати не абсолютну величину обурення, а швидкість його наростання в часі та (або) у просторі. Тому, як правило, використовуються однорідні початкові умови:

$$t = 0, \quad \bar{v}_j = 0, \quad p_j = 0, \quad \chi = 0. \quad (2.1.13)$$

Неоднорідні початкові умови зазвичай призводять до більш громіздких результатів, які, проте, не мають істотної якісної відмінності проти випадку однорідних умов, тому їх використання багатьма визнається недоцільним. Рівноважний стан низки реальних фізичних систем з достатньою точністю описується порівняно простими наближеними функціями, унаслідок чого математична модель типу (2.1.1)-(2.1.13) суттєво спрощується і нелінійні задачі успішно

вирішуються за допомогою ЕОМ. Приклади таких задач розглянуті нижче.

2.2 Збудження коливань поверхні плівки вертикальною електромагнітною хвилею

Розглянемо задачу збудження малоамплітудних коливань поверхні плівки за допомогою вертикальної прогресивної електромагнітної хвилі виду (2.1.3), використовуючи вищенаведені лінеаризовані рівняння та крайові умови. При цьому для зручності розв'язання задачі та підвищення її загальності зведемо крайову задачу до безрозмірного (критеріального) виду.

Безрозмірний вид крайової задачі

Виберемо за характерні масштаби довжини, швидкості, часу, тиску і напруженості електромагнітного поля величини $b, u_0, b/u_0, \rho_1 u_0^2, H_0$, відповідно, і покладемо для простот $u_0 = const$. Тоді (2.1.11)-(2.1.13) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v}_j = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} + (2-j) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \rho_{1j} \frac{\partial}{\partial x} \left(p_j + \frac{2-j}{2} Al \cdot H^2 \right) &= \frac{1}{\operatorname{Re}_j} \Delta u_j, \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} + (2-j) \frac{\partial v_j}{\partial x} + \rho_{1j} \frac{\partial}{\partial y} \left(p_j + \frac{2-j}{2} Al \cdot H^2 \right) &= \frac{1}{\operatorname{Re}_j} \Delta v_j, \\ \frac{\partial w_j}{\partial t} + (2-j) \frac{\partial w_j}{\partial x} + \rho_{1j} \frac{\partial p_j}{\partial x} &= \frac{1}{\operatorname{Re}_j} \Delta w_j, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right); \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

крайові умови:

$$z = \varepsilon, \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_2, \quad w = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial x}; \quad \mu_{j1} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial z} \right) = idem, \quad \mu_{j1} \left(\frac{\partial w_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial z} \right) = idem, \\ p_1 = p_2 + \frac{1-\rho_{21}}{Fr^2} \chi + \frac{Al}{2} H_m^2 - \frac{1}{We} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{\operatorname{Re}_1} \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\rho_{21}}{\operatorname{Re}_2} \frac{\partial w_2}{\partial z} \right); \quad (2.2.2)$$

$$z=0, \quad \vec{v}_1=0; \quad z=\gamma, \quad \vec{v}_2=0; \quad (2.2.3)$$

$$t=0, \quad \vec{v}_j=0, \quad p_j=0, \quad \chi=0, \quad H=H_0, \quad (2.2.4)$$

де $Al = \mu_m H_0^2 / (\rho_i u_0^2)$, $Fr = u_0 / \sqrt{gb}$, $We = \rho_i b u_0^2 / \sigma$, $Re_j = u_0 b / \nu_j$, $Re_m = u_0 b / \nu_m$ - безрозмірні критерії Альфвена, Фруда, Вебера, Рейнольдса, та магнітне число Рейнольдса, відповідно, соответственно; $H_0 = H(0)$, i - безрозмірна сумарна товщина шарів провідного та непровідного середовищ, $\varepsilon = a/b$, $\rho_{ij} = \rho_i / \rho_j$, $\mu_{j1} = \mu_j / \mu_1$, $j=1,2$. З метою спрощення запису позначення безрозмірних величин залишені ті ж, що й для відповідних розмірних величин. Перша гранична умова (2.2.3) відповідає плівці, що розтікається по твердій поверхні. Для вільної плівки натомість цієї умови необхідно і при $z=0$ розглядати граничну умову виду (2.2.2). Оскільки $u_a = H_0 \sqrt{\mu_m / \rho_1}$ - швидкість поширення хвиль Альфвена, число Альфвена можна також розглядати у вигляді відношення характерних швидкостей: $Al = u_a^2 / u_0^2$.

Параметри електромагнітної хвилі

З урахуванням викладеного та виразу (2.1.3) з останнього рівняння системи (2.2.1) отримаємо

$$H_m = H_{m0} \exp\left\{-\left[ik + (m^2 + k^2)/Re_m\right]t\right\} \quad (2.2.5)$$

де $H_{m0} = H_m(0)$, $k = k_r + ik_i$, $m = m_r + im_i$.

Беручи до уваги вираз $H_z = H_{m0} \exp i(kx + my - \omega t)$ та враховуючи (2.2.5), отримаємо дисперсійне співвідношення виду $\omega = k - i(m^2 + k^2)/Re_m$:

$$\omega_r = k_r + 2 \frac{m_r m_i + k_r k_i}{Re_m}, \quad \omega_i = k_i + \frac{m_i^2 + k_i^2 - m_r^2 - k_r^2}{Re_m} \quad (2.2.6)$$

звідки дійсна частина напруженості електромагнітного поля

$$H_r = H_{m0} \exp(\omega t - m_i y - k_i x) \cos(k_r x + m_r y - \omega_r t). \quad (2.2.7)$$

У загальному випадку (2.2.7) описує прогресивну електромагнітну хвилю, що розповсюджується за двома просторовими координатами (по кожній - зі своєю швидкістю) та експоненційно наростаючу (або загасаючу) за амплітудою у просторі та (або) часі.

Якщо

$\omega = m_i^2 + k_i^2 + k_i \text{Re}_m < m_r^2 + k_r^2$, то $\omega_i < 0$ при $t < \text{Re}_m (m_i y + k_i x) / (k_i \text{Re}_m + m_i^2 + k_i^2 - m_r^2 - k_r^2)$.

Якщо

$\omega = m_i^2 + k_i^2 + k_i \text{Re}_m > m_r^2 + k_r^2$, то $\omega_i > 0$ при $t > \text{Re}_m (m_i y + k_i x) / (k_i \text{Re}_m + m_i^2 + k_i^2 - m_r^2 - k_r^2)$.

Фазові та групові швидкості хвиль, що біжать по x і y з урахуванням (2.2.6), (2.2.7) рівні, відповідно:

$$c_x^H = 1 + 2 \frac{m_i m_i + k_r k_i}{k_r \text{Re}_m}, \quad c_y^H = \frac{k_r}{m_r} c_x^H, \quad C_x^H = 1 + \frac{2k_i}{\text{Re}_m}, \quad C_y^H = \frac{2m_i}{\text{Re}_m}. \quad (2.2.8)$$

Важливою характеристикою магнітного поля, що біжить, є ковзання, $s^H = (|\vec{c}^H| - |\vec{v}|) / |\vec{c}^H|$, де $\vec{c}^H = \{c_x^H, c_y^H\}$, оскільки взаємний вплив електромагнітного і гідродинамічного полів визначається числом Рейнольдса виду $\text{Re}_{ms} = \text{Re}_m \cdot s^H$. Аналіз виразів (2.2.8) показує, що при $k_r m_r > 0$ хвилі по x і y поширюються у позитивному напрямі, якщо $\text{Re}_m + 2m_i m_r / k_r > -k_i$. Якщо $m_i = k_i = 0$, то для $\forall t > 0$ має місце спад амплітуди хвилі, причому, $c_x^H = 1$, $c_y^H = k_r / m_r$, $\omega_i = -(m_r^2 + k_r^2) / \text{Re}_m$, звідки слідує, що зі зменшенням довжини хвилі (збільшенням k_r, m_r) різко посилюється згасання амплітуди в часі, і енергія хвилі передається тільки по одній координаті x .

Аналогічний вплив має магнітне число Рейнольдса: зі спаданням Re_m фазова швидкість поширення електромагнітних хвиль зростає і у разі нескінченно великої електропровідності середовища вона обертається на нескінченність, при цьому групова швидкість (швидкість передачі енергії хвиль) також нескінченно зростає. Швидкості переміщення гребенів електромагнітних хвиль пов'язані співвідношенням

$$v_y^H + k_i / m_i \cdot v_x^H = \omega_i / m_i. \quad (2.2.9)$$

На підставі (2.2.6)-(2.2.9) не важко показати, що у разі розповсюдження коротких хвиль по x або y їх згасання в часі ідентичне, тоді як швидкість руху хвилі в першому випадку відрізняється на величину швидкості незбуреного руху плівки (в даному разі на 1). Фазові швидкості довгих хвиль значно більші, ніж коротких: $c_x^H \sim m_r$, $c_y^H \sim k_r$.

Для коротких хвиль, при $k_r = m_r$ виходить $c_{x,y}^H = 1 + 2 \frac{m_i + k_i}{\text{Re}_m}$ і декремент

затухання хвиль в часі удвічі перевершує відповідну величину для попереднього випадку.

При $m_i \gg 1, k_i \gg 1$, відповідно:

$$c_x^H \sim c_y^H \sim 2 \frac{m_i}{\text{Re}_m}, \quad C_y^H \gg C_x^H, \quad C_y^H = \frac{2m_i}{\text{Re}_m};$$

$$c_x^H \sim c_y^H \sim 2 \frac{k_i}{\text{Re}_m}, \quad C_x^H \gg C_y^H, \quad v_x^H \sim \frac{k_i}{\text{Re}_m}, \quad v_y^H \sim \frac{m_i}{\text{Re}_m},$$

звідки випливає, що швидкість поширення гребенів постійної амплітуди вдвічі менша за фазові швидкості хвиль, а групова швидкість по одній з координат збігається з фазовою і суттєво перевищує таку по іншій координаті, тобто енергія хвилі має переважний напрямок поширення, незважаючи на те, що фазові швидкості хвиль по x та y одного порядку.

Встановлені зв'язки параметрів електромагнітних хвиль важливі для аналізу їх впливу на провідне середовище та для вибору керуючих полів, що забезпечують досягнення заданої поведінки суцільного середовища, наприклад, рідкометалевої плівки. Так, проведений аналіз показує, що коротка електромагнітна хвиля незмінної по x, y амплітуди можлива лише у разі різкого зменшення у часі, тобто вона подібна до пачки імпульсів з крутим заднім фронтом виду $\exp(-k_r^2 t / \text{Re}_m)$.

Розв'язання крайової задачі

Вважаючи збурення малоамплітудними, можна розв'язувати крайову задачу (2.2.1)-(2.2.4), розшукуючи лінійний відгук системи на зовнішній вплив. Виходячи з принципу суперпозиції, збуджувані електромагнітною хвилею (2.1.3) поверхневі хвилі в плівці пропорційні $\exp 2i(kx + my)$ з відповідними амплітудами-функціями часу. При цьому граничні умови по x, y ставити не потрібно, параметри середовища зазнають збурення аналогічного виду з тією різницею, що їхня амплітуда залежить ще й від вертикальної координати z . Такий підхід неприйнятний, коли амплітуда хвиль досягає значної величини та виявляються нелінійні ефекти.

У разі хвиль скінченної та великої амплітуди, про які йтиметься надалі, зазвичай найбільш широкою в спектрі параметрично збуджуваних коливань поверхні рідини є область, що відповідає першій

гармоніці, що має частоту, рівну половині частоти зовнішньої змушуючої (керуючої) сили, про що свідчать численні дані різних авторів [279].

Розв'язок крайової задачі (2.2.1)-(2.2.4) зручно розшукувати з використанням методів інтегральних перетворень [375]. Застосуємо до системи диференціальних рівнянь (2.2.1) перетворення Лапласа за часом, врахуємо вищевикладене, початкові умови (2.2.4) та отримаємо систему диференціальних рівнянь у зображеннях:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_1}{dz^2} - 4(k^2 + m^2)Q_1 &= \operatorname{Re}_1 \left[(s + 2ik)Q_1 + iq(2P_1 + Al \cdot \bar{H}_m^2) \right], \\ \frac{d^2 Q_2}{dz^2} - 4(k^2 + m^2)Q_2 &= \operatorname{Re}_2 \left[(s + 2ik)Q_2 + 2iq\rho_{12}P_2 \right], \\ \frac{dW_j}{dz} &= -2i(kU_j + m \cdot V_j), \quad \frac{d^2 W_j}{dz^2} - 4(k^2 + m^2)W_j = \operatorname{Re}_j \left[(s + 2ik)W_j + \rho_{1j} \frac{dP}{dz} \right], \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

де $\{U, V, W\}(s), P(s), \bar{H}_m(s)$ - трансформи Лапласа функцій $\{u, v, w\}(t), p(t), H_m(t)$, функція $H_m(t)$ визначається за формулою (2.2.5), s - параметр інтегрального перетворення. Друге та четверте рівняння системи (2.2.10) представлені для простоти запису у комплексній символічній формі: $Q_1 = V_1, Q_2 = V_2$ при $q = m$, $Q_1 = U_1, Q_2 = U_2$ при $q = k$.

Крайові умови (2.2.2), (2.2.3) у зображеннях мають вигляд:

$$z = 0, \quad U_1 = V_1 = W_1 = 0; \quad z = \gamma, \quad U_2 = V_2 = W_2 = 0; \quad (2.2.11)$$

$$z = \varepsilon, \quad P_1 = P_2 + \frac{Al}{2} \bar{H}_m^2 + \left(\frac{1 - \rho_{21}}{Fr^2} + 4 \frac{m^2 + k^2}{We} \right) Z + \frac{2}{\operatorname{Re}_1} \left(\frac{dW_1}{dz} - \mu_{21} \frac{dW_2}{dz} \right), \quad (2.2.12)$$

$$\frac{dQ_1}{dz} + 2iqW_1 = \mu_{21} \left(\frac{dQ_2}{dz} + 2iqW_2 \right), \quad U_1 = U_2, \quad V_1 = V_2, \quad W_1 = W_2 = (s + 2ik)Z,$$

де $Z(s)$ - Лаплас-трансформа амплітуди збурення поверхні плівки $\zeta(t)$.

Рішення крайової задачі у зображеннях (2.2.10)-(2.2.12) не становить важливих труднощів, але воно громіздке і зворотній перехід від зображень функцій до їх оригіналів вимагає застосування чисельних методів. При цьому для вільної плівки (не обмеженої твердою поверхнею), плівки, оточеної рідким або газоподібним середовищем зверху та знизу, граничні умови (2.2.11) замінюються умовами типу (2.2.12), внаслідок чого рішення ускладнюється.

Для зручності аналізу розглянутого класу задач параметричного збудження і придушення коливань поверхонь плівок електропровідної рідини в непровідних середовищах і виявлення основних їх закономірностей розглядаються коротковолнові хвилі при $k=m$. Такий випадок важливий для практики створення перспективних плівкових МГД-грануляторів, які розглядаються в останньому розділі, де приводяться дані про винаходи та впровадження пристроїв. Сказане дозволяє істотно спростити задачу і система (2.2.10) дає

$$\frac{d^4 W_j}{dz^4} - (8k^2 + q_j^2) \frac{d^2 W_j}{dz^2} + 8k^2 q_j^2 W_j = 0,$$

де $q_j^2 = 8k^2 + (s + 2ik) \operatorname{Re}_j$, $j = 1, 2$.

Рішення отриманої системи має вид $W_j = d_{jn} \exp(g_{jn} z)$, де для кожного значення j окремо береться сума за "німим" індексом $n = \overline{1, 4}$. Величини g_{jn} мають наступний вид

$$g_{j1} = 2\sqrt{2}k, \quad g_{j3} = -g_{j1}, \quad g_{j2} = q_j, \quad g_{j4} = -q_j. \quad (2.2.13)$$

Константи інтегрування d_{jn} визначимо, підставивши вираз функції $W_j(z)$ в граничні умови (2.2.11), (2.2.12) і враховуючи рівняння (2.2.10). Виходить у лінійному наближенні $U_j = V_j \sim dW_j / dz$, а для d_{jn} маємо лінійну алгебраїчну систему восьмого порядку:

$$\begin{aligned} d_{1n} g_{1n} &= 0, \quad d_{1n} \exp(g_{1n} \varepsilon) = (s + 2ik) Z, \quad d_{2n} \exp(g_{2n} \varepsilon) = (s + 2ik) Z, \\ d_{1n} g_{1n} &= d_{2n} g_{2n} \exp[(g_{2n} - g_{1n}) \varepsilon], \quad d_{2n} g_{2n} \exp(g_{2n} \gamma) = 0, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$d_{1n} (g_{1n}^2 + 8k^2) = \mu_{21} d_{2n} (g_{2n}^2 + 8k^2), \quad \sum_{n=1}^4 d_{jn} = 0, \quad d_{2n} \exp(g_{2n} \gamma) = 0.$$

Після визначення d_{jn} функцію $z(s)$ можна визначити з урахуванням (2.2.10) із останнього рівняння (2.2.12). Рішення системи (2.2.14) з урахуванням виразів (2.2.13) виконується так. Виключають два рівняння, що містять d_{1n} і d_{2n} і вирішують систему, що залишилася з 6 рівнянь рахуючи d_{14}, d_{24} параметрами, після чого d_{j4} визначають із

системи двох рівнянь. Матриця першої підсистеми має вигляд $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, де A, B - ненульові квадратні матриці третього порядку (дві інших - нульові), а

також C - стовпець вільних членів. Така матриця дозволяє легко обчислити як основний, так і додаткові визначники шляхом зведення до добутку відповідних визначників третього порядку. В результаті викладеного: $d_{ij} = \Delta_{ij} / \Delta_i$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$;

$$d_{i4} = \frac{A_1(q_{3-i}^2 + 8k^2)\mu_{2i} - A_2q_{3-i}}{q_1\mu_{21}(q_2^2 + 8k^2) - q_2(q_1^2 + 8k^2)} \exp(q_i\varepsilon), \quad (2.2.15)$$

де основні і допоміжні визначники мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2\{g_{11}[\exp(q_1\varepsilon) - ch(g_{11}\varepsilon)] - q_1 \cdot sh(g_{11}\varepsilon)\}, \\ \Delta_2 &= 2\{\exp(q_2\gamma)[g_{11}ch(g_{11}(\varepsilon - \gamma)) + q_2sh(g_{11}(\varepsilon - \gamma))] - g_{11} \cdot \exp(q_2\varepsilon)\}, \\ \Delta_{11} &= 2d_{14}[q_1ch(q_1\varepsilon) - g_{11}sh(q_1\varepsilon) - q_1 \exp(-g_{11}\varepsilon)] - (q_1 + g_{11})(s + 2ik)Z, \\ \Delta_{12} &= 2\{g_{11}[(s + 2ik)Z + d_{14}(ch(g_{11}\varepsilon) - \exp(-q_1\varepsilon))] - q_1d_{14}sh(g_{11}\varepsilon)\}, \\ \Delta_{13} &= (q_1 - g_{11})(s + 2ik)Z + d_{14}[q_1(\exp(g_{11}\varepsilon) - ch(q_1\varepsilon)) - g_{11}sh(q_1\varepsilon)], \\ \Delta_{21} &= (q_2 + g_{11})\exp[(q_2 - g_{11})\gamma](s + 2ik)Z + \\ &+ 2\{[g_{11}sh(q_2(\varepsilon - \gamma)) - q_2ch(q_2(\varepsilon - \gamma))]\exp(-\gamma g_{11}) + q_2 \exp(-\varepsilon g_{11})\}d_{24}, \\ \Delta_{22} &= 2\{[q_2 \exp(-\gamma q_2)sh(g_{11}(\varepsilon - \gamma)) + g_{11}(\exp(-\varepsilon q_2) - \exp(-\gamma q_2) \cdot \\ &\cdot ch(g_{11}(\varepsilon - \gamma)))] \cdot d_{24} - g_{11}(s + 2ik)Z\}, \\ \Delta_{23} &= 2\{\exp(\varepsilon g_{11})[q_2ch(g_{11}(\gamma - \varepsilon)) - g_{11}sh(q_2(\gamma - \varepsilon))] - q_2 \exp(g_{11}\varepsilon)\} \cdot \\ &\cdot d_{24} + (s + 2ik)\exp[(q_2 + g_{11})\gamma](g_{11} - q_2)Z, \\ A_1 &= g_{11}[\exp(g_{11}\varepsilon)(d_{11} - d_{12}) + \exp(-g_{11}\varepsilon)(d_{23} - d_{13})] + q_1 \exp(q_1\varepsilon)d_{12} - q_2 \exp(q_2\varepsilon)d_{22}, \\ A_2 &= 16k^2[\exp(g_{11}\varepsilon)(\mu_{21}d_{21} - d_{11}) + \exp(-g_{11}\varepsilon)(\mu_{21}d_{23} - d_{13})] + \\ &+ \mu_{21}(q_2^2 + 8k^2)\exp(q_2\varepsilon)d_{22} - (q_1^2 + 8k^2)\exp(q_1\varepsilon)d_{12}. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Зважаючи на громіздкість отриманих виразів (2.2.15), (2.2.16) на цьому етапі доцільно для кожної конкретної фізичної ситуації провести оцінку членів, що спрощує задачу. І далі вести її рішення в кожному випадку окремо, що дозволяє ефективно застосувати аналітичні методи.

Розглянемо для прикладу одну із таких ситуацій: $1/\gamma \ll k_r \ll 1/\varepsilon$, де k_r - дійсна частина хвильового числа k . Така умова охоплює досить широку область хвильових чисел і відповідний клас хвильових процесів може мати місце у багатьох практичних ситуаціях. Діапазон зміни γ відповідно до викладеного приймемо $\gamma = (10^2 \div 10^4)\varepsilon$, тому

$\sim (10^{-3} \div 10^{-1}) \ll k_r \ll -1$. Оскільки $\varepsilon k_r \ll 1$, $(\gamma - \varepsilon)k_r \gg 1$, то $ch(\gamma - \varepsilon)q \approx 0.5 \exp[(\gamma - \varepsilon)q]$. Аналогічним чином зробити спрощення і в інших виразах, після чого з (2.2.15), (2.2.16) виходить:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= g_{11} \varepsilon^2 (s + 2ik) \operatorname{Re}_1, \quad d_{i4} = \Delta_{i4} / \Delta, \quad d_{ij} = \Delta_{ij} / \Delta, \quad i=1,2, \quad j=1,2,3; \\ \Delta &= (1 - q_2 \varepsilon) q_1 g_{11} \varepsilon^5 \left[\frac{\operatorname{Re}_1}{2(g_{11} - q_2)} (2q_2 - g_{11})(8k^2 + q_1^2)(s + 2ik) + 8k^2 \mu_{21} q_1^2 g_{11} \varepsilon \right], \\ \Delta_{14} &= (1 + q_1 \varepsilon)(1 - q_2 \varepsilon) \varepsilon^2 (s + 2ik) Z \cdot \left[8k^2 \mu_{21} (g_{11} + q_1) + \frac{\operatorname{Re}_1}{2(g_{11} - q_2)} (2q_2 - g_{11})(s + 2ik) \right], \\ \Delta_{24} &= q_1 \varepsilon^3 (1 + q_1 \varepsilon) \left[(q_1 + g_{11})(8k^2 + q_1^2) - g_{11}^2 q_2^2 \varepsilon \right] (s + 2ik) Z, \\ \Delta_2 &= (g_{11} - q_2) \exp[(g_{11} + q_2)\gamma - g_{11} \varepsilon], \quad \Delta_{12} = g_{11} (s + 2ik) (2Z - \operatorname{Re}_1 \varepsilon^2 d_{14}), \\ \Delta_{11} &= q_1 \varepsilon^2 (g_{11}^2 + q_1^2) d_{14} - (g_{11} + q_1)(s + 2ik) Z, \quad \Delta_{13} = (q_1 - g_{11}) [(s + 2ik) Z - q_1 (q_1 + g_{11}) d_{14} \varepsilon^2], \\ \Delta_{21} &= (q_1 + g_{11}) \exp[(q_2 - g_{11})\gamma] [(s + 2ik) Z + (q_2 \varepsilon - 1) d_{24}] + 2q_2 (1 - g_{11} \varepsilon) d_{24}, \\ \Delta_{22} &= [2g_{11} \exp(-q_2 \varepsilon) + (g_{11} \varepsilon - 1)(q_2 + g_{11}) \exp[(g_{11} - q_2)\gamma]] d_{24} - 2g_{11} (s + 2ik) Z, \\ \Delta_{23} &= (q_2 - g_{11}) \exp[(g_{11} + q_2)\gamma] [(1 - q_2 \varepsilon) d_{24} - (s + 2ik) Z]. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

І далі з останнього рівняння системи (2.2.12) з урахуванням отриманих виразів (2.2.17) слідує рівняння для Лаплас-образу $Z(s)$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\mu_{12} \rho_{21}^2 \operatorname{Re}_1 (g_{11} + q_1)(s + 2ik)^2}{8k^2 (g_{11} - 2q_2)(g_{11} + q_2)} + 2q_1 \left(\frac{1 - \mu_{21}}{\operatorname{Re}_1} + \frac{s + 2ik}{8k^2} \right) + \right. \\ & + 2 \frac{16k^2 \rho_{21} (g_{11} + q_1) + (g_{11} - 2q_2)(g_{11} + q_2)}{(8k^2 + q_1^2)(g_{11} - 2q_2)(g_{11} + q_2) g_{11} \varepsilon} \cdot \left[(\mu_{21} - 1) \frac{8k^2}{\operatorname{Re}_1} - \right. \\ & \left. \left. -(s + 2ik) - \frac{\operatorname{Re}_1}{8k^2} (s + 2ik)^2 \right] \right\} Z = \frac{\operatorname{Re}_1}{\varepsilon^2} \left[\frac{Al}{2} \bar{H}_m^2 \varepsilon + \left(\frac{1 - \rho_{21}}{Fr^2} + \frac{8k^2}{We} \right) Z \right]. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Отримання тонких плівок можливе лише за досить високої швидкості течії рідини, коли інерційні сили суттєво перевищують сили тертя об площину, якою розтікається плівка, тому вважаємо, що $\operatorname{Re}_1 \gg 1$ (при $b = 10^{-3}$ м, $u_0 = 1$ м/с для більшості металевих розплавів це дає $\operatorname{Re}_1 \sim 10^3$) і вираз (2.2.18) після оцінки членів зведемо до наступного порівняно простого вигляду:

$$\left[\frac{s+2ik}{2\sqrt{\text{Re}_1}} + \frac{8k^2}{\varepsilon^2 \sqrt{s+2ik}} \left(\frac{1-\rho_{21}}{Fr^2} + \frac{8k^2}{We} \right) \right] Z = -\frac{4k^2 A l \bar{H}_m^2}{\varepsilon^2 \sqrt{s+2ik}}.$$

Здійснивши в отриманому виразі зворотнє перетворення Лапласа, матимемо інтегро-диференціальне рівняння, що описує параметричні коливання поверхні плівки, які збуджуються електромагнітним полем зі складовою z :

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} + 2ik\zeta + \frac{16}{\varepsilon^2} k^2 \sqrt{\text{Re}_1} \left(\frac{1-\rho_{21}}{Fr^2} + \frac{8k^2}{We} \right) \int_0^t \frac{\zeta(t-\tau) d\tau}{\sqrt{\pi\tau} \exp(2ik\tau)} = \\ = -\frac{8k^2}{\varepsilon^2} \sqrt{\text{Re}_1} A l \int_0^t \frac{H_m^2(t-\tau) d\tau}{\sqrt{\pi\tau} \exp(2ik\tau)}. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

При прийнятих припущеннях підінтегральні функції (2.2.19) є швидкоосцилюючими, внаслідок чого інтеграли малі, тому рівняння (2.2.19) усереднимо за другою схемою [379], в результаті чого з урахуванням (2.2.5) отримаємо усереднене диференціальне рівняння, рішення якого має вигляд:

$$\zeta = \frac{Ha\sqrt{Al} \left\{ \exp \left[-\frac{8k}{\varepsilon^2} \sqrt{k \text{Re}_1} \left(\frac{1-\rho_{21}}{Fr^2} + \frac{8k^2}{We} \right) t \right] - \exp \left(-\frac{4k^2}{\text{Re}_m} t \right) \right\}}{\left[\pm 2\sqrt{k \text{Re}_1} \left(\frac{1-\rho_{21}}{Fr^2} + \frac{8k^2}{We} \right) (1-i) - k \frac{\varepsilon^2}{\text{Re}_m} \right] \exp(2ikt)}. \quad (2.2.20)$$

Отримане наближене рішення (2.2.20) рівняння (2.2.19) досить близьке до точного на нескінченному інтервалі часу і його точність підвищується зі збільшенням k_r (у прийнятих припущеннях $k_r \ll 1/\varepsilon$).

Аналіз отриманого рішення (2.2.20) показує, що вертикальна електромагнітна хвиля виду (2.2.5) викликає збурення поверхні плівки, що має складову, подібну до хвилі збурюючої сили, і відмінну від неї. При k дійсному (швидкість поширення хвилі дорівнює швидкості руху плівки, $\text{Re}_{ms} = 0$) поверхнева хвиля одна (подібна на вигляд збурюючій

силі). При $\rho_{21} > 1 + \frac{8k^2}{Oh^2 \cdot Ga^2}$ можливе експоненціальне наростання

амплітуди коливань поверхні півки у часі, при $\rho_{21} < 1 + \frac{8k^2}{Oh^2 \cdot Ga^2}$ вплив другого середовища лише кількісний.

Амплітуда коливань поверхні півки, що викликаються електромагнітним полем, пропорційна $Ha\sqrt{Al}$, а параметричний резонанс системи досягається при (для простоти наведемо випадок дійсного k):

$$Re_1 = \frac{8Be[(1-\rho_{21})Ga^2 + 8k^2/Oh^2]^2}{k\varepsilon^2\{\varepsilon/Be \mp 8[(1-\rho_{21})Ga^2 + 8k^2/Oh^2]\}} \quad (2.2.21)$$

де Be, Ga, Oh - відповідно, числа Бетчелора, Галілея та Онезорге. Необхідно мати на увазі, що (2.2.21) справедливо при $Re_1 \gg 1$. В отриманій умові динамічний критерій Re_1 виражений через параметри системи та хвильове число k , $Be = v/v_m$, $Ga = \sqrt{gbb}/v$, $Oh = b\sqrt{\rho g/\sigma}$.

Для алюмінієвого розплаву практичний приклад: $\rho_1 = 2,4 \cdot 10^3$ кг/м³, $v = 1,21 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $v_m = 0,164$ м²/с, $\sigma = 0,5$ Н/м. Покладемо $\rho_2 = 10^3$ кг/м³, $\rho_1 = 2,4 \cdot 10^3$ кг/м³, $g=9,8$ м/с², $\varepsilon=1$, тоді $Be=7,4 \cdot 10^{-6}$, $\rho_{21}=0,42$. Аналіз формули (2.2.21) показує, що на відміну від вільного розпаду, що визначається числами Онезорге та Рейнольдса, тут зважаючи на $Be \ll 1$ параметричний резонанс визначається k , Be , Re_1 , Ga . З урахуванням умови $Re_1 \gg 1$ слідує вимога $Ga \gg 1/Oh$, що дає з (2.2.21) наступну формулу параметричного резонансу

$$Re_1 = \frac{8Be(1-\rho_{21})Ga^4}{k[1/Be \pm 8(1-\rho_{21})Ga^2]} \quad (2.2.21')$$

де «+» у знаменнику відповідає $\rho_{21} < 1$, а мінус - $\rho_{21} > 1$.

Результати розрахунків за формулами (2.2.21), (2.2.21') для наведених вище значень параметрів показано на Рис. 2.2.1, 2.2.2, звідки видно, що для електропровідної рідини два сімейства кривих біфуркують від одного, що відповідає непровідній рідині.

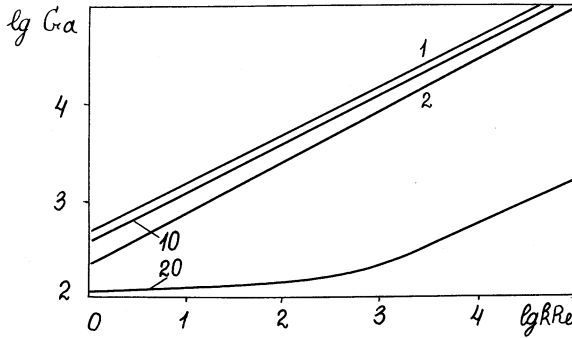


Рис. 2.2.1 Параметричний резонанс плівки провідної рідини при $Ga \gg 1/Oh$: криві 1, 2 біфуркують від 10 (непровідна рідина)

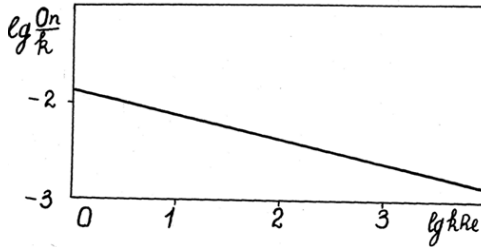


Рис. 2.2.2 Область втрати стійкості плівки у змінних: число Онезорге в залежності від числа Рейнольдса

Власні коливання системи, як видно з (2.2.19), мають вигляд $\zeta_* = \zeta_0 \exp\{[(\omega_* - 1)i \pm \omega_*]t\}$, де

$$\omega_* = \frac{8k}{\varepsilon^2} \sqrt{k \operatorname{Re}_1} \left(\frac{1 - \rho_{21}}{Fr^2} + \frac{8k^2}{We} \right), \quad (2.2.22)$$

звідки видно, що можливі власні коливання двох типів: наростаючі у часі та спадні. Причому процес наростання (зменшення) посилюється зі зростанням k і Re_1 . Тут $\zeta_0 = \zeta(0)$. Перепишемо вираз (2.2.20), враховуючи викладене та (2.2.22):

$$\zeta = Ha\sqrt{Al} \frac{4k [\exp(-\omega_* t) - \exp(-4k^2 t / Re_m)]}{\varepsilon^2 [\pm(1-i)\omega_* - 4k^2 / Re_m] \exp(2ikt)}, \quad (2.2.20')$$

звідки слід, що придушення власних коливань з хвильовим числом k і частотою ω_* можливе лише за допомогою поля, що біжить, має швидкість поширення, відмінну від швидкості руху плівки ($k_i \neq 0, Re_{ms} \neq 0$). Інакше і збудження, і придушення коливань вимагають великих витрат енергії (крім резонансу).

Вільна плівка у непровідному середовищі

У разі вільної плівки (не обмеженою твердою поверхнею), що розтікається у непровідному середовищі, при $z=0$ має бути розглянута гранична умова типу (2.2.2). А якщо частота поля настільки велика, що скін-шар значно тонший за плівку (раніше аналізувалися такі умови), то при $z=0$ граничні умови можуть бути подібні до розглянутих для твердої стінки у разі малих збурень. Вирішення зазначених крайових задач подібне до розглянутої і принципівих труднощів не представляє, проте через громіздкість одержуваних виразів зворотний перехід від зображень функцій до їх оригіналів може бути утруднений. Тому для аналізу особливостей цього класу задач корисно розглянути деякі конкретні фізичні ситуації, зокрема цікаві для МГД-диспергування і гранулювання.

Для простоти розглядається випадок $k=m$ і знехтування малого впливу навколишнього середовища. Як показано нижче, обидва припущення фізично виправдані, оскільки диспергатори нерідко поміщають у газову атмосферу або вакуум, а рівність хвильових чисел дає більш регулярний розпад на краплі рівних розмірів. Тоді з урахуванням викладеного аналогічно вищерозглянутому виходить

$$W_1 = d_n \exp(g_n z), \quad d_n = \frac{(g_1^2 + 4k^2)(s + 2ik)}{(g_1^2 - g_2^2)[\exp(2g_1 \varepsilon) - 1]} \exp[g_1(3-n)\varepsilon] \cdot Z(s),$$

$$d_{n+1} = \frac{(g_1^2 + 4k^2)(s + 2ik)}{(g_1^2 - g_2^2)[\exp(2g_2 \varepsilon) - 1]} \exp[g_2(3-n)\varepsilon] \cdot Z(s), \quad n=1,3$$

і рівняння Лаплас-зображення для обурення вільної поверхні плівки набуває вигляду:

$$\left[\frac{s+2ik}{g_2^2 - g_1^2} \left\{ \left(\frac{s-2ik}{4k^2} - \frac{3}{\text{Re}_1} \right) \left[g_1(g_2^2 + 4k^2) + g_2(g_1^2 + 4k^2) \right] + \frac{g_1^3(g_2^2 + 4k^2) + g_2^3(g_1^2 + 4k^2)}{4k^2 \text{Re}_1} \right\} + \frac{1}{Fr^2} + \frac{2k^2}{We} \right] Z(s) = -Al \cdot \bar{H}_m^2. \quad (2.2.23)$$

При $\text{Re}_1 \gg 1$ вираз (2.2.23) можна спростити, залишивши тільки члени порядку $1/\text{Re}_1$, що дає:

$$\left[\frac{s+2ik}{2ik} \sqrt{s^2 + 4k^2} + \frac{k(s+2ik)^{1.5}}{\text{Re}_1(2ik-5s)(s-2ik)^{1.5}} - \frac{1}{Fr^2} - \frac{2k^2}{We} \right] Z(s) = Al \cdot \bar{H}_m^2,$$

звідки після зворотного перетворення Лапласа виходить

$$\frac{d\zeta}{dt} + 2ik \left(1 - \frac{5k}{\text{Re}_1} \right) \zeta + \int_0^t (8k\tau - 7i) k^2 \frac{8i}{\text{Re}_1} \exp(2ik\tau) + \left(\frac{1}{Fr^2} + \frac{2k^2}{We} \right) J_0(2k\tau) \left] \frac{d\zeta(t-\tau) d\tau}{dt} = Al \frac{d}{dt} \int_0^t J_0(2k\tau) H_m^2(t-\tau) d\tau, \quad (2.2.24)$$

де $J_0(2k\tau)$ - функція Бесселя нульового порядку. При диференціюванні інтеграла зі змінною верхньою межею введено додаткову початкову умову: $t = 0$, $d\zeta / dt = 0$. Звідси видно, що при дійсному k вплив поля на збурення плівки незначний, особливо при $k \gg 1$, оскільки інтеграл у правій частині (2.2.24) швидко осцилюючий. Значить, права частина швидко прямує до нуля, і саме вона зумовлює параметричне накачування збурень плівки (ліва частина визначає власні коливання).

Рішення інтегро-диференціального рівняння отримано методом усереднення інтегро-диференціального оператора за першою схемою [379]. Усереднене рівняння виходить у вигляді

$$\gamma(t) \frac{d\zeta}{dt} + 2ik \left(1 - \frac{5k}{\text{Re}_1} \right) \zeta = Al \frac{d}{dt} \int_0^t J_0(2k\tau) H_m^2(t-\tau) d\tau, \quad (2.2.25)$$

де

$$\gamma(t) = 1 - \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{Fr^2} + \frac{2k^2}{We} \right) \int_0^{2kt} J_0(\tau) d\tau + \frac{8k}{\text{Re}_1} i \left[4k(i+2kt) \exp(2ikt) + 3,5(1 - \exp(2ikt)) \right].$$

Розв'язання усередненого рівняння має такий вигляд:

$$\zeta = A(t) \exp \left[2ik \left(1 - \frac{5k}{\text{Re}_1} \right) \int_0^t \frac{dt}{\gamma(t)} \right], \quad (2.2.26)$$

$$A(t) = \int_0^t \frac{B(t)}{\gamma(t)} \exp \left[2ik \left(\frac{5k}{\text{Re}_1} - 1 \right) \int_0^t \frac{dt}{\gamma(t)} \right] dt, \quad B(t) = Al \frac{d}{dt} \int_0^t J_0(2k\tau) H_m^2(t-\tau) d\tau.$$

Практичний приклад

Для аналізу отриманого рішення покладемо напруженість електромагнітного монотонного простору, тобто $k = \kappa i$, де κ - дійсне число (при $\kappa > 0$ напруженість поля спадає по x і y та зростає в часі, при $\kappa < 0$ - навпаки). Тоді функція $\gamma(t)$ набуває лише дійсних значень:

$$\gamma(t) = 1 + \frac{8\kappa}{\text{Re}_1} \left[\frac{4\kappa}{\exp(2\kappa t)} (1 + 2\kappa t) + 3,5(\exp(-2\kappa t) - 1) \right] + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\kappa^2}{\text{We}} - \frac{1}{2\text{Fr}^2} \right) \int_0^{2\kappa t} I_0(\tau) d\tau,$$

де $I_0(\tau)$ - модифікована функція Бесселя нульового порядку. Характер наростання (загасання) поверхневої хвилі визначається знаком і величиною дійсної частини $d\chi/dt$, в даному випадку $\gamma(t)$.

Рішення (2.2.26) справедливе на досить великих числах Рейнольдса $\text{Re}_1 \gg 1$, що не завжди виконується на практиці, тому розглянемо також випадок коротких хвиль ($k_r \gg 1$) і зробимо в (2.2.21) оцінку членів, засновану на цьому припущенні. Тоді отримаємо наближене інтегро-диференціальне рівняння виду

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} + 2k \frac{8k + i\text{Re}_1}{\text{Re}_1} \zeta = 2\sqrt{2}k \frac{d}{dt} \int_0^t \left[\frac{16k^2}{\text{Re}_1 \sqrt{\pi \text{Re}_1 \tau}} + \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{\text{Fr}^2} + \frac{8k^2}{\text{We}} \right) \right] \zeta(t-\tau) - Al \cdot H_m^2(t-\tau) \exp \left[-2k \left(i + \frac{4k}{\text{Re}_1} \right) \tau \right] d\tau, \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

звідки видно, що структурно рівняння (2.2.24) та (2.2.27) схожі і в даному випадку параметричне накачування енергії збурень плівки ускладнене наявністю швидкоосцилюючих членів при зовнішній збурювальній силі: зі збільшенням k_r рівняння (2.2.27) точніше відображає досліджуваний фізичний процес. Для збудження хвиль потрібна все більша напруженість поля.

З урахуванням виразу (2.2.5) при $Re_m \ll 1$, що справедливо для великого класу практичних завдань, рівняння (2.2.27) можна вирішити, використовуючи усереднення інтегро-диференціального оператора за другою схемою [379]. В результаті отримуємо

$$\frac{d\zeta}{dt} + (8k + iRe) \frac{2k}{A} \zeta = \frac{\sqrt{2}}{A} Ha^2 \cdot H_{m0}^2 \left[i - \left(i + \frac{2k}{Re_m} \right) \exp \left(-\frac{4k^2 t}{Re_m} \right) \right] \exp(-2ikt), \quad (2.2.28)$$

где Ha - число Гартмана,

$$A = Re + \frac{\sqrt{2} Re^2}{4k + iRe} \left(\frac{1}{Fr^2} + \frac{8k^2}{We} \right) - \frac{64k^2 \sqrt{k}}{\sqrt{(4k + iRe)\pi}}$$

Рішення усередненого рівняння (2.2.28) записується як

$$\zeta = \frac{Ha^2 \cdot H_{m0}^2}{\sqrt{2A \cdot k \cdot D}} \left[\exp \left(-4 \frac{k^2 t}{Re_m} \right) - 1 \right] \exp(-2ikt), \quad (2.2.29)$$

де
$$D = 1 + \left(i - \frac{8k + iRe}{A} \right) \frac{Re_m}{2k}.$$

Неважко помітити, що з прийнятих припущень можна приблизно покласти $D=1$. Рішення (2.2.29) усередненого рівняння (2.2.28) близьке до розв'язання інтегро-диференціального рівняння (2.2.27) на інтервалі $t \in [0, c \cdot Re]$, де $c = const$ і рівень близькості цих рішень підвищується зі зростанням Re [379]. Для загального випадку $k = k_r + ik_i$ з (2.2.5), (2.2.29) будемо мати

$$H = H_{m0} \exp \left[k_i (t - x - y) + 2 \frac{k_i^2 - k_r^2}{Re_m} t + ik_r (x + y - c^H t) \right], \quad (2.2.30)$$

$$\zeta = \zeta_2 \exp[2ik_r (x + y - c^H t)] - \zeta_1 \exp[2ik_r (x + y - t)],$$

де $c^H = 1 + 4k_i / Re_m$ - фазова швидкість поширення хвиль вздовж прямої $y = const - x$. Вираз (2.2.30) показує, що в даному випадку електромагнітна хвиля викликає на поверхні плівки дві хвилі: подібну хвилі сили, що збурує, і відмінну від неї, що поширюється зі швидкістю незбуреного руху плівки. Їхні амплітуди відповідно рівні

$$\zeta_1 = \frac{Ha^2 \cdot H_{m0}^2}{\sqrt{2A \cdot k \cdot D}} \exp\left[2k_i(t-x-y)\right], \quad \zeta_2 = \zeta_1 \exp\left[\frac{(k_i^2 - k_r^2) 4t}{Re_m}\right]. \quad (2.2.31)$$

Таким чином, побудовані математичні моделі та отримані на їх основі рішення для низки фізичних ситуацій показують, що у лінійному малоамплітудному наближенні можливі лише хвилі двох типів з амплітудами (2.2.31). Причому, при $c^H = 1$ ($k_i = 0$), коли швидкість поширення плівки дорівнює нулю і відповідно $Re_{ms} = 0$ і хвиля виходить одна. Параметричний резонанс, згідно (2.2.31), можливий за умови $Re_m(8k + i Re) = 2kA$, або $AD=0$, звідки:

$$k^* = 2 \frac{(8\pi + i Re_k)^{0.5}}{\pi Ga^2} \left\{ 1 \pm \left[1 + \pi Ga^2 \left(\frac{4Be - 1 + Re_k / (4\pi)}{16\sqrt{2}\pi} Re_k - \frac{2\pi / Oh^2}{8\pi + i Re_k} \right) \right]^{0.5} \right\}, \quad (2.2.32)$$

де Ga, Be, Oh - числа Галілея, Бетчелора та Онезорге, що визначаються фізичними властивостями середовищ і товщиною плівки (від режиму течії не залежать), $Re_k = 2\pi Re / k^*$ - число Рейнольдса, пораховане за довжиною відповідного резонансного збурення. Вираз (2.2.32) дозволяє встановити зв'язок резонансних значень k^* з відповідним числом Рейнольдса Re_k та іншими визначальними критеріями системи, після чого можна також встановити зв'язок з $Re = k^* Re_k / (2\pi)$.

Формулу (2.2.32) у багатьох практично важливих випадках можна суттєво спростити. Наприклад, у практиці МГД-гранулювання справедливі оцінки: $Re_k \gg 1$, $Ga^2 \gg 1$, $Be \ll 1$, $Oh^2 \ll 1$. Це дає:

$$k^* = \frac{1}{\pi Ga} \left(\frac{2}{Ga} \sqrt{8\pi + i Re_k} \pm \sqrt{\frac{8\pi + i Re_k}{16\sqrt{2}\pi} Re_k^2 - \frac{8\pi^2}{Oh^2}} \right), \quad (2.2.32')$$

Власні коливання, враховуючи (2.2.28), можна записати як

$$\zeta = \zeta_0 \exp\left[-2(8k + i Re) \frac{k}{A} t\right], \quad (2.2.33)$$

де $\zeta_0 = \zeta(0)$. Звідси $\omega_* = -\frac{2k}{A}(8k + i\text{Re})$. Розглянемо власні коливання системи, вважаючи для простоти k і ζ_0 дійсними та роблячи оцінку членів з урахуванням прийнятих припущень, а також вважаючи $\arctg\left(\frac{\text{Re}}{\sqrt{\text{Re}^2 + 16k^2}}\right) \approx \frac{\text{Re}}{\sqrt{\text{Re}^2 + 16k^2}}$. Тоді з умови $\text{re}(\omega_*) > 0$ випливає:

$$(32k^2 - \text{Re}^2) \left[2\sqrt{2}k + \text{Re} \left(\frac{1}{Fr^2} + \frac{8k^2}{We} \right) \right] + 6\sqrt{2}k^3 \text{Re} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{32k^2 - \text{Re}^2 + 6k \text{Re}^2}{\sqrt[4]{16k^2 + \text{Re}^2}} > 0. \quad (2.2.34)$$

Умова (2.2.34) відповідає наростанню власних коливань системи у часі (розвиток нестійкості плівки). Вочевидь, що при досить великих k (2.2.34) не задовольняється, тобто, починаючи з певного значення довжини хвилі всі наступні коливання меншої довжини стають загасаючими у часі. При $\text{Re} \gg k$ можна отримати наближену формулу:

$$\text{re}(\omega_*) = \frac{2k \text{Re}^2 \left[\sqrt{2} (Ga^2 + 8k^2 / Oh^2) - 8k \text{Re} \right]}{2(Ga^2 + 8k^2 / Oh^2)^2 + 8\sqrt{2}k \text{Re} (Ga^2 + 8k^2 / Oh^2) + \text{Re}^4}, \quad (2.2.35)$$

звідки випливає, що спадання збурень поверхні плівки в часі можливе лише за умови $Fr < Oh$, що вкрай рідко виконується в практиці. Таким чином, плівка нестійка, але, як видно з (2.2.35), швидкість наростання збурень невелика при $\text{Re} \gg 1$, що означає непотрібність придушення власних коливань при параметричному збудженні розпаду на заданій довжині хвилі.

Отримані результати використовуються далі для аналізу особливостей параметричного збудження і придушення коливань у плівках в'язких електропровідних рідин і при проведенні конкретних практичних розрахунків, необхідних для аналізу технологічних процесів. Подальше дослідження розглянутої фізичної системи проводиться у наступному розділі, де поле розглядається не вертикальне, а горизонтальне. Але, перш ніж приступити до наступної модельної задачі, слід сформулювати основні результати цього розділу.

У разі плівки на твердій поверхні при товщині скін-шару, що перевищує товщину плівки, амплітуда параметрично збуджуваної поверхневої хвилі $\sim Ha\sqrt{Al}$, яка постійна або наростає в часі лише за

наявності ковзання поля ($s^H \neq 0$). Власні коливання при $k \ll 1$ нарастають по амплітуді з підвищенням k , залежність частоти ($\omega_* - 1$) та декременту наростання ω_* цих коливань від Ga, Oh, Re_k наступна:

$$\omega_* = \frac{8}{\varepsilon^2} \left(\frac{2\pi}{Re_k} \right)^{1.5} \left[(1 - \rho_{21}) Ga^2 + \frac{8k^2}{Oh^2} \right].$$

Параметричне придушення коливань можливе при $\omega_* > 0$, збудження - при $\omega_* \leq 0$, або $s^H \neq 0$. Параметричний резонанс має місце за заданого зв'язку Ga, Be, Oh, Re, k (наприклад, виду (2.2.21) при $s^H = 0$, коли ковзання електромагнітного поля відсутнє). У разі вільної плівки при малій товщині скін-шару або досить щільному навколишньому середовищі знизу плівки амплітуда параметрично збуджуваної поверхневої хвилі $\sim Ha^2$, причому, при $s^H \neq 0$ хвилі дві та їх амплітуди різні, а швидкості поширення дорівнюють 1 і c^H (при $s^H = 0, c^H = 1$).

Умова параметричного резонансу визначається формулою (2.2.32), що зв'яже параметри Ga, Be, Oh, Re, k . Плівка нестійка, проте швидкість наростання збурень невелика і параметричне збудження заданої гармоніки можливе без придушення власних коливань, яке можна здійснити при $s^H \neq 0$. При $Re \rightarrow \infty$ амплітуда коливань різко зростає з підвищенням k порядку $Al \cdot We \sqrt{t} / k \cdot \exp(4k^2 t / Re_m)$.

2.3 Вплив на плівку горизонтальної електромагнітної хвилі

Припустимо, що електромагнітне поле має лише складову виду (біжуче по x поле або просто змінне по t , якщо $k=0$):

$$H_y = H_m(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.3.1)$$

що створює пондеромоторну силу (у загальному випадку також біжучу) по осі z (на відміну від попереднього випадку, де вона була спрямована проти напрямку незбуреної течії). Введемо відповідно до (2.1.2) функцію

$$f(x) = 1 - 4\nu / u_{00}^2 \cdot (x/b - 1) (\partial u_s / \partial z)_{z=0},$$

яка в силу прийнятої моделі є монотонною і слабоградієнтною, внаслідок чого в першому наближенні можна покласти $f=1$ і далі оцінити похибку такого спрощення задачі. Тоді систему лінеаризованих МГД-рівнянь збуреної плівки в безіндукційному наближенні можна представити так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{Al}{2} \frac{\partial H_y^2}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{Al}{2} \frac{\partial H_y^2}{\partial z}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} + f \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right).$$

Граничні умови для випадку плівки на твердій поверхні мають вигляд:

$$z=0, \quad u = w = 0; \quad z = \varepsilon, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + f \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$p = \frac{\zeta}{Fr^2} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{Al}{2} H_y^2 - \frac{1}{We} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (2.3.3)$$

Оскільки характер поширення параметричних коливань системи у лінійному наближенні залежить від початкових амплітуд збуреної плівки, початкові умови можна розглядати, розшукуючи лінійний відгук системи як хвиль типу (2.3.1) з подвоєною частотою і хвильовим числом. З (2.3.2), (2.3.3) виходить наступна крайова задача для амплітуд збурень:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \text{Re} \left(\frac{dp}{dz} + Al H_m \frac{dH_m}{dz} \right) = 2(i\omega \text{Re} - 2k^2)w,$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + 2 \left[(\omega - fk) i \text{Re} - 2k^2 \right] u = ik \text{Re} (2p + Al H_m^2),$$

$$u = \frac{i}{2k} \frac{dw}{dz}, \quad \frac{d^2 H_m}{dz^2} + i\omega \text{Re}_m = k(k + if \text{Re}_m) H_m; \quad (2.3.4)$$

$$z = 0, \quad u = 0 = 0; \quad z = -\infty, \quad H_m = 0;$$

$$z = \varepsilon, \quad H = H_m \varepsilon, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad w = 2i(kf - \omega)\zeta, \quad p = \frac{Al}{2} H_m^2 \varepsilon + \frac{2}{\text{Re}} \frac{dw}{dz} + \left(\frac{1}{Fr^2} + \frac{4k^2}{We} \right) \zeta.$$

Для спрощення запису амплітуди збурень параметрів, як і раніше, позначені тими самими змінними, що й самі збурення. Пондеромоторна сила може бути негативною (що притискає плівку до твердої поверхні) лише у разі наявності струму в плівці. Для короткохвильових коливань поверхні плівки ($k_r \gg 1$), вважаючи $k_i < 0$, $k_r \gg -k_i$ (слабке або помірне наростання по x), після оцінки членів (2.3.4) виходить наближено:

$$u = \frac{i}{2k} c_j q_j \exp(q_j z), \quad w = c_j \exp(q_j z), \quad H_m = H_m \exp[k_m(z - \varepsilon)], \quad (2.3.5)$$

$$p = \frac{Al}{2} H_m^2 \varepsilon \exp[2k_m(z - \varepsilon)] + 1 - \exp(q_j z) + \frac{c_j}{\text{Re}} \left(q_j + 2 \frac{2k^2 - i\omega \text{Re}}{q_j} \right),$$

де $c_j = \text{const}$, q_j - корені характеристичного рівняння, k_m - хвильові числа електромагнітної хвилі, $j = \overline{1, 4}$ - "німій" індекс, яким ведеться підсумовування членів. Названі величини мають вирази:

$$k_{mr} = \left(1 + \frac{f^2 \text{Re}_m^2}{4k_r^2} \right) \left(k_r - f \text{Re}_m \frac{k_i}{k_r} \right), \quad k_{mi} = \left(1 + \frac{f^2 \text{Re}_m^2}{4k_r^2} \right) \left(k_i + f \text{Re}_m \right),$$

$$c_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^2 \left\{ q_1 \left[(-1)^{n+1} (g_1 + g_3) + (-1)^n g_{2n} \right] + (g_1 - g_3) q_2 \right\},$$

$$\cdot \left\{ q_1^2 \exp(q_1 \varepsilon) - q_2^2 \exp \left[(-1)^n q_2 \varepsilon \right] \right\} + \left[2q_1 (g_2 + g_4 - 2g_1) + \right.$$

$$\left. + q_1 (g_2 - g_4) \right] \text{sh}(q_1 \varepsilon), \quad k_m = k_{mr} + i k_{mi},$$

$$q_j = \pm \left\{ \text{Re}(fk - \omega) i \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{8k^2 (2k^2 - i\omega \text{Re})}{\text{Re}^2 (fk - \omega)^2}} \right] \right\}^{0.5}, \quad (2.3.6)$$

$$\Delta_{1,3} = 2g_5 q_2 \left[q_1 q_2 \text{sh}(q_2 \varepsilon) \mp q_2^2 \text{ch}(q_2 \varepsilon) \pm q_1^2 \exp(\mp q_1 \varepsilon) \right],$$

$$\Delta_{2,4} = 2g_5 q_1 \left[q_1 q_2 \text{sh}(q_1 \varepsilon) \mp q_1^2 \text{ch}(q_1 \varepsilon) \pm q_2^2 \exp(\mp q_2 \varepsilon) \right],$$

де q_j з непарними індексами j відповідає "+" перед радикалом, з парними - "-" перед радикалом, Δ_1, Δ_2 відповідають верхні знаки у формулах - Δ_3, Δ_4 - нижні. Вхідні (2.3.6) функції g_j мають вигляд:

$$g_j = \frac{2}{q_j} [1 - \exp(q_j \varepsilon)] \left[i\omega - \frac{2}{\text{Re}} k^2 \right] + \frac{q_j}{\text{Re}} [3 \exp(q_j \varepsilon) - 1] + \frac{i \exp(q_j \varepsilon)}{2(\omega - fk)} \left(\frac{1}{Fr^2} + \frac{4k^2}{We} \right),$$

$$g_5 = \frac{Al}{2} H_{mc}^2 [\exp(-k_m \varepsilon) - 1], \quad \overline{j = 1, 4}.$$

Враховуючи викладене та вирази (2.3.4), визначимо амплітуду:

$$\zeta = \frac{2}{\Delta} Al \cdot \text{Re} \cdot H_{mc}^2 [\exp(-k_m \varepsilon) - 1] \sqrt{1 + \frac{8k^2(2k^2 - i\omega \text{Re})}{\text{Re}^2(fk - \omega)^2}} \cdot [q_2 \text{sh}(q_1 \varepsilon) \text{ch}(q_2 \varepsilon) - q_1 \text{sh}(q_2 \varepsilon) \text{ch}(q_1 \varepsilon)], \quad (2.3.7)$$

звідки видно, що, на відміну розглянутих випадків, при горизонтальному поперечному полі амплітуда поверхневої хвилі $\sim Al \cdot \text{Re}$. Це можна пояснити тим, що напрямок дії пондеромоторної сили вертикальний (вгору у разі відсутності струмів у плівці, крім індукованого), і тому зі зростанням інерційних сил зростає і їхній внесок у накачування енергії поверхневих хвиль.

Параметричний резонанс системи можливий при $\omega^* = fk$, $k \neq if \text{Re}/2$, коли фазова швидкість поширення поверхневої хвилі збігається зі швидкістю незбуреного руху плівки. Власні коливання системи визначаються з характеристичного рівняння $\Delta = 0$, звідки слідує дисперсійне співвідношення виду

$$2(i\omega, \text{Re} - 2k^2) \{ \text{sh}(q_1 \varepsilon) [q_2^2 \exp(-q_2 \varepsilon)] + 2q_1 \left[\frac{q_1}{q_2} (1 - \text{ch}(q_2 \varepsilon)) - q_1 \text{sh}(q_1 \varepsilon) - q_2 \right] + \right. \\ \left. + q_1 + \frac{q_2}{q_1} \left[q_1^2 (\exp(q_1 \varepsilon) - 1)^2 - 2q_2^2 (1 - \text{ch}(q_1 \varepsilon)) \text{ch}(q_2 \varepsilon) \right] + \right. \\ \left. + [\exp(q_1 \varepsilon) (2q_2 - q_1 - q_1^2) + q_2^2 \exp(q_2 \varepsilon)] + \right. \\ \left. + 2 \frac{q_1}{q_2} [\text{ch}(q_2 \varepsilon) - 1] [q_2^2 + q_1^2 \exp(q_1 \varepsilon)] \right\} + 3q_1 \{ q_1 \cdot \\ \cdot [2q_2 (q_1 \text{ch}(q_2 \varepsilon) + 2q_2 \text{sh}(q_2 \varepsilon)) \text{sh}(q_1 \varepsilon) - q_1 \exp(q_1 \varepsilon) \cdot \\ \cdot (\exp(-q_2 \varepsilon) + q_2 \exp(q_2 \varepsilon))] + q_2 [2q_1^2 - q_2 (1 + q_2 + 2\text{ch}(q_1 \varepsilon) \text{ch}(q_2 \varepsilon))] \} + \\ \left. \left\{ \text{ch}(q_2 \varepsilon) [q_1^2 (q_1 + q_2) \text{sh}(q_1 \varepsilon) - q_2^2 (\text{sh}(q_1 \varepsilon) + q_1 \text{ch}(q_1 \varepsilon))] + \right. \right. \\ \left. \left. \right\} \quad (2.3.8)$$

$$+q_1^3 [ch(q_1 \varepsilon) - sh(q_2 \varepsilon)] \exp(q_1 \varepsilon)] i \frac{Ga^2 + 4k^2 / Oh}{Re(\omega - fk)} = 0$$

Звідси видно, що коливання у загальному випадку поширюються по плівці з дисперсією, оскільки $\partial^2 \omega_s / \partial k^2 \neq 0$. Резонансна пара (k, ω^*) , як легко перевірити, умові (2.3.8) у загальному випадку не задовольняє, тобто параметричний резонанс збуджується не на власній частоті і, крім того, коливання поверхні плівки в цьому випадку, на відміну від власних, не диспергують, оскільки $c^* = \partial \omega^* / \partial k = f$ і $\partial c^* / \partial k \equiv 0$. Останнє може бути й невірним, оскільки опір тертя рідини на твердій поверхні залежить від режиму течії, але в рамках прийнятої моделі це не вірно.

При $\omega_{*i} \gg 1 / Re$ з (2.3.8) після оцінки членів можна отримати таку систему дисперсійних рівнянь:

$$2 \left[(\omega_{*i} Re + 2k^2) \cos \Phi \pm \omega_{*r} Re \sin \Phi \right] \exp \left\{ \sqrt{2Re} \left[\omega_{*i}^2 + (fk - \omega_{*r})^2 \right]^{0.25} \right\} = \\ = \frac{(Ga + 4k / Oh) \omega_{*i}}{\left[\omega_{*i}^2 + (fk - \omega_{*r})^2 \right] Re}, \quad tg \Phi = \frac{\omega_{*i} \omega_{*r} Re + (Re \omega_{*i} + 2k^2)(\omega_{*r} - fk)}{\omega_{*i} (Re \omega_{*i} + 2k^2) - \omega_{*r} Re (\omega_{*r} - fk)}, \quad (2.3.9)$$

де $\Phi = \sqrt{Re / (2\omega_{*i})} (fk - \omega_{*r})$. Передбачається, що $|fk - \omega_{*r}| \ll |\omega_{*i}|$.

Не важко перевірити, що при вищенаведених параметрах системи помітне наростання амплітуди власних коливань у часі можливе лише за умови $\omega_{*i} \gg 1$, інакше характерний час розвитку збурень менше часу існування плівки, край якої (валик розвантаження від поверхневих сил) розпадається внаслідок Релеєвської нестійкості. Тому з (2.3.9), після подальших оцінок та спрощень, виходить наступна система:

$$\frac{\omega_{*r}}{\omega_{*i}} = \text{Arctg} \frac{\omega_{*i}}{\omega_{*r}} + \pi n, \quad \omega_{*i} = \frac{2\omega_{*r}^2}{Re(fk - \omega_{*r})^2}, \quad (2.3.9)$$

звідки

$$\omega_{*i} = \frac{\omega_{*r}}{\alpha}, \quad \omega_{*r} = fk + \frac{1}{\alpha Re} \pm \sqrt{\frac{2fk}{\alpha Re} + \frac{1}{\alpha^2 Re^2}}, \quad (2.3.10)$$

де $\alpha = 1,162; 3,426; 6,437$ і т.д. (лічильна множина).

Рішення (2.3.10) справедливе для короткохвильових збурень: $\omega_{*r} \gg \alpha$, $k \gg \alpha$. При $\text{Re} \gg 1$ обидва рішення співпадають і можна приблизно покласти $\omega_{*r} = fk$, тобто в цьому випадку $\omega_* \approx \omega^*$. Необхідно мати на увазі, що k не може бути дуже великим, оскільки в рамках малоамплітудного лінійного наближення кривизна вільної поверхні не повинна бути великою. Фазова та групова швидкості руху хвиль відповідно рівні

$$c = f + \frac{1}{\alpha k \text{Re}} \pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2fk}{\alpha \text{Re}} + \frac{1}{\alpha^2 \text{Re}^2}}, \quad C = f \left(1 \pm \frac{1}{\alpha \text{Re}} \sqrt{\frac{2fk}{\alpha \text{Re}} + \frac{1}{\alpha^2 \text{Re}^2}} \right),$$

звідки видно, що власні коливання мало диспергують. Фазова та групова швидкості приблизно дорівнюють незбуреній швидкості руху плівки (кінематичні хвилі).

Вплив постійного електромагнітного поля

При $\omega = 0$, $\text{Re} \gg k_r$, з точністю до величин порядку $(k / (f \text{Re}))^2$ з виразу (2.3.6) отримаємо

$$q_{1,3} = \pm \sqrt{\text{Re} fk} (1+i), \quad q_{2,4} = \mp 2k(1-i) \sqrt{\frac{k}{f \text{Re}}},$$

після чого, вважаючи $k_r \gg 1$, $k_i < 0$, $-k_i \ll k_r$, $f \sim 1$, будемо мати

$$q_{1,3} = \pm \sqrt{\text{Re} fk_r} (1+i), \quad q_{2,4} = \mp 2k_r(1-i) \sqrt{\frac{k_r}{f \text{Re}}}.$$

Аналогічно з (2.3.6), (2.3.7), з урахуванням викладеного, після оцінки членів та подальших спрощень виходить

$$\zeta = \varepsilon Al \cdot \text{Re}^2 \cdot H_{mc}^2 [\exp(-k_m \varepsilon) - 1] \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 + i(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)}{4(\beta_1^2 + \beta_2^2)},$$

де:

$$\alpha_1 = 2 - \exp(-k_m \varepsilon) \cos(2k_m \varepsilon), \quad \alpha_2 = \exp(-2k_m \varepsilon) \sin(2k_m \varepsilon), \\ \beta_1 = 2k_i \text{Re} - \varepsilon (Ga^2 + 4k_r^2 / Oh^2), \quad \beta_2 = 4k_r (2\varepsilon k_i / Oh^2 + \text{Re}).$$

Звідси дійсна частина збурення поверхні плівки

$$\frac{\zeta_r}{Al} = \text{Re}^2 \cdot \frac{\varepsilon H_{mc}^2 [\exp(-k_m \varepsilon) - 1]}{4(\beta_1^2 + \beta_2^2) \exp(2k_r x)}. \quad (2.3.11)$$

$$\cdot [(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\cos(2k_r x) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\sin(2k_r x)]$$

Як впливає з отриманого виразу (2.3.11), при $Re \rightarrow \infty$, $\zeta_r \sim Re Al$, , тоді як при $Re \sim Ga, 1/Oh^2$ виходить $\zeta_r \sim Al Re^2$. Параметричний резонанс у разі постійного електромагнітного поля, як видно з (2.3.11), неможливий.

При $k_r \gg 1$ виходить $\zeta_r \sim Al \cdot H_{mc}^2 / k_r^2$, внаслідок чого можна вважати, що для досить великих k_r (короткі хвилі) з підвищенням k_r пропорційно має зрости амплітуда напруженості прикладеного електромагнітного поля. Однак такий випадок практично нереальний через технічні труднощі зі створенням змінного поля з малою довжиною хвилі. У загальному випадку процес електромагнітного збудження коливань поверхні півки провідної рідини за допомогою поперечного горизонтального змінного поля визначається комплексом $Al \cdot Re^2$, співвідношенням безрозмірних критеріїв Ga, Oh і хвильовим числом k .

Як ілюстрацію отриманих результатів, на Рис. 2.3.1 наведено розрахунки за формулою (2.3.11) для випадку фізичної ситуації, розглянутої у розділі 2.2, де $k_r = 10$, $k_i = -5$, $\varepsilon = 1$, $u_{00} = 4,43$ м/с, $b = 10^{-3}$ м, $k_{mr} \approx k_r$, $k_{mi} \approx Re_m f - 5$, $Re_m = 0,027$, $Re = 3,67 \cdot 10^3$. В даному випадку, коли $Ga \gg k_r / Oh$ і $Ga^2 \gg k_r Re$, і формула (2.3.11) має простий вигляд:

$$\zeta_r = -Al \cdot Re^2 \cdot H_{mc}^2 \frac{4k_r Re \cdot \cos(2k_r x) + Ga^2 \cdot \sin(2k_r x)}{Ga^4 \exp(2k_i x)}, \quad (2.3.11')$$

де $Al \cdot Re^2$ є квадрат числа Рейнольдса з характерною швидкістю, що дорівнює швидкості поширення хвиль Альфвена.

Як видно з Рис. 2.3.1, огинаючі коливальних фронтів мають практично симетричні щодо осі верхні та нижні гілки. Вплив магнітного числа Рейнольдса в аналізованій модельній постановці несуттєвий і проявляється в основному на коефіцієнті при $\cos(2k_r x)$, який, однак, значно менше коефіцієнта при $\sin(2k_r x)$; $Oh = 0,22$, $Ga = 8,3 \cdot 10^4$. На відстані $x=82,0$ і $x=16,4$ швидкість незбуреного руху півки зменшується відповідно на 5% і 1%, звідки випливає, що з достатньою для практики

точністю введене нами припущення сталості швидкості можна вважати виправданим при $H_{mc} < 10^{-2}$, коли поле порівняно слабке. Врахування залежності $f(x)$ представлено пунктиром. У разі плівки зі струмом у зовнішньому магнітному полі такої ж напруженості, коли напрямок дії електромагнітної та гравітаційної сил збігається, амплітуда збурення поверхні плівки менша приблизно в 20 разів у порівнянні з суто індукційною ситуацією.

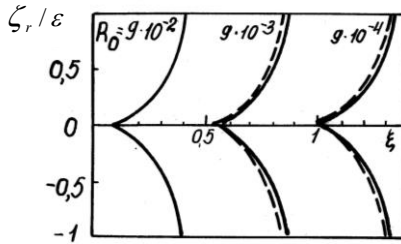


Рис. 2.3.1 Огинальні коливальних фронтів плоскої плівки: залежно від поздовжньої координати для 3-х значень напруженості поля

Для нев'язкого наближення ($Re \rightarrow \infty$) з (2.3.11) виходить зменшення ζ_r приблизно на десятковий порядок проти в'язкого випадку, причому, нев'язке наближення справедливе при $Re > 10^9$, що майже неможливо. Таким чином, електромагнітне поле вигляду $H = H_{mc} \exp(ik_r - k_i)x$ викликає процес хвилеутворення поверхні плівки з довжиною хвилі, вдвічі більшою, ніж у H , і невеликим зсувом по x . Наростання по x відбувається за законом $\exp(-2k_i x)$. Наприклад, поле з початковою індукцією $B_0 \sim 0,023$ Т ($H_{mc} \sim 9 \cdot 10^{-2}$ Т) викликає збурення $\zeta_r \sim 0,02\epsilon$, яке вже за $H = H_{mc} \exp(ik_r - k_i)x$ $x=19,5$ досягає значення $\zeta_r \sim \epsilon$ (розпад плівки). При розпаді плівки утворюються краплі за Релеєвським законом або за рахунок механічних роздільників потоку з утворенням крапель діаметром $d \sim \epsilon$.

Випадок прогресивних (бігучих) хвиль

Для дійсних k , $\omega \gg k$, $\omega \gg k^2 / Re$, з (2.3.6) маємо

$$q_{1,3} = \pm \sqrt{2\text{Re}\omega} \left\{ \cos[\pi(n+0,25)] \mp \cos[\pi(n+0,5)] \right\}, \quad q_{2,4} = \pm 2k,$$

де $n=0,1,2,3\dots$ І далі, враховуючи (2.3.7), отримаємо

$$\zeta = \frac{q_1 g_s \varepsilon \text{Re}}{\text{Re} \left[\frac{1}{\omega Fr^2} + \frac{2\omega}{q_1} - \left(\frac{2\omega}{q_1} + \frac{1}{2\omega Fr^2} \right) \exp(-q_1 \varepsilon) \right] + 4(q_1 i - \omega \varepsilon) + q_1 i [1 - 3 \exp(-q_1 \varepsilon)]},$$

звідки при $1 \ll \omega \ll \text{Re}$ для амплітуди збурення виходить простіший вираз

$$\zeta = \frac{\varepsilon \text{Re} \cdot Al \cdot H_{mc}^2 [\exp(-k_m \varepsilon) - 1]}{i \left(2\omega \mp 8\omega - \sqrt{\frac{\text{Re}}{\omega}} \frac{1}{Fr^2} \right) \pm \sqrt{\frac{\text{Re}}{\omega}} \frac{1}{Fr^2}}.$$

При прийнятих припущеннях $\omega \gg \sqrt{\frac{\text{Re}}{\omega}} \frac{1}{Fr^2}$ дійсна частина збурення поверхні плівки дорівнює

$$\zeta_r = \frac{\varepsilon \text{Re} \cdot Al \cdot H_{mc}^2}{2(1 \mp 4)\omega^2} \left\{ \omega \sin[2(kx - \omega t)] \pm \sqrt{\frac{\text{Re}}{\omega}} \frac{\cos[2(kx - \omega t)]}{2(1 \mp 4)Fr^2} \right\}. \quad (2.3.12)$$

Другий доданок виразу (2.3.12) у квадратних дужках малий, тому його можна в інженерних розрахунках ще спростити:

$$\zeta_r = \frac{\varepsilon \text{Re} \cdot Al \cdot H_{mc}^2}{2(1 \mp 4)\omega} \sin[2(kx - \omega t)], \quad (2.3.12')$$

звідки видно, що $\zeta_r \sim 1/\omega$, тобто з підвищенням частоти поля зростає фазова швидкість хвилі (швидкості електромагнітної та поверхневої гідродинамічної хвиль збігаються) та зменшується її амплітуда.

Поверхневі хвилі дві, відмінність у них в амплітуді (у 0,6 рази) та у фазі (мале при $\omega^3 \gg \text{Re}/Fr^4$). Параметричного резонансу немає, тому, враховуючи викладене, можна зробити висновок, що горизонтальною електромагнітною хвилею можна збуджувати розпад плівки тільки на заданій довжині хвилі, причому, на відміну від випадку вертикальної електромагнітної хвилі, амплітуда збурення збудженої на поверхні плівки хвилі визначається лише частотою.

Збуджені коливання поверхні плівки мають залежну від x довжину хвилі, тобто не диспергують. У разі $\omega^3 \gg \text{Re}/Fr^4$ процес хвилеутворення та поширення хвиль у плівці визначається лише добутком чисел

Рейнольдса та Альфвена ($Re \cdot Al$) і хвильовими числами та частотою (k, ω), а від товщини плівки залежність лінійна ($\zeta_r \sim \varepsilon$). Як видно з (2.3.12), (2.3.12'), у цьому випадку про руйнування плівки годі й говорити, оскільки амплітуда поверхневих хвиль не змінюється в просторі-часі, а розгляд хвиль $\zeta_r = \varepsilon$ виходить за рамки лінійної теорії.

2.4 Висновки по розділу 2

Завдання параметричного збудження та придушення коливань поверхні плівок при суттєвому прояві сил інерції (швидкорухомі плівки) представляють новий, раніше майже невивчений клас течій з вільними межами. У лінійному наближенні досліджено електромагнітне збудження та придушення коливань поверхні плівок. За характером дії на суцільне середовище розглянуті параметричні коливання є оптимізуючими, інтенсифікуючими або стабілізуючими. Ці дії впливають на середовище з ефектом першого порядку.

Управляючі впливи другого класу, тобто силового (потік імпульсу через межу розділу середовищ), вид управління: програмне, без зворотного зв'язку. Отримані результати дозволяють прогнозувати реакцію межі розділу на параметричну дію. Через дослідження отриманих математичних моделей встановлено наступні закономірності раніше практично невідомого класу течій. В рамках лінійної теорії:

- при електромагнітному збудженні коливань поверхні плівки, що плоско розтікається, коротка електромагнітна хвиля повинна бути типу пачки імпульсів з крутим заднім фронтом $\sim \exp(-k_r^2 t / Re_m)$;

- вертикальна прогресивна електромагнітна хвиля викликає на поверхні плівки дві хвилі, одна з яких подібна до хвилі збурюючої сили; при цьому амплітуда коливань поверхні плівки $\sim Ha \sqrt{Al}$, а параметричний резонанс системи (руйнування плівки) досягається при $Re = Re^*$, що визначається формулою (2.2.21), яка залежить від k, ρ_{21}, Be, Ga, Oh ; для провідної рідини 2 сімейства кривих розпаду плівки біфуркують від єдиного для непровідної рідини;

- ефективне придушення власних коливань плівки з хвильовим числом k і частотою ω_* можливо лише за допомогою поля, що біжить, яке має швидкість поширення, відмінну від швидкості руху плівки; в іншому випадку як придушення, так і збудження коливань межі розділу вимагає

великих інтенсивностей зовнішніх впливів (крім випадку резонансу), іншими словами, поле, що біжить без ковзання, неефективне;

- у разі плівки з двома вільними поверхнями (на відміну від поширення по твердій поверхні) амплітуда хвилі, що збуджується $\sim Ha^2$, причому, при $s^H \neq 0$, хвилі дві, швидкості поширення 1 і c^H , при $s^H = 0$ буде $c^H = 1$;
- швидкість наростання збурень вільної плівки мала, внаслідок чого параметричне збудження коливань заданого виду можливе без застосування системи придушення власних коливань;
- отримані результати з параметричного збудження розпаду плівок включають як окремий випадок відомі з літератури дані про функції $Oh(Re)$ для вільного розпаду;
- горизонтальна прогресивна електромагнітна хвиля збуджує на поверхні плівки хвилю з амплітудою $\sim Al \cdot Re$;
- параметричний резонанс у плівці при впливі постійного магнітного поля, на відміну від змінного, неможливий;
- в'язкі сили мають суттєвий вплив: застосування нев'язкого наближення дає похибку у визначенні амплітуди хвилі в 3-4 десяткових порядки;
- горизонтальною електромагнітною хвилею параметричний резонанс викликати неможливо. Амплітуда збурення у разі $\omega \gg k^2 / Re$, $\omega \gg k$ не залежить від довжини хвилі та визначається лише частотою поля.

Останні десятиліття цей напрямок не фінансувався і розвивався нами на ентузіазмі^{5,6}. Параметрично керованим розпадом плівок ніхто не

⁵ Kazachkov I.V. Parametric Excitation and Suppression of Oscillations at the Interfaces of Continua for the Processes Control: Jet and Film Flows, Granular Media, Flow in a Channel with Phase Change// WSEAS Transactions on fluid mechanics.- 2011.- №3.- 26 p.

⁶ Kazachkov I.V. *Electromagnetic wave excitation and suppression of films*// Magneto-hydrodynamics.- vol.32, no.1; Jan.-March 1996; p.68-73. Translated from: Magnit. Gidrodin. 1996, no.1, p.74-80.

займався. Розглядались дещо інші задачі, наприклад, стійкість плівкових течій літію по стінці, що захищають дивертор токамака^{7,8} і т.п.

Розділ 3. Нелінійні хвилі

3.1 Основні типи хвиль та їх взаємодія

Лінійна теорія параметричних коливань заснована на розгляді досить малих амплітуд (строго кажучи, нескінченно малих), тому її застосування до дослідження реальних фізичних процесів потребує ретельного аналізу особливостей системи у кожному конкретному випадку. Лінійна теорія стійкості, що дає достатні умови нестійкості, задовільно визначає процес поширення хвиль аж до розпаду системи під дією коливань, що наростають по амплітуді, якщо втрата стійкості відбувається м'яким чином (без розривів характеристик та їх похідних).

У разі сильно нелінійних коливань, коли характер їх поширення та наростання у часі та просторі істотно залежить від амплітуди, а втрата стійкості відбувається жорстким чином, нелінійна теорія дає не лише кількісно, а й якісно відмінні від лінійної теорії результати. Так, лінійна теорія стійкості струменів досить добре описує процес розвитку збурень її вільної поверхні аж до розпаду на краплі, що завершується нелінійною стадією [130, 201, 202], тоді як, наприклад, інтенсивна електромагнітна або вібраційна дія на плівку призводить до появи якісно нових нелінійних фізичних процесів. Цим питанням присвячено 3 розділ.

Зважаючи на малу товщину плівки і досить велику швидкість її руху в незбуреному стані, будемо розглядати нелінійні хвилі на основі рівнянь типу примежового шару. Тоді з (2.2.1) для плоскої задачі виходить система диференціальних рівнянь:

⁷ [Narula M., Abdou M.A., Ying A.Y., Sketchley T.](#) Study of liquid metal film flow characteristics under fusion relevant magnetic field conditions.- Fusion Engineering, 2003.- 20th IEEE/NPSS Symposium on 14-17 Oct. 2003.

⁸ [Narula M.](#) Experiments and Numerical Modeling of Fast Flowing Liquid Metal Thin Films Under Spatially Varying Magnetic Field Conditions.- *PhD dissertation.*- University of California.- Los Angeles.- 2008.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + Al \cdot H \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2};$$

Систему (3.1.1) підпорядкуємо наступним крайовим умовам:

$$t=0, \quad H=H_0, \quad \zeta=u=w=0, \quad (3.1.2)$$

$$z=\varepsilon, \quad w=\partial\zeta/\partial t + \partial\zeta/\partial x, \quad \partial u/\partial z = -\partial w/\partial x, \quad (3.1.3)$$

$$p = \frac{Al}{2} H^2 + \frac{\varepsilon-1}{Fr^2} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial z} - \left[1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{1}{We} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{dw}{dz} + \left(\frac{1}{Fr^2} + \frac{4k^2}{We} \right) \zeta;$$

$$z=0, \quad u=w=0; \quad (3.1.4)$$

Тут $\varepsilon = 1 + \zeta$. Наближення примежового шару справедливе при $H = H(x, t)$, тобто. коли скін-шар товщий за плівку (про це сказано раніше з аналізом фізичних умов) і магнітний тиск не залежить від z , а також $\partial w/\partial z$ не є функцією z або малий у порівнянні з іншими членами. В інших випадках необхідне обґрунтування цього припущення.

Другою особливістю системи (3.1.1)-(3.1.4) є лінійність рівнянь: оскільки розглядається течія з великими швидкостями (порядку 1м/с і значно вище), нелінійні конвективні члени збурень плівки малі порівняно з лінійними і їх можна опустити, а нелінійність процесу обумовлена з математичної точки зору нелінійністю капілярного тиску та межі $z=\varepsilon$ (нелінійна поверхня плівки).

Застосуємо до крайової задачі (3.1.1)-(3.1.4) осереднення за товщиною плівки шляхом інтегрування системи (3.1.1) з урахуванням (3.1.3), (3.1.4) та правил диференціювання зі змінними границями:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{We} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right\} - 2Al \cdot H \frac{\partial H}{\partial x} \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{Fr^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} +$$

$$+ \left(\frac{3}{\text{Re}} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) \left(\alpha_u - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad (3.1.5)$$

де $\alpha_u = (\partial u / \partial z)_{z=0}$, $q = \int_0^\varepsilon u dz$ - миттєвий масовий розход у плівці.

Початкові умови:

$$t=0, \quad q=0, \quad \varepsilon=1. \quad (3.1.6)$$

Постановка граничних умов вимагає конкретизації фізичної ситуації і, взагалі кажучи, є складне завдання, тому в ряді випадків цього уникають за допомогою спеціальних прийомів, про які йдеться нижче.

Отримана система (3.1.5) відрізняється від відомих в теорії нелінійних хвиль у плівках [130, 277] тим, що вона виведена для випадку швидкого руху плівок з лінійних рівнянь (3.1.1) і тому не вимагає звичайного припущення автономності профілю швидкості із завданням його конкретного виду, а містить лише α_u . Завдання градієнта швидкості на твердій поверхні простіше, хоча у загальному випадку вимагає також спеціальних досліджень [54, 353]. Тому система (3.1.5) є більш строгою, ніж аналогічні системи для повільних течій плівок і має специфічні особливості, що обумовлюють характерні нелінійні хвильові режими в плівках, які розповсюджуються зі значними швидкостями у полі вертикальної електромагнітної хвилі.

Диференціюючи перше рівняння (3.1.5) по t , друге - по x і віднімаючи почленно отримані рівняння, після нескладних перетворень можна отримати рівняння четвертого порядку по x і другого - по t щодо збурення вільної поверхні плівки (передбачається рівність змішаних похідних ε, q по x і t):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{1-\varepsilon}{Fr^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \left(2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t \partial x} - \left(\frac{3}{Re} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial t \partial x^2}\right) + \\ & \left(\frac{3}{Re} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\partial \alpha_u}{\partial x} - \frac{\alpha_u}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{1}{Fr^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{We} \left[1 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)^2\right]^4 \left\{ \left[1 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)^2\right]^2 \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x^4} + \right. \\ & \left. - 10 \left[1 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^3} + 3 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}\right)^3 \left[5 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)^2 - 1\right] \right\} = \\ & = 2Al \left\{ H \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \varepsilon \left[H \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

При $\partial H / \partial x \neq 0$ нелінійне нестационарне рівняння (3.1.7) визначає параметричне накачування збурень плівки за рахунок дії електромагнітного поля. Інакше це – рівняння власних коливань поверхні плівки. Воно відрізняється високим ступенем нелінійності та наявністю членів, що зумовлюють дисперсію та диссипацію хвиль, тому залежно від співвідношення критеріїв Fr, Re, We і Al може мати місце велика

кількість якісно різних режимів течії. Нижче це рівняння проаналізовано детально. А із системи (3.1.5) видно, що при $Fr^2 \gg 1, Re \gg 1, We \gg 1$ наближено виходить

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = -2Al \cdot \varepsilon H \frac{\partial H}{\partial x} \mp \frac{\alpha_u}{2} \varepsilon, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \quad (3.1.8)$$

І далі з (3.1.8), аналогічно вищезрозглянутому,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial(\alpha_u \varepsilon)}{\partial x} = 2Al \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon H \frac{\partial H}{\partial x} \right). \quad (3.1.9)$$

Рівняння (3.1.9) показує, що в основі процесу лежить хвиля другого порядку, що параметрично збуджується, з нелінійним накачуванням енергії від електромагнітного поля: зі зростанням амплітуди хвилі зростає член у правій частині. Нелінійність хвильового процесу у разі $\alpha_u = const$ обумовлена членом у правій частині (3.1.9), який при $Re_{ms} \ll 1$ квазілінійний, коли H не залежить від ε , а при $\partial H^2 / \partial x = const$ - лінійним.

Повертаючись до аналізу (3.1.7), слід зазначити, що в основі хвильового процесу при $Re \gg 1$ і сформульованих раніше припущеннях моделі лежить кінематична хвиля $\partial \varepsilon / \partial t + \partial \varepsilon / \partial x = 0$. Тому замінивши в (3.1.7) у хвилі вищого порядку похідну по t відповідно до умови $\partial / \partial t = -\partial / \partial x$, можна отримати таке

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) + \left(\frac{3}{Re} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) + \frac{1}{Fr^2} \left[(\varepsilon - 1) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{We} \left[1 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 \right]^4 \left\{ 3 \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right)^3 \left[1 - 5 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 \right] + 10 \left[1 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^3} + \right. \\ & \left. - \left[1 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 \right]^2 \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x^4} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + Al \frac{\partial H^2}{\partial x} \right) \varepsilon \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

звідки видно, що у довгохвильовому процесі енергія із середньої течії перекачується в кінематичну хвилю через хвильовий механізм вищого порядку (аналогічно пливкам, що стікають по вертикальній поверхні [277]). І для збудження динамічних хвиль потрібні електромагнітні поля великої напруги. При цьому гравітаційні та в'язкі сили сприяють

накачуванню збурень. У разі капілярних хвиль $|\partial\varepsilon/\partial x| \gg 1$ і (3.1.10) можна спростити:

$$We \left[\frac{1}{2} \frac{\partial\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \right) + \left(\frac{3}{Re} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \right) \right] - 15 \left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} \right)^3 + 10 \frac{\partial\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} \frac{\partial^3\varepsilon}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^4\varepsilon}{\partial x^4} = -We \cdot Al \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial H^2}{\partial x} \right).$$

Основну роль тут грають капілярні сили.

Звідси видно, що капілярні хвилі визначаються числами Вебера, Альфвена та видом електромагнітного поля, за рахунок якого відбувається накачування збурень плівки. Цей процес відрізняється суттєвою нелінійністю, наявністю дисперсії та дисипації хвиль. Швидкості поширення хвиль, їх довжини та інші характеристики, на відміну від лінійного випадку, важко визначати. Ці питання розглянуті нижче з прикладу рівняння (3.1.7), застосовуючи метод Уізема [377].

Розшукуємо стаціонарні рішення нелінійного диференціального рівняння (3.1.7), вважаючи $\xi = x - ct$, де c - швидкість руху стаціонарної хвилі. Легко помітити, що досліджуване нелінійне рівняння не є інваріантним щодо перетворення $x \rightarrow -x$, $t \rightarrow -t$. Для опису однорідних хвильових цугів у системі координат, що рухається, з урахуванням викладеного виходить:

$$\begin{aligned} & \left[(c-1)^2 + \frac{1-\varepsilon}{Fr^2} + \frac{c-1}{2} \frac{d\varepsilon}{d\xi} \right] \frac{d^2\varepsilon}{d\xi^2} - \frac{d\varepsilon}{d\xi} - \frac{1}{Fr^2} \left(\frac{d\varepsilon}{d\xi} \right)^2 + (c^3-1) \left(\frac{3}{Re} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{d^3\varepsilon}{d\xi^3} + \\ & + \frac{1}{We} \left[1 + \left(\frac{d\varepsilon}{d\xi} \right)^2 \right]^4 + \left\{ \left[1 + \left(\frac{d\varepsilon}{d\xi} \right)^2 \right] \frac{d^4\varepsilon}{d\xi^4} - 10 \left[1 + \left(\frac{d\varepsilon}{d\xi} \right)^2 \right] \frac{d\varepsilon}{d\xi} \frac{d^2\varepsilon}{d\xi^2} \frac{d^3\varepsilon}{d\xi^3} + \right. \\ & \left. + 3 \left(\frac{d^2\varepsilon}{d\xi^2} \right)^3 \left[5 \left(\frac{d\varepsilon}{d\xi} \right)^2 - 1 \right] \right\} = Al \frac{d}{d\xi} \left(\varepsilon \frac{dH^2}{d\xi} \right). \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Розглянемо рішення рівняння (3.1.11) у вигляді солітону $\varepsilon = 1 + \zeta_0 / ch^2(\xi/l)$, де ζ_0 - амплітуда, l - ширина солітона. Підставляючи цей вираз в (3.1.11), можна визначити константи c, l, ζ_0 , використовуючи граничні випадки:

$$\xi=0, \quad sh(\xi/l)=0, \quad ch(\xi/l)=1, \quad \xi \rightarrow \pm\infty, \quad sh(\xi/l) \rightarrow \pm 0,5 \exp(\pm\xi/l).$$

При цьому покладемо

$$\left(d^2 H^2 / d\xi^2\right)_0 = \left(d^2 H^2 / d\xi^2\right)_{\xi=0}, \quad \xi \rightarrow \pm\infty, \quad d^2 H^2 / d\xi^2 = 0.$$

Тоді матимемо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} (c-1)^2 &= \frac{4}{We \cdot l^2} + \frac{1}{Fr^2}, & c^3 &= 1 - \frac{l^6 Re}{2(Re+6)}, \\ \left(\frac{4}{We \cdot l^2} - \frac{\zeta_0}{Fr^2}\right) \frac{2}{l^2} \zeta_0 + \frac{8\zeta_0}{We \cdot l^4} \left(2 - \frac{3}{l^2} \zeta_0^2\right) &= Al(1 + \zeta_0) \left(\frac{d^2 H^2}{d\xi^2}\right)_0. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Аналізуючи перші два рівняння, що представляють підсистему (3.1.12), можна зробити висновок, що $c < 1$, причому, системі задовольняє лише одне значення. Крім того, неважко помітити, що l не може бути ні великою, ні малою величиною, оскільки

$$\begin{aligned} c &= 1 - \sqrt{\frac{4}{We \cdot l^2} + \frac{1}{Fr^2}} \quad \text{- з одного боку,} \\ c^3 &= 1 - \frac{l^6 Re}{2(Re+6)} \quad \text{- з іншого боку.} \end{aligned}$$

Далі, згадуючи використане при виведенні рівнянь (3.1.5) припущення про малу збурену швидкість руху плівки порівняно з незбуреною, можна записати $|c| \ll 1, Re \gg 1$, після чого, з урахуванням викладеного, $c^3 \approx 0$, що дає наступні наближені залежності:

$$l = \sqrt{2\left(1 + \frac{Re}{6}\right)} \approx 2, \quad c = 1 - \sqrt{\frac{1}{Fr^2} + \frac{2Re}{We(Re+6)}}, \quad Re = \frac{6We(Fr^2 - 1)}{2Fr^2 + We(1 - Fr^2)}, \quad (3.1.13)$$

де другу рівність слід вважати орієнтовною, оскільки вона заснована на більш грубому припущенні $c = 0$.

Важливість другої рівності (3.1.13) у тому, що вона дозволяє оцінити область існування солітонних рішень системи нелінійних диференціальних рівнянь (3.1.11). Оскільки для розглянутих плівок $Fr^2 \gg 1$, зазначена умова набуває більш простого вигляду: $Re = 6We / (2 - We)$, звідки з урахуванням $Re \gg 1$ слідує, що значення We в даному випадку знаходиться у вузькому лівому околі

$We=2$. Значить, область існування солітонів вузька за числами Вебера і має обмеження знизу Re .

Далі, використовуючи (3.1.13), з останнього рівняння системи (3.1.12) у разі відсутності електромагнітного поля виходить

$$\zeta_0^3 + \frac{We \cdot l^4}{12Fr^2} \zeta_0^2 - l^2 \zeta_0 = 0,$$

звідки слідує:

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_0 = -\frac{We \cdot l^4}{24Fr^2} \pm \sqrt{l^2 + \frac{We^2 \cdot l^8}{24^2 Fr^4}}.$$

Відкидаючи тривіальне рішення і $\zeta_0 < -1$ (фізично нереальний випадок, оскільки $\zeta_0 = -1$ - тверда границя), можна отримати

$$\zeta_0 = \sqrt{\left(1 + \frac{6}{Re}\right) \left[2 + \frac{We^2}{36Fr^4} \left(1 + \frac{6}{Re}\right)^3\right]} - \frac{We}{6Fr^2} \left(1 + \frac{6}{Re}\right)^2. \quad (3.1.14)$$

Використовуючи раніше отримані формули і (3.1.14), при $Fr^2 \gg 1$ для оцінки можна отримати спрощені інженерні залежності:

$$l = \sqrt{2}, \quad We = 2, \quad Re > 6Fr^2, \quad (2.4.15)$$

$$c = 1 - \sqrt{\frac{1}{Fr^2} + \frac{Re}{Re + 6}}, \quad \zeta_0 = \sqrt{2} \left(1 + \frac{3}{Re}\right).$$

Звідси видно, що за відсутності параметричного накачування збурень півки може реалізуватися тільки солітон ширини та амплітуди порядку $\sqrt{2}$, що переміщується зі швидкістю, наближеною до нуля, тобто практично стоячий солітон. Зрозуміло, що без зовнішнього впливу (хоча б імпульсного) такий солітон утворитися не може, оскільки він має амплітуду, що перевищує товщину півки в $\sqrt{2}$ раз.

При збільшенні товщини півки або зменшенні швидкості її руху, коли Fr зменшується, швидкість солітону зростає, а амплітуда падає, внаслідок чого ймовірність появи такого солітону підвищується. Те, що солітони рідко спостерігаються в природних умовах, під дією випадкових причин, пояснюється, судячи з наведених результатів, суворою детермінованістю зв'язків параметрів такої нелінійної хвилі – амплітуди, довжини, швидкості переміщення.

Далі розглянемо параметричне збудження солітонів на поверхні плівки провідної в'язкої рідини під дією вертикально спрямованого електромагнітного поля перпендикулярно до її збуреної поверхні. З останнього рівняння (3.1.12):

$$\zeta_0^3 + \frac{We \cdot l^4}{12Fr^2} \zeta_0^2 + \left[\frac{Al \cdot We}{24} \left(\frac{d^2 H^2}{d\xi^2} \right)_0 l^4 - 1 \right] l^2 \zeta_0 + \frac{Al \cdot We}{24} \left(\frac{d^2 H^2}{d\xi^2} \right)_0 l^6 = 0, \quad (3.1.16)$$

звідки випливає, що при $Al(d^2 H^2 / d\xi^2)_0 \rightarrow \pm\infty$ виходить $\zeta_0 \rightarrow -1$, тобто поле високої інтенсивності (як спадне, так і наростаюче по ξ) дає перевернутий солітон, який сягає твердої поверхні. Він перетворює плівку в систему окремих джгутів, що котяться по поверхні. Вони нестійкі і розпадаються за релеевським законом. У випадку рішення кубічного рівняння (3.1.16) виходить [212]:

$$\zeta_0 = z - \frac{We \cdot l^4}{36Fr^2}, \quad q_H \geq q_H^*, \quad Z_1 = \left(\sqrt{Q} - \frac{q_H}{2} \right)^{1/3} - \left(\sqrt{Q} + \frac{q_H}{2} \right)^{1/3}, \quad Z_2 = -\frac{Z_1}{2};$$

$$q_H < q_H^*, \quad Z_{1,2,3} = -2 \left(\frac{q_H^2}{4} - \sqrt{Q} \right)^{1/6} \cos \left(\frac{2}{3} \pi n + \frac{\varphi_H 2}{3} \right)^{1/3}, \quad n=1,2. \quad (3.1.17)$$

Тут:

$$Q = \left(\frac{p_H}{3} \right)^3 + \left(\frac{q_H}{2} \right)^2, \quad p_H = \left[\frac{Al}{24} \left(\frac{d^2 H^2}{d\xi^2} \right)_0 We \cdot l^4 - 1 - \frac{We^2 \cdot l^6}{432Fr^4} \right], \quad (3.1.18)$$

$$q_H = \frac{We \cdot l^6}{36Fr^2} \left(\frac{We^2 \cdot l^6}{18Fr^4} - 1 \right) + \frac{We \cdot l^6}{24} \left(1 - \frac{We \cdot l^4}{36Fr^2} \right) \left(\frac{d^2 H^2}{d\xi^2} \right)_0 Al, \quad \varphi_H = \text{Arctg} \left(\frac{2}{q_H} \sqrt{-Q} \right).$$

Значення q_H^* відповідає точці $Q = 0$, в якій рішення $Z_1(q_H)$ при $q_H \geq q_H^*$ біфуркує в $Z_2(q_H)$, $Z_3(q_H)$, які зазнають розриву в точці $q_H = 0$, де відбувається взаємне перекидання гілок $Z_2(q_H)$ і $Z_3(q_H)$ (функції змінюються місцями: Z_3 продовжує Z_2 і навпаки), тобто математично тут має місце розрив другого роду, фізично - першого.

З урахуванням викладеного, при $Fr^2 \gg 1, We \sim 1, l \sim 1$ вирази (3.1.18) спрощуються. Наближено $q_H = (Al/3)We(d^2 H^2 / d\xi^2)_0$, після чого з

(3.1.17) виходить: $q_H^* \approx 0,6224$, $\lim_{q_H \rightarrow \infty} Z_1 = -1$, $\lim_{q_H \rightarrow -\infty} Z_2 = -1$, $\lim_{q_H \rightarrow \infty} Z_3 = 0,5$,

$\lim_{q_H \rightarrow -\infty} Z_{1,3} = \mp \sqrt{-q_H}$. Рішення $Z_1(q_H)$ є фізично нереальним унаслідок

того, що $Z_1 < -1$. Рис. 3.1.1 дає два інші, фізично реальні рішення:

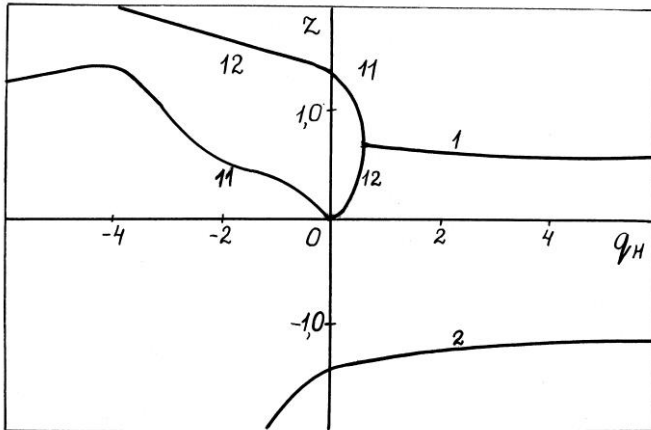


Рис. 3.1.1 Поведінка нелінійних хвиль у півці залежно від параметра зовнішнього впливу

де $Z_{2,3} = \sqrt{\frac{2-q}{3}} \left[\cos\left(\frac{\varphi_H}{3}\right) \pm \sqrt{3} \sin\left(\frac{\varphi_H}{3}\right) \right]$, $Z_1 = -(Z_2 + Z_3)$ при $q_H < q_H^*$ і

$Z_{2,3} = -Z_1/2$, $Z_1 = \left[\left(\frac{q-2}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right]^{1/6} - \left\{ \left[\left(\frac{q-2}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right]^{1/2} + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right\}^{1/3}$ - при

$q_H \geq q_H^*$. Локальний екстремум функції $Z_2(q_H)$ досягається при $q_H = -4$.

Аналіз отриманих даних показує, що за порівняно малих q_H (малої інтенсивності змінного електромагнітного поля) можливе збудження солітонів досить великої амплітуди, які є практично стоячими хвилями. Руйнування півки солітонами, що мають вигляд не виступів, а заглиблень, відбувається при $q_H \rightarrow \infty$. При $(d^2 H^2 / d\xi^2)_0 = 0$ електромагнітне поле не впливає на аналізовані нелінійні хвилі у півці,

тобто поле, що біжить з постійною швидкістю c або лінійно змінюється по ξ не може збуджувати солітони. У цьому випадку мають місце раніше розглянуті явища при $q_H = 0$. Можливі фізичні ситуації показані на Рис. 3.1.2, де видно якісні закономірності нелінійних хвиль у плівці під дією змінних електромагнітних полів.

Оскільки, як було показано вище, величина c мала і хвилі можна вважати приблизно стоячими, то з наведених результатів слідує, що для збудження солітонів необхідно мати змінне електромагнітне поле з різкими вузькими областями екстремумів. Отже, потрібно ставити завдання розробки відповідних індукційних систем. Створені та випробувані нами показані в останньому розділі цієї монографії.

На Рис. 3.1.2 зверху показано два типи можливих солітонів на поверхні плівки та можливі види електромагнітних хвиль (знизу):

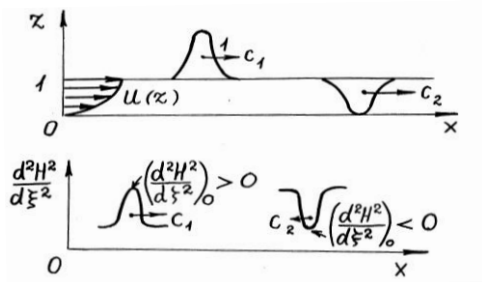


Рис. 3.1.2 Види електромагнітних збурень і хвиль, що збуджуються

3.2 Диференціальні рівняння та інтегральні співвідношення параметричних коливань у радіально повсюджуваних плівках

Розглянемо далі фізико-математичну модель параметричних коливань плівки, що радіально розтікається, утвореної, як показано на Рис. 3.2.1, при натіканні вертикального круглого струменя на горизонтальну площину. Фізична модель системи в збуреному стані подібна до розглянутої моделі плоско повсюджуємої плівки. Математична модель будується у зручнішій у даному разі циліндричній системі координат $r\varphi z$, ось Oz якої збігається з віссю симетрії осесиметричного круглого струменя. У незбудженому стані плівка займає область $z \in (0, a]$ навколишнє середовище - $z \in (a, b]$. Рівняння рівноваги описаної системи мають вигляд:

$$u_{j0} = \frac{u_0 r_0}{r}, \quad p_{j0} = p_0 + \frac{\rho_j}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) u_0^2 - \rho_j g z,$$

де u_0 - швидкість течії у півці при $z=a$, $r = r_0$ (r_0 - радіус струменя).

Вертикальний струмінь можна, взагалі кажучи, виключити з розгляду, вважаючи область свого роду джерелом, що діє в горизонтальній площині. Залежність незбурених параметрів від малої товщини півки в першому наближенні можна не враховувати. Для врахування цієї залежності можна скористатися відомими поліноміальними апроксимаціями [278].

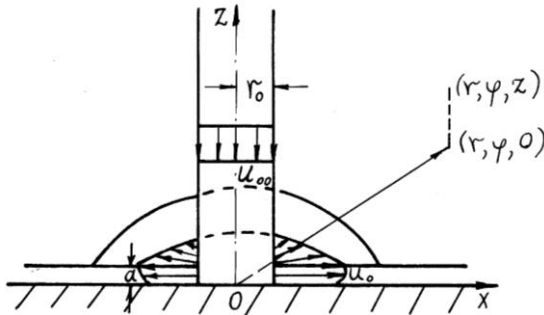


Рис. 3.2.1 Структурна схема півки, що радіально розтікається.

Досліджуємо, аналогічно раніше розглянутому для півки, що плоско розтікається, особливості параметричного збудження і придушення коливань поверхні півки, що радіально розтікається [174, 179]. Припустимо, що на півку діє вертикальна електромагнітна хвиля:

$$H_z = H_m(r) \exp i(kr + m\varphi - \omega t), \quad (3.5.1)$$

умови створення якої подібні до раніше розглянутих.

Одна з можливих конструкцій індуктора, що створює таке поле, наведена на Рис. 3.2.2, де кожен з двох витків 2 охоплений підковоподібним магнітопроводом 3. Витки розташовані над вільною поверхнею півки і під нею, а крок розміщення магнітопроводів дорівнює довжині хвилі на вільній поверхні півки по окружній координаті φ , лінійний масштаб вибирається рівним довжині хвилі у радіальному напрямку. При цьому струми у витках 2 мають різні напрямки. Інші типи

індукторів більш докладно описані далі під час викладу результатів експериментальних досліджень.

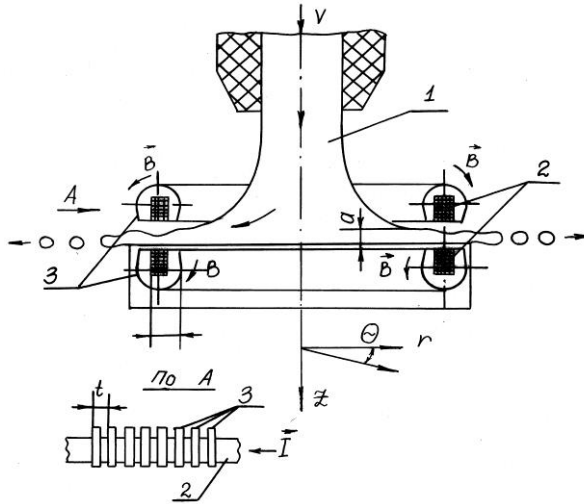


Рис. 3.2.2 Схема індуктора: 1 - струмінь, 2 - витки зі струмами, 3 - магнітопроводи

Математична модель аналізованої системи будується на припущенні, що збурення параметрів середовища, що вносяться електромагнітним полем, вважаються малоамплітудними. Це дає можливість проводити дослідження в лінійному наближенні (члени вище за перший порядок малості збурень не враховуються). Оскільки для рідкометалевих плівок магнітні числа Рейнольдса зазвичай малі, індукване магнітне поле нехтуємо як мале в порівнянні з основним. Тому з урахуванням вищесказаного систему магнітогідродинамічних рівнянь можна записати так:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_{j0} \frac{\partial u_j}{\partial r} + u_j \frac{\partial u_{j0}}{\partial r} + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial r} = v_j \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_j}{\partial \varphi} - \frac{u_j}{r^2} \right) + \frac{j-2}{2\rho_j} \mu_m \frac{\partial H^2}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial t} + u_{j0} \left(\frac{\partial v_j}{\partial r} + \frac{v_j}{r} \right) +$$

$$+ \frac{1}{r\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial \varphi} = \frac{j-2}{2r\rho_j} \mu_m \frac{\partial H^2}{\partial \varphi} + v_j \left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} - \frac{v_j}{r^2} \right), \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + u_{j0} \frac{\partial w_j}{\partial r} + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial z} = v_j \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{u_j}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_j}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_j}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(H u_j + r \frac{\partial (H u_j)}{\partial r} \right) = v_m \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right).$$

Тут всі рівняння розглядаються як подвійні: $j=1$ - розплав, $j=2$ - навколишнє середовище (підсумовування за повторюваним індексом j немає); $\{u_j, v_j, w_j\}$, p_j - відповідно, збурення швидкостей середовищ та тисків, v_j, μ_m, v_m - кінематичний коефіцієнт в'язкості та коефіцієнти магнітної проникності та магнітної в'язкості.

Крайові умови, що накладаються систему диференціальних рівнянь (3.2.2), формуються так. У деякий фіксований момент часу $t = t_0$, що приймається за початковий, необхідно задати розподіл у просторі всіх характеристик. Однак у розглянутому завданні рішення може бути отримане у вигляді суперпозиції прогресивних або стоячих хвиль, подібних до хвиль збурюючої сили (3.2.1). За кутовою координатою φ також не потрібно завдання граничних умов через введене припущення про симетрію системи та вищесказане. Завдання полягає у пошуку амплітуд збурень та умов їх параметричного збурення. Тому необхідно задати лише граничні умови за координатами r і z . По z :

- 1) на поверхні розділу рідкометалевої плівки з навколишнім непровідним середовищем $z = a + \chi$, де χ - мале зміщення границі від положення рівноваги, мають задовольнятися динамічні та кінематичні умови. У лінійному наближенні [202]:

$$p_1 = p_2 + \frac{\mu_m}{2} H^2 - \sigma \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} \right) + (\rho_1 - \rho_2) g \chi + 2 \left(\mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} - \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} \right);$$

$$\mu_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) = \mu_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial r} \right), \quad \mu_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right) = \mu_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} \right), \quad (3.2.3)$$

$$w_1 = w_2 = \frac{\partial \chi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2; \quad (3.2.4)$$

- 2) збурення згасають у шарі нерухомого непровідного середовища:

$$z = b, \quad u_2 = v_2 = w_2 = p_2 = 0; \quad (3.2.5)$$

крім того, на цій поверхні рівні нулю дотичні напруги,

$$z = b, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} = -\frac{\partial w_2}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi}; \quad (3.2.6)$$

3) умова відсутності всіх збурень рідкометалевої плівки на твердій горизонтальній поверхні дає:

$$z = 0, \quad u_1 = v_1 = w_1 = p_1 = 0. \quad (3.2.7)$$

Безрозмірна форма крайової задачі

Вводячи далі як одиниці вимірювання довжини, часу, частоти, швидкості, тиску та напруженості магнітного поля відповідно $r_0, r_0 / u_0, u_0 / r_0, u_0, \rho_1 u_0^2, H_0$ і, зберігаючи колишні позначення, систему рівнянь (3.2.2) можна призвести до безрозмірного вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{u_j}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_j}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_j}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_j}{\partial r} - \frac{u_j}{r} \right) + \rho_{1j} \frac{\partial p_j}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}_j} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_j}{\partial \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} - \frac{u_j}{r^2} \right) + \rho_{1j} \frac{j-2}{2} Al \frac{\partial H^2}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_j}{\partial r} + \frac{v_j}{r} \right) + \frac{\rho_{1j}}{r} \frac{\partial p_j}{\partial \varphi} = \\ = \rho_{1j} Al \frac{j-2}{2r} \frac{\partial H^2}{\partial \varphi} + \frac{1}{\text{Re}_j} \left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} - \frac{v_j}{r^2} \right), \\ \frac{\partial w_j}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial r} + \rho_{1j} \frac{\partial p_j}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}_j} \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

де $\rho_{1j} = \rho_1 / \rho_j$, Re_j - числа Рейнольдса, $\text{Re}_2 = \nu_{12} \text{Re}_1$, $\nu_{12} = \nu_1 / \nu_2$. При цьому граничні умови (3.2.3)-(3.2.7) запишуться у вигляді:

$$z = \varepsilon, \quad p_1 = p_2 + \frac{1}{\text{We}} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{\text{Re}_1} \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\rho_{21}}{\text{Re}_2} \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) + \quad (3.2.9)$$

$$+ \frac{1 - \rho_2}{Fr^2} \zeta + \frac{Al}{2} H^2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial r} = \mu_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} = \mu_{12} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right);$$

$$z = \varepsilon, \quad u_1 = u_2, v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r}; \quad (3.2.10)$$

$$z = \gamma, \quad u_2 = v_2 = w_2 = 0, \quad (3.2.11)$$

$$z = \gamma, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} = -\frac{\partial w_2}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi}; \quad (3.2.12)$$

$$z = 0, \quad u_1 = v_1 = w_1 = 0. \quad (3.2.13)$$

де $\mu_2 = \mu_1 / \mu_2$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \zeta$, $\varepsilon_0 = a / r_0$, $\gamma = b / r_0$, $Fr = u_0 / \sqrt{gr_0}$ - число Фруда, $We = \rho_1 r_0 u_0^2 / \sigma$ - число Вебера.

Параметри електромагнітної хвилі

Як впливає з (3.2.1), напруженість електромагнітного поля є функцією t, r, φ і відповідає рівнянню:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} \right), \quad (3.2.14)$$

де $\text{Re}_m = u_0 r_0 / \nu_m$ - магнітне число Рейнольдса. Підстановка (3.2.1)

(3.2.14) дає таке рівняння для амплітуди напруженості поля:

$$\frac{d^2 H_m}{dr^2} + \left(2ik + \frac{1 - \text{Re}_m}{r} \right) \frac{dH_m}{dr} + \left(i\omega \text{Re}_m - k^2 + \frac{1 - \text{Re}_m}{r} ik - \frac{m^2}{r^2} \right) H_m = 0. \quad (3.2.15)$$

В якості граничних умов можна задати значення амплітуди поля, наприклад, при $r=1$ і зажадати загасання на нескінченності:

$$r=1, \quad H_m=1; \quad r=\infty, \quad H_m=0. \quad (3.2.16)$$

Таким чином, завдання дослідження параметричних коливань у плівці рідини, під дією вертикальної електромагнітної хвилі, звелася до вирішення крайової задачі для системи диференціальних рівнянь (3.2.8), (3.2.15) з граничними умовами (3.2.9)-(3.2.13), (3.2.16), а також граничними умовами для системи (3.2.8) за координатою r (будуть сформульовані нижче).

У найпростішому випадку $H = \text{const}$ з другої граничної умови (3.2.16) впливає, що хвильове число k має містити додатню уявну частину k_i : $k = k_r + ik_i$. Для руйнування плівки на краплі можна встановити, наприклад, такі параметри поля: m - дійсне, $\omega = 0, k_r \gg 1, m \gg 1$ (дрібні

краплі можуть вийти лише від короткохвильових збурень), $k_i < 0$ (збурення наростають, поки плівка не розпадеться на краплі).

Якщо ж $\omega = -ik^2 / \text{Re}_m$ і $k_i < 0$, $|k_i| \ll k_r$ (наростання збурень не повинно бути надто різким, інакше плівка швидко викидається вгору), то можна покласти приблизно $\lambda = k_r (k_r + ik_i) / \text{Re}_m$, де $\lambda = i\omega$. І тут електромагнітний вплив проявляється як імпульсний, оскільки збурення дуже різко зростає у часі: $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$, де $\lambda_r \gg 1$. Рішення рівняння для цього випадку має вигляд [212]:

$$H_m = r^{0,5\text{Re}_m} \exp(-ikr) [c_1 I_\alpha(kr) + c_2 K_\alpha(kr)],$$

де $\alpha = \pm \sqrt{m^2 + 0,25 \text{Re}_m^2}$. Оскільки для рідкометалевих плівок $\text{Re}_m \ll 1$, то можна приблизно покласти $\alpha = \pm m$ або $\alpha = m$, де m - будь-яке ціле число. Із граничних умов з урахуванням $I_m(\infty) = \infty$ визначаються константи c_1, c_2 і остаточно виходить вираз:

$$H_m = H_m r^{0,5\text{Re}_m} \exp[ik(1-r)] \frac{K_m(kr)}{K_m(k)}, \quad (3.2.17)$$

де K_m - функції Макдональда m -го порядку [414].

Інтегральні співвідношення

Виведення інтегральних співвідношень проводиться так. Вважаючи $\{u_j, v_j, w_j\} = \{u_\varepsilon f_{ju}(\eta_j), v_\varepsilon f_{jv}(\eta_j), w_\varepsilon f_{jw}(\eta_j)\}$, $p_j = p_{j\varepsilon} f_{jp}(\eta_j)$, де $\eta_1 = z/\varepsilon$, $\eta_2 = (z-\varepsilon)/(\gamma-\varepsilon)$ і вводячи позначення:

$$\int_0^1 f_{ju,v,w} d\eta_j = q_{ju,v,w}, \quad \int_0^1 f_{jp} d\eta_j = q_{jp}, \quad (3.2.18)$$

в результаті інтегрування диференціальних рівнянь системи (3.2.8) по z для $j=1$ в межах від $z=0$ до $z = \varepsilon$, а для $j=2$ - від $z = \varepsilon$ до $z = \gamma$, можна отримати з точністю до лінійних членів:

$$\begin{aligned}
w_\varepsilon &= (-1)^j a_j \left[q_{ju} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} + \frac{u_\varepsilon}{r} \right) + \frac{q_{jv}}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varphi} \right], \quad q_{ju} \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} - \frac{u_\varepsilon}{r} \right) \right] + \\
&+ \rho_{1j} q_{jp} \frac{\partial p_{j\varepsilon}}{\partial r} = \frac{v_{j1}}{\text{Re}_1} \left[q_{ju} \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial \varphi^2} - \frac{u_\varepsilon}{r^2} \right) - \frac{2}{r^2} q_{jv} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varphi} + \frac{u_\varepsilon}{a_j^2} \left(\frac{\partial f_{ju}}{\partial \eta_j} \right)_0^1 \right] + \\
&+ (j-2) a_j H \frac{\partial H}{\partial r}, \quad q_{jv} \left[\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \right) \right] + \frac{\rho_{1j}}{r} q_{jp} \frac{\partial p_{j\varepsilon}}{\partial \varphi} = \quad (3.2.19) \\
&= \frac{v_{j1}}{\text{Re}_1} \left[q_{jv} \left(\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial \varphi^2} - \frac{v_\varepsilon}{r^2} \right) + \frac{2}{a_j^2} q_{ju} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \varphi} + \frac{v_\varepsilon}{a_j^2} \left(\frac{\partial f_{jv}}{\partial \eta_j} \right)_0^1 \right] + \\
&+ (j-2) a_j \frac{H}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad q_{jw} \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} \right) + (-1)^{j+1} \frac{\rho_{1j}}{a_j} p_{j\varepsilon} = \\
&= \frac{v_{j1}}{\text{Re}_1} \left[q_{jw} \left(\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{w_\varepsilon}{a_j^2} \left(\frac{\partial f_{jw}}{\partial \eta_j} \right)_0^1 \right],
\end{aligned}$$

де $a_1 = \varepsilon$, $a_2 = \gamma - \varepsilon$. При виведенні отриманих інтегральних співвідношень (3.2.19) використані граничні умови (3.2.11) (3.2.13). Рівняння, як і раніше, розглядаються окремо для $j=1$ та $j=2$.

Система диференціальних рівнянь

Систему диференціальних рівнянь $f_j(\eta_j)$ з (3.2.18) можна апроксимувати поліномами, вид яких встановлюється на основі граничної умови (3.2.10) та умови сумісності системи. Тоді виходить так:

$$\begin{aligned}
w_\varepsilon &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varphi} = \frac{[q_{1u}\varepsilon + (\gamma - \varepsilon)q_{2u}]rw_\varepsilon}{(\gamma - \varepsilon)(q_{1u}q_{2v} - q_{1v}q_{2u})[q_{1v}\varepsilon + (\gamma - \varepsilon)q_{2v}]}, \\
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} + \frac{u_\varepsilon}{r} &= \frac{w_\varepsilon}{(\gamma - \varepsilon)(q_{1v}q_{2u} - q_{1u}q_{2v})}, \quad p_{2\varepsilon} = (\gamma - \varepsilon)q_{2w}\rho_{21} \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} \right) + \\
&+ \frac{\varepsilon - \gamma}{\text{Re}_1} \mu_{21} \left[q_{2w} \left(\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \varphi^2} \right) + w_\varepsilon \frac{\kappa_{2w} - \alpha_{2w}}{(\gamma - \varepsilon)^2} \right], \quad (3.2.20) \\
p_{1\varepsilon} &= p_{2\varepsilon} + \frac{\zeta}{Fr^2} (1 - \rho_{21}) + \frac{1}{We} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{Al}{2} H^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2w_\varepsilon}{\text{Re}_1} \left(\frac{\kappa_{1w}}{\varepsilon} - \mu_{21} \frac{\alpha_{2w}}{\gamma - \varepsilon} \right), \quad \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial r^3} + \\
 & + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial r \partial \varphi^2} + A_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{1 + 2A_1}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial r} + \frac{A_2}{Fr^2} (1 - \rho_{21}) \zeta + \\
 & + \left(\frac{A_2}{We} + \frac{1 + A_1}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{A_2}{We \cdot r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + A_3 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) = -\frac{Al}{2} A_2 \cdot H^2,
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{[q_{1w} \varepsilon + (\gamma - \varepsilon) q_{2w}] \text{Re}_1}{(\gamma - \varepsilon) \mu_{21} q_{2w} - q_{1w} \varepsilon}, \quad A_2 = \frac{\text{Re}_1}{(\varepsilon - \gamma) \mu_{21} q_{2w} - q_{1w} \varepsilon}, \quad (3.2.21) \\
 A_3 &= \frac{A_2}{\text{Re}_1} \left(\frac{\alpha_{2w} + \kappa_{2w}}{\gamma - \varepsilon} \mu_{21} - \frac{\alpha_{1w} + \kappa_{1w}}{\varepsilon} \right), \quad \alpha_j = \left(\frac{\partial f_j}{\partial \eta_j} \right)_{\eta_j=0}, \quad \kappa_j = \left(\frac{\partial f_j}{\partial \eta_j} \right)_{\eta_j=1}.
 \end{aligned}$$

Тут індекси u, v, w при f_j і a_j, κ_j опущені для простоти запису.

Передбачається рівність змішаних похідних: $\partial^2 \zeta / \partial t \partial r = \partial^2 \zeta / \partial r \partial t$.

При цьому друге та третє рівняння системи (3.2.20) (всього 4 рівняння для $j=1$ та $j=2$) не використовувалися. Разом із граничними умовами (3.2.10)-(3.2.13) вони можуть бути використані для встановлення виду функцій $f_j(\eta_j)$, після цього завдання дослідження параметричної нестійкості рідкометалевої плівки можна звести до аналізу рішень системи (3.2.20) з відповідними крайовими умовами.

Формування крайових умов вимагає конкретизації постановки завдання та завдання виду збурюючої сили. Причому, якщо досліджувати лише еволюцію вільної поверхні рідкометалевої плівки, то, як видно з (3.2.20), можна розглядати лише одне останнє рівняння системи. У загальному випадку це – рівняння третього порядку, проте, як показує аналіз, при $\text{Re} \gg 1$ (що відповідає практиці аналізованих явищ, і $|A_2| \gg 1$, $|A_1| \gg 1$ (умови є наслідком попереднього), члени третього порядку малі в порівнянні з іншими, і порядок рівняння знижується до другого.

Основна складність застосованого при виведенні системи (3.2.20) методу інтегральних співвідношень, заснованого на поліноміальній апроксимації миттєвих розподілів збурених швидкостей і тисків середовищ по вертикальній координаті, полягає в тому, що похибку

важко оцінити. Результати експериментів щодо визначення тінювим методом миттєвих профілів швидкості при хвильовій течії в плівці рідини показали задовільну апроксимацію профілю швидкості автотемельним поліномом для двовимірних хвиль помірної амплітуди [278]. Причому достатню для практики точність дає поліном другого порядку.

Експериментальні дані щодо визначення швидкостей нових профілів у рідкометалічних плівках, що знаходяться в умовах, аналогічних розглянутим в цій роботі, відсутні. Тому застосовувані поліноміальні апроксимації залежностей характеристик рідкометалевої плівки та її непровідного середовища від поперечної координати мають априорний характер. Однак, як видно з (3.2.20), (3.2.21), характер збудження поверхні плівки залежить тільки від профілю вертикальних складових швидкостей і не залежить від профілю інших складових.

Особливості методу інтегральних співвідношень

Нехай $Re_1 \gg 1$, тоді з (3.2.20) наближено виходить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial r} + \left(\frac{1}{q_{1w} \varepsilon \cdot We} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} - \frac{\alpha_{1w} + \kappa_{1w}}{q_{1w} \varepsilon^2 Re_1} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) + \\ + \frac{1}{q_{1w} \varepsilon \cdot We \cdot r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{(1 - \rho_{21}) \zeta}{q_{1w} \varepsilon \cdot Fr^2} = - \frac{Al \cdot H^2}{2q_{1w} \varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

звідки слідує, що вплив профілю вертикальної швидкості збуреного руху в плівці проявляється за допомогою двох інтегральних параметрів: $q_{1w} \varepsilon$ і $(\alpha_{1w} + \kappa_{1w}) / \varepsilon$. Оскільки величини q_{1w} і $\alpha_{1w} + \kappa_{1w}$ змінюються у вузьких межах ніж ε , то вплив виду полінома $f_{1w}(\eta_1)$ малий і тому у практичних завданнях q_{1w} і $\alpha_{1w} + \kappa_{1w}$ можна вважати константами, рівними якимось середнім значенням цих величин. Тоді процес електромагнітного збудження хвиль у плівці визначатиметься видом поля та наступними трьома величинами: εWe , εFr^2 , $\varepsilon^2 Re_1$.

Для стоячих хвиль ($d\zeta/dt = 0$) з (3.2.22) виходить:

$$\varepsilon \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{q_{1w} We} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{1 - \rho_{21}}{q_{1w} Fr^2} \zeta = - \frac{Al \cdot H^2}{2q_{1w}}, \quad (3.2.23)$$

звідки випливає, що число Рейнольдса впливає на такі хвилі, вони переносяться зі швидкістю руху плівки і їхній вигляд від цієї швидкості не залежить. При $\varepsilon / r \ll 1 (q_{1w} We)$, вводячи нову змінну $\bar{r} = We \cdot r$, можна отримати з (3.2.23) більш просте наближене рівняння

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1 - \rho_{21}}{Fr^2} \zeta = -\frac{Al \cdot H^2}{2} \quad (3.2.24)$$

У змінних \bar{r}, φ досліджуваний процес цілком визначається лише числом Фруда і видом електромагнітного збурення, тому вплив форми профілів збуреної швидкості не проявляється, що істотно полегшує аналіз завдання. Проведемо далі короткий аналіз отриманої математичної моделі параметричних коливань поверхні плівки та виявлення основних граничних випадків.

Стаціонарні хвилі ($\partial \zeta / \partial t = 0$)

При $\zeta = \zeta(r, \varphi)$ рівняння коливань поверхні плівки (3.2.20) дають

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial r^3} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial r \partial \varphi^2} + \left(\frac{A_2}{We} + \frac{1 + A_1}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{A_2}{We \cdot r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \\ + \frac{A_3}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{A_2}{Fr^2} (1 - \rho_{21}) \zeta = -\frac{Al}{2} A_2 \cdot H^2, \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

звідки випливає, що прогресивні електромагнітні хвилі збуджують на поверхні плівки лише прогресивні хвилі, тоді як зворотне твердження, взагалі кажучи, неправильне: стоячі електромагнітні хвилі можуть порушити як стоячі, так і біжучі хвилі. Подальший аналіз присвячений встановленню закономірностей електромагнітного збудження і придушення в радіально розповсюджуваних плівках таких хвильових процесів, які викликають розпад плівки на краплі заданих розмірів.

3.3 Обчислювальний експеримент: власні та параметрично збуджувані коливання поверхні плівки

Розглянемо електромагнітне поле виду (3.2.1), що біжить, і в рамках лінійної малоамплітудної теорії будемо розшукувати породжені ними збурення у вигляді аналогічних хвиль:

$$\{u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon, p_\varepsilon, \zeta\} = \{Q_u, Q_v, Q_w, Q_j, \tilde{\zeta}\} \exp 2i(kr + m\varphi - \omega t),$$

де амплітуди покладаються функціями координати r . Такі припущення дещо спрощують завдання, причому, клас збурень досліджуваної МГД-системи залишається, як і раніше, досить широким, і охоплює практично реальні ситуації.

Рівняння для амплітуд збурень

З урахуванням викладеного з рівняння збуреної системи:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_u}{dr} + \left(2ik + \frac{1}{r}\right)Q_u &= \frac{Q_w}{(\gamma - \varepsilon)(q_{1v}q_{2u} - q_{1u}q_{2v})}, \quad Q_v = \frac{[k(1 - \omega)\tilde{\zeta} - 0,5id\tilde{\zeta}/dr][q_{1u}\varepsilon + (\gamma - \varepsilon)q_{2u}]}{m(\gamma - \varepsilon)(q_{1u}q_{2v} - q_{1v}q_{2u})[q_{1v}\varepsilon + (\gamma - \varepsilon)q_{2v}]}, \\ Q_2 &= (\varepsilon - \gamma) \left\{ \frac{q_{2w}}{\text{Re}_1} \mu_{21} \frac{d^2 Q_w}{dr^2} + q_{2w} \left[\mu_{21} \frac{4ik}{\text{Re}_1} \frac{1}{r} \left(\frac{\mu_{21}}{\text{Re}_1} - \rho_{21} \right) \right] \frac{dQ_w}{dr} + \right. \\ &\quad \left. + 2q_{2w} Q_w \left[i\rho_{21} \left(\omega - \frac{k}{r} \right) + \frac{\mu_{21}}{\text{Re}_1} \left(\frac{ik}{r} - 2 \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right) \right] + \mu_{21} \frac{\kappa_{2w} - \alpha_{2w}}{\text{Re}_1 (\varepsilon - \gamma)^2} \right\}, \\ Q_1 &= Q_2 - \frac{1}{We} \left[\frac{d^2 \tilde{\zeta}}{dr^2} + 4ik \frac{d\tilde{\zeta}}{dr} - \left(4k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \tilde{\zeta} \right] + (1 - \rho_{21}) \frac{\tilde{\zeta}}{Fr^2} + \frac{Al}{2} H^2, \\ Q_w &= 2i \left(\frac{k}{r} - \omega \tilde{\zeta} \right) + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\zeta}}{dr}, \quad \frac{d^3 \tilde{\zeta}}{dr^3} + \left[6ik + \frac{1 + A_1}{r} - \left(2\lambda + \frac{A_2}{We} \right) r \right] \frac{d^2 \tilde{\zeta}}{dr^2} + \\ &\quad + \left[A_3 - 2\lambda(1 + 2A_1) + 4k \left(2\omega - i \frac{A_2}{We} \right) r + 4i(1 + A_1) \frac{k}{r} - 4 \frac{m^2}{r^2} - 12k^2 \right] \frac{d\tilde{\zeta}}{dr} + \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{4k^2}{We} + \frac{1 - \rho_{21}}{Fr^2} \right) A_2 - 4\omega^2 A_1 + 2 \left[2\omega(1 + 2A_1) + i(A_3 - 4k^2) \right] \frac{k}{r} + \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda(4k^2 - A_3) + \frac{4}{r^2} \left[m^2 \left(2\lambda + \frac{A_2}{We} \right) - k^2(1 + A_1) \right] \right\} \tilde{\zeta} = -\frac{Al}{2} A_2 \cdot H_m^2, \\ \frac{d^2 H_m}{dr^2} + \left(2ik + \frac{1 - \text{Re}_m}{r} \right) \frac{dH_m}{dr} + \left[\lambda \text{Re}_m + \frac{1 - \text{Re}_m}{r} ik - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right] H_m &= 0. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Оцінка членів та можливі спрощення завдання

Якщо вважати хвильові числа k і m дійсними, а частоту ω уявною величиною (чисто коливальна збурена течія по координатах r і φ , не наростає і не спадає за амплітудою з часом) або комплексною з малою абсолютною величиною, то, враховуючи вищевикладене, при $\text{Re}_1 \gg 1$,

$We \gg 1$ ($We \sim Re_1$ або $We < Re_1$), $Fr \sim 1$, $\rho_{21} \ll 1$ (як такі можна розглядати всі значення ρ_{21} , при яких величина $1 - \rho_{21}$ не мала), $\varepsilon \ll 1$ можна отримати наступні оцінки величин, які входять до диференціальних рівнянь (3.3.1): $A_1 \sim Re_1$, $A_2 \sim Re_1/\varepsilon$, $A_3 \sim 1/\varepsilon^2$.

З огляду на ці оцінки в передостанньому рівнянні системи (3.3.1), для $|\omega| \sim 1$ і $|\omega| \ll 1$ можна отримати наближене рівняння виду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\zeta}}{dr^2} + \frac{4ikA_2 r^3 + [(12k^2 + 4\lambda A_1 - A_3)r^2 + 4(m^2 - ikrA_1)]We}{[A_2 r^2 - (6ikr + A_1)We]r} \frac{d\tilde{\zeta}}{dr} + \\ + \left\{ \frac{A_2 r^2 [4k^2 + (1 - \rho_{21})We / Fr^2] + 2krWe [4\omega A_1 + i(A_3 - 4k^2)]}{[(6ikr + A_1)We - A_2 r^2]r} \right\} \tilde{\zeta} = \\ + \frac{4A_1(m^2 A_{21} - k^2 We)}{[(6ikr + A_1)We - A_2 r^2]r} \left\{ \tilde{\zeta} = \frac{A_2 \cdot r We \cdot H_m^2}{2[A_2 \cdot r^2 - (6ikr + A_1)We]} \right. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Граничні умови

В якості граничних умов можна покласти вимогу згасання збурень поверхні плівки на межі вертикального струменя (пригнічуються за рахунок тиску падаючого вертикального струменя) і на достатньому віддаленні від області $r \in [0, 1]$ (внаслідок згасання електромагнітного поля на значній відстані від аналізованої області). Це дає:

$$r = 1, \quad r = \infty, \quad \tilde{\zeta} = 0. \quad (3.3.3)$$

Якщо ці значення r невеликі, можна замість (3.3.3) використати умову відсутності збурення поверхні при $r = 1$, вирішуючи крайову задачу (3.3.2), (3.3.3) спільно з рівнянням для H_m одним із відомих чисельних методів [249]. При відлагодженні комп'ютерних програм можна використовувати аналітичні рішення для граничних випадків.

Нев'язке наближення

Для невязкого наближення: $Re_1 \gg 1$, $We \gg 1$, $We \sim Re_1$, відповідного до значень параметрів, наведених у 2.3, 3.1, виходить

$$\frac{d^2 \tilde{\zeta}}{dr^2} + 4ik \left(1 - \frac{\omega}{k} r\right) \frac{d\tilde{\zeta}}{dr} + \left(8\omega k - \frac{4}{r} k^2 + \frac{1 - \rho_{21}}{Fr^2} A_{21} r\right) \tilde{\zeta} = -\frac{A_{21}}{2r} Al \cdot H_m^2. \quad (3.3.4)$$

З рівняння (3.3.4) видно, що при $\rho_{21} = 1$ профілі миттєвих швидкостей руху в плівці та навколишньому середовищі впливають на характер збурення поверхні $z = \varepsilon$ тільки через величину у правій частині, яку можна розглядати як приведену амплітуду поля $\bar{H}_m^2 = A_{21} H_m^2$. Характер хвильових процесів по координаті φ на амплітуду хвиль не впливає, що узгоджується з раніше отриманим результатом для окремого випадку.

При $|\omega| r \ll k$ маємо $(1 - \rho_{21}) A_{21} r^2 \ll 4k^2 Fr^2$, і рівняння (3.3.4) переходить у рівняння Лапласа [212]:

$$\frac{d^2 \tilde{\zeta}}{dr^2} + 4ik \frac{d\tilde{\zeta}}{dr} + \frac{4}{r} k (2\omega r - k) \tilde{\zeta} = -\frac{A_{21}}{2r} Al \cdot H_m^2.$$

Його рішення отримано методом інтегрального перетворення як

$$\tilde{\zeta} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \exp \left[r\tau + \int \frac{C(\tau)}{B(\tau)} d\tau \right] \frac{d\tau}{B(\tau)}, \quad (3.3.5)$$

якщо $\left[\varphi(\tau) B(\tau) e^{r\tau} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} = -0,5 A_{21} Al \cdot H_m^2 / r$, де τ_1, τ_2 - границі інтегрування, що вибираються з умови виконання останньої рівності, $C(\tau) = -4k^2$, $B(\tau) = \tau^2 + 4ik\tau + 8\omega k$. Вибираючи в (3.3.5) шлях інтегрування вздовж прямої $\tau = T - 2ik$, де $T \in (-\infty, 0)$, можна записати:

$$H_m^2 = \frac{2}{Al \cdot r} A_{12} \left\{ \exp \left[k\pi \left(1 + 2\frac{\omega}{k}\right)^{-1/2} \right] - \exp(-2ik) \right\}. \quad (3.3.6)$$

Підстановка (3.3.6) в рівняння індукції магнітного поля дає необхідний зв'язок параметрів поля. При $k > 1$ другий член у квадратних дужках обмежений по модулю, а перший може бути великим, внаслідок чого другим членом можна знехтувати. З рівняння індукції з урахуванням (3.3.6) виходить, що це наближене рішення, строго кажучи, справедливе при $m=0$, $\text{Re}_m = 1$, $\omega = -ik^2$, коли (3.3.5) дає

$$\tilde{\zeta} = \frac{1+i}{4k\sqrt{k}} \operatorname{Im} \left\{ \exp \left[2k\sqrt{k}(1+i)r \right] Ei \left[-2k\sqrt{k}(1+i)r \right] \right\},$$

де Ei - інтегральна показова функція комплексної змінної [414]. Виділяючи уявну частину виразу у фігурних дужках, отримаємо

$$\tilde{\zeta} = \frac{1+i}{4k\sqrt{k}} \exp(2k\sqrt{k}r) \left\{ \left[C + \ln(4k\sqrt{k}r) \right] \sin(2k\sqrt{k}r) + \left(2n + \frac{1}{4} \right) \pi \cos(2k\sqrt{k}r) \right\},$$

де C - постійна Ейлера-Маскероні [414], $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ І далі:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} = & \frac{1}{4k^{3/2}} \exp \left[2k^{3/2}(r - \sqrt{k}t) \right] \left\{ \left[C + \ln(4k^{3/2}r) \right] \sin(2k^{3/2}r) + \right. \\ & \left. + \left(2n + \frac{1}{4} \right) \pi \cos(2k^{3/2}r) \left[\cos(2kr) - \sin(2kr) \right], \right\} \end{aligned}$$

Це - складний хвильовий процес, утворений хвилями різної амплітуди з хвильовими числами $2k$ і $2k^{3/2}$, і зрушеними по фазі відносно один одного. Зі збільшенням хвильового числа (зменшенням довжини хвилі) амплітуда коливань поверхні плівки експоненційно зменшується при $t > r / \sqrt{k}$, а у початковий момент, до $t = r / \sqrt{k}$, вона зростає. Рух "горба" відбувається зі швидкістю $v_k = \sqrt{k}$ (що коротше хвилі, тим швидше рухається "горб").

Поздовжні хвилі ($m=0$)

В цьому випадку хвилі розходяться з області $r \in [0, 1]$ рівномірно по φ . При $|k| \gg 1$ з (3.3.1) виходить

$$\frac{d^3 \tilde{\zeta}}{dr^3} + 6ik \frac{d^2 \tilde{\zeta}}{dr^2} + (A_3 - 12k^2) \frac{d \tilde{\zeta}}{dr} + 2i \left(\frac{k}{r} - 2\omega \right) (A_3 - 4k^2) \tilde{\zeta} = -\frac{Al}{2} A_2 \cdot H_m^2. \quad (3.3.7)$$

У рівнянні (3.3.7) для збурень з хвильовими числами $k_{1,2} = \pm \sqrt{A_3} / 2$ коефіцієнти постійні. Причому, у разі відсутності навколишнього непровідного середовища знак величини A_3 завжди позитивний. За наявності непровідного середовища знак A_3 визначається нерівностями:

$$A_3 > 0, \quad \mu_{21} \varepsilon (\kappa_{2w} + \alpha_{2w}) < (\gamma - \varepsilon) (\kappa_{1w} + \alpha_{1w}),$$

$$A_3 < 0, \quad \mu_{21} \varepsilon (\kappa_{2w} + \alpha_{2w}) > (\gamma - \varepsilon) (\kappa_{1w} + \alpha_{1w}).$$

Якщо товщина шару непровідного середовища значно перевищує товщину плівки, градієнти швидкості в ньому нижчі, ніж у плівці, тому $A_3 > 0$. Очевидно, випадок $A_3 < 0$ може мати місце лише для тонкого шару непровідного середовища, що має велику в'язкість. Тоді

$$\kappa_{2w} + \alpha_{2w} > \kappa_{1w} + \alpha_{1w}, \quad \gamma < (1 + \mu_{21}) \varepsilon.$$

Рішення рівняння (3.3.7) методом варіації довільних сталих у разі $k = k_{1,2}$ наступне. Характеристичне рівняння має корені:

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = \mp 2\sqrt{A_3}i, \quad \kappa_3 = \mp \sqrt{A_3}i \quad \text{при } A_3 > 0$$

$$\kappa_2 = \pm 2\sqrt{-A_3}, \quad \kappa_3 = \pm \sqrt{-A_3} \quad \text{при } A_3 < 0.$$

Загальне рішення має вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} = & \frac{A_2 Al}{16k^2} H_m^2 \left\{ [1 - \exp 2ik(1-r)]^2 [1 - \exp 2ik(1-r_*)]^2 \left[1 - r_* + \frac{16k^2 \delta}{A_2 H_m^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i}{4k} (\exp 4ik(1-r_*) - 1) \right] + r - 1 + \frac{i}{4k} [1 - \exp 4ik(1-r)] \right\}, \end{aligned}$$

так що хвильовий рух буде при $A_3 > 0$, коли k дійсні. При $A_3 < 0$ значення k уявні і можливе експоненційне наростання чи спадання збурень.

Константи інтегрування обчислюються з граничних умов виду:

$$r = 0, \quad \tilde{\zeta} = d\tilde{\zeta} / dr = 0; \quad r = r_*, \quad \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_*.$$

Для дійсних $k_{1,2}$ при $\omega = \omega_r + i\omega_i$ виходить:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_r = & \frac{A_2 Al}{16k^2} H_m^2 \exp(2\omega t) \left\{ \left[\left(1 - r_* + \frac{16k^2 \tilde{\zeta}_*}{A_2 Al \cdot H_m^2} \right) \cos 2(kr_* - \omega t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2k} \sin^2 2k(r_* - t) \cdot \sin 2(kr_* - \omega t) \right] \frac{\sin^2 k(1-r)}{\sin^2 k(1-r_*)} + \right. \\ & \left. + (r-1) \cos 2(kr - \omega t) - \frac{1}{2k} \sin^2 2k(1-r) \sin 2(kr - \omega t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

При $r_* = \pi N / k$ (N - ціле) маємо $\sin k(1-r_*) = 0$, тому для виключення фізично нереального випадку $\tilde{\zeta}_r = \infty$ необхідно покласти

рівним нулю коефіцієнт при відповідному члені. Це дає

$$\tilde{\zeta}_r = \frac{A_2 Al}{16k^2} H_m^2 (r_* - 1), \text{ після чого (3.3.8) набуває вигляду}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_r = \frac{A_2 Al}{16k^2} H_m^2 \exp(2\omega t) & \left[(r-1) \cos 2(kr - \omega t) + \right. \\ & \left. - \frac{\sin^2 2k(1-r)}{2k} \sin 2(kr - \omega t) \right], \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

де для спрощення виразу вибрано $r_* = 1 + (N - 0,5)\pi / k$. Обчислюючи $\tilde{\zeta}_* = 0,25 A_{23} Al \cdot H_m^2 (r_* - 1)$ з (3.3.9), за заданими значеннями r_* можна

зробити висновок щодо необхідної амплітуди поля H_m , що забезпечує збурення поверхні плівки заданої величини. Залежність амплітуди електромагнітної хвилі від рівня збурень поверхні плівки представляється як $H_m^* = 2\sqrt{|A_{23} \tilde{\zeta}_* / Al / (r-1)|}$. Звідси випливає умова розпаду плівки:

$$H_m \geq 2\sqrt{\varepsilon |A_{23}| / (r_* Al)}. \quad (3.3.10)$$

Згадуючи визначення A_2, A_3 , можна записати:

$$H_m \geq 2\sqrt{[\kappa_{1w} + \alpha_{1w} + \mu_{21} \varepsilon (\kappa_{2w} + \alpha_{2w}) / (\varepsilon - \gamma)] / (r_* \text{Re}_1 Al)}, \quad (3.3.11)$$

звідки видно, як збільшення числа Рейнольдса впливає на зниження критичної амплітуди напруженості магнітного поля.

Особливості хвилеутворення та розпад плівки

З (3.3.11) видно, що процес хвилеутворення в системі визначається інтенсивністю згасання вертикальної складової швидкості на межі розділу електропровідного та непровідного середовищ, на твердій поверхні та на верхній границі навколишнього середовища. Від виду профілів у шарах амплітуда збурень не залежить, що полегшує вивчення закономірностей поведінки плівки, оскільки визначення локальних градієнтів швидкості простіше, ніж профілю локальної збуреної швидкості. Якщо взяти для прикладу лінійні профілі $f_{jw}(\eta_j)$, то з (3.3.11) вийде така умова розпаду плівки:

$$H_m \geq 2 \sqrt{\frac{2}{\operatorname{Re}_1 A l \cdot r_*} \left| 1 + \mu_{21} \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \gamma} \right|}, \quad (3.3.12)$$

звідки видно, що зменшення ε і μ_{21} призводить до збільшення критичного рівня амплітуди поля (підвищення енергетичних витрат на утворення хвиль у МГД-системі).

Аналогічний ефект дає збільшення товщини шару непровідного середовища. При $\gamma = (1 + \mu_{21})\varepsilon$ виходить, що $H_m^* = 0$. Це - випадок максимальної нестійкості системи. Причому, зважаючи на те, що на верхній межі шару непровідного середовища швидкість покладається рівною нулю ($\mu_{21} \gg 1$), її шар товстий або верхня межа неелектропровідного шару - тверда поверхня (умова прилипання).

Враховуючи вищевикладене, можна зробити висновок, що якщо над плівкою є шар непровідного середовища товщиною $\gamma = (1 + \mu_{21})\varepsilon$, обмежений зверху твердою поверхнею, практично будь-які малі збурення поля призводять до розвитку збурень поверхні плівки, що ведуть до її розпаду на окремі концентричні хвилі, які потім можна роздробити на краплі.

Фізична сутність даного явища полягає в тому, що електромагнітне поле, не надаючи дії на непровідне середовище, проникає крізь нього та збуджує поверхню рідкометалевої плівки, яка, у свою чергу, впливає на непровідне середовище. А оскільки останнє обмежене твердою стінкою, воно цю енергію повертає плівці (за винятком дисипації). Виходить, що тверда стінка грає роль пружної сили, що створює зворотню дію. Крім того, такий режим оптимальний з енергетичної та технологічної точок зору, тому що збурення обмежені по амплітуді заданою відстанню між двома горизонтальними площинами.

Область застосування отриманих результатів

Оскільки при виведенні інтегральних співвідношень для збуреного стану досліджуваної МГД-системи введено припущення про автономність миттєвих профілів збурених параметрів, область застосування отриманих результатів обмежена тими випадками, для яких таке припущення виконується. Тому "зайві" рівняння можуть послужити для встановлення значень та меж зазначеної області. Ці рівняння згідно (3.3.1) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= Q_2 - \frac{1}{We} \left[\frac{d^2 \tilde{\zeta}}{dr^2} + 4ik \frac{d\tilde{\zeta}}{dr} - \left(4k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \tilde{\zeta} \right] + (1 - \rho_{21}) \frac{\tilde{\zeta}}{Fr^2} + \frac{Al}{2} H^2, \\
 Q_2 &= (\varepsilon - \gamma) \left\{ \frac{q_{2w}}{Re_1} \mu_{21} \frac{d^2 Q_w}{dr^2} + q_{2w} \left[\mu_{21} \frac{4ik}{Re_1} + \frac{1}{r} \left(\frac{\mu_{21}}{Re_1} - \rho_{21} \right) \right] \frac{dQ_w}{dr} \right. \\
 &+ 2q_{2w} Q_w \left[i\rho_{21} \left(\omega - \frac{k}{r} \right) + \frac{\mu_{21}}{Re_1} \left(\frac{ik}{r} - 2 \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right) \right] + \mu_{21} \frac{\kappa_{2w} - \alpha_{2w}}{Re_1 (\varepsilon - \gamma)^2} \left. \right\}, \\
 Q_v &= \frac{\left[k(1 - \omega) \tilde{\zeta} - 0,5id\tilde{\zeta} / dr \right] \left[q_{1u} \varepsilon + (\gamma - \varepsilon) q_{2u} \right]}{m(\gamma - \varepsilon)(q_{1u} q_{2v} - q_{1v} q_{2u}) \left[q_{1v} \varepsilon + (\gamma - \varepsilon) q_{2v} \right]}, \quad (3.3.13) \\
 Q_w &= 2i \left(\frac{k}{r} - \omega \tilde{\zeta} \right) + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\zeta}}{dr}, \quad \frac{dQ_u}{dr} + \left(2ik + \frac{1}{r} \right) Q_u = \frac{Q_w}{(\gamma - \varepsilon)(q_{1v} q_{2u} - q_{1u} q_{2v})}.
 \end{aligned}$$

Рівняння (3.3.13), будучи "зайвими", дозволяють після вирішення основної системи та підстановки в них знайдених виразів, з умови тотожного задоволення отриманих рівностей знайти значення параметрів та перевірити справедливість прийнятого припущення про автомодельність профілів збурених параметрів. Так, з аналізу виходить, що однорідне стаціонарне постійне магнітне поле майже не збурює систему. Коли наповненість профілю швидкості мала, то у цьому випадку збурюється лише межа розділу середовищ.

Чисельне вирішення крайового завдання

Більш загальне рішення системи диференціальних рівнянь (3.3.1), (3.3.2) отримано на ЕОМ. Для визначення амплітуди коливань поверхні півки вирішувалося наступне крайове завдання:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \tilde{\zeta}}{dr^2} + \frac{4ikA_2 r^3 + \left[(12k^2 + 4\lambda A_1 - A_3) r^2 + 4(m^2 - ikrA_1) \right] We}{\left[A_2 r^2 - (6ikr + A_1) We \right] r} \frac{d\tilde{\zeta}}{dr} + \\
 + \left\{ \frac{A_2 r^2 \left[4k^2 + (1 - \rho_{21}) We / Fr^2 \right] + 2kr We \left[4\omega A_1 + i(A_3 - 4k^2) \right]}{\left[(6ikr + A_1) We - A_2 r^2 \right] r} + \right. \\
 \left. + \frac{4A_1 (m^2 A_{21} - k^2 We)}{\left[(6ikr + A_1) We - A_2 r^2 \right] r} \right\} \tilde{\zeta} = \frac{A_2 \cdot r We \cdot H_m^2}{2 \left[A_2 \cdot r^2 - (6ikr + A_1) We \right]}, \quad (3.3.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 H_m}{dr^2} + \left(2ik + \frac{1 - Re_m}{r} \right) \frac{dH_m}{dr} + \left[\lambda Re_m + \frac{1 - Re_m}{r} ik - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right] H_m = 0. \\
 r=1, \quad \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_1, \quad d\tilde{\zeta} / dr = 0, \quad H_m = H_{m1}, \quad dH_m / dr = 0, \quad (3.3.15)
 \end{aligned}$$

де: $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_r + i\tilde{\zeta}_i$, $H_m = H_{mr} + iH_{mi}$.

Чисельне рішення крайової задачі (3.3.14), (3.3.15) проводилося на ЕОМ методом Кутта-Мерсона з автоматичним вибором кроку.

Розрахунок власних коливань плівки

У широкому діапазоні параметрів, що варіюються, проведено моделювання власних коливань системи. В табл. 3.3.1 наведено дані для $\tilde{\zeta}_r(1) = \tilde{\zeta}_i(1) = 10^{-7}$, $Fr = 14, We = 9,4$, $\rho_{21} = 5,4 \cdot 10^{-4}$, $\mu_{21} = 6,4 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $\gamma = 10\varepsilon$, $m = 6,28k$ (розплав алюмінію у повітрі). Як видно з Табл. 3.3.1, 3.3.2, вплив ω при $\omega < 1$ незначний, а хвильові числа коливань k суттєво впливають на їхню амплітуду, яка зменшується зі зростанням k . Вплив числа Рейнольдса можна простежити по Рис. 3.3.1, 3.3.2, де $Re_1 = 10^n$ ($n = 1 \div 5$ у таблиці зверху вниз), $\tilde{\zeta}_r(1) = \tilde{\zeta}_i(1) = 10^{-7}$, $(d\tilde{\zeta}/dr)_{r=1} = 0$, $\omega = 1$, $m = 0$, $\rho_{21} = \mu_{21} = 0,01$, $Fr = We = 10$.

Табл. 3.3.1 Параметри хвиль у плівці: від частоти та хвильового числа

ω	k	$\tilde{\zeta}_r$	$\tilde{\zeta}_i$	$d\tilde{\zeta}_r/dr$	$d\tilde{\zeta}_i/dr$
1,0	10	$-1,61 \cdot 10^{-5}$	$-2,82 \cdot 10^{-5}$	$-4,65 \cdot 10^{-4}$	$2,46 \cdot 10^{-4}$
	50	$3,46 \cdot 10^{-6}$	$-9,17 \cdot 10^{-6}$	$1,88 \cdot 10^{-3}$	$-1,25 \cdot 10^{-3}$
	100	$-2,66 \cdot 10^{-6}$	$6,99 \cdot 10^{-6}$	$-5,09 \cdot 10^{-3}$	$-8,64 \cdot 10^{-3}$
0,1	10	$-1,60 \cdot 10^{-5}$	$-2,83 \cdot 10^{-5}$	$-4,66 \cdot 10^{-4}$	$2,43 \cdot 10^{-4}$
	50	$3,40 \cdot 10^{-6}$	$-9,12 \cdot 10^{-6}$	$1,89 \cdot 10^{-3}$	$-1,23 \cdot 10^{-3}$
	100	$-2,56 \cdot 10^{-6}$	$7,01 \cdot 10^{-6}$	$-5,08 \cdot 10^{-3}$	$-9,19 \cdot 10^{-3}$
0,01	10	$-1,60 \cdot 10^{-5}$	$-2,83 \cdot 10^{-5}$	$-4,66 \cdot 10^{-4}$	$2,42 \cdot 10^{-4}$
	50	$3,39 \cdot 10^{-6}$	$-9,11 \cdot 10^{-6}$	$1,90 \cdot 10^{-3}$	$-1,23 \cdot 10^{-3}$
	100	$-2,55 \cdot 10^{-6}$	$7,01 \cdot 10^{-6}$	$-5,08 \cdot 10^{-3}$	$-9,24 \cdot 10^{-3}$

Інші параметри такі ж, як у попередньому прикладі. Тут $\bar{\zeta}_r = \tilde{\zeta}_r/\varepsilon$, $\bar{\zeta}_i = \tilde{\zeta}_i/\varepsilon$, $\Delta_{\zeta} = \left| \tilde{\zeta} \right| / \left| \tilde{\zeta}_1 \right|$. Обчислювальні експерименти встановили закономірності процесів. Різке згасання збурень поверхні плівки спостерігалось при $k = 10; 100$, $Re_1 = 10; 100$, $Fr = We = 10$, $\omega \leq 1$, $We = 10^3$,

$Re_1 = 10^4$, $Fr = 10$, слабе - при $Re_1 = 10^3$, $Fr = We = 10$; $We = 100$, $Fr = 10$, $Re_1 = 10^4$.

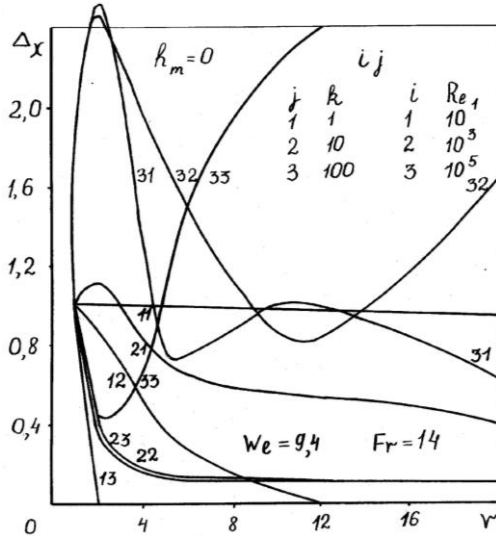


Рис. 3.3.1 Зміна відносної амплітуди вільних коливань поверхні плівки

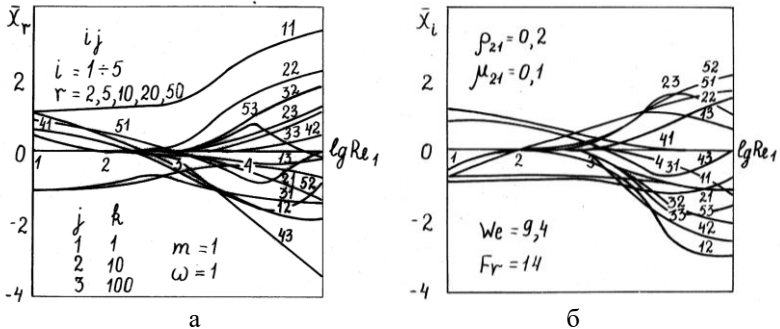


Рис. 3.3.2 Зміна амплітуди параметричних коливань плівки від числа Рейнольдса: а- дійсна частина амплітуди, б- уявна частина

Поширення збурень приблизно постійного рівня: $k=1;10;100$, $Re_1 = 10^4 \pm 10^6$, $Fr = We = 10$, $\omega \leq 1$; $k=1$, $Re_1 = 10^4$, $We = 100$, $Fr = 10$; $k=1$,

$Fr = We = 10$, $Re_1 = 10 \pm 10^6$. Різке наростання збурень відбувається при $Fr \ll 1$ (малий вплив гравітаційних сил). Початковий рівень збурень на якісну картину процесу не впливає.

Табл. 3.3.2 Параметри хвиль у плівці: в залежності від k та відстані r

ζ	k	r	1	2	5	10	20	50
1 ζ_r	1		10^{-7}	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$-1,1 \cdot 10^{-7}$	$-1,1 \cdot 10^{-8}$	$6,3 \cdot 10^{-8}$	$8,8 \cdot 10^{-8}$
	10		10^{-7}	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$5,5 \cdot 10^{-8}$	$7,5 \cdot 10^{-9}$	$5,5 \cdot 10^{-10}$	$5,4 \cdot 10^{-10}$
	100		10^{-7}	$-1,1 \cdot 10^{-12}$	$-1,6 \cdot 10^{-19}$	0	0	0
ζ_i	1		10^{-7}	$-8,0 \cdot 10^{-8}$	$-9,1 \cdot 10^{-8}$	$8,7 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$-8,1 \cdot 10^{-8}$
	10		10^{-7}	$-6,0 \cdot 10^{-8}$	$4,7 \cdot 10^{-9}$	$-7,9 \cdot 10^{-9}$	$-3,4 \cdot 10^{-10}$	$-6,5 \cdot 10^{-10}$
	100		10^{-7}	$-9,0 \cdot 10^{-13}$	$3,5 \cdot 10^{-20}$	0	0	0
2 ζ_r	1		10^{-7}	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$-9,8 \cdot 10^{-8}$	$-8,7 \cdot 10^{-8}$	$-2,7 \cdot 10^{-8}$	$-5,4 \cdot 10^{-8}$
	10		10^{-7}	$4,4 \cdot 10^{-8}$	$-2,5 \cdot 10^{-10}$	$-5,8 \cdot 10^{-11}$	$9,4 \cdot 10^{-13}$	$6,7 \cdot 10^{-13}$
	100		10^{-7}	$-9,9 \cdot 10^{-14}$	$-2,7 \cdot 10^{-17}$	$4,9 \cdot 10^{-19}$	$7,0 \cdot 10^{-19}$	0
ζ_i	1		10^{-7}	$-7,8 \cdot 10^{-8}$	$-8,4 \cdot 10^{-8}$	$-6,7 \cdot 10^{-8}$	$7,9 \cdot 10^{-8}$	$-3,5 \cdot 10^{-9}$
	10		10^{-7}	$-7,2 \cdot 10^{-9}$	$-6,5 \cdot 10^{-10}$	$4,0 \cdot 10^{-11}$	$2,0 \cdot 10^{-11}$	$-9,4 \cdot 10^{-12}$
	100		10^{-7}	$5,3 \cdot 10^{-14}$	$2,9 \cdot 10^{-17}$	$1,4 \cdot 10^{-18}$	$-1,0 \cdot 10^{-18}$	$1,1 \cdot 10^{-18}$
3 ζ_r	1		10^{-7}	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$-3,6 \cdot 10^{-8}$	$-5,8 \cdot 10^{-8}$	$-4,6 \cdot 10^{-8}$	$-6,8 \cdot 10^{-9}$
	10		10^{-7}	$-3,8 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$6,2 \cdot 10^{-9}$	$-3,3 \cdot 10^{-9}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$
	100		10^{-7}	$-9,4 \cdot 10^{-9}$	$3,1 \cdot 10^{-9}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$	$-1,3 \cdot 10^{-8}$	$4,8 \cdot 10^{-9}$
ζ_i	1		10^{-7}	$-6,3 \cdot 10^{-8}$	$-6,9 \cdot 10^{-8}$	$-1,6 \cdot 10^{-8}$	$2,4 \cdot 10^{-8}$	$4,8 \cdot 10^{-8}$
	10		10^{-7}	$-2,6 \cdot 10^{-8}$	$-2,6 \cdot 10^{-9}$	$-1,2 \cdot 10^{-8}$	$-1,1 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$
	100		10^{-7}	$5,0 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{-8}$	$-1,5 \cdot 10^{-8}$	$-1,8 \cdot 10^{-8}$	$-1,1 \cdot 10^{-8}$
4 ζ_r	1		10^{-7}	$1,9 \cdot 10^{-7}$	$5,0 \cdot 10^{-8}$	$-3,4 \cdot 10^{-8}$	$-9,7 \cdot 10^{-8}$	$-1,0 \cdot 10^{-7}$
	10		10^{-7}	$-1,3 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$3,7 \cdot 10^{-8}$	$-5,5 \cdot 10^{-8}$
	100		10^{-7}	$-3,2 \cdot 10^{-8}$	$4,7 \cdot 10^{-8}$	$4,6 \cdot 10^{-8}$	$-1,8 \cdot 10^{-7}$	$7,8 \cdot 10^{-8}$
ζ_i	1		10^{-7}	$-1,7 \cdot 10^{-8}$	$-9,8 \cdot 10^{-8}$	$-1,1 \cdot 10^{-7}$	$-6,0 \cdot 10^{-8}$	$4,6 \cdot 10^{-8}$
	10		10^{-7}	$-2,3 \cdot 10^{-8}$	$7,9 \cdot 10^{-8}$	$-7,6 \cdot 10^{-8}$	$-1,4 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$
	100		10^{-7}	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$-1,8 \cdot 10^{-7}$	$-4,2 \cdot 10^{-8}$	$-1,6 \cdot 10^{-8}$
5 ζ_r	1		10^{-7}	$2,4 \cdot 10^{-7}$	$5,3 \cdot 10^{-8}$	$-3,7 \cdot 10^{-8}$	$-8,4 \cdot 10^{-8}$	$-9,6 \cdot 10^{-8}$
	10		10^{-7}	$-1,7 \cdot 10^{-7}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$5,7 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$-1,4 \cdot 10^{-7}$
	100		10^{-7}	$-2,5 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$	$-3,4 \cdot 10^{-7}$	$-2,5 \cdot 10^{-8}$
ζ_i	1		10^{-7}	$-4,7 \cdot 10^{-9}$	$-9,0 \cdot 10^{-8}$	$-9,7 \cdot 10^{-8}$	$-8,7 \cdot 10^{-8}$	$6,3 \cdot 10^{-8}$
	10		10^{-7}	$-3,0 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$-9,6 \cdot 10^{-8}$	$-2,0 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$
	100		10^{-7}	$9,9 \cdot 10^{-8}$	$5,9 \cdot 10^{-8}$	$-2,4 \cdot 10^{-7}$	$-1,4 \cdot 10^{-7}$	$5,9 \cdot 10^{-8}$

Розрахунок коливань поверхні плівки, що збуджуються змінним електромагнітним полем

Результати чисельного розв'язання крайового завдання наведено на Рис. 3.3.3-3.3.6, де $\gamma_1 = H_{mr}$, $\gamma_2 = H_{mi}$. З представлених даних видно, що зі збільшенням числа Вебера амплітуда збурень поверхні плівки зростає швидше по r , а зі збільшенням числа Фруда - навпаки. Відповідні параметри електромагнітного поля, що забезпечує необхідний хвильовий режим плівці, подано на Рис. 3.3.6.

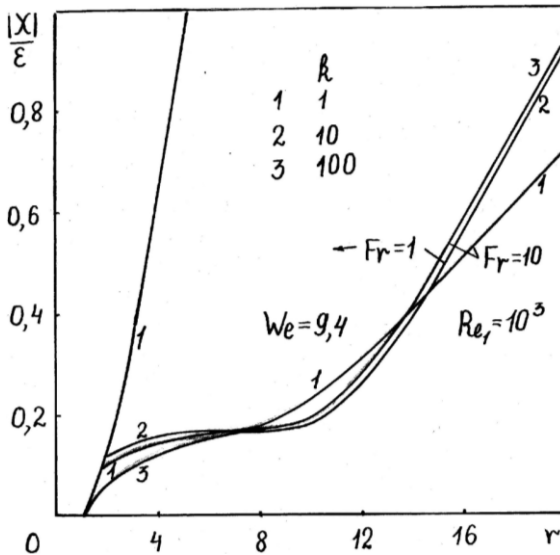


Рис. 3.3.3 Зміна амплітуди хвилі від відстані до центру плівки

Як видно з Рис. 3.3.1, короткохвильові власні коливання поверхні плівки при $Re_1 = 10^5$ інтенсивно наростають по r . Причому, інтенсивність зростання збільшується зі зростанням k (зрив коротких хвиль при швидкому русі рідини), а у випадку $k=1$ хвиля згасає (витягується рідиною, що швидко рухається). При помірних числах Рейнольдса ($Re_1 = 10^3$) довгі хвилі ($k=1$) поступово згасають, а короткі ($k=10, 100$) поширюються з амплітудою порядку 0,1 від амплітуди збурення плівки у перерізі $r=1$. При малих числах Рейнольдса ($Re_1 = 10$) довгі хвилі

поширюються з постійною амплітудою, а короткі швидко згасають (чим більше k , тим швидше).

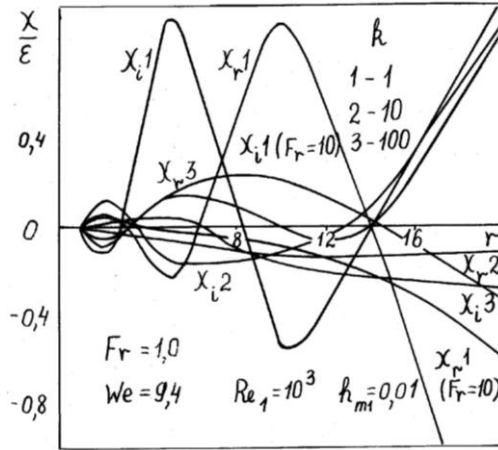


Рис. 3.3.4 Залежність параметрів хвилі від відстані по плівці

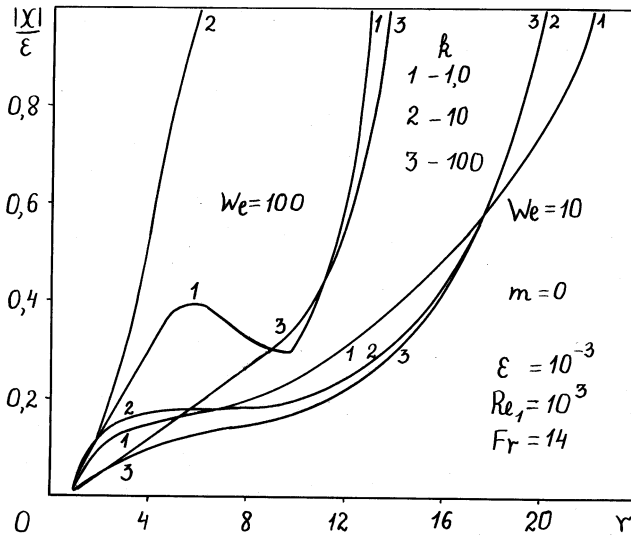


Рис. 3.3.5 Параметри поверхневої хвилі від відстані до центру плівки: вплив чисел Вебера та хвильових чисел

Вимушені коливання поверхні плівки наростають по r , розриваючи плівку на краплі, якщо $k \gg 1, m \gg 1$, або окремі тороїдальні джгути ($m=0$), які потім можна механічно дробити на краплі. При цьому амплітуда електромагнітного поля, що збудує (див. Рис. 3.3.6) істотно залежить від k : чим коротше хвилі, тим інтенсивніше має бути поле для їхньої підтримки та наростання. Отримані результати дозволяють вибрати оптимальний режим розпаду плівки на краплі, тому їх можна використовувати для конструювання перспективних плівкових МГД-грануляторів та диспергаторів.

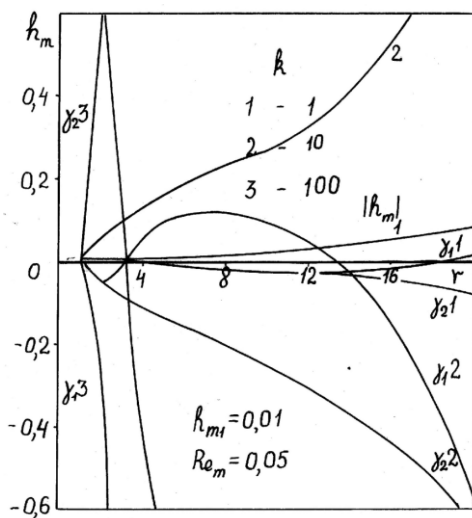


Рис. 3.3.6 Напруженість електромагнітного поля у плівці: вплив хвильових чисел

3.4 Дисперсія електромагнітних та поверхневих хвиль у плівці, що радіально розтікається

На відміну від плоского випадку, параметричні коливання на поверхнях розділу плівок, що радіально розтікаються, навіть у малоамплітудному лінійному наближенні описуються нелінійними

(квазилинійними) диференціальними рівняннями. Оскільки коефіцієнти їх залежать від координати r , хвилі на поверхні таких плівок, як показав аналіз рівнянь та отриманих розрахункових даних, диспергують. Фазові швидкості поширення електромагнітних та поверхневих хвиль відповідно рівні

$$c_r^H = \frac{\omega}{k + d\eta_H / dr}, \quad c_r = \frac{\omega}{k + 0,5d\eta / dr} \quad (3.4.1)$$

де $\eta_H(r) = \arctg(H_{mi} / H_m)$, $\eta(r) = \arctg(\tilde{\zeta}_i / \tilde{\zeta}_r)$. Результати розрахунків c_r^H надані на Рис. 3.4.1 для $Al=10^{-4}$, а c_r - на Рис. 3.4.2. Довжини хвиль відповідно рівні

$$l_r^H = \frac{2\pi}{k + d\eta_H / dr}, \quad l_r = \frac{2\pi}{k + 0,5d\eta / dr} \quad (3.4.2)$$

звідки видно, що поверхневі хвилі в плівці без поля майже не диспергують при порівняно малих k (є лише невеликий екстремум c_r, l_r при $r \sim 2$), при $k \sim 100$ дисперсія може бути помітною, причому, c_r, l_r - двоекстремальні функції r .

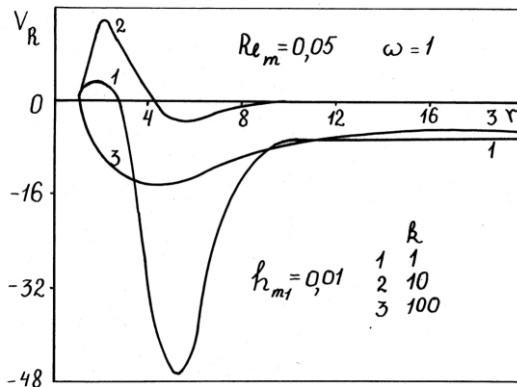


Рис. 3.4.1 Дисперсія електромагнітних хвиль у плівці: вплив чисел k

Вплив числа Рейнольдса суттєвий лише при $k \gg 1$, як видно з Рис. 3.4.2. Хвилі власних коливань поверхні плівки при $k=1$ спочатку дещо витягуються по довжині, потім приблизно при $r=5$ повертаються до

первісного значення і поширюються плівкою зі швидкістю 1 (кінематичні хвилі). Аналогічна картина має місце при $k = 10$, з тією різницею, що швидкість руху хвиль та їх довжина скорочуються приблизно в k разів. Число Рейнольдса майже не впливає на характер хвильових процесів. При $k=100$ число Рейнольдса істотно впливає на характер аналізованих процесів, а c_r, l_r спадають нелінійним чином, наближаючись до характерних величин для капілярних хвиль. Збільшення числа Рейнольдса в цьому випадку веде до зменшення довжини поверхневої хвилі та швидкості її поширення у початковій стадії ($r \leq 5$) та збільшення відповідно в кінцевій стадії.

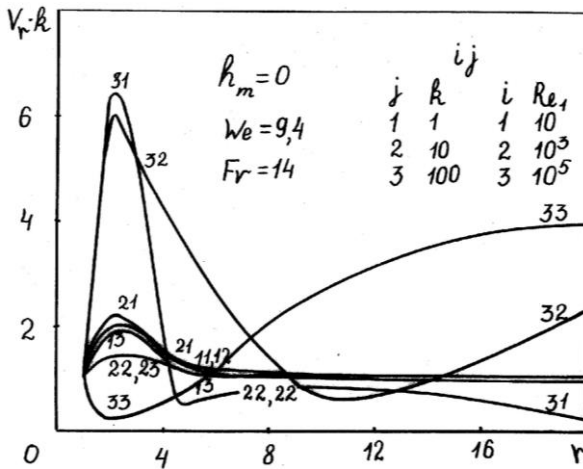


Рис. 3.4.2 Дисперсія поверхневих хвиль у плівці: вплив хвильових чисел k та чисел Рейнольдса

Цікавим є характер поширення електромагнітних хвиль у плівці. Як видно з Рис. 3.4.1, при $k=10$, починаючи з $r \sim 10$, електромагнітна хвиля не диспергує та $c_r^H \approx 0$ (стояча хвиля). При $k=1$ і $k=100$ з $r \sim 10$ починається область приблизно постійних $c_r^H < 0$, причому, $k=100$ (коротка електромагнітна хвиля) відповідає $c_r^H < 0$.

Зазначені особливості поширення електромагнітних та поверхневих хвиль показують, що задача параметричного збудження коливальних процесів заданого виду та руйнування плівки на краплі, на відміну від плоского

випадку, суттєво ускладнюється необхідністю узгодження нелінійних функцій l_r^H, l_r та інших. Тут, мабуть, можна говорити лише про параметричне збудження (придушення) коливань плівки заданого виду в якомусь фіксованому перерізі $r_r = const$. Звідси випливає, що в загальному випадку система параметричного збудження (придушення) коливань в плівці, що радіально розтікається, за допомогою електромагнітних полів не завжди може бути реалізована, особливо за відсутності осьової симетрії задачі, коли поле має бути ще й обертовим.

Зважаючи на вищевикладені досягнення, рішення задачі значною мірою визначається вмінням дослідника побудувати по можливості просту математичну модель, що адекватно відображає суттєві особливості фізичного процесу. Потім потрібно побудувати пристрій параметричного управління процесом (системою).

Власні коливання системи, незважаючи на значну дисперсію, зазначену вище, як видно з Рис. 3.4.1, не можуть призвести до руйнування плівки через їх малість і вкрай низьку інтенсивність наростання амплітуди. Отже, параметричне збудження коливань заданого виду тут вимагає системи придушення власних коливань, що дещо спрощує завдання, оскільки процеси збудження та придушення коливань можна розглядати окремо.

Розпад плівки за відсутності параметричних впливів визначається утворенням по краю плівки валика розвантаження від поверхневих сил та його подальшою руйнацією внаслідок розвитку Релеєвської нестійкості або через резонансні, параметричні впливи з частотою, що дорівнює Релеєвській, по окружній координаті φ .

3.5 Вібраційне збудження коливань поверхні рідких плівок та розпад на краплі

Інший вид параметричного керування - вібраційне збудження коливань поверхні рідких (не обов'язково рідкометалевих чи електропровідних) плівок. Цікава також остання стадія процесу: краплеутворення (розпад плівки на краплі).

Фізико-математична модель вібраційного збудження розпаду плівок в'язких рідин

Нехай плівка в'язкої нестисливої рідини (взагалі кажучи, не обов'язково провідної), що радіально розтікається, утворена при

натіканні вертикального струменя на горизонтальний диск-розсікач, який робить коливання у вертикальному напрямку. При поширенні плівки по диску мають місце відомі співвідношення для течій плівок по поверхні твердих тіл [127, 130, 132-134, 405, 484, 559], тоді як при сході плівки з краю диска вона стає вільною і в ряді випадків важливе значення набувають пружні напруження, що виникають при вібраціях диска (згинальні збурення плівки). У цьому – кардинальна відмінність вільних плівок від обмежених твердими поверхнями [32, 120, 185, 348, 377, 439, 445, 481]. Довжина хвилі $l = 2\pi / k$ дорівнює [128]:

$$l = 2\pi / \omega \left(1 \pm 2\sqrt{r/We} \right) \quad (3.5.1)$$

де $k = \omega / (dr / dt)$ - хвильове число.

Вільні плівки - двомірний аналог вільних струменів, для яких у газовому середовищі можна нехтувати напругою тертя на обох вільних поверхнях, що спрощує аналіз задачі. Наприклад, при зіткненні вертикального струменя з нерухомим диском-розсікачем утворюється радіальна плівкова течія, як показано на Рис. 3.5.1, де a -товщина плівки.

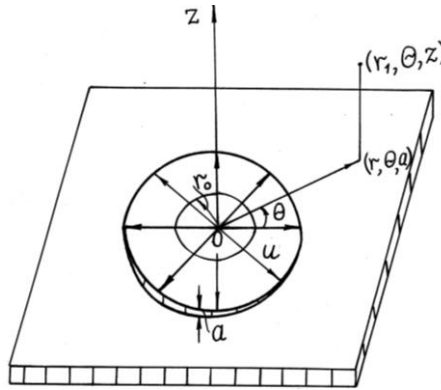


Рис. 3.5.1 Структурна схема утворення плівки, що радіально розтікається по горизонтальному диску

При коливаннях диска на вільній поверхні плівки утворюються, окрім осесиметричних коливань товщини плівки, також згинальні хвилі. Форма поверхні вільної плівки істотно залежить від різниці тиску всередині купола плівки і зовні. Вплив закрутки плівки та тертя з навколишнім повітряним середовищем на її форму досліджувався у роботах [127-134].

Теоретично і експериментально вивчені коливання поверхні закрученого кільцевого струменя в результаті взаємодії поверхневих та відцентрових сил [131, 132].

Сили поверхневого натягу, які прагнуть скоротити вільну поверхню плівки, призводять до утворення на краю вільного ребра (валика, потовщення), швидкість руху якого розраховується в режимі ідеальної рідини [127, 128]. Якщо плівка рухається, положення вільного ребра визначається умовою рівності нормальної складової швидкості плівки та іншими параметрами. Вільне ребро - нестійке утворення, що розпадається на краплі відповідно до теорії Релея-Вебера. Воно не впливає на поле швидкостей плівки, рух рідини в якій "надзвуковий": швидкість течії більша за швидкість поширення згинальних збурень поверхні плівки. У цитованих роботах теоретично встановлено та експериментально підтверджено, що згинальні збурення поширюються плівками ідеальної рідини зі швидкістю, яка залежить від довжини хвилі, тобто без дисперсії, на відміну від збурень товщини. Згинальні збурення верхньої і нижньої поверхні плівки синфазні, а при збуреннях товщини вони знаходяться у протифазі.

Для малих згинальних хвиль на радіальній плівці ідеальної рідини, що збуджуються осцилюючим диском-розсікачем, отримані і досліджені визначальні диференціальні рівняння [127-134]. При малих значеннях швидкості плівки визначено критичні значення числа Вебера, радіуса струменя, що створює плівку, та інших параметрів, що визначають її руйнування. Отримані результати підтверджують експериментальні дані. Цей процес зумовлений виникненням вільного ребра та зростанням амплітуди кардіоїдальних згинальних збурень. Подальше збільшення швидкості течії призводить до зменшення плівки.

Появу згинальних кільцевих хвиль, що біжать, згенерованих динамічною дією повітря, одними з перших теоретично розглянули в [116], дослідивши стійкість плоского шару ідеальної рідини. В [129] отримано вираз для відстані, на якій відбувається руйнування плівки на краплі внаслідок її взаємодії з повітрям. Автори отримали задовільний опис експериментальних даних. Лінійні теорії часової та просторової нестійкості плоского рідкого шару дали близькі результати, що задовільно збіглися з експериментом для помірних частот.

Для високочастотних збурень, стійких згідно з низкою дослідників, є протилежні експериментальні дані. Динамічна дія навколишнього середовища на плівку збільшується зі збільшенням довжини згинальної хвилі, внаслідок чого при досить високій критичній частоті зростання

збурень припиняється. Як і у разі згинальних збурень високошвидкісних струменів у повітрі, лінійна теорія тонких плівок не дає зміни їхньої товщини внаслідок поширення згинальних хвиль.

Для теоретичного визначення розміру крапель, що утворюються в результаті розпаду плівок, була розглянута задача про форму перерізу та стійкість рідкого циліндра, що рухається в повітрі перпендикулярно до осі. Справжній механізм руйнування плівки значно складніший і нині мало вивчений [56, 116, 129, 347, 307, 521].

Теорія нелінійних згинальних збурень, побудована з урахуванням членів другого порядку, передбачає зменшення товщини плівки [116]. Проте знайдена з цієї теорії відстань до перетину розпаду плівки суперечить дослідним даним. Очевидно, разом із згинальними збуреннями важливу роль у процесі розпаду плівок відіграють також збурення їх товщини, що посилюються динамічною дією повітря, як можна помітити з аналізу фотографій [100].

За відсутності динамічної дії повітря збурення товщини згасають через в'язку дисипацію. Інкремент цих збурень у системі координат, пов'язаній з плівкою, визначає хвилі максимального зростання у виразі для розпаду плівки. Збурення товщини плівки, на відміну від згинальних, диспергують. Порівняння експериментальних даних показує, що характерний час наростання збурень товщини більший, ніж згинальних у кілька разів. Якщо швидкість зростання збурень товщини значно нижча за швидкість зростання згинальних хвиль, то умови руйнування плівок повністю визначаються закономірностями розвитку згинальних хвиль.

Питання про механізм розпаду високошвидкісних плівкових течій у газовому середовищі мало вивчений. Актуальність цієї теми зумовлена надзвичайною важливістю її додатків: гранулятори, форсунки тощо. Наявність ПАР, що призводять до зменшення коефіцієнта поверхневого натягу, прискорює зростання згинальних збурень плівки у повітрі.

Параметричний резонанс

При великих віброприскореннях системи ($\sim 100g$ і вище) рідина на диску-розсікачі кавітує і диск випромінює потужну акустичну хвилю. При цьому вібраційні числа Ейлера Eu_g сягають одиниць і навіть десятків. Для розуміння закономірностей розпаду плівки на краплі під впливом акустичних полів робилися різні спроби [56, 116, 307, 521]. При цьому високошвидкісна зйомка показала, що крапля в досить потужному акустичному полі сплющується в плівку і далі дробиться на ще дрібніші

краплі при обтіканні її осцилюючим газовим потоком [100]. Аналогічний ефект неодноразово спостерігався при обтіканні краплі стаціонарним потоком [108].

Коливальний характер обтікання краплі в акустичному полі не вносить принципових змін у методику розрахунку. Руйнування плівки на краплі є результатом її параметричної нестійкості по відношенню до змінного акустичного тиску. Причому, як показано [116], у разі тонкої плівки, на відміну від відомого ефекту нестійкості поверхні рідкого напівпростору (ефект Фарадея) [460], параметр зв'язку симетричної та антисиметричної мод коливань є змінним. Тому параметричні коливання збуджуються не на половинній частоті збурюючої сили, але на двох частотах (симетричні і антисиметричні моди).

Гіпотеза параметричної нестійкості плівки в акустичному полі [347] розвинена в [116], де узагальнено розрахунок [129] на випадок змінного тиску газу, що викликається акустичною хвилею. При обтіканні краплі потоком газу процес дроблення визначається порогом сплющування:

$$p_{om} = c\sqrt{3,4\sigma\rho_2 / R_0} \cdot \quad (3.5.2)$$

Наприклад, для краплі радіусом 1 мм у повітрі $p_{om} \approx 5 \cdot 10^3$ Па, що відповідає експерименту для різних рідин, у тому числі металевих розплавів [302]. Поріг залежить від частоти звуку, а розмір одержуваних крапель залежить від σ, ρ_1, Ω [116], але не залежить від інтенсивності звуку. Радіус краплі, з умови рівності об'єму краплі та паралелепіпеду зі стороною порядку довжини хвилі збурення, визначається виразом [116]:

$$r_* \approx 0,78 \left(\frac{4\pi^2\sigma}{\rho_1\Omega^2} \right)^{1/3}, \quad (3.5.3)$$

де Ω - частота звуку. Розмір області інтенсивного подрібнення крапель акустичним полем визначається з умови

$$L < 1,35R_0\sqrt{\rho_{12}}(V_k/u_0), \quad (3.5.4)$$

де V_k - швидкість руху краплі в газовому потоці.

Як видно з (3.5.3), (3.5.4) радіус крапель та розмір області інтенсивного подрібнення крапель не залежать від товщини плівки. Як показано в [116], у разі товстих плівок цей висновок несправедливий, для них реалізується звичайна параметрична нестійкість вільної поверхні та поріг нестійкості пропорційний прискоренню межі: чим тонша плівка,

тим більше прискорення коливань плівки як цілого. Рівняння динаміки деформування краплі вирішувалося на ЕОМ [116], внаслідок чого отримано час сплющування краплі:

$$t_0 = 1,35\sqrt{\rho_{12}}(R_0/u_0). \quad (3.5.5)$$

Розрахунок за формулою (3.5.5) показав, що, наприклад, час сплющування краплі води радіусом 0,5мм у звуковому полі з коливаннями швидкості порядку 15м/с (звуковий тиск $\sim 10^4$ Па) становить $\sim 1,4 \cdot 10^{-3}$ с, що збігається по порядку величини з експериментальними даними з розпаду крапель [116].

Відомо, що плівки параметрично нестійкі. Товсті та тонкі плівки відрізняються порогом нестійкості [116]. При $\rho_1 h^3 \omega^2 / \sigma < 8$ плівки вважаються тонкими, поріг перепаду тиску дорівнює

$$p_{\text{нор}} = 2^{7/2} \mu_1 h^{9/4} \omega^{5/2} (\rho_1 / \sigma)^{3/4}. \quad (3.5.6)$$

Для товстих плівок ($\rho_1 h^3 \omega^2 / \sigma > 32$) аналог (3.5.6) має вигляд

$$p_{\text{нор}} = 2^{4/3} \mu_1 h \omega^{5/3} (\rho_1 / \sigma)^{1/4}. \quad (3.5.7)$$

Як видно з (3.5.7), (3.5.6), для товстих плівок зменшується вплив товщини та відношення густини до коефіцієнта поверхневого натягу. При $p > p_{\text{нор}}$ характерний час розвитку нестійкості має порядок $\tau = 4\sigma h k^2 / p$. Відповідно, для (3.5.7), (3.5.6) виходить

$$\tau = 2^{5/3} \omega^{1/3} \rho_1^{2/3} \sigma^{1/3} h / p, \quad \tau = 2^{7/4} \sqrt{\omega} / p \cdot h^{5/4} \sigma^{1/4} \rho_1^{3/4}. \quad (3.5.8)$$

Наприклад, для води з (3.5.3) слідує $r_k \approx 0,11\Omega^{2/3}$, звідки при $\Omega = 10^3; 64 \cdot 10^3$ Гц, відповідно, $r_k = 10^{-3}; 10^{-4}$ м, тобто краплі з радіусом менше 1мм виходять при частоті акустичної хвилі вище 1 кГц.

Найменш вивченим є випадок параметричного збудження розпаду плівки на твердій поверхні за високої інтенсивності впливів. Саме він нами досліджувався детально, рахуючи для спільності, що може діяти електромагнітне поле раніше розглянутого виду або вібрація диска-розсікача, або все разом, що розширює можливості параметричного управління коливаннями поверхні плівки, її розпадом на краплі та процесом краплеутворення.

3.6 Нелінійні хвилі та резонансні ефекти

Можна розглянути два види інтенсивного параметричного впливу на плівку за допомогою вібрацій: енергоємні дії, що характеризуються великою потужністю енергії, що вводиться в потік вібратором, і резонансні, при яких порівняно слабкі дії мають великий вплив на потік (розпад плівки і т.п.). При цьому, як показано в розділі 6, енергія, що вводиться вібратором у потік, може бути великою за рахунок використання механічних резонансів самого вібратора, тобто без великих енергетичних витрат.

У плоскої плівки система рівнянь, аналогічна (3.1.5), має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t \partial x} - \alpha_u \right) \frac{\varepsilon \partial \varepsilon}{2 \partial t} + 2\varepsilon Al \cdot H \frac{\partial H}{\partial x} + \\ + \left(\frac{1}{Fr^2} - Eu_g \cos \Omega t \right) \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{3}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \alpha_u \right) &= \frac{\varepsilon}{We} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^3}, \end{aligned} \quad (3.1.5')$$

де $Eu_g = g_v a / u_0^2$ - вібраційне число Ейлера, g_v, Ω - віброприскорення, що розвивається вібратором, та частота вібрацій, відповідно. Рівняння (3.1.5') записані в системі координат, пов'язаній з диском-розсікачем. Електромагнітне поле вільно проникає у плівку нормально до її поверхні у незбуреному стані. Аналіз рівнянь показує, що при $Eu_g \sim 1/We$ має місце рівняння для ε типу КДВ, тоді як $Eu_g \gg 1$ відповідає виділенню членів, притаманних рівнянню Бюргерса. Але одержуване з (3.1.5') рівняння для ε складніше відомих типів нелінійних рівнянь і його дослідження у загальному випадку становить значні труднощі. Аналітичне рішення було одержане редукційним методом збурень.

Якщо рішення для $q(x, t), \varepsilon(x, t)$ розшукувати у вигляді плоских хвиль $\exp i(kx - \omega t)$, а з нелінійних членів, що фігурують у рівняннях вихідної системи, враховувати лише ті, що дають внесок порядку $\exp i(kx - \omega t)$, то, наприклад, складові $\sim q^3$ можна врахувати у вигляді $q|q|^2$ і при врахуванні нелінійних ефектів залишати лише ті члени, які мають той же фазовий швидкоосцилюючий множник, що й лінійні члени відповідного рівняння системи. Тоді нелінійне дисперсійне

співвідношення $G(\omega, k, |\psi|^2) = 0$, яке містить, окрім ω, k , ще й квадрат амплітуди $|\psi|^2$ плоскохвильового розкладання невідомих функцій $q(x, t)$, $\varepsilon(x, t)$, набуває вигляду:

$$H_z(x, t) = H_0(x, t) + H(x, t), \quad (3.6.1)$$

$$(\omega - k)^2 + 2ik \cdot Al \cdot H_z \frac{\partial H_z}{\partial x} + 3i \frac{k^2}{\text{Re}} (\omega - k) + \left(Eu_g \cos \Omega t - \frac{1}{Fr^2} \right) k^2 = \frac{k^4}{We} \left[1 + \frac{6k^4 |\psi|^2}{(\omega - k)^2} \right],$$

де $H_0(x, t)$ - постійне електромагнітне поле (якщо ϵ), $H(x, t)$ - електромагнітна хвиля, параметрична дія поля на плівку, наприклад, $H \sim \exp i(k_m x \pm \omega_m t)$. Тут хвильове число k_m і частота ω_m електромагнітної хвилі визначають швидкість, довжину хвилі та напрямок її поширення.

Маючи нелінійне дисперсійне співвідношення $G(\omega, k, |\psi|^2) = 0$, можна обчислити коефіцієнти нелінійного еволюційного рівняння для амплітуди $\psi(\xi, \tau)$ поверхневої хвилі в плівці, що збуджується, де ξ, τ - "повільні" ("стислі") змінні, які вводяться процедурою Гарднера-Морікави. Так, маємо:

- 1) коефіцієнт при $\partial^2 \psi / \partial \xi^2$ є величиною порядку дисперсії групової швидкості хвилі і легко може бути обчислений навіть з лінійного дисперсійного співвідношення

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_g}{\partial k} \Big|_{|\psi|=0} = \pm \frac{Fr}{2\sqrt{We(We + k^2 Fr^2)}} \left(k + 1 - \frac{k^4 Fr^2}{(We + k^2 Fr^2)} \right); \quad (3.6.2)$$

- 2) коефіцієнт $\sim \partial \omega / \partial |\psi|^2$ при нелінійному члені $|\psi|^2 \psi$ визначається з отриманого нелінійного дисперсійного співвідношення, що розглядається як неявно задана функція $\omega(k, |\psi|^2)$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial |\psi|^2} \Big|_{|\psi|=0} = \frac{9k \text{Re}}{We(\omega - k)^2 [2(\omega - k) \text{Re} + 3ik^2]}; \quad (3.6.3)$$

- 3) коефіцієнт при $\partial\psi/\partial\xi$ залежить від дисипативних втрат у конкретній системі і може бути легко визначений, якщо в лінійному дисперсійному співвідношенні врахувати дисипацію $\sim 1/\text{Re}$, що дає величину $-1,5ik^2/\text{Re}$ в даній задачі.

Отримане нелінійне еволюційне рівняння щодо амплітуди хвилі дає точні рішення для аналізу просторово-часової еволюції огинаючої хвилі. Зокрема, граничне значення амплітуди хвилі, при якому можлива її нестійкість (абсолютна) визначається співвідношенням:

$$|\psi_s|_{\text{nop}}^2 = \frac{We}{9} \left(\frac{1}{Frk} + \frac{1}{We} \right)^2. \quad (3.6.4)$$

Слід зазначити, що цей тип нестійкості, званий у літературі також модуляційною нестійкістю, реалізується навіть тоді, коли є дисипативний механізм у системі. Величини порогових значень амплітуди у довгохвильовому та короткохвильовому наближеннях, відповідно, наступні:

$$k \ll 1, |\psi_s|_{\text{nop}}^2 = \frac{We}{9Fr^4k^4}; \quad k \gg 1, |\psi_s|_{\text{nop}}^2 = \frac{1}{9We^2}.$$

Співвідношення (3.6.4) описують поріг збудження огинаючих солітонів, коли дисипативні втрати близькі до нуля. Проте для збудження солітоноподібних хвиль: ($\sim \text{sech}$) слід задовольнити ще й критерію Лайтхілла:

$$k+1 > \frac{k^4 Fr^2}{We + Fr^2 k^2}, \quad (3.6.5)$$

який накладається на знаки коефіцієнтів при $\partial^2\psi/\partial\xi^2$ - нелінійному члені стандартного нелінійного еволюційного рівняння (нелінійне рівняння Шредінгера) без дисипації. Цьому критерію легше задовольнити при $k \rightarrow 0$.

Наявність вібрації та магнітного поля призводить до просторово-часової модуляції амплітуди нелінійної хвилі. Так, наприклад, при превалюючому внеску вібрації амплітуда хвилі додатково модулюється множителем $\sim \exp\left(ik\sqrt{Eu_s \cos\Omega t} / Fr\right)$.

Чисельне моделювання на ЕОМ порогів утворення огинаючої хвилі солітонів для обраних значень параметрів дає наступні результати:

$$|\psi_s|_{\text{пор}} = 3 \cdot 10^{-2}; \quad \text{загальний випадок}$$

$$|\psi_s|_{\text{пор}} = 3 \cdot 10^{-3}, \quad k \gg 1;$$

$$|\psi_s|_{\text{пор}} = 10^{-6} \doteq 10^{-8}, \quad k \rightarrow 0.$$

Таким чином, з отриманого можна укласти:

1. У довгохвильовому наближенні ($k \ll 1$) поріг утворення солітонів досяжний.
2. У коротковолновому наближенні ($k \gg 1$) поріг залежить від числа Вебера We і значно вищий (в $10^3 \doteq 10^5$ разів) порівняно з попереднім випадком.
3. Наявність вібрації і магнітного поля призводить до просторово-часової модуляції амплітуди нелінійної хвилі в плівковій течії.

Оскільки представлені в розділі 6 експериментальні дані отримані, в основному, для плівок, що радіально розтікаються, складемо далі аналогічну (3.1.5') систему рівнянь для цього випадку. Причому, введемо цю систему для загального випадку дії як вібрацій, так і електромагнітного поля, хоча цей варіант не був практично реалізований. Розглянемо плівку, що радіально розтікається, нехтуючи дію навколишнього середовища. Плівка передбачається осесиметричною та вплив навколишнього середовища малий. Тоді при $\partial/\partial\varphi=0$ для $H = H(r, t)$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \zeta$, $u_0 = 1/r$, $\varepsilon_0 = \text{const}$, аналогічно (3.2.19) маємо:

$$\int_0^\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0, \quad \int_0^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} dz + \frac{1}{r} \int_0^\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) dz + \int_0^\varepsilon \frac{\partial p}{\partial r} dz +$$

$$+ \frac{Al}{2} \int_0^\varepsilon \frac{\partial H_\varepsilon^2}{\partial r} dz = \frac{1}{\text{Re}} \int_0^\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dz, \quad (3.6.6)$$

де:

$$z=0, \quad u=w=0; \quad z=\varepsilon, \quad w = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}, \quad (3.6.7)$$

$$p = \frac{Al}{2} H_\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{Fr^2} - Eu_s \cos \Omega t \right) \zeta - \frac{K_{cp}}{We} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}.$$

Тут $H_\varepsilon = H_\varepsilon(\varepsilon, t)$, $q = \int_0^\varepsilon ur dz$, у загальному випадку ($\partial/\partial\varphi \neq 0$) середня кривизна поверхні виражається так:

$$K_{cp} = \frac{lG - 2mF + nE}{[EG - F^2]^{3/2}}, \quad E = 1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)^2, \quad F = \frac{\partial\zeta}{\partial r} \frac{\partial\zeta}{\partial\varphi},$$

$$G = r^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\right)^2, \quad l = r \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}, \quad m = r \frac{\partial^2\zeta}{\partial r \partial\varphi} - \frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}, \quad n = r \frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2} + r^2 \frac{\partial\zeta}{\partial r}.$$

$$K_{cp} = \frac{\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \left[1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)^2\right] \frac{1}{r} \frac{\partial\zeta}{\partial r}}{\left[1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)^2\right]^{3/2}},$$

В даному випадку середня кривизна:

де при $\partial/\partial\varphi \neq 0$ задача виходить дуже громіздкою, особливо - якщо враховувати миттєву зміну вектора нормалі до вільної поверхні, що має істотне значення при великій величині в'язких напруг. У нашому випадку це не так, тому система рівнянь збуреного руху плівки буде простішою.

З (3.6.6) з урахуванням (3.6.7) аналогічно до попереднього буде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{\partial r} \left(\frac{q}{r^2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \left[\alpha_u + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) \right] + \left(\frac{1}{Fr^2} - Eu_s \cos \Omega t \right) \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} +$$

$$(3.6.8)$$

$$+ \varepsilon \left(Al \frac{\partial H_\varepsilon^2}{\partial r} - \frac{1}{We} \frac{\partial K_{cp}}{\partial r} \right) + \frac{1}{Re} \left[3\alpha_u + 4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r}.$$

Отримана система (3.6.8) з точністю до членів другого порядку дає після деяких перетворень (із застосуванням перехресного диференціювання рівнянь по r і t) наступне рівняння еволюції вільної поверхні плівки:

$$\left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 5r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) \left\{ \left[\left(Eu_s \cos \Omega t - \frac{1}{Fr^2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - Al \frac{\partial H_\varepsilon^2}{\partial r} \right] \varepsilon \right\} +$$

$$+ \left\{ r \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{Re} \frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{\partial}{\partial t} \left(1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] (1 + 3r) \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right\} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) +$$

$$+ \frac{1}{We} \left\{ \varepsilon \left(r^2 \frac{\partial^5 \varepsilon}{\partial r^5} + 6r \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial r^3} - \frac{4}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) \right\} +$$

$$(3.6.9)$$

$$+\left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right) \left[r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} + (2r^2 + 5)r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + 3\varepsilon \right] = \frac{18}{\text{Re}}.$$

Для плівок, що розглядаються, при істотному прояві сил інерції у випадку $\text{Re} \gg 1, \text{We} \gg 1$ з (3.6.9) наближено випливає:

$$\begin{aligned} & \left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 5r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) \left\{ \left[\left(Eu_g \cos \Omega t - \frac{1}{Fr^2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - Al \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial r} \right] \varepsilon \right\} + \\ & + \left\{ r \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{\text{Re}} \frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{\partial}{\partial t} \left(1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] + (1 + 3r) \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right\} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.6.9')$$

При зроблених спрощеннях можна розглянути нелінійний хвильовий процес, в основі якого лежить кінематична хвиля: $\partial \varepsilon / \partial t = -(1/r) \partial \varepsilon / \partial r$. Тоді, замінюючи у хвилі вищого порядку $\partial / \partial t$ на $-(1/r) \partial / \partial r$, з (3.6.9') отримуємо (для простоти покладемо $H_\varepsilon = 0$, тобто будемо досліджувати лише вібраційну дію):

$$\left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 5r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) \left\{ \left[\left(Eu_g \cos \Omega t - \frac{1}{Fr^2} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] \varepsilon \right\} = 0. \quad (3.6.10)$$

Рішення рівняння (3.6.10) має вигляд:

$$\varepsilon^2 = \left[c_1 \int_1^r \left(\frac{1}{r} + \frac{c_2}{r^3} \right) e^{-q_1 r} dr + e^{-q_1 r} \right] e^{-q_1 \left(r + \frac{Eu_g}{\Omega} \sin \Omega t - \frac{t}{Fr^2} \right)}, \quad (3.6.11)$$

де $c_1, c_2, q_1 = \text{const}$. Оскільки $\int_1^r \left(\frac{1}{r} + \frac{c_2}{r^3} \right) e^{-q_1 r} dr < c e^{-q_1 r}$, де $c = \text{const}$, то з (3.6.11) спрощено мож записати

$$\varepsilon^2 = \exp q \left(r - 1 + \frac{Eu_g}{\Omega} \sin \Omega t - \frac{t}{Fr^2} \right),$$

де $q = \text{const}$. Оскільки при $t = 0, \varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$, то без впливу на товщину плівки в'язкого тертя на диску-розсікачу та інших факторів, строго кажучи, $q = 0$. Якщо ж через вищезазначені фактори покладемо $q \neq 0$, то $q \ll 1$ може задовольнити фізично реальні умови. Питання визначення q залишимо до розділу 6, де розглянуто експериментальні дослідження.

Як видно з (3.6.11), особливістю вібраційного збудження розпаду плівок є те, що при $Eu_g \gg 1$ поверхня плівки покривається системою султанчиків, що працюють кожен як окреме джерело крапель. Якщо частота вібрацій підібрана близька до частоти власних коливань поверхні султанчиків як окремих струмків на поверхні плівки, то реалізується їх резонансний розпад, внаслідок чого дисперсійний склад крапель виходить досить вузьким, оскільки окремі султанчики подібні один до одного на відміну від хвиль малої амплітуди, що диспергують за координатою r .

Зі зростанням амплітуди вимушених коливань зростає амплітуда збуджуваної нелінійної хвилі, що підтверджується відомими експериментальними даними для стоячих хвиль [3, 97, 460] та нашими дослідженнями на плівках при суттєвих швидкостях руху (розділ 6). За деякого критичного значення $Eu_g = Eu_g^*$ починається відрив крапель від поверхні плівки (фонтанування з поверхні плівки, зрив крапель із султанчиків). Незважаючи на те, що у разі фонтанування з поверхні спочатку нерухомої рідини, під дією вібрації, є досить багато експериментальних даних [3, 361, 460], навіть у цьому, більш простому випадку, рекомендацій з розрахунку параметрів зовнішніх впливів, при яких починається відрив крапель, немає. Формула (3.6.11) після експериментального визначення емпіричної константи q може послужити для цього.

Умову динамічної рівноваги краплі, що відривається від поверхні плівки, можна записати у розмірних змінних у вигляді:

$$\frac{4}{3} \pi r_k^3 \left[\frac{A \cdot \Omega^2 Eu_g}{\cos(a\Omega/c)} + a\omega^2 \right] = \frac{4}{3} \pi r_k^3 + 2\pi c_k r_k \sigma, \quad (3.6.12)$$

де r_k - радіус краплі, що відривається, a - товщина плівки (миттєва), A - амплітуда вібрацій, c - швидкість звуку в середовищі, $g_v = A\Omega^2$, ω - частота коливань рідини поблизу положення рівноваги; C_k - коефіцієнт контактування краплі, що відривається, з поверхнею, його можна приблизно покласти рівним 1, вважаючи, що крапля відривається від султанчика практично миттєво, без утончення шийки.

Перетворюючи (3.6.12) на безрозмірну форму, отримаємо:

$$\alpha_g = \left(1 - Fr_k - \frac{3c_k}{2Bo_k}\right) \cos\psi, \quad (3.6.13)$$

де $\psi = \Omega a / c$, $\alpha_g = g_v / g$ - коефіцієнт перевантаження вібрації, $Fr_k = a\omega^2 / g$, $Bo_k = \rho g r_k^2 / \sigma$ - локальні числа Фруда і Бонда, які характеризують процес формування крапель. При цьому довжину збудженої хвилі можна визначити по співвідношенню стоячих капілярних хвиль [232]:

$$\Omega^2 = \frac{2\pi}{\lambda} g + \frac{8\pi^3 \sigma}{\rho \lambda^3}. \quad (3.6.14)$$

Задаючи в (3.6.13) певне значення c_k , наприклад $c_k = 1$, отримаємо $\alpha_g = \alpha_g^*$, при якому відбувається відрив краплі. З іншого боку, знаючи α_g^* , можна визначити $Eu_g^* = \alpha_g^* / Fr_k^2$, або за відомим Eu_g^* знайти α_g^* і далі r_k . Так, визначаючи за експериментальними даними відповідно до (3.6.11) за відомим значенням величини $Eu_g^*(\Omega)$ значення величини $q(\Omega)$, будемо мати розрахункову формулу для $Eu_g^*(\Omega)$. А потім відповідно до (3.6.12), користуючись (3.6.13) та зв'язком $\alpha_g^* = Eu_g^* \cdot Fr_k^2$, отримаємо $Bo_k^* = (2/3c_k) / (\alpha_g^* / \cos\psi + Fr_k - 1)$, звідки

$$r_k = \sqrt{\frac{2\sigma}{3\rho g c_k} \left(\frac{\alpha_g^*}{\cos\psi} + Fr_k - 1 \right)^{-1}}. \quad (3.6.15)$$

Отримані результати будуть використані нижче при встановленні адекватності теорії та експерименту в дослідженнях параметричного збудження розпаду плівок в'язкої нестисливої рідини.

3.7 Висновки за розділом 3

У розділі 3 розглянуті завдання параметричного збудження і придушення коливань поверхні плівок при суттєвому прояві сил інерції. Швидкі плівки представляють новий, раніше майже невивчений клас течій з вільними поверхнями. Досліджено лінійні та нелінійні коливання при двох видах збуджуючої сили: електромагнітної та вібраційної

(роздільно чи комбіновано). За характером впливу на суцільне середовище розглянуті параметричні коливання відповідно до наведеної класифікації є оптимізуючими, інтенсифікуючими, перетворюючими або стабілізуючими.

Перетворюючим є режими вібророзпилу, що мають велике значення для створення нових високоефективних технологій, як буде показано в заключному розділі. Ці впливи викликають ефекти другого порядку, тоді як інші, що розглядаються у розділі (переважно - електромагнітні) впливають на середовище із ефектом першого порядку.

Керівний вплив другого класу, тобто силовий (потік імпульсу через межу розділу середовищ), вид управління: програмне, без зворотного зв'язку. Отримані у розділі результати дозволяють прогнозувати реакцію межі розділу середовищ на параметричну дію. Математичне моделювання дозволило встановити закономірності нового класу течій:

- у разі плоскої плівки, поверхневі хвилі майже не диспергують, тоді як у плівках, які радіально розтікаються, поверхневі хвилі суттєво диспергують по радіальній координаті;

- у радіальних плівках фазові і групові швидкості поширення поверхневих і електромагнітних хвиль, на відміну від плівки, що плоско розтікається, не збігаються, що становить істотну відмінність двох типів плівкових течій і зумовлює труднощі параметричного збудження коливань поверхні заданого виду у радіальних плівках.

Нелінійні коливання:

- у разі довгохвильових коливань поверхні плівки енергія незбуреного потоку перекачується до кінематичної хвилі через хвильовий механізм вищого порядку; при цьому збудження динамічних хвиль потребує електромагнітного поля великої напруженості. Гравітаційні та в'язкі сили сприяють накачуванню збурень поверхні плівки;

- капілярні хвилі визначаються критеріями We , Al та видом електромагнітного поля або прикладених вібрацій, за рахунок яких відбувається накачування збурень. В'язкі сили істотної ролі не грають, визначаючи лише пульсації фронтів хвилі;

- на плівці, що плоско розтікається, без параметричних впливів може мати місце лише стоячий солітон з шириною та амплітудою порядку $\sqrt{2}$ товщини плівки; електромагнітне збудження солітонів типу виступів або заглиблень з амплітудою до товщини плівки можливе за допомогою поля, що має вузькі області різких екстремумів;

- солітонні хвилі при вібраційному збудженні поверхні плівки, на відміну електромагнітного, відсутні, хоча рівняння, що описує еволюцію поверхні плівки, містить похідні від відповідних членів КДВ;
- при великих віброперевантаженнях ($g_v \gg g, Eu_g \gg 1$) процес описується видозміненим рівнянням Бюргерса, тобто можлива поява ударних хвиль на плівці; особливо складністю відрізняється процес на плівці, що радіально розтікається;
- отримано умову вібророзпилу, тобто зриву крапель з поверхні плівки при перевищенні критичного значення віброперевантаження, коли пакет кінематичних хвиль на поверхні плівки перетворюється на систему окремих султанчиків, що є генераторами крапель; оскільки всі султанчики однакові внаслідок сталості довжини стоячих чи кінематичних хвиль, розпад плівки відбувається із вузьким дисперсійним складом. Особливо – у разі параметричного резонансу системи.

Отримані теоретичні результати показали специфічні особливості нового класу параметричне збудження і придушення коливань поверхні плівок при істотних швидкостях руху. Даний розділ, з одного боку, містить результати дослідження конкретного типу плівок, що важливо не тільки для розвитку відповідної теорії, але і для практичних застосувань, а з іншого боку цей матеріал важливий для розгляду більш загальної проблеми параметричного збудження та придушення коливань меж розділу суцільних середовищ, окремим випадком яких є плівкові течії.

Для виявлення зв'язку даного класу задач з іншими задачами параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ та дослідження їх загальних закономірностей розглянемо у двох наступних розділах два інших класи задач про параметричні коливання меж фазового переходу розплавів у твердий стан та термогідродинамічних коливань у гетерогенних середовищах.

Представлені результати опубліковані у статтях [160-163, 169, 178, 180], препринтах [81, 100, 174] та монографії [202], а також обговорені на наукових форумах [66, 168, 179, 450].

Розділ 4. Параметричне збудження та придушення коливань меж фазового переходу з рідкого стану у твердий

Інтенсивний розвиток сучасної техніки, розробка нових технологій та створення металургійних агрегатів високої продуктивності та економічності зумовило підвищення інтересу науковців та інженерів до проблеми управління рухом електропровідних середовищ. Ця проблема представляє значний інтерес з огляду на широке поширення випадкових коливань температури, тиску, щільності та інших характеристик середовищ і можливості ефективного впливу на процеси, що протікають в них, у необхідному напрямку.

Підвищення ефективності металургійних та електрозварювальних процесів часто обмежується необхідністю подолання різноманітних магнітогідродинамічних нестійкостей, зокрема, нестійкості меж фазового переходу (фронтів кристалізації) розплавів. Наприклад, нестійкість тонкого шару (плівки) твердої фази металу, званого гарнісажем і призначеного для захисту стінок металургійних агрегатів від руйнування, не дозволяє ефективно використовувати штучний гарнісаж [75, 228, 229], відомий у металургії переважно як негативне явище [322]. Нестійкість гарнісажного шару погіршує також якість розплаву внаслідок забруднення його матеріалом стінок каналів або тиглів металургійних агрегатів.

У електрозварюванні управління положенням меж фазового переходу дозволяє істотно поліпшити якість шва і зменшити витрату електродного металу, що плавиться. Управління процесом утворення крапель та положенням межі проплавлення дає можливість сподіватися на суттєве підвищення керування ходом процесу електродугового зварювання [201, 202]. Цим та іншим аналогічним завданням присвячена основна частина даного розділу книги, в якій поряд з аналізом магнітогідродинамічних нестійкостей, що розглядаються, проводиться дослідження можливості їх активного придушення за допомогою відомих замкнених систем автоматичного регулювання [227]. Для розімкнених систем з програмним управлінням, зазвичай, ставиться задача пошуку оптимального управління.

Магнітогідродинамічні системи з наявністю меж фазового переходу (кристалізації) є системами з розподіленими параметрами, поведінка яких у просторі та часі описується диференціальними рівняннями у частинних похідних. З теорії автоматичного управління процесами в суцільних середовищах відомо, що нерідко нестійкий лінійний об'єкт не

можна стабілізувати лише програмним впливом, тоді як управління за принципом зворотного зв'язку, при якому величина керівного впливу пов'язана зі збуренням системи, більш ефективне.

Пристрої автоматичного управління потоками теплоти [227], призначені для стабілізації меж фазового переходу електропровідних рідин, можуть бути побудовані, наприклад, на використанні високочастотних електромагнітних полів. Принцип дії таких систем наступний: викривлення межі фазового переходу викликає зміну струму в керуючій обмотці, наведений вторинний струм у тонкому скін-шарі, що практично збігається з межею фазового переходу, внаслідок джоулевих тепловиділень стабілізує поверхню фронту кристалізації. Вибором параметрів системи управління можна домогтися придушення практично будь-якого виду нестійкості меж фазового переходу, що відкриває можливість стабілізації гарнісажу та виключає можливість зіткнення металу зі стінками каналів та тиглів металургійних пристроїв.

Завдання стійкості та стабілізації (у разі нестійкості) меж фазового переходу розглянуті при врахуванні впливу багатьох факторів, що моделюють різні випадки реальних умов. До таких факторів можна віднести багат шаровість стінок каналів, які можуть містити кілька шарів різних матеріалів різної товщини і фізичних властивостей, вплив конвекції на стійкість меж фазового переходу, залежності протікаючих процесів від фізичних властивостей розплавів, випадкових і регулярних збурень термогідродинамічного стану середовища всередині і зовні.

Теоретичне дослідження проблеми управління межами фазового переходу проводиться шляхом побудови фізико-математичних моделей відповідних фізичних явищ. Моделі будуються по можливості прості, але з урахуванням основних рис досліджуваного явища. Складні математичні моделі для найзагальніших випадків, як і в розділах 2, 3, реалізуються на ЕОМ. Так, у задачі про стабілізацію гарнісажу в широкому діапазоні варійованих параметрів розраховані області нестійкості системи та визначено значення коефіцієнта зворотного зв'язку регулятора, призначеного для придушення нестійких гармонік коливань меж розділу фаз.

Зважаючи на складність досліджуваних магнітогідродинамічних і теплових явищ, у багатьох задачах враховані не всі можливі фактори, а лише деякі з них, найбільш суттєві в кожній системі. Тому побудовані фізико-математичні моделі потребують подальшого розвитку у напрямку вирішення складніших і близьких до практики завдань. А врахування більшої кількості чинників і побудова складніших математичних

моделей вимагають їхньої ретельної перевірки на адекватність реальним фізичним процесам. Частина такої роботи представлена нижче.

При керуванні положенням меж фазового переходу за допомогою систем автоматичного регулювання [227], на межі розділу, пов'язаної з регулятором, задаються граничні умови. Причому, оскільки регулятор, як правило, з'єднаний зі значним джерелом енергії, зворотний вплив об'єкта на регулятор незначний і його можна знехтувати, що спрощує задачу. У разі нестійкості системи застосовується пристрій автоматичного регулювання потоків теплоти, заснований на тому, що збурення межі фазового переходу призводить до збурення магнітного поля, що викликає відповідну зміну струму в обмотці. Цей струм, посилений у керуючому ланцюгу, наводить вторинний струм у тонкому скін-шарі поблизу межі розділу фаз і джоулевими тепловиділеннями викликає придушення відповідних збурень. Для кожної з гармонік виходить гранична умова:

$$\frac{dT_{m,k}}{d\bar{n}} = G_{m,k} T_{m,k} \quad (4.0.1)$$

де $G_{m,k}$ - коефіцієнт зворотного зв'язку системи управління для придушення гармоніки з хвиловими числами m і k . Він може набувати практично будь-яких дійсних значень [227].

Гранична умова (4.0.1) вважається законом зворотного зв'язку керуючої системи. Для управління декількома гармоніками в системі управління на кожну моду є своя обмотка з індивідуально регульованим коефіцієнтом зворотного зв'язку, що дозволяє досягти високого ступеня розрізнення. З усіх способів управління межами фазового переходу електропровідних рідин найбільшого поширення у практичних застосуваннях набув електромагнітний. Електромагнітні поля використовуються в металургії та електрозварюванні в різних цілях: для інтенсифікації тепломасообмінних процесів (збудження коливань меж фазового переходу та управління циркуляцією розплаву за допомогою змінних полів і полів, що біжать), для управління нестійкостями в магнітогідродинамічних і теплових процесах МГД-технологій тощо.

При керуванні межами фазового переходу за допомогою височастотних електромагнітних полів вищезгаданим способом вплив на межу є тепловим (джоулеві тепловиділення), внаслідок чого частота електромагнітного поля у вирішенні задачі може не фігурувати, якщо зв'язок із системою управління задається за допомогою умови (4.0.1). У цьому випадку керування конфігурацією з рідкої та твердої фаз розплаву

будується таким чином, щоб поле вільно проникало через тонкий шар пристінної твердої фази та швидко згасало (внаслідок значної різниці у провідності фаз) у тонкому скін-шарі поблизу поверхні кристалізації. При цьому в першому наближенні товщиною скін-шару можна знехтувати, вважаючи цей шар набагато меншим за характерний розмір зливка і співпадаючим з поверхнею кристалізації, яка насправді також є областю кінцевої товщини.

Колівання меж фазового переходу, як показано в [75, 175, 227, 228], є низькочастотними на відміну від розглянутих вище коливань, збуджуваних полем за допомогою дії пондеромоторних сил [174], тобто такі системи мають значну інертність у термодинамічному відношенні. Стабілізація меж фазового переходу (придушення нестійких гармонік) відбувається за рахунок джоулевих тепловиділень на цих межах, внаслідок чого дія поля опосередкована і, як показали дослідження, енергетичні витрати порівняно невеликі. Форма поверхні розділу кристал-розплав змінюється в залежності від умов кристалізації [341].

Реальні міжфазні поверхні внаслідок високої дифузійної рухливості атомів при температурі плавлення та відносно низького значення поверхневої енергії мають суттєве викривлення у масштабах, порівнянних з розмірами елементарного осередку. Ступінь шорсткості міжфазної поверхні кристал-рідка фаза визначається зміною її вільної енергії в процесі хаотичного приєднання атомів [342].

Викривлення меж фазового переходу – наслідок втрати стійкості завдяки дії поля напружень та деформацій [341]. Застосування електромагнітних полів дає можливість стабілізувати положення меж фазового переходу, що у деяких випадках має першорядне значення. Такі коливання меж фазового переходу мають як подібні з розглянутими у другій і третій главах риси, так і відмінні від них.

4.1. Власні коливання фронту затвердіння розплаву в циліндричному каналі

Дослідження проблеми збудження та придушення коливань меж фазового переходу з рідкого стану у тверде почнемо з власних коливань. Розглядається циліндричний канал, стінка якого може складатися з будь-якої кількості шарів різних матеріалів. На внутрішній поверхні такого каналу є тонкий шар твердої фази, утворений з розплаву, що знаходиться в каналі, шляхом створення спеціального температурного режиму. Тверда плівка (гарнісаж) на стінках каналу, з одного боку, захищає стінки

від термічного та інших руйнівних впливів і, з іншого боку, оберігає розплав від забруднення сторонніми домішками, що має важливе значення для спецметалургії, де висуваються підвищені вимоги до чистоти виплавленого або транспортованого рідкого металу.

Структурна схема досліджуваної фізичної системи, що включає конфігурацію з рідкої та твердої фаз того самого матеріалу, представлена на Рис. 4.1.1, де R_0 - радіус області, зайнятої розплавом, r_0 - товщина шару твердої фази (плівки, гарнисажу), $r=R_0$ - циліндрична поверхня кристалізації розплаву (фронт кристалізації, межа фазового переходу з рідкого стану у твердий), $r=R_0+r_0$ - внутрішній радіус каналу. Завдання розглядається в циліндричній системі координат $O r \varphi x$, вісь Ox спрямована по осі симетрії каналу.

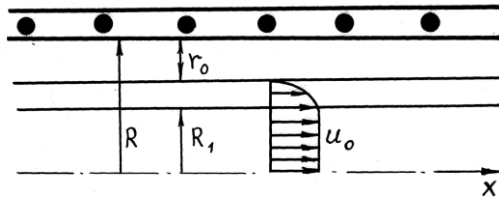


Рис. 4.1.1 Циліндрична конфігурація з рідкої та твердої фаз

Насправді форма міжфазної поверхні кристал-розплав ніколи не виражається гладкою функцією, оскільки вона істотно залежить від умов кристалізації. Рельєф поверхні кристалізації зазнає збурення, як у масштабах розмірів кристалітів, так і у масштабах, порівнянних із областю поширення збурень, зумовлених капілярними силами. Нами враховуються, переважно, лише ефекти другого типу, тобто мікро-структурою межі фазового переходу нехтуємо.

Значення поверхневої енергії на межі чистого кристала та рідкої фази можна визначити зіставленням будови чистого кристала та рідини. При плавленні металу його питомий обсяг збільшується приблизно на 3%, що відбувається через збільшення середньої відстані між атомами і, як наслідок, - збільшення потенційної складової внутрішньої енергії. Через більш неупорядковану будову рідких металів у порівнянні з твердими з'являється спотворення поверхні кристал-розплав [341, 342]. Тому реальні міжфазні межі внаслідок високої дифузійної рухливості атомів при температурі плавлення та порівняно низького значення поверхневої енергії суттєво викривлені у масштабах розмірів елементарного осередку. Однак нами розглядаються процеси на

макрорівні, коли характерний лінійний розмір системи значно перевершує масштаб елементарного осередку і внаслідок цього прийнята структурна схема правильно відображає стан фізичної системи на макрорівні.

Властивості складних систем із наявністю меж фазового переходу привертала увагу багатьох дослідників ще з кінця минулого століття. Надалі дослідження таких систем пішло, зокрема, по лінії з'ясування їх особливостей у таких процесах як лиття, зварювання та інші. Розглядаючи модель фізичної системи відповідно до представленої структурної схеми, вважаємо, що у рівноважному стані поверхня кристалізації $r=R_0$ має постійну температуру кристалізації розплаву T^* , а область фазового переходу умовно замінюємо поверхнею (циліндричною областю нульової товщини). Припускаємо, що така поверхня може деформуватися лише неперервним чином. Тоді математичну модель описаної системи можна представити так.

Математична модель системи

Модель системи повинна включати рівняння збереження маси, імпульсу та енергії рідкої і твердої фаз (з урахуванням стінки камери) з відповідними граничними умовами. У загальному випадку це - пов'язана крайова задача, вирішення якої представляє самостійний інтерес [243, 489]. Але оскільки нас головним чином цікавить можливість управління формою границі, придушення її нестійкості, то рівноважний стан вважається відомим і з метою спрощення розглянутих завдань для його опису використовуються прості математичні моделі, що відображають основні риси фізичного процесу у тій чи іншій фізичній ситуації.

Так, якщо розплав у рівноважному стані нерухомий і фазові перетворення відсутні, то рівняння збереження маси та імпульсу задовольняються тотожно, а рівняння енергії має

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\chi_n \frac{\partial T_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial (\chi_n T_n)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\chi_n \frac{\partial T_n}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi_n \frac{\partial T_n}{\partial z} \right) = 0, \quad (4.1.1)$$

де індекс n вказує на n -ий шар, $n = \overline{1, N}$ причому, $n=1$ відповідає розплаву, $n=2$ - пливці твердої фази, $n = \overline{3, N}$ - шари стінки каналу. Коефіцієнт теплопровідності в загальному випадку вважається змінним (залежить від температури), оскільки при малих товщинах шарів і великих перепадах температур залежність κ_n від T_n позначається на поведінці системи. Товщини шарів відповідно позначаються r_n , де $r_1=R_0$,

$r_2=r_0$ і т.д. В якості граничних умов системи диференціальних рівнянь (4.1.1) можна задати умову симетрії на осі каналу, рівність температур і теплових потоків на всіх межах сполучення шарів і температурні умови на зовнішній поверхні каналу: наприклад, закон теплообміну з навколишнім середовищем. Тому, з урахуванням викладеного:

$$z=0, T_n = T_{n0}(r); \quad z=L, T_n = T_{nl}(r); \quad r=0, T_1 = T_0(z); \quad (4.1.2)$$

$r = \sum_{i=1}^n r_i$, $T_n = T_{n+1}$, $\kappa_n dT_n/dr = \kappa_{n+1} dT_{n+1}/dr$; $r=r_N, \kappa_N dT_N/dr = \lambda_{NC}(T_N - T_c)$, λ_{NC} , T_c - коефіцієнт теплообміну N -го шару (зовнішнього) з навколишнім середовищем та температура навколишнього середовища.

Якщо система має осьову симетрію (потік без закрутки, стінка з однорідних по φ шарів), то рівняння (4.1.1) спрощуються та граничні умови (4.1.2) дозволяють замкнути відповідну крайову задачу. Рішення такого роду крайових задач наведено нижче для ряду конкретних фізичних ситуацій, оскільки в рамках лінійної малоамплітудної теорії рівняння збуреної системи лінеаризуються щодо незбуреного (рівноважного) стану, що описується цими крайовими задачами.

Коливання меж фазового переходу

За певних умов описаний рівноважний стан системи може бути порушений випадковими або регулярними внутрішніми або зовнішніми збуреннями. Тому цікаво розглянути завдання про подальшу поведінку збуреної фізичної системи. Таке завдання в рамках лінійної малоамплітудної теорії можна розглядати так. Припустимо, що у певний час всі параметри системи (температура, тиск, межа фазового переходу тощо) отримали малі збурення у вигляді прогресивних хвиль

$$q = Q(r)e^{i(kx+m\varphi-\omega t)} \quad (4.1.3)$$

де Q - взагалі кажучи, комплексна величина амплітуди збурення.

Математична модель збуреної системи

З урахуванням викладеного та (4.1.1) лінеаризація збуреної системи дає

$$\rho_n c_n \frac{\partial \tau_n}{\partial t} = \text{div}(\kappa_n \nabla \tau_n), \quad (4.1.4)$$

де τ_n , c_n - збурення температури і коефіцієнт теплоємності n -го шару (для простоти здебільшого вважаємо $\rho_n, c_n, \kappa_n - \text{const}$). У складнішому

випадку, коли враховується вплив конвекції на стійкість системи та розвиток у ній малих збурень, рівняння для збурень записуються:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= -\text{div} \rho_1 \bar{v}_1, & \rho_n c_n \frac{\partial \tau_n}{\partial t} &= \text{div}(\kappa_n \nabla \tau_n), \\ \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} &= \frac{-1}{\rho_1} \nabla p_1, & \rho_1 c_1 \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial t} + \bar{v}_1 \nabla T_1 \right) &= \text{div}(\kappa_1 \nabla \tau_1), \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

де T_1 - розподіл температури системи у стані рівноваги, \bar{v}_1 , p_1 - збурення швидкості та тиску, $n = \overline{2, N}$.

Коефіцієнти температуропровідності вважаються незмінними і розплави - нев'язким. Надалі буде показано вплив в'язкості розплаву на розвиток збурень системи, тут важливо обмежитися зауваженням про те, що у багатьох металевих розплавах в'язкість порівняно низька (наприклад, у чавуну кінематичний коефіцієнт в'язкості менше, ніж у води) і дисипативні процеси істотної ролі не відіграють.

Проаналізуємо послідовно системи (4.1.4) та (4.1.5). Граничні умови для (4.1.5) включають як підмножини граничні умови, що накладаються на систему (4.1.4), тому представимо їх у вигляді [175]:

- на поверхні фазового переходу, що задається прогресивною хвилею $r = R_0 [1 + \zeta e^{i(kx + m\varphi - \omega t)}]$, збурення температури дорівнює нулю, тому з точністю до лінійних членів отримуємо

$$\tau_j(R_0, \varphi, x) + R_0 \zeta \left(\frac{\partial T_j}{\partial r} \right)_{r=R_0} e^{i(kx + m\varphi - \omega t)} = 0, \quad (4.1.6)$$

де $j=1,2$; і умови збереження потоків маси та теплоти

$$r = R_0, \quad u = (1 - \rho_{21}) \frac{\partial r}{\partial t}, \quad \kappa_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial r} = \kappa_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \rho_2 \lambda_{21} \frac{\partial r}{\partial t}, \quad (4.1.7)$$

де $\rho_{21} = \rho_2 / \rho_1$, $\partial r / \partial t$ - швидкість руху фронту кристалізації, λ_{21} - питома теплота плавлення;

- на осі каналу з умови симетрії можна покласти відсутність збурень швидкості та температури

$$r = 0, \quad u = 0, \quad T_1 = 0; \quad (4.1.8)$$

- на межах розділу твердих шарів температури та теплові потоки рівні:

$$r = \sum_{j=1}^n r_j; \quad \tau_n = \tau_{n+1}, \quad \kappa_n \frac{d\tau_n}{dr} = \kappa_{n+1} \frac{d\tau_{n+1}}{dr}; \quad (4.1.9)$$

- на зовнішній поверхні каналу, яка може бути теплоізолюваною або здійснювати обмін енергією з навколишнім середовищем (а у разі застосування системи управління потоками теплоти з такою системою) можна записати умову

$$r = \sum_{j=1}^N r_j; \quad \kappa_N \frac{d\tau_N}{dr} = -G_{k,m} \tau_N. \quad (4.1.10)$$

Тут $G_{k,m}$, відповідно, дорівнює 0, λ_{NC} або коефіцієнту зворотного зв'язку керуючої системи [227] для трьох зазначених випадків.

Сукупність рівнянь і співвідношень (4.1.3) - (4.1.10) представляє математичну модель фізичної системи, що розглядається. Для виявлення безрозмірних критеріїв, що визначають досліджувані процеси, а також для зручності вирішення крайових задач доцільно отриману математичну модель узагальнити, перетворивши її на безрозмірний вид. Вводячи як масштабні одиниці довжини, часу, частоти, швидкості, тиску, щільності і температури, відповідно, R_0 , R_0/a_{1*}^2 , a_{1*}^2/R_0^2 , a_{1*}/R_0 , $\rho_{1*} a_{1*}^4/R_0^2$, ρ_{1*} і T_* , можна перетворити систему (4.1.3)–(4.1.5) до наступного безрозмірного вигляду:

$$\bar{q} = \bar{Q}(\bar{r}) e^{i(\bar{k}\bar{x} + m\varphi - \bar{\omega}Fo)}, \quad (4.1.11)$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial Fo} + \bar{v}_1 \nabla \bar{T}_1 = \frac{\text{div}(\bar{\kappa}_1 \nabla \bar{\tau}_1)}{\bar{\rho}_1 \bar{c}_1}, \quad \frac{\partial \bar{\tau}_n}{\partial Fo} = \frac{\text{div}(\bar{\kappa}_n \nabla \bar{\tau}_n)}{\bar{\rho}_n \bar{c}_n},$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial Fo} = -\text{div} \bar{\rho}_1 \bar{v}_1, \quad \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial Fo} = -\frac{1}{\bar{\rho}_1} \nabla \bar{p}_1, \quad (4.1.12)$$

де $Fo = a_{1*}^2 t / R_0^2$ - критерій теплової гомохронності, число Фур'є (відношення характерного часу перебігу процесу до часу релаксації теплових збурень), $\bar{\rho}_n = \rho_n / \rho_{1*}$, $\bar{c}_n = c_n / c_{1*}$, $\bar{\kappa}_n = \kappa_n / \kappa_{1*}$, $a_{1*}^2 = \frac{\kappa_{1*}}{\rho_{1*} c_{1*}}$, рисочки означають безрозмірність величин, а зірочки - приналежність до стану фазового переходу. Розплав практично нестислива рідина, унаслідок чого теплою розширення (стиснення) можна знехтувати. Надалі рисочки у безрозмірних величин, як і раніше, опустимо.

Граничні умови (4.1.6)–(4.1.10) у безрозмірному вигляді наступні:

$$r = 1, \quad \tau_j + \zeta \frac{\partial T_j}{\partial r} e^{i(kx+m\varphi-\omega F_0)} = 0, \quad j=1,2,$$

$$u = (1-\rho_{21}) \frac{\partial r}{\partial F_0}, \quad \kappa_{21} \frac{\partial \tau_2}{\partial r} = \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{R_\lambda}{\kappa_1} \frac{\partial r}{\partial F_0}; \quad (4.1.13)$$

$$r = 0, \quad u = 0, \quad \tau_1 = 0; \quad (4.1.14)$$

$$r = \sum_{j=1}^n r_j, \quad \tau_n = \tau_{n+1}, \quad \frac{d\tau_n}{dr} = \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} \frac{d\tau_{n+1}}{dr}; \quad r = \sum_{j=1}^N r_j, \quad \frac{d\tau_N}{dr} = -Bi_{k,m} \tau_N. \quad (4.1.15)$$

Тут межа фазового переходу $r = 1 + \zeta e^{i(kx+m\varphi-\omega F_0)}$, $R_\lambda = \frac{\rho_2 \lambda_{21}}{\rho_{1,c_1} T_*$ - безрозмірний критерій, що характеризує відношення теплоти плавлення до тепломістку розплаву на межі фазового переходу, $Bi_{k,m} = Q_{k,m} R_0 / \kappa_N$ - модифікований критерій Біо. При $Q_{k,m} = \lambda_{nc}$ (зовнішня поверхня каналу здійснює теплообмін із навколишнім середовищем), $Bi_{k,m} = Bi$, тобто це - критерій Біо [220], що визначає відношення зовнішнього та внутрішнього термічних опорів у нерухомому середовищі із заданою інтенсивністю тепловіддачі на її контурі.

Модифікований критерій Біо характеризує співвідношення кондуктивного та конвективного термічного опору межі зовнішньої поверхні каналу з системою управління. Оскільки в останньому випадку $Q_{k,m}$ може бути будь-яким дійсним числом, то $Bi_{k,m}$ також може приймати будь-які дійсні значення, тому цей безрозмірний критерій є мірою впливу системи керування потоками теплоти [227] на фізичну систему.

Параметричні коливання системи

У разі малого впливу конвекції на коливання межі фазового переходу, з останнього рівняння (4.1.12), з урахуванням (4.1.11), виходить

$$\frac{d^2 \theta_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_n}{dr} = \left(\alpha_n^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \theta_n, \quad (4.1.16)$$

де $\alpha_n^2 = k^2 - ib_n \omega$, $b_n = R_0^2 / \alpha_n^2$, θ_n - безрозмірна амплітуда збурення температури n -го шару. Граничні умови (4.1.13)-(4.1.15) для цього випадку наступні [155]:

$$\theta_n(s_n) = \theta_{n+1}(s_n), \quad \theta'_n(s_n) = \kappa_{n+1} / \kappa_n \theta'_{n+1}(s_n), \quad \theta_1(1) = -1, \quad \theta'_N(s_N) = -Bi_{k,m} \theta_N(s_N), \quad (4.1.17)$$

де $n = \overline{2, N-1}$, штрихом позначається похідна по r , $s_n = 1 + \sum_{j=2}^n r_j$. Коефіцієнти тут вважаються постійними.

Загальне рішення системи модифікованих рівнянь Бесселя (4.1.16) має вигляд [414]:

$$\theta_n = c_{2n-1} K_m(\alpha_n r) \theta_n + c_{2n} I_m(\alpha_n r), \quad (4.1.18)$$

де K_m, I_m - модифіковані функції Ганкеля та Бесселя m -го порядку, c_j ($j = \overline{1, 2N}$)- константи, що визначаються на підстановкою рішення (4.1.18) в граничні умови (4.1.17).

Для аналізу розвитку коливань параметрів системи можна скористатися наступним шгучним прийомом визначення властивостей власних чисел $\lambda = i\omega$ і функцій задачі, не вирішуючи дисперсійних рівнянь. Помножуючи рівняння (4.1.16) на величину $r\theta_n^*$, де θ_n^* - комплексно спряжена з θ_n функція, і проінтегрувавши отримане співвідношення по r в межах від s_{n-1} до s_n ($n = \overline{2, N}$), враховуючи, що $s_1 = 1$, неважко отримати наступне

$$\begin{aligned} \lambda b_n \int_{s_{n-1}}^{s_n} |\theta_n|^2 r dr = \int_{s_{n-1}}^{s_n} \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) |\theta_n|^2 r dr + \int_{s_{n-1}}^{s_n} |\theta_n'|^2 r dr + \\ + s_{n-1} \theta_n^*(s_{n-1}) \theta_n'(s_{n-1}) - s_n \theta_n^*(s_n) \theta_n'(s_n). \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Рішення рівняння (4.1.19) може бути дещо ширше, ніж (4.1.18), оскільки інтегрування розширює область рішень. Однак якщо отримане таким чином рішення дає стійкість (загасання в часі) малих коливань, то система, що описується рівняннями (4.1.18), тим більше стійка, тобто отримувані умови нестійкості є необхідними, але не достатніми, тоді як лінійна теорія збурень дає лише достатні умови нестійкості. Необхідно відмітити, що стійкість до малоамплітудних збурень (навіть сильна стійкість у вищеописаному сенсі) не означає стійкості фізичної системи, яка може бути нестійкою по відношенню до збурень скінченної амплітуди.

Помноживши далі праву та ліву частини (4.1.19) на κ_n і взявши суму здобутих рівнянь по n , з урахуванням граничних умов (4.1.17) запишемо

$$\lambda = \frac{1}{q_2} \left[q_1 - \kappa_1 \theta_n'(1) + \kappa_N s_N |\theta_N(s_N)|^2 Bi_{k,m} \right], \quad (4.1.20)$$

$$q_1 = \sum_{n=2}^N \kappa_n \int_{s_{n-1}}^{s_n} \left[\left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) |\theta_n|^2 + |\theta_n'|^2 \right] r dr, \quad q_2 = \sum_{n=2}^N b_n \kappa_n \int_{s_{n-1}}^{s_n} |\theta_n|^2 r dr, \quad (4.1.21)$$

Коливання параметрів системи є спадаючими в часі, якщо дійсна частина власних значень задачі λ додатня. Тому необхідну умову стійкості системи з урахуванням (4.1.20), (4.1.21) запишемо як

$$re \left[\theta_1'(1) \right] \leq q_1 / \kappa_1 + s_N \bar{\kappa}_N |\theta_N(s_N)|^2 Bi_{k,m}, \quad (4.1.22)$$

де знак рівності відповідає кривій втрати стійкості (нейтральна крива, що розділяє області стійких та нестійких станів системи). Достатня умова нестійкості виходить зміною знаку нерівності (4.1.22) на протилежний.

Як неважко помітити, з отриманої необхідної умови стійкості системи (4.1.22) (стійкість щодо нескінченно малих збурень) розподіл температури у рівноважному стані та амплітуда збурення межі фазового переходу на стійкість системи у розглянутій модельній постановці не впливають. Стійкість системи, незалежно від амплітуди малих збурень, визначається лише фізичними параметрами багатoshарової стінки каналу

та видом збурень. Завжди стійка система при $re \theta_1'(1) \leq 0$, оскільки в цьому випадку в лівій частині нерівності (4.1.22) є від'ємна величина, тоді як у правій (див. (4.1.21)) - додатня. Фізично цей випадок відповідає зменшенню амплітуди збурень температури у напрямку зовнішньої поверхні каналу (збурення виникають усередині каналу і пригнічуються в стінці).

Звідси випливає, що наростання параметричних коливань системи у часі (нестійкість) може бути лише за наявності зовнішніх збурень. Якщо можлива надійна теплоізоляція каналу зовні, то будь-які параметричні коливання з часом загасатимуть. Якщо виключити зовнішні збурення не вдається, то для дослідження стійкості системи необхідно вирішити нерівність (4.1.22), яка дозволяє визначити значення коефіцієнта зворотного зв'язку системи керування потоками теплоти [227, 228], призначеної для придушення гармонік, які сприяють розвитку нестійкості.

4.2 Взаємодія параметрів системи та умова стійкості плівки твердої фази

Для електромагнітного придушення обурень необхідна модифікована кількість Біо $Bi_{k,m}$ (для кожної гармоніки з хвильовими

числами k, m - своє число) треба вибрати з умови (4.1.22), що завжди можна зробити, оскільки $Bi_{k,m}$ може приймати будь-які дійсні значення.

З розглянутої математичної моделі можна здійснити аналіз стійкості циліндричного фронту кристалізації розплаву, що є у рівноважному нерухомому стані в багатошаровому каналі. Так, для $N=3$ (одношаровий канал), з урахуванням вищевикладеного, з (4.1.17), (4.1.18) слідує:

$$\begin{aligned}
 c_j &= (-1)^j \delta_j / \delta_0, \quad (j = \overline{1,6}), \quad \delta_0 = \varepsilon_6 Bi_{k,m} - \varepsilon_5, \quad \delta_j = \varepsilon_{2j+6} Bi_{k,m} - \varepsilon_{2j+5}, \\
 K_m &= A_1, \quad I_m = A_2, \quad z_1 = \alpha_1 s_1, \quad z_2 = \alpha_1, \quad z_3 = \alpha_3 s_3, \quad z_4 = \alpha_3 s_2, \quad z_5 = \alpha_2 s_2, \\
 \varepsilon_1 &= \mu_1' A_2'(z_6) - \mu_2' A_1'(z_6), \quad \varepsilon_2 = \mu_1' A_1'(z_6) + \bar{K}_2 - \mu_2' A_1'(z_6), \quad \mu_{13}' = \prod_{q=1}^2 \bar{K}_q \mu_{1q}', \\
 \varepsilon_{2p+5, 2p+6} &= \sum_{q=0}^1 \bar{K}_{q+1} B_{1-q}(z_1) \sum_{g=0}^1 \frac{K_{g+2}}{K_{g+1}} \mu_{6-2g, 5-2g}' \mu_{10-2q-g}', \quad A_p' = B_1, \quad (4.2.1) \\
 \varepsilon_{2p+9, 2p+10} &= \mu_{11}' \sum_{q=0}^1 \frac{K_{q+2}}{K_{q+1}} \mu_{6-2q, 5-2q}' B_{1-q}(z_5), \quad \varepsilon_{2p+13, 2p+14} = \mu_{13}' B_{1,0}(z_3), \\
 \varepsilon_{5,6} &= \sum_{q=0}^1 \frac{K_{q+2}}{K_{q+1}} \varepsilon_{4-q} \mu_{6-2q, 5-2q}', \quad \mu_{4p}' = \sum_{q=0}^1 (-1)^q A_1'(z_{2p+q+1}) A_2'(z_{2p-q+2}), \quad (p=1, 2), \\
 \varepsilon_{3,4} &= \sum_{p=1}^2 \varepsilon_p B_{0,1}(z_5), \quad A_p = A_0, \quad \mu_{2,11} = A_1(z_{2,1}) A_2'(z_1) - A_1'(z_1) A_2(z_{2,1}).
 \end{aligned}$$

І далі μ_{4u-3}' отримуємо із μ_{4p}' при заміні A_1', A_2' на A_1, A_2 і z_{2p+q+1}, z_{2p-q+2} на z_{2p-q}, z_{2p+q-1} , де $u=1, 2, 3$, а також $\mu_{3,6}'$ виходить із $\mu_{2,11}'$ заміною $z_{2,1}, z_1$ на $z_{3,4}, z_{4,3}$ і $\mu_{7,10,12}'$ із μ_2' заміною $z_1 = z_{6,5,5}, z_2 = z_{5,6,5}$. Тут з метою компактності запису введена умовна система символічного представлення формул: всі індекси із комами означають, що вираз розпадається на кілька виразів і індекси змінних в них приймають послідовно ті значення, які перераховані в рядку через кому.

Умова стійкості фізичної системи (у тому числі межі фазового переходу) (4.1.22) з урахуванням наведених виразів (4.2.1) та (4.1.18) дозволяє для випадку, що розглядається, отримати наступне:

$$\sum_{n=1}^3 \bar{K}_n \int_{s_{n-1}}^{s_n} \sum_{q=1}^2 \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right)^{q-1} \left| \sum_{p=1}^2 (-1)^p (\varepsilon_{4n+2p+2} Bi_{k,m} - \varepsilon_{4n+2p+1}) B_{2-q}(\alpha_n r) \right|^2 r dr +$$

$$\begin{aligned}
 & +\bar{\kappa}_3 s_3 \left| \sum_{p=1}^2 (-1)^p (\varepsilon_{2p+14} Bi_{k,m} - \varepsilon_{2p+13}) B_0(\alpha_3 s_3) \right|^2 Bi_{k,m} \geq \\
 & \geq |\varepsilon_6 Bi_{k,m} - \varepsilon_5|^2 re \left[(\varepsilon_6 Bi_{k,m} - \varepsilon_5)^{-1} \sum_{p=1}^2 (-1)^p (\varepsilon_{2p+6} Bi_{k,m} - \varepsilon_{2p+5}) B_1(\alpha_1) \right],
 \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

де re , як і раніше означає дійсну частину комплексної величини. Звідси видно, що при наростанні коливань системи у часі їх можна придушувати з допомогою високочастотних електромагнітних полів і теплових систем управління [227]. Для цього необхідно створити спеціальний тепловий режим на зовнішній поверхні каналу та автоматично його підтримувати. Дійсно, припустивши, що з (4.2.2) неважко отримати таку умову стійкості, що $Bi_{k,m} \gg 1$, з (4.2.2) неважко отримати таку умову стійкості

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^3 \bar{\kappa}_n \int_{s_{n-1}}^{s_n} \sum_{q=1}^2 \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right)^{q-1} \left| \sum_{p=1}^2 (-1)^p \varepsilon_{4n+2p+2} B_{2-q}(\alpha_n r) \right|^2 r dr + \\
 & +\bar{\kappa}_3 s_3 \left| \sum_{p=1}^2 (-1)^p \varepsilon_{2p+14} B_0(\alpha_3 s_3) \right|^2 Bi_{k,m} \geq |\varepsilon_6|^2 re \left[1/\varepsilon_6 \sum_{p=1}^2 (-1)^p \varepsilon_{2p+6} B_1(\alpha_1) \right].
 \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Слід зазначити, що умову (4.2.3) завжди можна задовольнити вибором значення модифікованого числа Біо $Bi_{k,m}$ (свого для кожної пари k, m). При цьому інтенсивність наростання (загасання) коливань системи у часі визначається величиною λ . Критерій теплової гомохронності Fo характеризує подібні картини розвитку збурень у часі.

Вибором параметра $Bi_{k,m}$ можна керувати інтенсивністю згасання ($Bi_{k,m} > Bi_{k,m}^*$) або наростання ($Bi_{k,m} < Bi_{k,m}^*$) збурень межі фазового переходу. Тут $Bi_{k,m}^*$ - критичне значення модифікованого числа Біо для даної моди з хвильовими числами k, m . Вибираючи індивідуально $Bi_{k,m}$ для кожної пари k, m , можна досягти високого розрізнення системи управління за модами збурень. У окремому випадку теплоізолизованого каналу $Bi_{k,m}=0$, і тому з (4.2.2) впливає

$$\begin{aligned}
 & |\varepsilon_5|^2 re \left[\frac{1}{\varepsilon_5} \sum_{p=1}^2 (-1)^p \varepsilon_{2p+5} B_1(\alpha_1) \right] \leq \\
 & \leq \sum_{n=1}^3 \bar{\kappa}_n \int_{s_{n-1}}^{s_n} \sum_{q=1}^2 \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right)^{q-1} \left| \sum_{p=1}^2 (-1)^p \varepsilon_{4n+2p+1} B_{2-q}(\alpha_n r) \right|^2 r dr,
 \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

звідки видно, що збільшення коефіцієнтів теплопровідності шарів стінки ($\bar{\kappa}_n$) та їх товщини (\bar{r}_n) підвищує стійкість системи, тобто зменшує критичні модифіковані числа Біо $Bi_{k,m}^*$.

Короткохвильові збурення системи

При $k \gg 1$ отримується $\alpha_n \approx k$, тому з умов (4.2.4), (4.2.2), враховуючи асимптотичну поведінку модифікованих функцій Бесселя та Ганкеля, можна вивести просту умову наростання коливань системи:

$$\beta k e^{-k} \leq e^{2ks_3} - e^{2ks_2} + \beta \frac{m^2}{k} e^{-2ks_3} \sum_{n=1}^3 \bar{\kappa}_n \int_{s_{n-1}}^{s_n} |\theta_n|^2 \frac{dr}{r},$$

де $\beta = s_2 \sqrt{s_1} \frac{\pi}{16} [\bar{\kappa}_2 s_1 + \bar{\kappa}_3 s_2 + (\bar{\kappa}_3 + \bar{\kappa}_2^2) s_1^{n-1} s_2]$. Звідси видно: короткохвильові коливання межі фазового переходу можуть наростати в часі лише до певного значення k , при перевищенні якого це стає неможливим.

Явище загасання короткохвильових збурень межі фронту кристалізації подібне до загасання капілярних хвиль на межах розділу рідких середовищ, проте тут стабілізуючими є не капілярні, а термодинамічні сили, які також істотно збільшуються зі зменшенням характерних розмірів системи. Збудження короткохвильових коливань за допомогою зовнішніх впливів [175] в даному випадку вимагає значних витрат енергії, але, на відміну від рідких меж розділу [174], тут вплив не силовий, а тепловий, причому низькочастотний і мало залежить від частоти зовнішнього високочастотного поля [227]. Інтенсивність цієї дії визначається безрозмірним критерієм $Bi_{k,m}$.

Довгохвильові збурення системи

При $k \ll 1$ покладемо в (4.1.18) $\lambda = 0$ ($k = \pm \alpha_n$), тоді з (4.2.4) отримаємо криві нейтральної стійкості, що є межею переходу системи із стійкого до нестійкого стану:

$$\sum_{n=1}^3 \bar{\kappa}_n (s_n^{2m} - s_{n-1}^{2m}) = \frac{2m^2 k}{2m^2 + 0,5} \left(\frac{1}{m} + \bar{\kappa}_2 s_{21} \right), \quad (4.2.5)$$

де $m = 1, 2, 3, \dots$, $s_{21} = s_2 / s_1$. Коливання системи, що задовольняють умові (4.2.5), поширюються з постійною амплітудою. Аналізуючи (4.2.5), можна помітити, що коливання постійної амплітуди при великих

значеннях хвильового числа m (по φ) і товщини шарів стінки каналу \bar{r}_n неможливі, оскільки величина у лівій частині (4.2.5), значно перевищує величину у правій частині. Фізичний сенс цього висновку в тому, що короткохвильові по окружній координаті хвилі (закрутка потоку і всієї системи з межею кристалізації) вимагають величезних енергетичних витрат. Тут m - цілі числа, оскільки в циліндричному каналі хвиля замикається по φ . Вплив прийнятих спрощень позначається на тому, що напівнескінченний канал по осі x є перешкодою у поширенні хвиль по φ , оскільки нескінченність (закрутка у довгому каналі) "гасить" збурення.

При порівняно невеликих значеннях m і r , що визначаються порядком довжини поздовжніх хвиль, в системі можуть мати місце коливання із закруткою по φ . У разі ж осесиметричних коливань ($m=0$)

виходить $\theta_1'(1) = -\bar{\kappa}_2 \prod_{n=1}^3 s_n < 0$, і, отже, має місце загасання збурень системи у часі (система стійка).

Таким чином, виявлено, що короткохвильові поздовжні збурення системи, незалежно від характеру закрутки, загасають у часі, якщо температура зовнішньої поверхні каналу підтримується постійною (надійна теплоізоляція каналу). Найбільш реальні для практики довгохвильові коливання параметрів системи можуть мати як постійну амплітуду, так і амплітуду, що наростає в часі. Це визначається довжиною хвиль збурень параметрів по координаті φ , а також параметрами стінки каналу.

Найчастіше практично необхідно придушувати наростаючі коливання параметрів технологічного процесу [75, 155, 175, 227-229]. Розглянуті модельні задачі показують, що це можна здійснити, незалежно від фізичних умов, в яких протікає технологічний процес, шляхом завдання спеціально підбраного режиму теплообміну зовнішньої поверхні каналу, контрольованого автоматично керованим високочастотним електромагнітним полем [227].

Вплив конвекції на стійкість фронту кристалізації

У багатьох металургійних установках важливе значення має питання стійкості межі фронту кристалізації розплаву, оскільки від цього може залежати якість технологічного процесу. Це ж завдання важливе і для вирішення проблеми захисту стінок каналів та футерування металургійних агрегатів від термічного та хімічного руйнування за допомогою штучного гарнісажу [75, 228, 229]. Однак гарнісаж як

захисний засіб для стін металургійних агрегатів ефективний лише у разі можливості автоматичного контролю положення межі кристалізації та придушення її нестійкості. Тому необхідно провести дослідження впливу конвекції на стійкість фронту кристалізації та можливості його стабілізації за допомогою спрямованого зовнішнього впливу у разі нестійкості. З цією метою проаналізуємо систему диференціальних рівнянь (4.1.5), вважаючи для простоти градієнти щільності та теплопровідності малими через розгляд малих збурень температури, функціями якої є дані фізичні характеристики. Дане спрощення фізично виправдане слабкою залежністю щільності та теплопровідності від температури.

Якщо знехтувати впливом стінки каналу, без урахування конвективних членів у рівнянні теплопровідності розплаву виходить раніше розглянутий випадок. Проте граничні умови відрізняються [229]:

$$\theta_1(s_0) = 0; \quad (4.2.6)$$

$$\theta_1(1) = -\zeta \ln s_0, \quad \theta_2(1) = -\frac{\kappa_{12}}{\ln s_0} \zeta; \quad (4.2.7)$$

$$\kappa_{21} \theta_2'(1) = \theta_1'(1) - \lambda R_\lambda \zeta; \quad (4.2.8)$$

$$\theta_2'(s) = -Bi_{k,m} \theta_2(s), \quad (4.2.9)$$

де $\kappa_{12} = \kappa_1 / \kappa_2$ при $r=1$. $s = 1 + r_0 / R_0$. Тут для ліквідації математичної особливості рішення (4.1.18) при $r=0$ (температура обертається на нескінченність, якщо коефіцієнт при K_m не покласти рівним нулю, а в іншому випадку температура обертається на нуль, оскільки $I_m \neq 0$ тільки при $m=0$) введена приосева область з постійною температурою T_0 . Ця область моделює свого роду джерело енергії та її безрозмірний радіус вважається рівним s_0 (стрижень або канал у каналі, що створює поверхню постійної температури).

Як показано [228], величина R_λ для кристалічних тіл велика, що дає можливість з аналізу умови фазового переходу (4.2.8) вивести наступне. По-перше, власні числа завдання λ малі, оскільки інакше на межі фазового переходу мали б існувати фізично нереальні великі градієнти температури. По-друге, оскільки у правій частині виразу (4.2.8) міститься велика величина R_λ , то, розшукуючи розв'язання задачі за ступенями малого параметра λ , можна вже в нульовому наближенні визначити значення λ з (4.2.8). Звідси випливає, що коливання меж фазового

переходу - низькочастотні (характерний час розвитку збурень теплових процесів є значним), тоді як для їх стабілізації зручно застосовувати високочастотні електромагнітні поля [228].

Якщо використовувати той самий штучний прийом, можна показати, що власні числа дійсні і додатні. З урахуванням викладеного:

$$\lambda = \sum_{n=1}^2 \frac{c_{n2} \kappa_{21}^{2n-2} \ln s_0}{(c_{n2} \kappa_{21}^2 + c_{11}) \ln s_0 - \zeta R_\lambda}, \quad (4.2.10)$$

де

$$c_{n1} = \int_a^b \bar{a}_n^2 |\theta_n|^2 r dr, \quad c_{n2} = \int_a^b \left[\left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) |\theta_n|^2 + |\theta_n'|^2 \right] r dr + s(n-1) Bi_{k,m} |\theta_2(s)|^2. \quad (4.2.11)$$

Тут $\bar{a}_n^2 = a_n^2 / a_n'^2$, $a = s_0, b = 1$ при $n = 1$ і $a = 1, b = s$ при $n = 2$.

Як видно з (4.2.10), (4.2.11), циліндричний фронт кристалізації, на відміну від плоского, стійкий у розглянутій модельній постановці з наявністю приосьової області постійної температури (незалежно від радіусу цієї області, аж до нульового).

Корисно оцінити вплив конвекції при змінних фізичних параметрах системи. Для цього покладемо щільність функцією температури $\rho(T)$ і розкладемо її в ряд Тейлора в околі точки $T = T_n$, позначаючи штрихами похідні по T :

$$\rho_n(T_n + \tau_n) = \rho_n(T_n) + \rho_n'(T_n) \tau_n + 1/2 \rho_n''(T_n) \tau_n^2 + \dots,$$

звідки видно, що $\partial \rho_n / \partial t$ вважатимуться величиною вищого порядку малості проти $\nabla \rho_n$, оскільки

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = \rho_n'(T_n) \frac{\partial \tau_n}{\partial t} + \rho_n''(T_n) \tau_n \frac{\partial \tau_n}{\partial t} + \frac{\rho_n'''}{2}(T_n) \tau_n^2 \frac{\partial \tau_n}{\partial t} + \dots$$

де $\rho_n'(T_n) = (\partial \rho_n / \partial T)_{T=T_n}$. Тому з урахуванням (4.1.11), система (4.1.12) у лінійному наближенні дає

$$u_1 = \frac{-1}{\bar{\rho}_1} \frac{dp_1}{dr}, \quad v_1 = \frac{mp_1}{\bar{\rho}_1 \omega r}, \quad w_1 = \frac{kp_1}{\bar{\rho}_1 \omega}, \quad \frac{du_1}{dr} + i \left(m \frac{v_1}{r} + kw_1 \right) + \frac{u_1}{r} = 0, \\ \frac{d^2 \theta_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_n}{dr} - \left(\delta_n^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \theta_n = \frac{2-n}{\bar{a}_n^2} \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\partial T_1}{\partial r} \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{p_1}{\omega} \left(\frac{m}{r^2} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} + k \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) \right]. \quad (4.2.12)$$

Тут $\{u_1, v_1, w_1\}, p_1$ - амплітуди збурень швидкості та тиску, відповідно, $\delta_n^2 = k^2 - \lambda / a_n^2$. З перших чотирьох рівнянь системи (4.2.12) виходить:

$$\frac{d^2 p_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_1}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) p_1 = 0,$$

модифіковане рівняння Бесселя. Для збурення тиску рішення має вигляд

$$p_1 = A_1 I_m(kr) + A_2 K_m(kr), \quad (4.2.13)$$

де $A = \text{const}$.

Граничні умови (4.2.6)-(4.2.9) з урахуванням (4.2.13) та умов незбурення розподіленого джерела теплоти (області $r \leq s_0$) мають вигляд [175]:

$$r = s_0, \quad \bar{v} = 0, \quad (4.2.14)$$

$$r = 1, \quad \frac{dp_1}{dr} = (1 - \rho_{21}) \bar{\rho}_1 \omega \zeta, \quad (4.2.15)$$

складають систему граничних умов для диференціальних рівнянь (4.2.12). З (4.2.13) - (4.2.15) випливає:

$$A_1 I_m(k s_0) + A_2 K_m(k s_0) = 0, \quad A_1 I'_m(k s_0) + A_2 K'_m(k s_0) = 0,$$

звідки видно, що $A_1 = A_2$, якщо

$$I_m(k s_0) K'_m(k s_0) \neq I'_m(k s_0) K_m(k s_0).$$

Оскільки модифіковані функції Бесселя і Ганкеля набувають лише додатніх значень, причому, перша з них є монотонно зростаючою, друга - монотонно спадаючою, то при всіх значеннях аргументу, відмінних від нуля, ця нерівність може порушуватися лише при $k=0, m \neq 0$. Проте в останньому випадку, в силу властивостей функцій I_m, K_m , очевидно, також $A_1 = A_2 = 0$ і $p_1 = 0$. Отже, система стійка щодо малих збурень її параметрів, тобто параметричні коливання згасають у часі. Граничну умову можна замінити більш загальною: $u_1(s_0) = 0$. Дві інші складові швидкості руху збуреного розплаву можуть бути відмінними від нуля (наприклад, коли введена приосьова область постійної температури не є нерухомою). Тоді на відміну від розглянутого виходить:

$$A_1 I'_m(k s_0) + A_2 K'_m(k s_0) = 0, \quad A_1 I'_m(k) + A_2 K'_m(k) = \alpha \omega^2,$$

де $\alpha = (1 - \rho_{21}) \bar{\rho}_1 \omega \zeta < \zeta$.

Як показано вище, величина ω мала. Величина α для малоамплітудних збурень також мала, тому в лінійному наближенні величиною $\alpha \omega^2$ можна знехтувати, звідки:

$$A_1 I'_m(k s_0) + A_2 K'_m(k s_0) = 0, \quad A_1 I'_m(k) + A_2 K'_m(k) = 0.$$

Дослідження отриманої алгебраїчної системи двох рівнянь показує, що її рішення нетривіальне при $s_0=1$ або $k=0$. Але обидва випадки фізично нереальні, оскільки при $s_0=1$ увесь канал заповнений розплавом постійної температури $T_0=T^*$, а при $k=0$ виходить $p_1=0$, тобто система не збурюється (стійкість).

Підсумовуючи проведений аналіз математичної моделі системи, можна сказати, що фронт кристалізації розплаву, в нехтуванні впливом стінки каналу, є стійким щодо малоамплітудних збурень параметрів фізичної системи, якщо в рівноважному стані розплав нерухомий. Роль стабілізатора системи тут відіграє тонка приосьова область, температура якої постійна (гасіння коливань температури на осі каналу). Причому гасіння температурних збурень у розглянутій моделі виявляється достатнім для придушення також і гідродинамічних пульсацій.

Хоча розглядалися гармонічні збурення параметрів, висновки справедливі для будь-яких малих збурень, оскільки в силу принципу суперпозиції аналогічним чином можна провести аналіз стійкості системи і для випадку негармонічних збурень, розкладаючи їх у ряди Фур'є по гармонійних складових. Більш складні фізичні ситуації, в яких придушення параметричних коливань системи розглянутими простими прийомами неможливе, будемо досліджувати нижче. Як приклад у Табл. 4.2.1 наведено результати розрахунків за отриманими формулами для таких параметрів: $\kappa_1 = 4,33 \text{ кал}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$, $\rho_2 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, $R_0 = 0,1 \text{ м}$, $\lambda_{21} = 65 \text{ ккал}/\text{кг}$.

Табл. 4.2.1 Залежність експоненти (e^{ω}) при різній температурі кристалізації: значення експоненційного зменшення в e^{ω} разів

k	ω , Гц при T^* , К		
	293	333	373
10	0,17	0,51	0,85
10^2	1,70	5,10	8,50
10^3	17,0	51,0	85,0

З таблиці видно, який вплив фізичних умов задачі на швидкість згасання збурень параметрів досліджуваної системи. Так, при $k=10^3$ за одну секунду амплітуда збурень параметрів зменшується в e^{85} разів, якщо

температура кристалізації становить 373 °К. З ростом T_* (зменшенням ентропії системи) стійкість системи підвищується.

По Табл. 4.2.1 можна у кожному конкретному випадку оцінити характерний час загасання тих чи інших коливань параметрів системи. Хоча система стійка, але при повільному згасанні випадкових (чи регулярних) збурень її параметрів пристрій автоматичного регулювання потоків теплоти доцільно використовувати для прискорення процесу придушення параметричних коливань, оскільки технологічний режим у ряді випадків вимагає підтримки характеристик процесу в строго заданих межах (специметалургія, захист футерування металургійних агрегатів від термічного та хімічного руйнування тощо).

Як показано вище, загальні відомості про характер поширення параметричних коливань меж кристалізації розплавів та стійкості системи можна отримати з аналізу диференціальних рівнянь, що становлять математичну модель фізичного явища. У більш складних системах, що розглядаються нижче, такий аналіз не завжди можливий, але ефективним є застосування асимптотичних розкладів функцій, що шукаються, в ряди за малим параметром λ (власними числами завдачі).

За відсутності експериментальних даних про фізичний процес важко судити про адекватність побудованої математичної моделі та одержуваних на її основі рішень задачі реальному фізичному об'єкту. Тому особливо важливе значення має питання достовірності застосовуваної методики досліджень, що тісно пов'язане з адекватністю математичної моделі. У розглянутому вище випадку достовірність методики, що застосовується, може бути оцінена наступним чином. Досліджена задача стійкості фронту кристалізації в циліндричній камері допускає аналіз властивостей системи на основі диференціальних рівнянь, що її описують, за допомогою викладеного штучного прийому, без вирішення самих рівнянь. Те саме завдання можна вирішити, використовуючи асимптотичні розкладання функцій, що шукаються, в ряди за малим параметром. Порівняння двох підходів дозволяє оцінити ефективність та достовірність методики дослідження стійкості фронтів.

Рішення з використанням асимптотичного розкладання

Розглянемо асимптотичні розкладання виду

$$\theta_j = \theta_j^0 + \lambda \theta_j^1 + \lambda^2 \theta_j^2 + \lambda^3 \theta_j^3 + \dots, \quad (4.2.16)$$

де $j=1,2$. Розв'язуючи систему (4.2.12) без урахування конвекції розплаву, отримаємо рішення (4.1.18). Підкоривши його граничним умовам (4.2.6), (4.2.7), (4.2.9), визначимо константи інтегрування. Власні числа задачі λ визначимо з граничної умови (4.2.8), ґрунтуючись на тому факті, що величина R_λ для кристалічних тіл зазвичай досить велика [227] і тому λ можна отримати вже в нульовому наближенні.

Після знаходження λ описаним шляхом вирішення завдання в нульовому наближенні запишемо умову наростання коливань межі фазового переходу в часі (нестійкості):

$$\frac{A_1 Bi_{k,m} + A_2 k}{A_3 Bi_{k,m} + A_4 k} + \frac{A_5}{A_6} < 0, \quad (4.2.17)$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= K_m(ks)I'_m(k) - K'_m(k)I_m(ks) > 0, \\ A_2 &= K'_m(ks)I'_m(k) - K'_m(k)I'_m(ks) > 0, \\ A_3 &= K_m(k)I_m(ks) - K_m(ks)I_m(k) > 0, \\ A_4 &= K_m(k)I'_m(ks) - K'_m(ks)I_m(k) > 0, \\ A_5 &= K'_m(k)I_m(ks_0) - K_m(ks_0)I'_m(k) < 0, \\ A_6 &= K_m(k)I_m(ks_0) - K_m(ks_0)I_m(k) < 0, \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

де штрихом позначена похідна за незалежною змінною kr . Зазначені нерівності виконуються з властивостей модифікованих функцій Бесселя і Ганкеля [414]. Використовуючи (4.2.18), можна показати, що умова (4.2.17) не виконується за жодних значень параметрів завдання, тобто власні коливання системи в даній модельній постановці відсутні. Аналіз показує, що неможливі і коливання фронту кристалізації постійної амплітуди.

Таким чином, у даній модельній постановці в системі можуть бути тільки загасаючі коливання, швидкість зменшення яких з часом залежить від величини λ . Якщо характерний час перебігу технологічного процесу значно перевищує час згасання випадкових збурень параметрів, система управління не потрібна. В іншому випадку вона необхідна для того, щоб відповідною зміною параметра $Bi_{k,m}$ досягти максимального значення λ з метою підвищення інтенсивності згасання збурень системи.

Виходячи з отриманих результатів, можна стверджувати, що наближене розв'язання задачі з використанням асимптотичних розкладів за малим параметром λ , дає результат, що збігається з отриманим раніше на основі аналізу властивостей рішень вихідного диференціального

рівняння. Оскільки зроблений висновок справедливий щодо нульового наближення рішення задачі, він свідчить про ефективність і достовірність застосування в даному випадку описаної методики дослідження стійкості фронту кристалізації розплаву в циліндричній камері.

Далі, зважаючи на складність завдань про стійкість фронтів кристалізації в системах з наявністю не тільки збуреного, а й осередненого (незбуреного) руху розплаву, в основному будемо застосовувати описану методику, ефективність якої підтверджена на конкретному прикладі.

Взаємовплив параметрів системи та основні особливості її поведінки

Вище було показано вплив фізичних властивостей розплаву та стінки каналу, товщини шару твердої фази, що утворюється з розплаву на стінці каналу, типу стінки та інших факторів на стійкість системи та, зокрема, на стійкість фронту кристалізації. Оскільки в технічних застосуваннях такого роду завдання цікаві у зв'язку із захистом стінок каналів та футерування металургійних агрегатів від термічного та хімічного руйнування, а розплаву - від забруднення сторонніми домішками, важливо також розглянути питання вибору оптимальних співвідношень між параметрами системи.

Наприклад, для захисту каналів за допомогою гарнісажу [75, 229] необхідно організувати автоматичний контроль форми та положення межі фазового переходу гарнісажу (тонкого шару твердої фази, настилу) і підтримувати товщину твердої плівки в заданих межах. Питання вибору оптимальної товщини гарнісажу розглядалося в [156, 175].

Отримані у попередньому розділі власні значення збуреного стану для випадку нерухомого розплаву мають вигляд:

$$\lambda = \frac{-k}{R_\lambda \ln s_0} \left(\frac{A_1 B i_{k,m} + A_2 k}{A_3 B i_{k,m} + A_4 k} + \frac{A_5}{A_6} \right). \quad (4.2.19)$$

Оскільки на поведінку системи значний вплив має незбурений стан, необхідно враховувати конкретні особливості цього стану. Розглянуте рішення відноситься до випадку, коли рівняння теплової рівноваги (4.1.1) записані при $\kappa_n = const$ і термічним опором стінки каналу можна знехтувати, внаслідок чого граничні умови (4.1.2) також істотно спрощуються і рішення відповідного крайового завдання має вигляд:

$$T_1 = 1 + \frac{\ln r}{\ln s_0}, \quad T_2 = 1 + \frac{\ln r}{\bar{\kappa}_2 \ln s_0}. \quad (4.2.20)$$

Якщо задана товщина шару твердої фази на стінці каналу, з (4.2.20) можна отримати температуру стінки каналу:

$$T_w = 1 + \frac{\ln s}{\bar{\kappa}_2 \ln s_0}. \quad (4.2.21)$$

Якщо ж задана температура стінки каналу, товщину шару гарнісажу з урахуванням (3.2.21) визначимо із співвідношення

$$s = s_0^{\bar{\kappa}_2(T_w - 1)}. \quad (4.2.22)$$

Аналіз виразу (4.2.22) показує, що отримати тонкий гарнісаж можна у разі близькості температури стінки температури плавлення (при будь-якому s_0) і у разі широкої області постійної температури ($s_0 \sim 1$) з різким градієнтом на стінці каналу. При цьому з (4.2.19) неважко помітити, що в другому випадку незалежно від інших умов будь-які збурення системи згасають практично миттєво ($\lambda \gg 1$), тоді як у першому швидкість згасання збурень істотно залежить від ширини приосьової області з постійною температурою (величини параметра s_0).

Слід також зауважити, що оскільки $A_j > 1$ ($j=1,2,3,4$), то модифіковане число Біо $Bi_{k,m}$ має обмежений вплив на швидкість розвитку обурень системи при $Bi_{k,m} > 0$ і тільки при $Bi_{k,m} \sim -A_4/A_3$ вплив може бути як завгодно великим, що можливе лише у разі застосування спеціальних систем керування потоками теплоти. Проте тоді може виявитися невірним нульове наближення, засноване на припущенні про малі λ (наслідок малих градієнтів температури на межі фазового переходу).

При $s_0 \sim 1$ (виродження приосьової області в шнур постійної температури) $\lambda \sim 0$, тому без керуючої системи будь-які збурення поширюються без згасання та наростання. Тільки застосування спеціальним чином влаштованих систем керування потоками теплоти на стінці каналу можна домогтися наростання або згасання в часі відповідних збурень (для досягнення просторового розрізнення на кожному гармоніку з хвильовими числами k, m має бути свій канал регулювання величини $Bi_{k,m}$).

Для вибору оптимальної товщини шару гарнісажу у кожному конкретному випадку необхідно виходити з аналізу екстремальних значень виразів типу (4.2.19), (4.2.21), (4.2.22). Наприклад, дослідження виразу (4.2.22) показує, що функція $s(s_0)$ взагалі не має екстремумів,

оскільки в загальному випадку $ds/ds_0 < 0$. Тому необхідно визначити $\text{extr } \lambda(s)$, $s \in (1, s_m)$, де s_m - фізично гранично допустиме значення величини s . У загальному випадку для визначення екстремальних значень власних чисел з урахуванням (4.2.19), (4.2.21) потрібно вирішити трансцендентне рівняння. Для аналізу розглянемо нижче два граничні випадки.

Короткохвильові обурення

При $k \gg 1$ функції $I_m(z), K_m(z)$ та їх похідні $I'_m(z), K'_m(z)$ мають такі порядки [414]:

$$I_m(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad K_m(z) \sim \frac{\pi I_m(z)}{e^{2z}}, \quad I'_m(z) \sim I_m(z), \quad K'_m(z) \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

тому: $\frac{A_2}{A_1} \sim \frac{e^{-2k} - e^{-2ks}}{e^{-2k} + e^{-2ks}}, \quad A_1 \sim \frac{e^{k(s+1)}}{2k\sqrt{s}} (e^{-2k} + e^{-2ks}), \quad A_5 \sim A_6 \sim \frac{-1}{2k\sqrt{s_0}} e^{k(1-s_0)},$
 $A_3 \sim A_2, \quad A_4 \sim A_1$, звідки з урахуванням (4.2.19) випливає:

$$\lambda = \frac{-k}{R_\lambda \ln s_0} \left[1 + \frac{Bi_{k,m} + k \cdot \text{thk}(s-1)}{Bi_{k,m} \text{thk}(s-1) + k} \right]. \quad (4.2.23)$$

При $k(s-1) \gg 1$ з (4.2.23), вважаючи $\text{thk}(s-1) \sim 1$, отримаємо

$$\lambda = \frac{-2k}{R_\lambda \ln s_0},$$

звідки слідує, що короткохвильові збурення межі оплавлення товстого шару гарнісажу некервані описаним шляхом і зменшуються в часі зі швидкістю, пропорційною хвильовому числу k . При $k(s-1) \ll 1$ ($s \ll 1+1/k$) можна приблизно покласти $\text{thk}(s-1) \sim k(s-1)$ і матимемо:

$$\lambda = \frac{-1}{R_\lambda \ln s_0} \left[k + \frac{Bi_{k,m} + k^2(s-1)}{Bi_{k,m}(s-1) + 1} \right].$$

Аналіз отриманого виразу показує, що тонкий гарнісаж допускає керування стійкістю межі фронту кристалізації. З урахуванням прийнятих припущень маємо наближені оцінки виду:

$$\begin{aligned} s > 1+1/k, \quad Bi_{k,m} > Bi_{k,m}^*, \quad \lambda < 0; \\ s < 1+1/k, \quad Bi_{k,m} < Bi_{k,m}^*, \quad \lambda < 0; \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

де $Bi_{k,m}^* = -k$ критичне модифіковане число Біо, яке відповідає втраті стійкості. Як видно з (4.2.23), короткохвильові збурення межі кристалізації тонкого шару гарнісажу можуть наростати в часі при великих негативних $Bi_{k,m}$, тобто без системи управління потоками теплоти це неможливо.

В інших випадках, досліджуючи функцію (4.2.23) на екстремум, отримуємо, що $d\lambda/ds$ має знак, який визначається величиною $Bi_{k,m}$: при $|Bi_{k,m}| < k$ зростають власні числа $\lambda(s)$ і, отже, через проведені оцінки, гарнісаж стійкий, а при $|Bi_{k,m}| > k$ функція $\lambda(s)$ зменшується, але $d\lambda/ds$ ніде не змінює знаку і оскільки $\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda(s) = -2k / (R_\lambda \ln s_0) > 0$, це також відповідає стійкості. Таким чином, короткохвильові збурення гарнісажу в лінійній постановці не призводять до порушення його стійкості.

Довгохвильові осесиметричні збурення

Більш небезпечним з точки зору порушення стійкості гарнісажу є інший граничний випадок – довгохвильові збурення параметрів фізичної системи. При $k \ll 1$, $m=0$ скористаємося наближеннями функцій $I_0(z), K_0(z)$ та їх похідних, справедливими для $z \ll 1$ [414]: $I_0(z) \sim 1$, $I_0'(z) \sim 0$, $K_0(z) \sim \ln(2/(\gamma' z))$, $K_0'(z) \sim -1/z$, где γ' - константа Ейлера. Це дає: $A_1 \sim 1/k$, $A_2 \sim 0$, $A_3 \sim \ln s$, $A_4 \sim 1/(ks)$, $A_5 \sim -A_1$, $A_6 \sim \ln s_0$, після чого з (4.2.19) отримаємо

$$\lambda = \frac{1}{R_\lambda \ln s_0} \left(\frac{1}{\ln s_0} - \frac{Bi_{k,m} s}{1 + s Bi_{k,m} \ln s} \right). \quad (4.2.25)$$

На відміну від короткохвильових збурень, як видно з (4.2.25), довгохвильові збурення мають власні числа, що не залежать від хвильового числа. Тому для $k \ll 1$ гарнісаж стійкий. Нестійкість може бути викликана системою керування потоками теплоти, якщо $Bi_{k,m}$ задовольняє умові

$$\frac{-1}{s \ln s} < Bi_{k,m} < \frac{-1}{s (\ln s - \ln s_0)}.$$

Дослідження функції (4.2.25) показує, що при $Bi_{k,m} > 0$, $s < 1/Bi_{k,m}$ зі збільшенням товщини гарнісажу швидкість загасання збурень зростає, а при $s > 1/Bi_{k,m}$ зменшується. Звідси випливає, що $s = 1/Bi_{k,m}$ точка максимуму функції $\lambda(s)$.

Цікавим є також питання про співвідношення швидкостей згасання короткохвильових і довгохвильових збурень гарнісажу. Розглянемо його, ґрунтуючись на формулах (4.2.23), (4.2.25), рахуючи $k(s-1) \gg 1$ в першому випадку і $k \ll 1$ - у другому, $s_0 \ll 1$. Тоді отримаємо для відношення значень $\lambda(s)$ у зазначених випадках вираз виду

$$\Delta_\lambda = 2k \frac{1 + Bi_{k,m} s \ln s}{s Bi_{k,m}}. \quad (4.2.26)$$

Розглянемо отриманий вираз (4.2.26): при $Bi_{k,m} \sim 1$, $s \sim 1$ маємо $\Delta_\lambda \sim 2k$, тобто $\Delta_\lambda \gg 1$, а умова $\Delta_\lambda \sim 1$ вимагає при $s \sim 1$ наступного значення параметра $Bi_{k,m} \sim 2k$.

Звідси можна зробити висновок, що без системи управління потоками теплоти на зовнішній поверхні каналу короткохвильові збурення згасають значно швидше за довгохвильові. А сумірні швидкості згасання цих збурень можуть бути лише за наявності потужних керованих теплових потоків від каналу в навколишнє середовище (майже миттєве заморожування хвилі оплавлення шару твердої фази на поверхні каналу, що практично дуже проблематично забезпечити).

Виявлені особливості поведінки меж фазового переходу в циліндричних каналах та взаємовплив різних параметрів фізичної системи дозволяють оптимальним чином організувати технологічний процес у кожному конкретному випадку. Далі розглянуті питання будуть досліджені для каналів, в яких у незбуреному стані є рух розплаву вздовж стінок (транспортування розплаву каналами з гарнісажним захистом).

4.3 Вплив руху рідкої фази та нестійкість фронту кристалізації

Фізико-математична модель системи

Вище були розглянуті основні закономірності коливань меж фазового переходу в системах з циліндричними каналами, що містять нерухомий розплав, що застигає (кристалізується) поблизу стінок, що мають температуру нижче температури солідифікації розплаву. При цьому ми досліджували взаємний вплив різних параметрів фізичної системи, у тому числі вплив стінки каналу, яка може бути багатшаровою. Шляхом всебічного розгляду задачі на ряді спрощених

фізико-математичних моделей показано застосування високоефективної методики наближеного рішення задач за допомогою асимптотичних розкладів шуканих функцій у ряди за малим параметром λ .

Тепер застосуємо цю методику для дослідження фізичних систем, структурно представлених на Рис. 4.3.1:

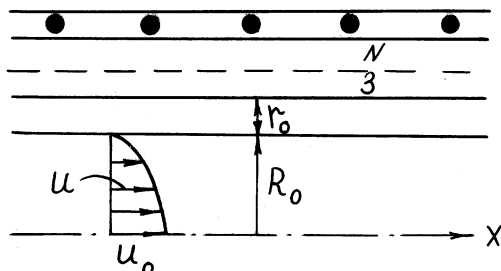


Рис. 4.3.1 Структурна схема циліндричного фронту кристалізації розплаву, що протікає в каналі

Істотна відмінність таких систем від розглянутих раніше полягає у тому, що розплав і у незбуреному стані рухається каналом вздовж його осі симетрії. Це значно ускладнює математичне моделювання системи та її аналіз, унаслідок чого виникає потреба застосування чисельних методів та ЕОМ. Канал у загальному випадку може містити багатошарову стінку з N різних шарів. На зовнішній поверхні може бути встановлена система автоматичного керування потоками теплоти для збудження або придушення коливань у системі.

Як показано вище, фізичні властивості багатошарової стінки каналу впливають на теплову стійкість системи за будь-якого режиму течії розплаву в каналі. Однак розглянута порівняно проста модельна постановка задачі може бути надто наближеним описом складної реальної системи. До того ж можливий істотний вплив гідродинамічної нестійкості на загальний хід технологічного процесу. Тому розв'язання задачі термогідродинамічної стійкості системи має значний інтерес в цілому з урахуванням розподілу полів швидкості, тиску і температури в незбуреному стані.

Параметри незбуреної системи можуть відігравати значну роль у процесі виникнення та поширення коливань межі фазового переходу та всіх характеристик системи. Слід звертати увагу на адекватність математичного опису незбуреної системи та виявляти особливості впливу її характеристик на збурений стан. Якщо вплив суттєвий,

застосування грубих моделей незбуреного стану неприпустиме. А при слабкому впливі параметрів незбуреної системи на розвиток збурень доцільно використовувати спрощену модель рівноважного стану, оскільки це значно полегшує аналіз математичної моделі.

Вважаємо розплав нестисливою рідиною і в'язкістю в більшості випадків нехтуємо внаслідок її малості для багатьох металевих розплавів. Припускаємо, що в стані динамічної рівноваги розплав рухається зі швидкістю w_0 , практично постійною по поперечному перерізу каналу (в'язким тертям розплаву нехтуємо). Тоді рівняння теплової рівноваги системи з осовою симетрією запишемо у вигляді

$$\rho_l c_l u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \kappa_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} \right), \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} = 0 \quad (4.3.1)$$

Тут ρ_l , c_l , u_0 - відповідно, щільність, коефіцієнт теплоємності та швидкість руху розплаву по взаовж осі каналу, T - температура незбуреної системи. Аналогічно – друге рівняння системи (4.3.1), рівняння теплопровідності твердої фази. Якщо розглядається стінка камери, то до неї додається відповідне рівняння типу другого рівняння системи.

Граничні умови подібні до вищерозглянутих, з тією різницею, що тепер температура стінки каналу T_w , взагалі кажучи, функція x і, крім того, необхідно задати дві граничні умови по x , наприклад, вважати профіль температури $T_0(r)$ та тепловий потік $T_{1x}^0(r)$ (градієнт температури розплаву в початковому перерізі каналу, при $x=0$) заданим. Тут $T_{1x}^0(r) = \partial T_1 / \partial x$.

У безрозмірному вигляді, з урахуванням сказаного, маємо:

$$Pe \frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} = 0; \quad (4.3.2)$$

$$r = 1, \quad T_j = 1 \quad (j = 1, 2), \quad \frac{\partial T_1}{\partial r} = \bar{\kappa}_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}; \quad (4.3.3)$$

$$r = s, \quad T_2 = T_w(x); \quad (4.3.4)$$

$$x = 0, \quad T_1 = T_1^0(r), \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} = T_{1x}^0(r), \quad (4.3.5)$$

де $Pe = w_0 R_0 a_1^2$ - число Пекле, $T_w(x)$, $T_1^0(r)$, $T_{1x}^0(r)$ - задані функції. Критерій $Pe = Re \cdot Pr$ характеризує теплову подібність в середовищі, що рухається, і відображає співвідношення конвективного і кондуктивного (молекулярного) переносів теплоти в каналі.

Неважко помітити, що крайове завдання (4.3.2)-(4.3.5) можна вирішити методом Фур'є, вводячи замість $T_j(r)$ функцію $T_j(r)-1$, для якої система (4.3.2) залишається незмінною, але перша гранична умова (4.3.3) стає однорідною. Припустимо, $\tilde{T}_j = T_j - 1$, $\tilde{T}_j = \tilde{X}_j(x)\tilde{R}_j(r)$, після чого з урахуванням викладеного будемо мати

$$\frac{d^2 \tilde{R}_j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{R}_j}{dr} + \alpha_j^2 \tilde{R}_j = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{X}_j}{dx^2} + (j-2)Pe \frac{d\tilde{X}_j}{dx} - \alpha_j^2 \tilde{X}_j = 0,$$

де α_j - власні числа задачі. Рішення отриманої системи записується як

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= d_1 \exp\left[\left(Pe - \sqrt{Pe^2 + 4\alpha_1^2} \right) \frac{x}{2}\right] + d_2 \exp\left[\left(Pe + \sqrt{Pe^2 + 4\alpha_1^2} \right) \frac{x}{2}\right], \\ \tilde{X}_2 &= b_1 e^{\alpha_2 x} + b_2 e^{-\alpha_2 x}, \quad \tilde{R}_j = c_{j1} J_0(\alpha_j r) + c_{j2} Y_0(\alpha_j r), \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

де J_0, Y_0 - функції Бесселя першого та другого роду нульового порядку, а b_j, d_j, c_{jm} ($j=1,2, n=1,2$) - константи, що підлягають визначенню з граничних умов (4.3.3)-(4.3.5).

Оскільки величина \tilde{R}_1 має бути обмеженою, слід покласти $c_{12} = 0$, зважаючи на те, що $Y_0(0) = \infty$. Не обмежуючи спільності, вважатимемо c_{11} , після чого з умови $J_0(\alpha_1)$ отримаємо зліченну кількість додатніх власних значень α_{1k} . Константи c_{2j} мають вигляд

$$c_{21} = \frac{Y_0(\alpha_2)}{J_0(\alpha_2 s) Y_0(\alpha_2) - J_0(\alpha_2) Y_0(\alpha_2 s)}, \quad c_{22} = \frac{J_0(\alpha_2)}{J_0(\alpha_2) Y_0(\alpha_2 s) - J_0(\alpha_2 s) Y_0(\alpha_2)}. \quad (4.3.7)$$

Для визначення b_j маємо співвідношення:

$$b_1 e^{\alpha_2 x} + b_2 e^{-\alpha_2 x} = A(d_1 e^{\alpha_2 q_2 x} + d_2 e^{\alpha_2 q_1 x}),$$

яке має задовольнятися тотожно, внаслідок чого, розкладаючи функції, в ряди Тейлора і прирівнюючи коефіцієнти при однакових членах, маємо

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= A(d_1 + d_2), \quad b_1 - b_2 = A(q_1 d_1 + q_2 d_2), \\ (1 - q_1^2) d_1 + (1 - q_2^2) d_2 &= 0, \quad q_1(1 - q_1^2) d_1 + q_2(1 - q_2^2) d_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

де $A = \alpha_{12} \kappa_{12} J_1(\alpha_1) \sin \alpha_2 s'$, $s' = s - 1$, $q_{1,2} = 1 / (2\alpha_2) (Pe \pm \sqrt{Pe^2 + 4\alpha_1^2})$.

Нетривіальне рішення однорідної системи алгебраїчних рівнянь існує лише при $q_{1,2} = \pm 1$ ($q_1 \neq q_2$), тому маємо 4 пари значень b^{jn} :

$$\begin{aligned} b_{1n} &= A \left[0,5(1+q_{2,1})d_{2,1} \pm d_{1,2} \right], \quad n = \overline{1,4}, \\ b_{21} = b_{22} &= 0,5Ad_2(1-q_2), \quad b_{23} = b_{24} = 0,5Ad_1(1-q_1). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

У першому виразі разом з спочатку перебираються послідовно перші індекси зі знаками "+" та "-", потім - другі. Враховуючи викладене та вирази (4.3.6)-(4.3.9), рішення крайової задачі (4.3.2)-(4.3.5) має вигляд:

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 + \sum_{n=1}^4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 J_0(\alpha_{1k}r) d_{jk} \exp(q_{3-j}\alpha_{2n}x), \\ T_2 &= \sum_{n=1}^4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 b_{jnk} \exp\left[(-1)^{j+1}\alpha_{jnk}x\right] \frac{J_0(\alpha_{2nk})Y_0(\alpha_{2nk}r) - J_0(\alpha_{2nk}r)Y_0(\alpha_{2nk})}{J_0(\alpha_{2nk})Y_0(\alpha_{2nk}s) - J_0(\alpha_{2nk}s)Y_0(\alpha_{2nk})}, \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

де $(\alpha_2)_{1,2} = \pm 1/2 \left(Pe - \sqrt{Pe^2 + 4\alpha_1^2} \right)$, $(\alpha_2)_{3,4} = \pm 1/2 \left(Pe + \sqrt{Pe^2 + 4\alpha_1^2} \right)$.

Константи b_{jnk} визначаються за формулами (4.3.9) через d_{jk} , які виходять з граничної умови (4.3.5):

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} d_{jk} J_0(\alpha_{1k}r) = T_1^0(r), \quad \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} d_{jk} \left(Pe + (-1)^j \sqrt{Pe^2 + 4\alpha_1^2} \right) J_0(\alpha_{1k}r) = 2T_{1x}^0(r).$$

Враховуючи ці розкладання $T_1^0(r)$, $T_{1x}^0(r)$ в ряди за функціями Бесселя [212] та вирази для коефіцієнтів цих рядів, отримаємо

$$\begin{aligned} d_{1k} &= \left(1 + \frac{Pe}{\sqrt{Pe^2 + 4\alpha_{1k}^2}} \right) \frac{1}{J_1^2(\alpha_{1k})} \int_0^1 (T_1^0 - T_{1x}^0) J_0(\alpha_{1k}r) r dr, \\ d_{2k} &= \frac{1}{J_1^2(\alpha_{1k})} \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{Pe}{\sqrt{Pe^2 + 4\alpha_{1k}^2}} \right) T_1^0 + \left(1 + \frac{Pe}{\sqrt{Pe^2 + 4\alpha_{1k}^2}} \right) T_{1x}^0 \right] J_0(\alpha_{1k}r) r dr. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Дана математична модель (4.3.7), (4.3.9)-(4.3.11) теплової рівноваги системи, незважаючи на прийняті спрощення реальної фізичної картини, все ж таки досить складна, внаслідок чого її застосування викликає необхідність використання ЕОМ. Надалі ця модель буде застосовуватися, проте тут доцільно розглянути також інші, простіші математичні моделі незбуреної системи, що допускають отримання порівняно простих, зручних для практичних розрахунків формул.

Випадок лінійної залежності $T_I(x)$

Одним з найпростіших є випадок лінійної функції $T_I(x)$ або $\partial T_I / \partial x = \Delta_1 = const$ (градієнт температури розплаву вздовж осі каналу незмінний). Тоді, враховуючи вид крайового завдання (4.3.2)-(4.3.5), можна покласти, що і $T_2(x)$ лінійна функція, і розв'язок задачі запишеться:

$$T_1 = 0,25Pe \cdot \Delta_1 \cdot r^2 + c_1(x) \ln r + c_2(x), \quad T_2 = c_3(x) \ln r + c_4(x),$$

де з умови скінченності $T_I(x)$ при $r=0$ виходить $c_1=0$, а з прийнятих припущень маємо: $c_2(x) = \Delta_1 x + c_2$, $c_2, c_3 = const$ і далі:

$$T_1 = 0,25Pe \cdot \Delta_1 \cdot r^2 + \Delta_1 x + c_2, \quad T_2 = c_3(x) \ln r + c_4(x) + c_5,$$

де $c_4, c_5 = const$. Звідси видно, що у цій моделі межа фазового переходу $r=r^*$ змінюється по x від $r=1$ при $x=0$, тому:

$$T_1 = 1 + 0,25Pe \cdot \Delta_1 (r^2 - 1) + \Delta_1 x, \quad T_2 = 1 + 0,5Pe \cdot \Delta_1 \kappa_{12} \ln r + \Delta_1 \kappa_{12} x, \quad (4.3.12)$$

якщо записати з точністю до лінійних членів по x . Отримане наближене рішення (4.3.12) справедливе, якщо на стінці каналу підтримується розподіл температури в виду:

$$T_w = 1 + Pe \cdot \Delta_1 \kappa_{12} s^2 \ln s + \Delta_1 \kappa_{12} s^2 x.$$

При цьому межа фазового переходу описується функцією $r^* = \sqrt{1 - 4x / Pe}$. Даний вираз буде тим точнішим, чим менша величина x/Pe , звідки слідує, що користуватися ним можна при великих числах Пекле (сильне конвективне перенесення тепла). При $Pe \ll 1$ профілі температур у рідкій та твердій фазах подібні і в першому наближенні їх можна вважати такими, що не залежать від x , якщо канал має малу довжину.

Область фазового переходу

Хоча в багатьох практичних задачах широкого поширення набув спрощений метод аналізу процесу фазового перетворення розплаву [149, 228], заснований на гіпотезі існування поверхні кристалізації (розділу фаз), на якій фізичні властивості речовини змінюються стрибкоподібно, проте в деяких випадках такий підхід є неприйнятним [75, 341, 342]. Це пов'язано з тим, що більшість сплавів кристалізується в інтервалі температур від $T_{лік}$ до $T_{сол}$ (рівноважні значення температур ліквідусу і солідусу твердого сплаву) і тому область фазового переходу насправді може мати кінцеву ширину (не рівну нулю і не мікро-, а макромасштабу), причому, ця область в силу зазначених причин є двофазною (розплав,

кристали): у ній відносна кількість твердої фази змінюється від 1 при $T=T_{\text{сол}}$ до нуля при $T=T_{\text{лік}}$.

Як показано в [342], врахування виділення теплоти фазового переходу в скінченній області кристалізації в порівнянні з традиційною постановкою задачі Стефана, що ґрунтується на гіпотезі миттєвого фазового переходу при температурі $T=T^*$, дає можливість визначити ширину двофазної області та її вплив на процес кристалізації. Це дозволяє прогнозувати виникнення дефектів виливки (пористість, сегрегація домішок), що істотно залежать від вищевказаних причин та часу перебування сплаву у двофазному стані [341].

При розгляді задач захисту стінок каналів сталеплавильних агрегатів ежекторного типу за допомогою гарнісажу [229] двухфазна область має місце ще й з наступних причин (див. Рис. 4.3.2). Шлако-металевий розплав рухається вздовж осі каналу, область $r \in (0, R_1)$ зайнята шлако-металевим розплавом, $r \in (R_1, R_2)$ - металевий розплав з твердими шлаковими включеннями (розглядається випадок, коли шлак більш тугоплавкий, ніж метал), $r \in (R_2, R_2 + r_0)$ - шар твердої металевої фази (гарнісаж).

Таким чином, базуючись на гіпотезі існування області фазового переходу нульової ширини, маємо: поверхня $r=R_1$ - межа фазового переходу шлаку, що має температуру плавлення шлаку $T=T_{\text{ш}^*}$, $r=R_2$ - поверхня кристалізації металу з температурою $T=T_{\text{м}^*}$, $r \in (R_1, R_2)$ - двухфазна область. Навіть у припущенні $T_{\text{лік}}=T_{\text{сол}}$ описане багатофазне багатокомпонентне середовище є неоднорідним і має складний математичний опис.

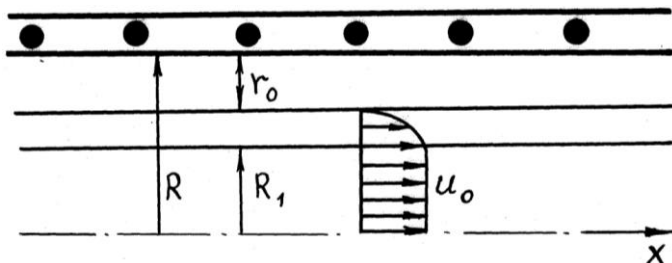


Рис. 4.3.2 Структурна схема течії двофазного середовища з кристалізацією розплаву на стінці каналу

Течія двофазного середовища з кристалізацією розплаву на стінці каналу

У першій області описаної фізичної системи можна вважати рух шлакометалевого розплаву в першому наближенні нев'язким, у другій в'язкість істотна внаслідок її різкого зростання, обумовленого наявністю твердих включень. Для спрощення фізико-математичної моделі системи приймемо припущення про те, що профіль швидкості течії у двофазній області є автомодельним: $u = u_0 f(r)$, де u_0 - швидкість руху у першій області. В'язкою дисипацією енергії нехтуємо, враховуючи в'язкість тільки у профілі швидкості. Також вважаємо $\frac{\partial T_j}{\partial x} = \Delta_x = const$, $j=1,2$. Тоді безрозмірна крайова задача запишеться у вигляді

$$Pe [f(r)]^{j-1} \frac{\partial T_j}{\partial x} = \frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial r^2} = 0; \quad (4.3.13)$$

де $j=1,2$. Як масштабні одиниці довжини і температури тут прийняті R_2 T_{w*} . Граничні умови такі:

$$r = s_1, \quad T_1 = T_2 = T_{w*}, \quad \frac{\partial T_1}{\partial r} = \bar{\kappa}_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}; \quad (4.3.14)$$

$$r = r_*, \quad T_3 = T_2 = 1, \quad \frac{\partial T_2}{\partial r} = \bar{\kappa}_{32} \frac{\partial T_3}{\partial r}; \quad (4.3.15)$$

$$r = s_3, \quad T_3 = T_w(x); \quad (4.3.16)$$

де $s_1 = R_1 / R_2$, $s_2 = (R_2 + r_0) / R_2$, $\bar{\kappa}_{32} = \bar{\kappa}_3 / \bar{\kappa}_2$.

Розв'язання крайової задачі (4.3.13)-(4.3.16) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{w*} + 0,25 Pe \cdot \Delta_x (r^2 - s_1^2) + \Delta_x x, \\ T_2 &= T_{w*} + Pe \cdot \Delta_x \left[\Phi(r) + 0,5 s_1^2 \kappa_{12} \ln(r/s_1) + x/Pe \right], \\ T_3 &= 1 + Pe \cdot \Delta_x \left[\kappa_{23} F(r_*) + 0,5 s_1^2 \kappa_{13} \right] \ln(r/r_*), \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

де $F(r) = \int_{s_1}^r f(r) r dr$, $\Phi(r) = \int_{s_1}^r F(r) \frac{dr}{r}$. З граничних умов (4.3.14) випливає зв'язок параметрів s_1 і T_{w*} : $s_1^2 \ln s_1 = 2 \bar{\kappa}_2 \left[\Phi(1) + (T_{w*} - 1) / (Pe \cdot \Delta_x) \right]$. Тут, як і раніше, $r = r_*$ - межа фазового переходу, яка відрізняється від $r=1$ при $x=0$ внаслідок наявності градієнта температури вздовж осі каналу. Межа фазового переходу визначається з рівняння

$$\Phi(r_*) + \frac{\kappa_{12}}{2} s_1^2 \ln \frac{r_*}{s_1} + \frac{x}{Pe} = \frac{1 - T_{ш*}}{\Delta_x Pe}. \quad (4.3.18)$$

На стінці каналу, слідуючи (4.3.17), отримуємо температуру

$$T_w = 1 + Pe \cdot \Delta_x [\kappa_{23} F(r_*) + 0,5s_1^2 \kappa_{13}] \ln(s_3 / r_*). \quad (4.3.19)$$

Профіль $f(r)$ можна взяти лінійним, виходячи з умов $f(s_1)=1, f(r^*)=0$, а в загальному випадку вид цієї функції визначається режимом течії (з урахуванням розподілу температур знову-таки), вмістом шлакової фази, розмірами дисперсій тощо. З огляду на те, що у співвідношення (4.3.17) входить не $f(r)$, а інтеграли від цієї функції, то неточності в її апроксимації згладжуються.

Вираз (4.3.19) дозволяє за заданою товщиною гарнісажу $r_0=s_3-r^*$ визначити необхідний розподіл температури стінки каналу. При $s_1 \sim 1, T_{ш*} \rightarrow T_{ш*} = 1$ рішення (4.3.17) перетворюється на раніше отримане (4.3.12),

однак якщо у вузькій області $r \in (1, r_*)$ внаслідок різкого зростання швидкості руху розплаву від 0 на межі кристалізації $r = r_*$ до 1 на лінії $r=1$ закон зміни межі порівняно з випадком (4.3.12) змінюється. Покажемо це, прийнявши внаслідок малої області $r \in (1, r_*)$ лінійну апроксимацію

функції $f(r) = (1-r)(r-s_1)$. Тоді (4.3.18) з урахуванням $\lim_{r \rightarrow 1} \Phi(r) = \frac{5r_* - 4r_*^2 - 1}{36}$ з точністю до лінійних членів по $1-r_*$ дає

$$r_* = \frac{1}{8} \left[5 - 18\kappa_{12} + 3\sqrt{(1+6\kappa_{12})^2 - 64\frac{x}{Pe}} \right]. \quad (4.3.20)$$

При малих x/Pe вираз (4.3.20) можна спростити в лінійному наближенні за цією величиною:

$$r_* = 1 - \frac{12x}{(1+6\kappa_{12})^2 Pe}, \quad (4.3.21)$$

тоді як раніше в лінійному наближенні по x/Pe вийшло $r_* = 1 - 2x/Pe$. Звідси випливає, що врахування різкої зміни швидкості розплаву в тонкому шарі поблизу поверхні кристалізації призводить до залежності функції $r_*(x)$ від співвідношення коефіцієнтів теплопровідності рідкої і твердої фаз. Порівняння двох формул показує: при $\bar{\kappa}_2 < (\sqrt{6}-1)/\sqrt{6} \approx 0,2416$ неврахування прикордонного шару веде до заниження значень функції

$r_*(x)$, що описує залежність межі фазового переходу від поздовжньої координати x , а при $\bar{\kappa}_2 > (\sqrt{6}-1)^{-}$ навпаки, до завищення.

В іншому граничному випадку, при $s_1 \rightarrow 0$ розв'язок (4.3.17) набуває вигляду

$$T_1 = T_0 + Pe \cdot \Delta_x \left[\Phi(r) + \frac{x}{Pe} \right], \quad T_2 = 1 + \kappa_{12} Pe \cdot \Delta_x F(r_*) \ln \frac{r}{r_*}, \quad (4.3.22)$$

де $T_0 = T_1(0,0)$. Вирази (4.3.22) дають рішення для руху в'язкої рідини, коли в'язкою дисипацією можна знехтувати, але необхідно враховувати вплив в'язкості на профіль швидкості. При цьому розплав може бути однофазним середовищем (без будь-яких включень). Тут аналогічно вищезглянутому маємо

$$r_* = 6 \sqrt{\frac{1}{5Pe} \left(\frac{1-T_0}{\Delta_x} - x \right)}, \quad (4.3.23)$$

або в лінійному по x/Pe наближенні:

$$r_* = 6 \sqrt{\frac{1-T_0}{5\Delta_x Pe} \left[1 - \frac{\Delta_x x}{2(1-T_0)} \right]},$$

звідки видно що $r_*(x)$, на відміну від розглянутих випадків, залежить від температури розплаву на осі (а від $\bar{\kappa}_2$ не залежить). На положення фронту кристалізації впливає вся область розплаву, а не лише примежова, як у попередньому випадку.

Отримані у розділах 4.1, 4.2 рішення модельних задач дозволили встановити суттєві риси досліджуваного явища поширення коливань меж циліндричних фронтів кристалізації нерухомого розплаву. Відомо [342], що відсутність поверхневого натягу плоскої міжфазної межі кристала з його розплавом, за наявності малих негідростатичних напруг всередині твердої фази має місце нестійкість межі щодо збурень з будь-якою довжиною хвилі. Останнє означає нестійкість фронту кристалізації за будь-якої форми межі фазового переходу. І лише сили поверхневого натягу пригнічують короткохвильову частину спектра збурень. В [341] розрахована критична довжина хвилі для такого випадку.

Методика рішення модельних задач, ефективність якої продемонстрована на конкретних прикладах, буде використана і при розгляді стійкості фронтів кристалізації розплаву, що рухається. Приклади рівноважних конфігурацій такого роду розглянути вище. Далі

будемо досліджувати стійкість таких систем щодо малоамплітудних збурень межі фазового переходу та параметрів системи, а також можливість стабілізації (придушення збурень) межі у разі її нестійкості.

Визначення умов параметричної нестійкості циліндричних фронтів кристалізації рухомого розплаву та подолання бар'єрів нестійкості за допомогою керуючих впливів - актуальні теоретичні та прикладні проблеми сучасної механіки та спеціалізації [136, 227-229, 351]. Розглянемо послідовно ряд вищеописаних моделей. Нехай рівноважний стан системи описується виразами (4.3.10) або крайовим завданням (4.3.1)-(4.3.5). Тоді для малоамплітудних збурень параметрів рівноважного стану в лінійному наближенні матимемо

$$\rho_1 c_1 \left[\frac{\partial \tau_j}{\partial t} + (2-j) \left(w_0 \frac{\partial \tau_j}{\partial x} + \bar{v}_1 \nabla T_1 \right) \right] = \kappa_j \left(\frac{\partial^2 \tau_j}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tau_j}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tau_j}{\partial r^2} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} + w_0 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_1} \nabla p_1, \quad \text{div} \bar{v}_1 = 0, \quad (4.3.24)$$

де $j=1,2$, $\bar{v}_1 \{u, v, w\}(r) w_0 \exp i(kx + m\varphi - \omega t)$, p_1 - збурення швидкості та тиску розплаву.

Граничні умови такі. На осі каналу, вважаючи систему осесиметричною, можна покласти:

$$r = 0, \quad u_1 = 0, \quad \tau_1 = 0. \quad (4.3.25)$$

На межі фазового переходу $r = R_0 [1 + \zeta \exp i(kx + m\varphi - \omega t)]$ з урахуванням сталості температури кристалізації, з точністю до лінійних членів збурення, записуються умови (4.1.6), (4.1.7). На зовнішній поверхні каналу, як і раніше, розглядається імпедансна гранична умова (4.1.10).

Математична модель збуреної системи

З урахуванням (4.2.1), (4.2.2) можна представити математичну модель збуреної системи у безрозмірному вигляді, аналогічно (4.1.12)

$$\text{div} \bar{v}_1 = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_1} \nabla p_1, \quad (4.3.26)$$

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial Fo} + \bar{v}_1 \nabla T_1 + Pe \frac{\partial \tau_1}{\partial x} = \frac{\text{div}(\bar{\kappa}_1 \nabla \tau_1)}{\bar{\rho}_1 \bar{c}_1}, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial Fo} = \frac{\text{div}(\bar{\kappa}_2 \nabla \tau_2)}{\bar{\rho}_2 \bar{c}_2},$$

з тією різницею, що система (4.3.26) містить член з множником Pe , що відображає внесок конвективної складової незбуреного руху розплаву в

каналі. Граничні умови аналогічні (4.1.13)-(4.1.15). Розшуковуючи рішення отриманої крайової задачі (4.1.11), запишемо для амплітуд збурень:

$$u_1 = \frac{1}{\bar{\rho}_1(\lambda - ikPe)} \frac{dp_1}{dr}, \quad v_1 = \frac{mp_1}{\bar{\rho}_1(\omega - kPe)r}, \quad w_1 = \frac{kp_1}{\bar{\rho}_1(\omega - kPe)},$$

$$\frac{du_1}{dr} + \frac{u_1}{r} + i\left(m\frac{v_1}{r} + kw_1\right) = 0, \quad \frac{d^2\theta_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_2}{dr} - \left(\delta_2^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)\theta_2 = 0, \quad (4.3.27)$$

$$\frac{d^2\theta_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_1}{dr} - \left(\delta_1^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)\theta_1 = \frac{1}{\bar{a}_1^2} \left[\frac{\partial p_1}{\partial r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + p_1 \left(\frac{m/r^2}{\omega - mPe} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} + \frac{k}{\omega - kPe} \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) \right],$$

де $\delta_1^2 = k^2 - (\lambda + ikPe)/\bar{a}_1^2$, $\delta_2^2 = k^2 - \lambda/\bar{a}_2^2$. Тут прийнято $\bar{\kappa}_* = const$, тому коефіцієнти температуропровідності винесені з-під диференціалів у правих частинах рівнянь енергії. Для амплітуд збурень швидкості та тиску збережені ті ж позначення, що й для самих збурень.

Як видно з (4.3.26), при високих швидкостях руху розплаву ($Pe \gg 1$), коли конвективний теплоперенос переважає молекулярний, амплітуди збурених швидкостей малі, крім хвиль з $\omega = kPe$. В останньому випадку може мати місце сильна нестійкість системи. Ці хвилі за будь-яких Pe є резонансними і призводять до значних коливань температури розплаву в аналізованій області. Розподіл температури у твердій фазі не залежить від Pe , але залежить від хвильових чисел k, m та частоти ω .

Слід, однак, відзначити, що оскільки прийнято припущення про незалежність амплітуд збурень від φ, x, Fo , то в передостанньому рівнянні системи (4.3.26) для коректності математичної моделі необхідно вважати $\partial T_1 / \partial r$, $\partial T_1 / \partial x$, $\partial T_1 / \partial \varphi$ функціями тільки r (наближено можна розглянути і випадок, коли є залежність і від інших змінних, але значно слабкіша).

Зазначені особливості показують, що регулюванням швидкості руху розплаву можна домогтися виконання умови $\omega = kPe$, при якій збурення з параметрами ω, k будуть для системи руйнуючими. Слід лише пам'ятати, що у межах аналізованої моделі таке значення числа Пекле Pe не завжди досягне. Це можна використовувати для руйнування настилів у каналах металургійних та інших пристроїв [322] та запобігання заростання їх каналів. А для того, щоб процес проходив ефективніше, слід коливання заданого вигляду збуджувати зовнішніми впливами (наприклад, вносити збурення витрати розплаву на вході в канал одним із відомих способів [201, 202] або іншими впливами).

Граничні умови для (4.3.27) з урахуванням (4.3.25), (4.1.13)-(4.1.15):

$$r=0, \quad u_1 = \theta_1 = 0; \quad (4.3.28)$$

$$r = 1, \quad u_i = (\rho_{21} - 1)\lambda\zeta, \quad \theta_j = -\zeta(\partial T_j / \partial r)_{r=1},$$

$$\bar{\kappa}_2 \frac{d\theta_2}{dr} - \frac{d\theta_1}{dr} = \zeta \frac{Pe}{\bar{a}_1^2} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{r=1} - \lambda R_i \zeta; \quad (4.3.29)$$

$$r = s, \quad d\theta_2 / dr = -Bi_{k,m} \theta_2. \quad (4.3.30)$$

Використовуючи (4.3.30) та враховуючи вираз

$$\sin(\alpha_{2nk}s) = \frac{J_0(\alpha_{2nk})Y_0(\alpha_{2nk}s) - J_0(\alpha_{2nk}s)Y_0(\alpha_{2nk})}{J_1(\alpha_{2nk})Y_0(\alpha_{2nk}) - J_0(\alpha_{2nk})Y_1(\alpha_{2nk})},$$

який доводиться при використанні асимптотичних розкладів функцій Бесселя в ряди Тейлора [414], для $(\partial T_j / \partial r)_{r=1}$ запишемо:

$$(\partial T_1 / \partial r)_{r=1} = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^4 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1k} J_1(\alpha_{1k}) d_{jk} \exp(q_{3-j} \alpha_{2n} x), \quad (4.3.31)$$

$$(\partial T_2 / \partial r)_{r=1} = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2nk} b_{jnk}}{\sin(\alpha_{2nk}s)} \exp[(-1)^{j+1} \alpha_{jnk} x]$$

Визначення власних значень задачі

Величина R_i , як зазначалося в попередньому розділі, для кристалічних тіл велика, внаслідок чого є можливість визначити власні значення λ з останньої граничної умови (4.3.29), вирішуючи крайову задачу (4.3.27)-(4.3.30) з урахуванням (4.3.31) за допомогою асимптотичних розкладів шуканих функцій по λ , вже в нульовому наближенні. З попередньої граничної умови цього не можна зробити через малі величини ζ і $1 - \rho_{21}$ (для сталі, наприклад, $1 - \rho_{21} = -0,1$).

З урахуванням викладеного, з рівнянь (4.3.27), вважаючи $\theta_j = \theta_j^0 + \lambda \theta_j^1 + \lambda^2 \theta_j^2 + \dots$, $\bar{v}_j = \bar{v}_j^0 + \lambda \bar{v}_j^1 + \lambda^2 \bar{v}_j^2 + \dots$, $p_1 = p_1^0 + \lambda p_1^1 + \lambda^2 p_1^2 + \dots$, отримаємо

$$u_1^0 = -\frac{i}{k} \frac{dw_1^0}{dr}, \quad \frac{d^2 \theta_2^0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_2^0}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \theta_2^0 = 0,$$

$$\frac{d^2 w_1^0}{dr^2} + \frac{u_1}{r} \frac{dw_1^0}{dr} - \left[\frac{m^2 (\omega - kPe)}{(\omega - mPe)r^2} + k^2 \right] w_1^0 = 0, \quad (4.3.32)$$

$$\frac{d^2 \theta_1^0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_1^0}{dr} - \left(\delta_{10}^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \theta_1^0 = \frac{1}{\bar{a}_1^2} \left(u_1^0 \frac{\partial T_1}{\partial r} + w_1^0 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right),$$

звідки видно, що і в нульовому наближенні рішення виду (4.1.11) існують тільки у випадку, коли градієнти температури розплаву в рівноважному стані по r і x є функціями тільки r . Тут $\delta_{10}^2 = k^2 - ikPe / \bar{a}_1^2$.

Загальне рішення системи диференціальних рівнянь (4.3.32):

$$u_1^0 = -i \left[c_1 I_q'(kr) + c_2 K_q'(kr) \right], \quad w_1^0 = c_1 I_q(kr) + c_2 K_q(kr),$$

$$\theta_2^0 = c_3 I_m(kr) + c_6 K_m(kr), \quad (4.3.33)$$

$$\theta^0 = I_m(\delta_{10}r) \left[c_3 - \int_0^r B_1^0(r) K_m(\delta_{10}r) dr \right] + K_m(\delta_{10}r) \left[c_4 + \int_0^r B_1^0(r) I_m(\delta_{10}r) dr \right],$$

де штрихом позначена похідна за незалежною змінною у дужках, c_j ($j = \overline{1,6}$) - постійні, що визначаються з граничних умов. Тут:

$$B_1^0 = \frac{1}{\bar{a}_1^2 \delta_{10} A_1^0} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^4 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_{2n} q_{3-j} J_0(\alpha_{1k}r) \left[c_1 I_q(kr) + c_2 K_q(kr) \right] + \right.$$

$$\left. -i \alpha_{1k} J_0'(\alpha_{1k}r) \left[c_1 I_q'(kr) + c_2 K_q'(kr) \right] \right\} d_{jk} \exp(q_{3-j} \alpha_{2n} x), \quad (4.3.34)$$

$$q = m \sqrt{\frac{\omega - kPe}{\omega - mPe}}, \quad A_1^0 = I_m(\delta_{10}r) K_m'(\delta_{10}r) - I_m'(\delta_{10}r) K_m(\delta_{10}r),$$

З отриманих виразів видно, що у резонансному випадку $\omega = kPe$ буде $q=0$, а при $k=m$ буде $q=m$. При $\omega = mPe$, в силу властивостей I_q [414], виходить $w_1^0 \approx 0$ при всіх значеннях kr , за винятком $kr = \infty$.

Оскільки, в силу вищевикладеного, $B_1^0(r)$ може бути лише слабо змінною функцією x , то наприклад при $Pe \gg 1$ слід залишити в (4.3.34) лише два значення величини α_2 : $\alpha_2 = \pm 0,5 \left(Pe - \sqrt{Pe^2 + 4\alpha_1^2} \right)$; прирівнявши нулю коефіцієнти при двох інших значеннях величини ($T_{1v}^0 = 0$ у виразі (4.3.11)).

Граничні умови (4.3.28)-(4.3.30) у нульовому наближенні мають вигляд

$$r=0, \quad u_1^0 = \theta_1^0 = 0; \quad (4.3.35)$$

$$r=1, \quad u_1^0 = 0, \quad \theta_2^0 = \chi_2^0 \zeta = \zeta \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^4 \frac{\alpha_{2nk} b_{jnk}}{\sin(\alpha_{2nk} s)} \exp \left[(-1)^{j+1} \alpha_{2nk} x \right],$$

$$\theta_1^0 = \chi_1^0 \zeta = -\zeta \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^4 \alpha_{1k} d_{jk} J_1(\alpha_{1k}) \exp(q_{3-j} \alpha_{2n} x),$$

$$\bar{\kappa}_2 \frac{d\theta_2^0}{dr} - \frac{d\theta_1^0}{dr} = \zeta \frac{Pe}{\bar{a}_1^2} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{r=1} - \lambda R_\lambda \zeta; \quad (4.3.36)$$

$$r=s, \quad d\theta_2^0 / dr = -Bi_{k,m} \theta_2^0. \quad (4.3.37)$$

Аналізуючи рівняння (4.3.27), (4.3.33) та граничні умови (4.3.28), (4.3.35) необхідно зазначити, що фізично обґрунтована умова $u_1(0)=0$ не тягне за собою рівності нулю на осі симетрії каналу двох інших

складових швидкості. На цю обставину слід звернути увагу, щоб уникнути помилок при постановці таких крайових задач. Фізична сутність даного явища полягає в тому, що на осі з умови симетрії відсутня лише складова швидкості, нормальна до осі, тоді як дві інші (і тиск) можуть бути відмінними від нуля: збурення u_1 взаємно компенсуються, а збурення тиску при цьому може виникнути саме внаслідок наявності u_1 при підході до осі симетрично з різних боків.

Підставляючи рішення (4.3.33) до граничних умов (4.3.35), (4.3.36), знаходимо, що $u_1^0 \equiv 0$, $w_1^0 \equiv 0$, тобто у нульовому наближенні збурення швидкості розплаву відсутні, а для інших констант маємо вирази:

$$c_3 = \frac{\chi_1^0 \zeta}{I_m(\delta_{10})}, \quad c_5 = -\frac{K'_m(ks)k + Bi_{k,m}K_m(ks)}{A_4k + A_5Bi_{k,m}} \chi_2^0 \zeta,$$

$$c_4 = 0, \quad c_6 = -\frac{I'_m(ks)k + Bi_{k,m}I_m(ks)}{A_4k + A_5Bi_{k,m}} \chi_2^0 \zeta, \quad (4.3.38)$$

де A_3, A_4 описуються формулами (4.2.18).

При $m=0$ (осесиметричні збурення) виходить $\theta_1^0 \equiv 0$, що суперечить граничній умові (4.3.36). Це призводить до необхідності більш детального аналізу граничної умови (4.3.35) для θ_1 . Розглянемо цю граничну умову, зважаючи на ситуації, показані на Рис. 4.3.2. Для симетричних мод, мабуть, більш фізично обґрунтованою є умова відсутності збуреного потоку теплоти на осі каналу, особливо для осесиметричних збурень ($m=0$), оскільки взаємно протилежні, рівні за величиною, потоки на осі взаємно знищуються.

Для всіх збурень з $m \neq 0$ обидві граничні умови є недостатньо фізично обґрунтованими, тому приблизно можна вважати умову відсутності збурень на осі внаслідок їх малості та віддаленості осі від межі фазового переходу, на якій також збурення малі:

$$r = 0, \quad m = 0, \quad d\theta_1 / dr = 0. \quad (4.3.39)$$

Враховуючи асимптотичні оцінки модифікованих функцій Бесселя та Ганкеля при аргументах, що прямують до нуля [414], отримаємо $I'_m(0)=0$, $K'_0(0)=\infty$, внаслідок чого з урахуванням (4.3.32) маємо рішення в тому ж вигляді, але збурення температури симетричних та антисиметричних мод на осі, взагалі кажучи, не дорівнюють нулю: $\theta_1^0(0) = \chi_1^0 \xi / I_0(\delta_{10})$. Звідси випливає, що збурення температури на межі

фазового переходу по відношенню до відповідного значення на осі каналу становить $\Delta_\theta = I_0(\delta_{10})$. При $Pe \ll k$, виходить $\delta_{10} \approx k$, тому маємо:

$$k \ll 1, \quad \Delta_\theta \approx 1; \quad k \gg 1, \quad \Delta_\theta \approx \sum_{n=0}^{\infty} (k/2)^{2n} / (n!)^2,$$

звідки видно, що у разі довгохвильових збурень при повільній течії розплаву коливання температури на межі фазового переходу і на осі приблизно рівні, тоді як короткохвильові збурення швидко загасають за степеневим законом у міру віддалення від фронту кристалізації.

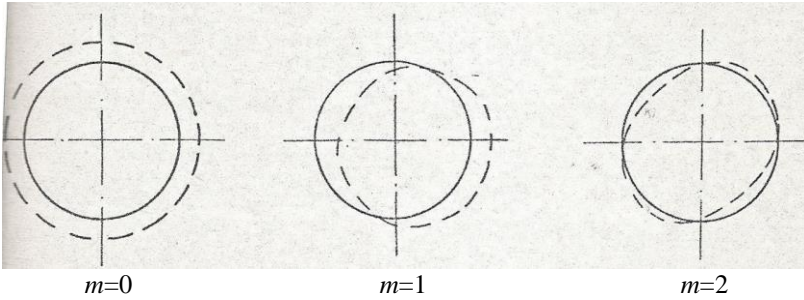


Рис. 4.3.2 Симетричні та антисиметричні моди збурень за круговою координатою φ

При $Pe \gg k$ можна приблизно покласти

$$\delta_{10} = \sqrt{kPe} \left[\cos(\pi/4 + \pi l) - i \sin(\pi/4 + \pi l) \right], \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

звідки видно, що відмінність хвиль на межі та осі сильніша і може бути значною навіть при $k \ll 1$, якщо $kPe \gg 1$.

Таким чином, при незначній вимушеній конвекції у разі довгохвильових збурень меж фазового переходу коливання температури у всій області можуть бути одного порядку, а короткохвильові збурення меж завжди загасають поблизу межі (чим більше Pe , тим сильніше).

Підставляючи (4.3.33) у другу умову (4.3.36), з урахуванням (4.3.38), (4.3.3), маємо власні значення в нульовому наближенні:

$$\lambda = \frac{1}{R_\lambda} \left\{ \left[\left(1 - \frac{iPe}{k\bar{a}_1^2} \right)^{1/2} \frac{I'_m(\delta_{10})}{I_m(\delta_{10})} + \frac{A_1 Bi_{k,m} + A_2 k}{A_3 Bi_{k,m} + A_4 k} \right] k \chi_1^0 + \frac{Pe}{\bar{a}_1^2} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{r=1} \right\}, \quad (4.3.40)$$

де $\chi_1^0 = -(\partial T_1 / \partial x)_{r=1} > 0$.

Порівнюючи отриманий вираз (4.3.40) з аналогічним виразом (4.2.19), отриманим раніше для випадку нерухомого розплаву, можна

помітити їх схожість: загальний множник k/R_λ і член у дужках, що містить модифіковане число Біо $Bi_{k,m}$. Відмінність полягає у наявності залежності власних чисел (4.3.40) від градієнта температури системи межі фазового переходу. Крім того, перший член у дужках формули (4.3.40) свідчить про можливість нестійкості системи (негативність дійсної частини λ при деяких k і Pe).

Очевидно, для будь-яких Pe існує $k \gg Pe$, при якому справедлива наближена рівність $\delta_{10} = k$ і, отже, $re\lambda > 0$ (стійкість системи). Аналогічно: для будь-яких k існує таке $Pe \ll k$, що відповідає умові стійкості системи. Фізичний зміст даних тверджень полягає в тому, що за будь-яких Pe (будь-якої швидкості руху розплаву, за якої справедлива дана математична модель), починаючи з деякого досить великого k , всі збурення згасають. Або: збурення будь-якої довжини хвилі згасають при зниженні швидкості розплаву нижче деякого значення (це узгоджується з результатами, отриманими в розділах 4.1, 4.2).

Перше наближення

Як показано вище, у нульовому наближенні вплив збурень швидкості не проявляється, тому розглянемо перше наближення. Крайова задача (4.3.27)-(4.3.30), (4.3.39) у першому наближенні по λ має вигляд:

$$u_1^I = -\frac{i}{k} \frac{dw_1^I}{dr}, \quad \frac{d^2 w_1^I}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_1^I}{dr} - \left[\frac{m^2 (\omega - kPe)}{(\omega - mPe)r^2} + k^2 \right] w_1^I = 0,$$

$$\frac{d^2 \theta_2^I}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_2^I}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \theta_2^I = -\frac{\theta_2^0}{a_2^2}, \quad (4.3.41)$$

$$\frac{d^2 \theta_1^I}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_1^I}{dr} - \left(\delta_{10}^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \theta_1^I = \frac{1}{a_1^2} \left(u_1^I \frac{\partial T_1}{\partial r} + w_1^I \frac{\partial T_1}{\partial x} - \theta_1^0 \right);$$

$$r=0, \quad w_1^I = \theta_1^I = 0 \quad (m \neq 0), \quad u_1^I = \frac{d\theta_1^I}{dr} = 0 \quad (m=0); \quad (4.3.42)$$

$$r=1, \quad \theta_1^I = 0, \quad u_1^I = (\rho_{21} - 1)\zeta, \quad (4.3.43)$$

$$\lambda \left(\bar{\kappa}_2 \frac{d\theta_2^I}{dr} - \frac{d\theta_1^I}{dr} + R_\lambda \zeta \right) = \frac{d\theta_1^0}{dr} - \bar{\kappa}_2 \frac{d\theta_2^0}{dr} + \frac{Pe}{a_1^2} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{r=1} \zeta;$$

$$r=s, \quad d\theta_2^I / dr = -Bi_{k,m} \theta_2^I. \quad (4.3.44)$$

Рішення крайової задачі (4.3.41)-(4.3.44) має вигляд:

$$\begin{aligned}
 \theta_1^1 &= I_m(\delta_{10}r) \left\{ \int_0^r B_1^1(r) \left[K_m(\delta_{10}r) - \frac{I_m(\delta_{10}r)}{I_m(\delta_{10})} K_m(\delta_{10}) \right] dr - \int_0^r B_1^1(r) K_m(\delta_{10}r) dr \right\} + \\
 &+ K_m(\delta_{10}r) \int_0^r B_1^1(r) I_m(\delta_{10}r) dr, \quad u_1^1 = (\rho_{21} - 1) \frac{I_q'(kr)}{I_q'(k)} \zeta, \quad w_1^1 = i(\rho_{21} - 1) \frac{I_q(kr)}{I_q(k)} \zeta, \\
 \theta_2^1 &= \frac{K_m(k) I_m(kr) - I_m(k) K_m(kr)}{A_4 k + A_3 B_{i_{k,m}}} \left\{ B_{i_{k,m}} \left[I_m(ks) \int_1^s B_2^1(r) K_m(kr) dr + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - K_m(ks) \int_1^s B_2^1(r) I_m(kr) dr \right] + \right. \\
 &\quad \left. + k \left[I_m'(ks) \int_1^s B_2^1(r) K_m(kr) dr - K_m'(ks) \int_1^s B_2^1(r) I_m(kr) dr \right] \right\} + \\
 &\quad + K_m(kr) \int_1^s B_2^1(r) I_m(kr) dr - I_m(kr) \int_1^s B_2^1(r) K_m(kr) dr,
 \end{aligned} \tag{4.3.45}$$

де функції $B_j^1(r)$ ($j=1,2$) наступні:

$$\begin{aligned}
 B_1^1(r) &= \frac{1}{a_1^2 \delta_{10} A_1^0} \left(u_1^1 \frac{\partial T_1}{\partial r} + w_1^1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \theta_1^0 \right), \quad B_2^1(r) = \frac{-\theta_2^0}{a_2^2 k A_2^0}, \\
 A_2^0 &= K_m'(kr) I_m(kr) - K_m(kr) I_m'(kr).
 \end{aligned} \tag{4.3.46}$$

Тут $A_1^0(r)$ виражається за формулою (4.3.34). Очевидно, що при $\delta_{10} = k$ виходить $A_1^0 = A_2^0$.

Скористаємося властивостями функцій I_m, K_m [414]:

$$\begin{aligned}
 I_m'(z) &= 0,5 [I_{m-1}(z) + I_{m+1}(z)], \quad I_m(z) K_{m+1}(z) + I_{m+1}(z) K_m(z) = 1/z, \\
 K_m'(z) &= -(1/2) [K_{m+1}(z) + K_{m-1}(z)],
 \end{aligned}$$

за допомогою яких нескладно показати, що $A_1^0 = -1/(\delta_{10}r)$, $A_2^0 = -1/(kr)$. Тоді, враховуючи вищевикладене, (4.3.43), (4.3.45), (4.3.12), (4.3.3) та наступні інтеграли від спеціальних функцій [414]:

$$\begin{aligned}
 \int_0^r I_m^2(kr) r dr &= \frac{1}{2} \left\{ \left[r^2 + \frac{m^2}{k^2} \right] I_m^2(kr) - r^2 [I_m'(kr)]^2 \right\}, \\
 \int_0^r K_m^2(kr) r dr &= \frac{1}{2} \left\{ r^2 [K_m'(kr)]^2 - \left[r^2 + \frac{m^2}{k^2} \right] K_m^2(kr) \right\}, \\
 \int_r^\infty K_m(kr) I_m(kr) r dr &= \frac{1}{2} \left\{ r^2 \left[\left[r^2 + \frac{m^2}{k^2} \right] I_m(kr) K_m(kr) - I_m'(kr) K_m'(kr) \right] - \frac{m}{k^2} \right\},
 \end{aligned}$$

власні значення задачі з (4.3.43) отримуємо у вигляді

$$\lambda = \frac{k\chi_1^0}{R_\lambda + \beta_{k,m}^1} \left[\left(1 - \frac{iPe}{k\bar{a}_1^2}\right)^{1/2} \frac{I'_m(\delta_{10})}{I_m(\delta_{10})} + \frac{A_1 Bi_{k,m} + A_2 k}{A_3 Bi_{k,m} + A_4 k} - \frac{2}{\bar{a}_1^2 k} \right], \quad (4.3.47)$$

де $\beta_{k,m}^1$ - добавка за рахунок врахування членів першого порядку по λ ,

$$\beta_{k,m}^1 = \chi_1^0 \frac{D_1 Bi_{k,m}^2 + D_2 Bi_{k,m} + D_3}{\bar{a}_1^2 (A_3 Bi_{k,m} + A_4 k)^2} + \frac{\Delta_1 (1 - \rho_{21}) I_m(\delta_{10}) \left(\frac{Pe}{2} G_1 + iG_2 \right) + \chi_1^0 G_3 I'_q(k)}{\bar{a}_1^2 I_m^2(\delta_{10}) I'_q(k)}. \quad (4.3.48)$$

$\chi_1^0 = -\Delta_1 \cdot Pe/2$. Тут прийнято такі умовні позначення:

$$G_1 = \int_0^1 I'_q(kr) I_m(\delta_{10} r) r^2 dr, \quad G_2 = \int_0^1 I_q(kr) I_m(\delta_{10} r) r dr, \quad G_3 = \int_0^1 I_m^2(\delta_{10} r) r dr,$$

$$D_1 = \frac{1}{2} \left[A_1 \bar{A}_1(s, 1) - s \bar{A}_1(s, s) + A_3 \bar{A}_3(s, k) \frac{m^2}{k^2} \right], \quad (4.3.49)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \left(A_4 k - \frac{1}{s} \right) \bar{A}_4 - s \bar{A}_2 + k (\bar{A}_5 - \bar{A}_6) + (\bar{A}_7 - \bar{A}_8) \frac{m^2}{k},$$

$$D_3 = \frac{1}{2} \left\{ k^2 \left[A_1 \bar{A}_1(1, s) + A_2 \bar{A}_1 \right] - ks \bar{A}_1(s, s) + m^2 \left[\bar{A}_7 \frac{I'_m(ks)}{I_m(ks)} - \bar{A}_8 \frac{K'_m(ks)}{K_m(ks)} \right] \right\},$$

де

$$\bar{A}_1(a, b) = K_m(ka) I'_m(kb) + K'_m(kb) I_m(ka),$$

$$\bar{A}_2 = I_m(ks) K_m(ks) + I'_m(ks) K'_m(ks), \quad \bar{A}_3 = I_m(ks) I'_m(ks) \left[K_m^2(k) - K_m'^2(k) \right],$$

$\bar{A}_3(a, b)$ виходить із $\bar{A}_1(a, b)$ формальним виключенням знаків диференціювання, \bar{A}_4 виходить із \bar{A}_2 опусканням параметра s (беремо $s=1$) і зміною знака перед першим членом, \bar{A}_6 виходить із \bar{A}_3 формальною взаємною заміною символів I_m і K_m , \bar{A}_7 виходить також із \bar{A}_3 формальною заміною символа $K'_m(k)$ на $K_m(ks)$, а \bar{A}_8 є результатом взаємної заміни символів I_m , K_m в \bar{A}_7 .

Як видно з (4.3.48), (4.3.49), внаслідок залежності q від ω вираз (4.3.48) при $m \neq 0$ може залежати також від ω і тоді (4.3.47) є трансцендентним рівнянням для визначення λ . Така залежність несуттєва при $Pe \gg \omega$, $k \gg \omega/Pe$ ($q \approx \sqrt{km}$) і $Pe \ll \omega$, $k \ll \omega/Pe$ ($q \approx m$); проте вона дуже суттєва при $\omega \rightarrow mPe$ ($k \neq m$), коли $q \rightarrow \infty$. В останньому випадку слід лише врахувати, що чим більше q , тим повільніше зростає функція $I_q(kr)$ і тому вона може бути близька до нуля внаслідок малого аргументу ($r \in [0, 1]$, а $k \gg 1$, як показано раніше, характеризують швидко загасаючі

збурення). Всі ці зауваження стосуються лише випадку $\Delta_1 \neq 0$ (залежність температури системи від x у стані рівноваги), при $\Delta_1 = 0$ члени з I_q відсутні.

Для оцінки величини $\beta_{k,m}^1$ розглянемо граничний випадок раніше виявлених найбільш нестійких довгохвильових осесиметричних збурень, поклавши $\Delta_1 = 0$. Тоді з (4.3.48):

$$\beta_{k,0}^1 = \frac{\chi_1^0}{2} \left\{ \frac{1}{\bar{a}_1^2} \left[1 + \frac{kPe}{4\bar{a}_1^2} - i \frac{(kPe)^{3/2}}{16\bar{a}_1^2} \right] + \frac{(3/s - 1 - 2s)Bi_{k,m} \ln \frac{2}{\gamma ks} + 1 - 1/s^2}{\bar{a}_2^0 (Bi_{k,m} \ln s + 1/s)^2} \right\}, \quad (4.3.50)$$

де передбачається $Pe \gg k$ та використовуються розкладання функції $I_0(\delta_{10}) \approx ber(\sqrt{kPe}/\bar{a}_1) - i bei(\sqrt{kPe}/\bar{a}_1)$ з точністю до перших двох членів [414].

Тут ber, bei - функції Кельвіна нульового порядку. Вважаємо, що $kPe < \bar{a}_1^2$ і залишаємо лише перші члени розкладів функцій Кельвіна. Звідси видно, що $\beta_{k,0}^1$, в основному, не перевищує $0,5\chi_1^0/\bar{a}_1^2$, де $\bar{a}_1^2 \sim 1$. Перший член у фігурних дужках у формулі (4.3.50) завжди малий при $s-1 \ll 1$ за відсутності системи управління ($Bi_{k,m} \sim 1$), а у разі її наявності може набувати практично будь-яких значень.

Проведений аналіз виразу (4.3.50) показує, що при відсутності системи управління $\beta_{k,0}^1 \sim \chi_1^0$, а при її застосуванні може бути $\beta_{k,0}^1 \gg \chi_1^0$, і, отже, $\beta_{k,0}^1 \sim R_\lambda$. Для тонкого шару твердої плівки ($s \rightarrow 1$) практично завжди $\beta_{k,0}^1 \sim \chi_1^0$ (для $\beta_{k,0}^1 \sim R_\lambda$ необхідні дуже великі $Bi_{k,m}$, що фізично може бути нереально). Таким чином, за відсутності системи управління та у разі дуже тонкої плівки твердої фази $\beta_{k,0}^1 \sim \chi_1^0$, і якщо $\chi_1^0 \ll R_\lambda$, то можна вирішувати задачу в нульовому наближенні.

Умови стійкості та стабілізації фронту кристалізації

Для стійкості досліджуваної фізичної системи необхідно виконання умови $re\lambda > 0$, тому за всіх $\beta_{k,m}^1 > -R_\lambda$ умови стійкості (стабілізації) фронту кристалізації в нульовому і першому наближеннях збігаються, відрізняючись лише амплітудами власних значень (швидкістю наростання або згасання збурень). При $\beta_{k,m}^1 < -R_\lambda$ перше наближення дає

результат, протилежний одержаному у нульовому наближенні, тобто з точністю до навпаки ці умови збігаються і в цьому випадку. Умова стійкості фронту кристалізації має вигляд

$$re \left[e^{-i\alpha'} \frac{I'_m(\delta_{10})}{I_m(\delta_{10})} \right] > \frac{1}{(1+\beta'^2)^{1/4}} \left(\frac{2}{k\bar{a}_1^2} - \frac{A_1 Bi_{k,m} + A_2 k}{A_3 Bi_{k,m} + A_4 k} \right), \quad (4.3.51)$$

де $\alpha' = 0,5 \arctg \beta'$, $\beta' = Pe / (k\bar{a}_1^2)$.

При $Pe \gg k$ і $Pe \ll k$ вираз (4.3.51) значно спрощується. У першому випадку $\beta' \gg 1$, внаслідок чого $\alpha' \approx \pi/4$. Це дає:

$$\begin{aligned} ber'_m(k\sqrt{\beta'}) bei_m(k\sqrt{\beta'}) - ber_m(k\sqrt{\beta'}) bei'_m(k\sqrt{\beta'}) > \left\{ \sqrt{2} [(A_1 Bi_{k,m} + A_2 k) + \right. \\ \left. - \frac{2}{k\bar{a}_1^2} (A_3 Bi_{k,m} + A_4 k)] \frac{ber_m^2(k\sqrt{\beta'}) + bei_m^2(k\sqrt{\beta'})}{\sqrt{\beta'} (A_3 Bi_{k,m} + A_4 k)} + [ber'_m(k\sqrt{\beta'})]^2 + [bei'_m(k\sqrt{\beta'})]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.52)$$

У правій частині (4.3.52) стоїть негативна величина, у лівій - взагалі кажучи, знакозмінна (залежить від k, β'). Очевидно, що система завжди керована при $A_1 Bi_{k,m} + A_2 k \neq A_3 Bi_{k,m} + A_4 k$.

При $x \gg 1$, $x \gg m^2$ справедливі наступні представлення функцій Кельвіна [414], записані з точністю до членів першого порядку:

$$ber(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{x\sqrt{x}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right), \quad bei(x) = ber(x) \cdot tg\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right),$$

тому можна запропонувати таку умову стійкості, справедливу при $k\sqrt{\beta'} \gg 1$, $k\sqrt{\beta'} \gg m^2$:

$$\frac{A_1 Bi_{k,m} + A_2 k}{A_3 Bi_{k,m} + A_4 k} > \frac{2}{k\bar{a}_1^2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \quad (4.3.53)$$

що завжди виконується без системи керування при $k > 4 / [(\sqrt{2}-1)/\bar{a}_1^2]$. В інших випадках умові завжди можна задовольнити вибором $Bi_{k,m}$, якщо це необхідно (стабілізація у разі нестійкості). Наприклад, при $m=0$, $k \ll 1$ умова (4.3.53) дає:

$$\frac{2s \cdot Bi_{k,m}}{s \ln s \cdot Bi_{k,m} + 1} > \frac{4}{\bar{a}_1^2} + (1-\sqrt{2})k, \quad (4.3.54)$$

звідки видно, що зі збільшенням Pe та зменшенням k нестійкість зростає, а зі зменшенням товщини шару твердої фази підвищується стійкість (щодо короткохвильових обурень).

Якщо $k \ll 1/\sqrt{\beta'}$, то при $m=0$, приблизно одержуємо $ber(x)=1$, $bei(x)=x^2/4$, то внаслідок чого з (4.3.52) маємо

$$\frac{A_1 Bi_{k,m} + A_2 k}{A_3 Bi_{k,m} + A_4 k} > \frac{2}{k \bar{a}_1^2}, \quad (4.3.55)$$

що, очевидно, також задовольняється за досить великих k , а при $k \ll 1$ звідси маємо

$$\frac{s \cdot Bi_{k,m}}{s \ln s \cdot Bi_{k,m} + 1} > \frac{2}{\bar{a}_1^2}. \quad (4.3.56)$$

Таким чином, при $k \ll 1$ у разі $Pe \gg 1/k$ нестійкість вище, ніж у випадку $Pe \ll 1/k$: відповідні члени (4.3.54) і (4.3.56) відрізняються приблизно в два рази. У другому випадку, при $Pe \ll k$, умову стійкості (стабілізації - у разі нестійкості) (4.3.51) спростимо, враховуючи малі величини $\beta' \ll 1$ і вважаючи внаслідок цього $\alpha' \approx 0$. В результаті отримаємо

$$\frac{A_1 Bi_{k,m} + A_2 k}{A_3 Bi_{k,m} + A_4 k} + \frac{I'_m(k)}{I_m(k)} > \frac{2}{k \bar{a}_1^2}, \quad (4.3.57)$$

що, очевидно, завжди виконується для коротких хвиль ($k \gg 1$), при $k \sim 1$ нестійкість також не матиме місця, оскільки величина у правій частині (4.3.57) мала й умову стійкості легко задовольнити. Останнє підтверджує результати попередніх розділів, отримані при $Pe=0$.

Для виявлення областей нестійкості системи та необхідних значень $Bi_{k,m}$ у разі її стабілізації необхідно застосування ЕОМ, як показано нижче. У технологічних установках і процесах важливе значення має також швидкість загасання збурень, що залежить від $re\lambda$, оскільки повільне зменшення амплітуди збурень у часі може істотно знизити ефективність технологічного процесу, а іноді навіть зробити його неможливим. Відповідь на це питання дає дослідження величини λ як функції визначальних параметрів фізичної системи.

У разі необхідності придушення нестійкості фронту кристалізації або прискорення згасання його збурень за допомогою систем керування потоками теплоти [227] на основі отриманих виразів (4.3.47)-(4.3.52) та їх граничних випадків (4.3.53)-(4.3.57)) для кожної моди з хвильовими

числами k і m можна визначити необхідне значення модифікованого числа Біо $Bi_{k,m}$. Це дозволяє побудувати систему управління, що має для кожної моди свою обмотку управління з індивідуально підібраним коефіцієнтом посилення, що визначається знайденим значенням $Bi_{k,m}$ (просторове розрізнення за модами збурень).

4.4 Області нестійкості системи

У розглянутій модельній задачі показано основні особливості системи і виведено умови загасання (наростання) коливань межі фазового переходу та її стабілізації у разі потреби. Аналіз граничних випадків умови стійкості фронту кристалізації (4.3.51) показав, що можуть бути лише невеликі області нестійкості, які можна визначити за допомогою ЕОМ. Для цього в широкому діапазоні параметрів, що варіюються: $k=10^{-4} \div 10^2$, $m=1 \div 10$, $Pe=5 \div 5 \cdot 10^5$, $\bar{a}_1=1$, $s=1,001 \div 1,1$ був проведений обчислювальний експеримент. Нерівність (4.3.51) розв'язувалась чисельно щодо $Bi_{k,m}$, використовуючи асимптотичне розкладання модифікованої функції Бесселя для $|\delta_{10}| \gg 1$ [414]:

$$I_m(\delta_{10}) = \left[1 - \frac{4m^2 - 1^2}{1!8\delta_{10}} + \frac{(4m^2 - 1^2)(4m^2 - 3^2)}{2!(8\delta_{10})^2} - \dots \right] \frac{e^{\delta_{10}}}{\sqrt{2\pi\delta_{10}}},$$

що дозволяє спростити (4.2.28) та записати достатню умову нестійкості системи у вигляді

$$\frac{A_1 Bi_{k,m} + A_2 k}{A_3 Bi_{k,m} + A_4 k} + (1 + \beta'^2)^{1/4} \cos(\alpha' + \pi q) < \frac{2}{k}, \quad (4.4.1)$$

де $q=0; 1$. Очевидно, що використана вище умова $|\delta_{10}| \gg 1$ буде мати місце за будь-якого Pe , якщо $k \gg 1$, а при $Pe \gg 1$ вона виконується, якщо $k \sim 1$ і при $Pe \gg 1/k$, якщо $k \ll 1$. Зважаючи на те, що в'язкість тут у розрахунок не приймається, з умови відповідності математичної моделі реальному фізичному об'єкту можна покласти $Re \gg 1$ ($Re = w_0 R_0 / \nu$ число Рейнольдса для каналу).

Для олова, наприклад, при температурі, трохи вищій за температуру плавлення, параметри такі: $\nu = 2,8 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $a_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ м²/с, тому маємо: $Pr = 1,4$ і, отже, наближення (4.4.1) умови стійкості (4.3.51) справедливе практично у всьому діапазоні зміни параметрів. Однак для адекватності моделі реальному фізичному об'єкту необхідно контролювати ще число

Рейнольдса, оскільки прийнятий у моделі ламінарний режим течії справедливий лише до $Re=2,3 \cdot 10^3$ (у виняткових випадках – до $4 \cdot 10^4$) [402]. При $Re=2,3 \cdot 10^3$, маємо $woR_0 < 0,0560$, де wo вимірюються в м/с і R_0 – в м, відповідно. У практиці більшості розглядуваних нами пристроїв ця умова виконується.

Обчислювальний експеримент

Результати розрахунку критичних модифікованих чисел Біо $Bi_{k,m}$, що відповідають умові $re\lambda=0$, за викладеною методикою, наведено в Табл. 4.4.1-4.4.3:

s	1,001			1,01			1,10		
	1	5	10	1	5	10	1	5	10
01	-0,42	-0,39	-0,32	-0,41	-0,17	0,57	-0,31	1,70	6,56
02	0,24	0,26	0,34	0,24	0,48	1,21	0,29	2,18	6,83
03	0,74	0,76	0,84	0,74	0,97	1,70	0,71	2,52	7,03
04	1,16	1,18	1,26	1,15	1,38	2,11	1,03	2,79	7,18
05	1,53	1,56	1,63	1,51	1,74	2,46	1,29	3,00	7,30
06	1,87	1,89	1,97	1,83	2,06	2,78	1,52	3,19	7,42
07	2,18	2,20	2,28	2,13	2,36	3,08	1,72	3,35	7,51
08	2,46	2,49	2,56	2,40	2,63	3,35	1,89	3,50	7,59
09	2,73	2,76	2,83	2,65	2,88	3,60	2,05	3,63	7,67
10	2,99	3,01	3,09	2,89	3,12	3,84	2,19	3,75	7,74
20	5,01	5,07	5,14	4,79	5,02	5,72	3,16	4,57	8,25
30	6,61	6,64	6,71	6,19	6,43	7,11	3,73	5,08	8,57
40	7,93	7,96	8,0	7,33	7,57	8,25	4,12	5,44	8,80
50	9,09	9,12	9,2	8,31	8,56	9,24	4,40	5,73	8,99
60	10,1	10,2	10,2	9,17	9,44	10,1	4,63	5,96	9,14
70	11,1	11,1	11,2	9,94	10,2	10,9	4,81	6,15	9,27
80	12,0	12,0	12,1	10,5	11,0	11,6	4,96	6,32	9,38
90	12,8	12,9	12,9	11,3	11,6	12,3	5,09	6,47	9,49
0	13,6	13,7	13,7	11,9	12,3	12,9	5,20	6,60	9,58
0	19,9	20,0	20,1	16,3	17,0	17,7	5,95	7,50	10,2
0	24,7	24,8	24,9	19,4	20,4	21,0	6,55	8,11	10,7
0	28,7	28,9	29,0	21,6	23,0	23,6	7,14	8,64	11,1
0	32,2	32,5	32,5	23,9	25,3	25,6	7,74	9,17	11,6
0	35,4	35,7	35,7	25,7	27,2	27,8	8,38	9,72	12,0
0	38,3	38,6	38,7	27,3	28,9	29,5	9,04	10,3	12,5
0	41,0	41,3	41,4	28,7	30,5	31,0	9,73	10,9	13,1
0	43,5	43,9	44,0	30,1	31,9	32,5	10,5	11,5	13,6
0,0	45,9	46,3	46,4	31,3	33,3	33,8	11,2	12,2	14,2

Табл. 4.4.1 Критичні значення модифікованого числа Біо $Bi_{k,m}$ ($re\lambda=0$): зліва зверху вниз значення хвильового числа k від 0,01 до 0,1 з кроком 0,01, потім від 0,1 до 1 з кроком 0,1 і далі від 1 до 10 з кроком 1; зліва направо 3 групи значень по хвильовому числу $m=1,5,10$ для безрозмірних товщин шару твердої плівки 0,001; 0,01 і 0,1 ($s = 1,001; 1,01$ і $1,1$); $Pe = 5 \cdot 10^2$

Області $Bi_{k,m} < Bi_{k,m}^*$ відповідають нестійкі стани системи, звідки випливає, що у разі нестійкості систему можна стабілізувати вибором $Bi_{k,m}$. При цьому, оскільки лінійна теорія стійкості [151] дає лише достатні умови нестійкості, дійсні фізичні області нестійкості можуть бути ширші за розрахункові (стійка щодо малих збурень, система може виявитися нестійкою щодо скінчених і великих збурень).

s	1,001			1,01			1,10		
	I	5	10	I	5	10	I	5	10
1	2,99	3,01	3,09	2,89	3,12	3,84	2,19	3,75	7,74
2	5,04	5,07	5,14	4,79	5,01	5,72	3,17	4,57	8,25
3	6,61	6,63	6,71	6,19	6,42	7,11	3,76	5,07	8,55
4	7,93	7,95	8,03	7,35	7,57	8,25	4,18	5,43	8,80
5	9,09	9,11	9,19	8,34	8,55	9,23	4,50	5,71	8,98
6	10,1	10,2	10,2	9,21	9,43	10,1	4,76	5,94	9,12
7	11,1	11,1	11,2	10,0	10,2	10,9	4,97	6,12	9,25
8	12,0	12,0	12,1	10,7	10,9	11,6	5,15	6,29	9,36
9	12,8	12,8	12,9	11,4	11,6	12,3	5,31	6,43	9,45
10	13,6	13,6	13,7	12,0	12,2	12,9	5,45	6,55	9,53
11	19,9	20,0	20,0	16,7	17,0	17,6	6,26	7,32	10,1
12	24,7	24,8	24,8	19,9	20,3	20,9	6,64	7,72	10,4
13	28,7	28,8	28,8	22,4	22,6	23,4	6,85	7,99	10,5
14	32,2	32,3	32,3	24,4	25,0	25,6	6,98	8,18	10,7
15	35,3	35,4	35,5	26,1	26,8	27,4	7,06	8,33	10,8
16	38,1	38,3	38,4	27,5	28,4	29,0	7,11	8,45	10,9
17	40,8	41,0	41,0	28,8	29,9	30,4	7,14	8,56	11,0
18	43,2	43,4	43,5	29,9	31,2	31,7	7,17	8,64	11,0
19	45,5	45,8	45,9	30,9	32,3	32,9	7,18	8,72	11,1
20	63,4	64,3	64,3	37,3	40,6	41,1	7,37	9,23	11,5
21	76,5	78,0	78,1	41,1	45,7	46,1	7,70	9,60	11,8
22	87,2	89,2	89,3	43,9	49,4	49,8	8,13	9,96	12,1
23	96,4	98,9	99,0	46,1	52,2	52,7	8,61	10,3	12,4
24	104,5	108	108	47,9	54,6	55,0	9,14	10,8	12,8
25	112	115	115	49,5	56,6	57,0	9,72	11,2	13,2
26	118	122	122	50,9	58,3	58,7	10,3	11,7	13,7
27	125	129	129	52,1	59,8	60,2	11,0	12,3	14,2
28	130	135	135	53,3	61,2	61,6	11,7	12,9	14,8

Табл. 4.4.2 Критичні значення модифікованого числа Біо $Bi_{k,m}$, ($re\lambda=0$): зліва зверху вниз значення хвильового числа k від 0,01 до 0,1 з кроком 0,01, потім від 0,1 до 1 з кроком 0,1 і далі від 1 до 10 з кроком 1; зліва направо 3 групи значень по хвильовому числу $m=1,5,10$ для безрозмірних товщин шару твердої півки 0,001; 0,01 і 0,1 ($s = 1,001; 1,01$ і $1,1$); $Pe=5 \cdot 10^3$

Як видно з табл. 4.4.1-4.4.3, зростаючими у часі можуть бути лише довгохвильові коливання при $Pe=5 \cdot 10^2$ (тут $Pe=5 \cdot 10^2, 5 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^4$), причому, $Bi_{k,m}^* \leq 0,5$ і зменшується зі зростанням m і s . При $Pe=5 \cdot 10^3$

$Bi_{k,m}^* \leq 0$ лише при $k \sim 0,001$, тобто на межі області справедливості прийнятої математичної моделі.

Як показують розрахунки, умові стійкості системи: $Bi_{k,m} > Bi_{k,m}^*$ зазвичай легко задовольнити без системи управління. Значення $Bi_{k,m}^*$ різко зростають при зменшенні параметра s (зменшення товщини шару твердої фази веде до підвищення нестійкості фронту кристалізації) і збільшення числа Пекле Pe (збільшення швидкості руху розплаву в каналі призводить до посилення наростання збурень межі фазового переходу).

s \ m	1,001			1,01			1,10		
	1	5	10	1	5	10	1	5	10
11	13,6	13,6	13,7	12,0	12,2	12,9	5,47	6,55	9,53
12	19,9	19,9	20,0	16,8	17,0	17,6	6,33	7,32	10,1
13	24,7	24,8	24,8	20,1	20,3	20,9	6,78	7,72	10,3
14	28,7	28,8	28,8	22,7	22,8	23,4	7,07	7,98	10,5
15	32,2	32,3	32,3	24,8	25,0	25,6	7,28	8,17	10,7
16	35,4	35,4	35,5	26,6	26,8	27,4	7,44	8,32	10,8
17	38,3	38,3	38,4	28,2	28,4	29,0	7,56	8,43	10,9
18	40,9	41,0	41,0	29,7	30,0	30,4	7,67	8,53	11,0
19	43,4	43,4	43,5	30,9	31,2	31,7	7,75	8,61	11,0
20	45,7	45,8	45,9	32,1	32,3	32,9	7,82	8,68	11,1
21	48,2	48,3	48,3	33,3	33,5	34,1	7,89	8,75	11,1
22	50,5	50,6	50,6	34,5	34,7	35,3	7,95	8,81	11,2
23	52,8	52,9	52,9	35,7	35,9	36,5	8,01	8,87	11,2
24	55,0	55,1	55,1	36,9	37,1	37,7	8,07	8,93	11,3
25	57,2	57,3	57,3	38,1	38,3	38,9	8,13	9,00	11,3
26	59,4	59,5	59,5	39,3	39,5	40,1	8,19	9,07	11,4
27	61,6	61,7	61,7	40,5	40,7	41,3	8,25	9,14	11,4
28	63,8	63,9	63,9	41,7	41,9	42,5	8,31	9,21	11,5
29	66,0	66,1	66,1	42,9	43,1	43,7	8,37	9,28	11,5
30	68,2	68,3	68,3	44,1	44,3	44,9	8,43	9,35	11,6
31	70,4	70,5	70,5	45,3	45,5	46,1	8,49	9,42	11,6
32	72,6	72,7	72,7	46,5	46,7	47,3	8,55	9,49	11,7
33	74,8	74,9	74,9	47,7	47,9	48,5	8,61	9,56	11,7
34	77,0	77,1	77,1	48,9	49,1	49,7	8,67	9,63	11,8
35	79,2	79,3	79,3	50,1	50,3	50,9	8,73	9,70	11,8
36	81,4	81,5	81,5	51,3	51,5	52,1	8,79	9,77	11,9
37	83,6	83,7	83,7	52,5	52,7	53,3	8,85	9,84	11,9
38	85,8	85,9	85,9	53,7	53,9	54,5	8,91	9,91	12,0
39	88,0	88,1	88,1	54,9	55,1	55,7	8,97	9,98	12,0
40	90,2	90,3	90,3	56,1	56,3	56,9	9,03	10,05	12,1
41	92,4	92,5	92,5	57,3	57,5	58,1	9,09	10,12	12,1
42	94,6	94,7	94,7	58,5	58,7	59,3	9,15	10,19	12,2
43	96,8	96,9	96,9	59,7	59,9	60,5	9,21	10,26	12,2
44	99,0	99,1	99,1	60,9	61,1	61,7	9,27	10,33	12,3
45	101,2	101,3	101,3	62,1	62,3	62,9	9,33	10,40	12,3
46	103,4	103,5	103,5	63,3	63,5	64,1	9,39	10,47	12,4
47	105,6	105,7	105,7	64,5	64,7	65,3	9,45	10,54	12,4
48	107,8	107,9	107,9	65,7	65,9	66,5	9,51	10,61	12,5
49	110,0	110,1	110,1	66,9	67,1	67,7	9,57	10,68	12,5
50	112,2	112,3	112,3	68,1	68,3	68,9	9,63	10,75	12,6
51	114,4	114,5	114,5	69,3	69,5	70,1	9,69	10,82	12,6
52	116,6	116,7	116,7	70,5	70,7	71,3	9,75	10,89	12,7
53	118,8	118,9	118,9	71,7	71,9	72,5	9,81	10,96	12,7
54	121,0	121,1	121,1	72,9	73,1	73,7	9,87	11,03	12,8
55	123,2	123,3	123,3	74,1	74,3	74,9	9,93	11,10	12,8
56	125,4	125,5	125,5	75,3	75,5	76,1	9,99	11,17	12,9
57	127,6	127,7	127,7	76,5	76,7	77,3	10,05	11,24	12,9
58	129,8	129,9	129,9	77,7	77,9	78,5	10,11	11,31	13,0
59	132,0	132,1	132,1	78,9	79,1	79,7	10,17	11,38	13,0
60	134,2	134,3	134,3	80,1	80,3	80,9	10,23	11,45	13,1
61	136,4	136,5	136,5	81,3	81,5	82,1	10,29	11,52	13,1
62	138,6	138,7	138,7	82,5	82,7	83,3	10,35	11,59	13,2
63	140,8	140,9	140,9	83,7	83,9	84,5	10,41	11,66	13,2
64	143,0	143,1	143,1	84,9	85,1	85,7	10,47	11,73	13,3
65	145,2	145,3	145,3	86,1	86,3	86,9	10,53	11,80	13,3
66	147,4	147,5	147,5	87,3	87,5	88,1	10,59	11,87	13,4
67	149,6	149,7	149,7	88,5	88,7	89,3	10,65	11,94	13,4
68	151,8	151,9	151,9	89,7	89,9	90,5	10,71	12,01	13,5
69	154,0	154,1	154,1	90,9	91,1	91,7	10,77	12,08	13,5
70	156,2	156,3	156,3	92,1	92,3	92,9	10,83	12,15	13,6
71	158,4	158,5	158,5	93,3	93,5	93,9	10,89	12,22	13,6
72	160,6	160,7	160,7	94,5	94,7	95,3	10,95	12,29	13,7
73	162,8	162,9	162,9	95,7	95,9	96,5	11,01	12,36	13,7
74	165,0	165,1	165,1	96,9	97,1	97,7	11,07	12,43	13,8
75	167,2	167,3	167,3	98,1	98,3	98,9	11,13	12,50	13,8
76	169,4	169,5	169,5	99,3	99,5	100,1	11,19	12,57	13,9
77	171,6	171,7	171,7	100,5	100,7	101,3	11,25	12,64	13,9
78	173,8	173,9	173,9	101,7	101,9	102,5	11,31	12,71	14,0
79	176,0	176,1	176,1	102,9	103,1	103,7	11,37	12,78	14,0
80	178,2	178,3	178,3	104,1	104,3	104,9	11,43	12,85	14,1
81	180,4	180,5	180,5	105,3	105,5	106,1	11,49	12,92	14,1
82	182,6	182,7	182,7	106,5	106,7	107,3	11,55	12,99	14,2
83	184,8	184,9	184,9	107,7	107,9	108,5	11,61	13,06	14,2
84	187,0	187,1	187,1	108,9	109,1	109,7	11,67	13,13	14,3
85	189,2	189,3	189,3	110,1	110,3	110,9	11,73	13,20	14,3
86	191,4	191,5	191,5	111,3	111,5	112,1	11,79	13,27	14,4
87	193,6	193,7	193,7	112,5	112,7	113,3	11,85	13,34	14,4
88	195,8	195,9	195,9	113,7	113,9	114,5	11,91	13,41	14,5
89	198,0	198,1	198,1	114,9	115,1	115,7	11,97	13,48	14,5
90	200,2	200,3	200,3	116,1	116,3	116,9	12,03	13,55	14,6
91	202,4	202,5	202,5	117,3	117,5	118,1	12,09	13,62	14,6
92	204,6	204,7	204,7	118,5	118,7	119,3	12,15	13,69	14,7
93	206,8	206,9	206,9	119,7	119,9	120,5	12,21	13,76	14,7
94	209,0	209,1	209,1	120,9	121,1	121,7	12,27	13,83	14,8
95	211,2	211,3	211,3	122,1	122,3	122,9	12,33	13,90	14,8
96	213,4	213,5	213,5	123,3	123,5	124,1	12,39	13,97	14,9
97	215,6	215,7	215,7	124,5	124,7	125,3	12,45	14,04	14,9
98	217,8	217,9	217,9	125,7	125,9	126,5	12,51	14,11	15,0
99	220,0	220,1	220,1	126,9	127,1	127,7	12,57	14,18	15,0
100	222,2	222,3	222,3	128,1	128,3	128,9	12,63	14,25	15,1

Табл. 4.4.3 Критичні значення модифікованого числа Біо $Bi_{k,m}$, ($re\lambda=0$): зліва зверху вниз значення хвильового числа k від 0,01 до 0,1 з кроком 0,01, потім від 0,1 до 1 з кроком 0,1 і далі від 1 до 10 з кроком 1; зліва направо 3 групи значень по хвильовому числу $m=1,5,10$ для безрозмірних товщин шару твердої плівки 0,001; 0,01 і 0,1 ($s = 1,001; 1,01$ і $1,1$); $Pe = 5 \cdot 10^4$

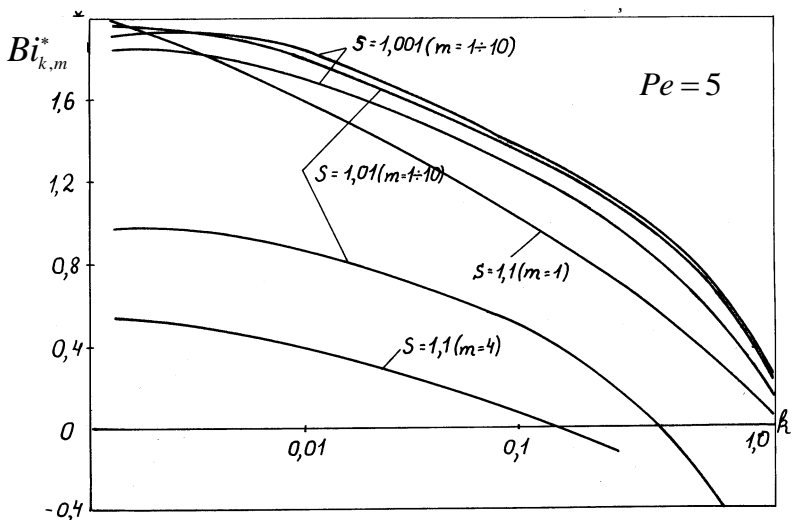


Рис. 4.4.1 Критичні значення модифікованого числа Біо $Bi_{k,m}$: в залежності від хвильових чисел, товщини шару гарнісажу, для Пекле $Pe=5$

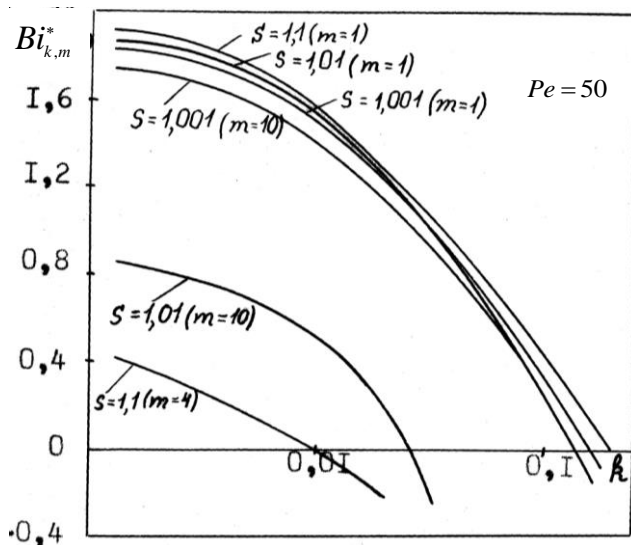


Рис. 4.4.2 Критичні значення числа Біо: $Pe=50$

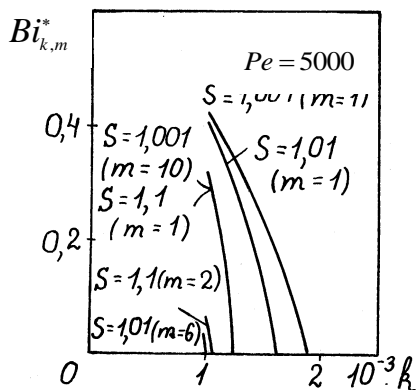


Рис. 4.4.3 Критичні значення числа Біо: в залежності від хвильових чисел, товщини шару гарнісажу для числа Пекле $Pe=5000$

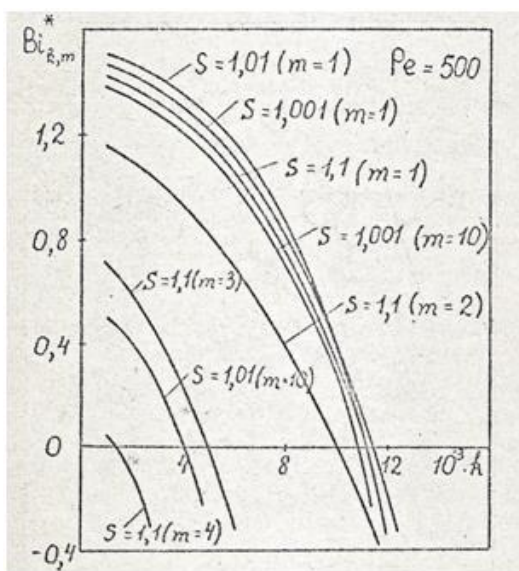


Рис. 4.4.4 Критичні значення числа Біо: в залежності від хвильових чисел, товщини шару гарнісажу для числа Пекле $Pe=500$

Проведений обчислювальний експеримент свідчить, що у разі нестійкості систему можна стабілізувати за допомогою засобів

автоматичного регулювання потоків теплоти [227]. Для $Pe=5,50,500$ і 5000 результати розрахунків наведено на Рис. 4.4.1-4.4.4 з деформованою віссю абсцис, звідки при $k \rightarrow 0$ видно, що значення параметра системи управління $Bi_{k,m}^*$ для різних значень Pe приблизно одне і те ж у діапазоні від 0 до 2,2 залежно від s , лише при $Pe > 5 \cdot 10^3$ параметр $Bi_{k,m}^*$ значно менше одиниці, однак такі значення числа Пекле рідко відповідають прийнятним в моделі припущенням. Наприклад, при наведених вище параметрах $Pr=1,4$ і $Pe > 5 \cdot 10^3$ означає $Re > 3,5 \cdot 10^3$. Усі розрахунки проведені при $q=0$, оскільки при $q=1$ умова (4.4.1) тим паче справедлива, якщо вона вірна для $q=0$.

Вплив в'язкості розплаву

Як показано в роботах [174, 202], врахування в'язкості розплаву має важливе значення в течіях тонких шарів і для короткохвильових коливань (капілярних хвиль), тому необхідно оцінити вплив в'язкості у розглянутій фізичній системі. Вважатимемо, що рух розплаву каналом у незбуреному стані відбувається за законом Пуазейля і розглянемо поведінку системи виду (4.3.12) за наявності збурень межі фазового переходу та інших параметрів. Врахування в'язкості розплаву зробимо опосередковано - через профіль незбуреної швидкості руху, нехтуючи, як і раніше, в'язкою дисипацією механічної енергії. Тоді, вирішуючи за викладеною методикою задачу про розвиток коливань межі фазового переходу в часі, в нульовому наближенні по λ [157]:

$$\lambda = \frac{2k\chi_1^0}{3R_i} \left(\frac{A_1 Bi_{k,m} + A_2 k}{A_3 Bi_{k,m} + A_4 k} - \frac{3}{2\bar{a}_1^2 k} \right). \quad (4.4.2)$$

Умова (4.4.2) відрізняється від (4.3.55) лише другою величиною у дужках. Коефіцієнт при $1/(\bar{a}_1^2 k)$ під впливом в'язкості у цій модельній постановці проти (4.3.55) зменшився з 2 до 1,5, тобто в'язкість дещо підвищує стійкість системи.

4.5 Параметричне придушення збурень границі фазового переходу

Як показує аналіз граничних випадків і обчислювальний експеримент, при деяких фізичних умовах нестійкість системи виникає лише при $k < 1$ (при зменшенні Pe область можливої нестійкості по k у разі $q=0$ розширюється, у разі $q=1$ звужується, при великих Pe - для $q=0$

прагне до нуля, для $q=1$ - максимальна). При цьому, оскільки при $q=0$ у разі нестійкості значення $Bi_{k,m}^*$ порівняно невеликі, умову стабілізації легко задовольнити за допомогою систем управління потоками теплоти [227] з порівняно невеликими енергетичними витратами.

Труднощі у практичній реалізації такого роду систем можуть виникнути у зв'язку з необхідністю точного підтримання теплового балансу системи у разі тонкого шару (плівки) кристалічної фази (гарнісажу) [175, 229], коли скільки-небудь значні величини можуть позначитися на тепловому режимі незбуреної системи. Іншими словами, при великих Pe і $s \sim 1$ придушення параметричних коливань меж фазового переходу може виявитися скрутним внаслідок хаотичності збурень та неможливості досить швидкого налаштування (автоматичного) системи управління на задану моду коливань.

Нестійкості поверхонь кристалізації розплавів у металургійних агрегатах, викликані випадковими чи регулярними збуреннями середовища, можуть значно знизити ефективність технологічного процесу або взагалі зробити неможливим. З огляду на високу електропровідність металічних розплавів, найбільш широке поширення в практиці стабілізації та управління положенням меж фазового переходу отримали електромагнітні способи. При цьому електромагнітні впливи розглядаються або як задані програмні зовнішні поля, що не залежать від збурень динамічних умов технологічного процесу [78, 91, 194, 201, 315], або як вплив динамічних систем управління, організовані за принципом зворотного зв'язку з об'єктом управління [176, 227-229]. Останній випадок найцікавіший для практичних застосувань, оскільки він дозволяє стежити за збуреннями динамічних умов фізичного об'єкта (поточним станом технологічного процесу), пригнічувати нестійкі збурення, запобігати відхиленням від оптимального режиму.

Системи автоматичного регулювання потоків теплоти

У разі тонкого шару твердої фази ефективне застосування змінних електромагнітних полів у замкнених системах автоматичного регулювання [227], що дозволяють активно впливати на поверхні кристалізації металевих розплавів, пригнічуючи небажаний розвиток поверхневих хвиль, які викривляють межу фазового переходу. Однак реалізація подібного роду систем не завжди можлива, тому були розроблені також системи керування потоками теплоти [227], засновані на застосуванні термоопорів. У цьому випадку передбачається, що для

кожної форми збурень є деякий електричний ланцюг, в який входять термоопір та активні двополусні схеми, що дозволяють посилювати струми на нагрівальних елементах.

Збурення температури викликають зміни струму на термоопорах, які потім можуть бути посилені до необхідного рівня, чим створюється необхідний тепловий потік на поверхні $r=R$, що служить для стабілізації фронту кристалізації. Граничні умови для обох систем ідентичні. Це - розглянуті вище імпедансні граничні умови, що містять як параметр управління модифіковане число Біо $Bi_{k,m}$, яке служить коефіцієнтом зворотного зв'язку керуючої системи. Можна розглянути граничну умову на збурення від системи автоматичного регулювання [227] виду

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{r=R} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\varphi, x, \eta, \xi) \tau(\eta, \xi, t) d\eta d\xi, \quad (4.5.1)$$

де $G(\varphi, x, \eta, \xi) = A(t) e^{i(\alpha x + \alpha_1 \xi)} \gamma_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha_1, \beta_1} e^{i(\beta \varphi + \beta_1 \eta)}$, $A(t)$ - функція часу, яка може набувати як додатніх, так і від'ємних значень, $\gamma_{\alpha, \beta}$ - щільності відповідних обмоток системи управління.

Представляючи збурення температури у вигляді ряду

$$\tau_2(r, \varphi, x, t) = \sum_{\alpha, \beta} \tau_{\alpha, \beta}(t, r) e^{i(\alpha x + \beta \varphi)}$$

після підстановки (4.5.1) можна показати, що відмінною від нуля буде лише гармоніка, номери якої α, β збігаються з номерами відповідної обмотки. Звідси випливає, що кожна обмотка взаємодіє лише з певною модою коливань температури, внаслідок чого можливо індивідуально регулювати коефіцієнт посилення для кожної гармоніки:

$$r = R, \quad \frac{\partial(\tau_2)_{\alpha, \beta}}{\partial r} = G_{\alpha, \beta}(\tau_2)_{\alpha, \beta}, \quad (4.5.2)$$

де $G_{\alpha, \beta}$ може приймати практично будь-які додатні та від'ємні значення. Позначаючи $Bi_{k,m} = -R_0 G_{k,m} / T_*$, отримаємо імпедансну граничну умову (раніше використану).

Проведені дослідження свідчать про можливість застосування систем автоматичного регулювання потоків теплоти для стабілізації нестійкостей металургійних процесів. Так, керований штучний гарнісаж [175, 228, 229], створюваний для захисту футерування металургійних

агрегатів від термічного та хімічного руйнування або запобігання забруднення розплаву сторонніми домішками, вимагає підтримки заданого температурного режиму системи, контролю форми та положення меж фазового переходу.

Практичне застосування одержаних результатів

У сталеплавильних агрегатах неперервної дії [149, 156, 315] стійкість футеровки набуває першорядного значення, проте може виявитись, що режим течії в каналі турбулентний і тоді потрібні додаткові дослідження зі зміною математичної моделі системи [75, 175, 272, 27]. Штучний гарнісаж при цьому може вирішити проблему.

Як впливає з проведених досліджень, з урахуванням отриманих виразів (4.4.2), (4.3.17), (4.3.20), (4.3.22), (4.3.23), у сталеплавильних агрегатах неперервної дії необхідно враховувати вплив режиму течії хоча б у першому наближенні, зважаючи на реальний профіль швидкості [167, 274, 275]. Оскільки на стійкість (в прийнятій модельній постановці) режим течії великого впливу не має, можна досліджувати поведінку межі фазового переходу, ґрунтуючись на наближених даних (наприклад, емпіричних) щодо профілю швидкості та градієнту температури на межі фронту кристалізації.

Важливе значення має питання про оптимальну товщину гарнісажу [156], яке розглядалося вище. В даному випадку скористаємося власними значеннями виду (4.3.47) при $|\mathcal{S}_{10}| \gg 1$, $\bar{a}_1 = 1$:

$$\lambda = \frac{k \chi_1^0}{R_\lambda + \beta_{k,m}^1} \left[\frac{A_1 B i_{k,m} + A_2 k}{A_3 B i_{k,m} + A_4 k} + (1 + \beta^{r2})^{1/4} \cos(\alpha' + \pi q) - \frac{2}{k} \right]. \quad (4.5.3)$$

Досліджуємо функцію $\lambda(s)$ на екстремум, оскільки у практичному відношенні мала швидкість згасання збурень може бути певною мірою подібна до нестійкості, особливо - якщо час згасання збурень одного порядку зі швидкістю зростання кристалів.

У загальному випадку знаходження $\underset{s}{extr} \lambda(s)$ з урахуванням виду (4.5.3) вимагає (як і в разі нерухомого у рівноважному стані розплаву) рішення на ЕОМ трансцендентного алгебраїчного рівняння, тому слід зазначити чудовий факт: у нульовому наближенні $\lambda(s)$ має загальну частину, залежну від s , при будь-якому режимі руху розплаву, у тому

числі за нерухомого розплаву. Тому тут справедливі всі висновки, зроблені раніше, з тим лише застереженням, що градієнт температури розплаву рівноважної системи на межі фазового переходу (множник χ_1^0 в λ : $\lambda \sim \chi_1^0$) залежить від режиму течії в каналі .

Як видно з (4.5.3), при збільшенні Pe один тип збурень ($q=0$) втрачає стійкість, інший ($q=1$) збільшує стійкість. Дослідження виразу в квадратних дужках на екстремум за числом Пекле показує, що при $q=0$ він зростає приблизно як $(1+\beta'^2)^{1/4}$, а при $q=1$ - спадає за тим самим законом. Відповідно, мінімум (максимум) функції має місце при $Pe=0$, коли обидва типи збурень збігаються. При цьому якщо збільшення β' веде до зростання (зменшення) λ , то слід мати на увазі, що при $Pe=0$, χ_1^0 - const, тоді як зміна Pe веде до відповідної зміни χ_1^0 і сумарне зростання (падіння) значення функції $\lambda(Pe, \beta')$ посилюється. Залежність $\chi_1^0(Pe)$, взагалі кажучи, - самостійне складне питання теплофізики [220].

Вирази (4.5.3) і (4.5.4) збігаються при $Pe=0$ ($k \gg 1$ повинно бути задоволення прийнятого припущення у тому, що $|\delta_{10}| \gg 1$), причому $s_0 = \exp(-1/\chi_1^0)$, де χ_1^0 можна взяти як границю рішення при $Pe \rightarrow 0$ або задати з експериментальних даних. Тоді параметр s_0 в моделі розділу 2 буде мати фіксоване значення та пов'язана з ним невизначеність рішення усувається. При $\beta' \gg 1$ з (4.5.3) маємо (\pm відповідає $q = 0; 1$):

$$\lambda = \frac{k\chi_1^0}{R_\lambda + \beta'_{k,m}} \left[\frac{A_1 Bi_{k,m} + A_2 k}{A_3 Bi_{k,m} + A_4 k} \pm \sqrt{\frac{Pe}{2k} - \frac{2}{k}} \right], \quad (4.5.4)$$

Спільне задоволення прийнятих умов $\beta' \gg 1$, $|\delta_{10}| \gg 1$ дає $k \gg 1$, тому з (4.5.4) далі виходить:

$$\lambda = \frac{k\chi_1^0}{R_\lambda + \beta'_{k,m}} \left[\frac{Bi_{k,m} + k \cdot \text{th}k(s-1)}{Bi_{k,m} \text{th}k(s-1) + k} \pm \sqrt{\frac{Pe}{2k} - \frac{2}{k}} \right], \quad (4.5.5)$$

звідки випливає, що при $Pe \gg k$ другий тип збурень є нестійким. Однак необхідно враховувати, що $Pe \leq 2 \cdot 10^3$, а тому, оскільки $Pr \sim 1$ для

більшості практичних випадків, то умова застосування математичної моделі дає $Pe \ll 2 \cdot 10^3$, тобто $\sqrt{0,5Pe/k}$ не дуже велике, взагалі кажучи. Наприклад, при $k = 10$ негативна величина у квадратних дужках (4.5.5) не може перевищувати $-10,2$.

При $s-1 \ll 1/k$ справедлива наближена оцінка $\text{th } k(s-1) = k(s-1)$ і тому з (4.5.5) отримасмо

$$\lambda = \frac{\chi_1^0}{R_\lambda + \beta_{k,m}^1} \left[\frac{Bi_{k,m} + k^2(s-1)}{Bi_{k,m}(s-1) + 1} k \pm \sqrt{\frac{k}{2} Pe - 2} \right], \quad (4.5.6)$$

звідки випливають достатні умови нестійкості системи:

$$k > \left(2 + \sqrt{kPe/2}\right)(s-1), \quad Bi_{k,m} < \frac{2 + \sqrt{kPe/2} - k^3(s-1)}{k - \left(2 + \sqrt{kPe/2}\right)(s-1)};$$

$$k < \left(2 + \sqrt{kPe/2}\right)(s-1), \quad Bi_{k,m} > \frac{2 + \sqrt{kPe/2} - k^3(s-1)}{k - \left(2 + \sqrt{kPe/2}\right)(s-1)};$$

Наприклад, для $k = 10$, $Pe = 2 \cdot 10^3$, $s = 1,01$ звідси $Bi_{k,m} < 10,245$. Для теплоізованого каналу $Bi_{k,m} = 0$, та умова нестійкості з урахуванням (4.5.6) виходить у вигляді $k^3(s-1) \pm \sqrt{kPe/2} < 2$, звідки при наведених параметрах один тип збурень буде наростаючим, інший - загасаючим. Останнє означає, що при $Pe \gg k$ і короткі хвилі можуть наростати, якщо плівка твердої фази тонка.

Для згасання (придушення) збурень межі фазового переходу тонкої плівки необхідна система з інтенсивним теплообміном на стінці каналу, що не завжди можливо забезпечити без системи керування потоками теплоти. Застосування такої системи дозволяє вирішити проблему з урахуванням зроблених застережень. При $k(s-1) \gg 1$ з (4.5.5) отримасмо, вважаючи $\text{th } k(s-1) \approx 1$:

$$\lambda = \frac{\chi_1^0}{R_\lambda + \beta_{k,m}^1} \left(k \pm \sqrt{\frac{k}{2} Pe - 2} \right), \quad Bi_{k,m} \sim k,$$

звідки видно, що тут вже s і $Bi_{k,m}$ практично не впливають на λ , якщо $\beta_{k,m}^1$ мале в порівнянні з R_λ , і при великих Pe збурення наростають (достатня умова нестійкості).

Таким чином, рух розплаву в каналі може призвести до розвитку короткохвильових збурень. І тут для стабілізації межі фазового переходу необхідне застосування системи управління. Аналогічно розглянутому, випадок з управлінням дає:

$$\lambda = \frac{\chi_1^0}{R_\lambda + \beta_{k,m}^1} \left\{ \left[2 \frac{Bi_{k,m} - k}{Bi_{k,m} + k} e^{2k(1-s)} + 1 \right] k \pm \sqrt{\frac{k}{2} Pe - 2} \right\},$$

звідки умова стабілізації має вигляд

$$k \left\{ \frac{4\sqrt{2}k \exp[2k(1-s)]}{\sqrt{2}(k-2) + \sqrt{kPe}} - 1 \right\} < Bi_{k,m} < -k.$$

Аналіз отриманого виразу показує, що управління в цьому випадку важко реалізувати, оскільки необхідна область зміни $Bi_{k,m}$ дуже вузька.

Так, при $k = 10^2$, $Pe = 2 \cdot 10^3$, $s = 1,1$ звідси впливає $-k(1 \pm 3,8 \cdot 10^{-7}) < Bi_{k,m} < -k$, а при $k = 50$, відповідно, $-1,38k < Bi_{k,m} < -k$. Оскільки залежність від s експоненційна, його вплив дуже сильний.

4.6 Нелінійні хвильові процеси на межах фазового переходу

Розглянута лінійна теорія коливань меж фазового переходу, строго говорячи, справедлива для випадку збурень нескінченно малої амплітуди і дає достатні умови нестійкості або стабілізації (якщо застосовуються системи придушення нестійкості) меж фазового переходу розплаву. Як показує практика, така теорія добре описує реальні фізичні системи, в яких мають місце коливання меж розділу (фронтів кристалізації) малої скінченної і навіть помірної амплітуди, але вона абсолютно невірна у разі збурень системи великої амплітуди, коли істотна нелінійність хвильових процесів, яка виявляється, зокрема, у нелінійному характері хвилеутворення межі фазового переходу. Тому цікаво проаналізувати особливості нелінійних хвильових процесів на межах фазового переходу.

У разі нелінійності системи (процесу) при критичних значеннях параметрів може реалізуватися неєдине рішення системи нелінійних диференціальних рівнянь, які описують досліджуване фізичне явище.

При цьому застосування теорії бифуркацій дозволяє визначити особливості розгалуження рішень, виявити серед них стійкі та нестійкі, після чого можна керувати амплітудою та стабілізацією [209] бифуркаційного режиму (іноді вигідніше, ніж звичайні режими).

Розглянемо нелінійні хвильові процеси на межах фазового переходу, вважаючи, що збурення тиску розплаву не настільки велике, щоб діяти механічно на межу фазового переходу, обламуючи кристали. Тоді система диференціальних рівнянь для нелінійного збурення межі фазового переходу набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial Fo} + (Pe + w) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial w}{\partial Fo} + (Pe + w) \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial Fo} = a_{21} \left(\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial r^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial Fo} + u \frac{\partial T_1}{\partial r} + (Pe + w) \frac{\partial \tau_1}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial r^2}, \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

де припускається, що в збуреному стані градієнт температури по x відсутній (або малий) і система має осьову симетрію, що зберігається після збурення.

При високих швидкостях руху розплаву $Pe \gg 1$, тому конвективний член з Pe буде переважним і, аналогічно розглянутому в третьому розділі, можна аналізувати нелінійні хвилі, користуючись лінійними рівняннями (нелінійність процесу обумовлена в цьому випадку нелінійністю деформування межі розділу).

Граничні умови можна записати в такий спосіб:

$$r = 0, \quad u = 0, \quad \partial \tau_1 / \partial r = 0; \quad (4.6.2)$$

$$r = \zeta, \quad \tau_1 = \tau_2 = 0, \quad u = (1 - \rho_{21}) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), \quad (4.6.3)$$

$$\kappa_{21} \frac{\partial \tau_2}{\partial r} = \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + R_\lambda (1 - \rho_{21}) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right); \quad (4.6.4)$$

$$r = r_w, \quad \partial \tau_2 / \partial r = -Bi_{k,m} \tau_2. \quad (4.6.5)$$

Оскільки процес кристалізації збуреної межі фазового переходу має характерний час, що значно перевищує час динамічного вирівнювання тиску, покладемо $\partial p / \partial r = 0$ та усереднимо рівняння системи (4.6.1) з урахуванням граничних умов (4.6.2)-(4.6.5) за координатою r у

відповідних областях. В результаті для випадку $\partial T_1 / \partial r = T_{1r} = const$, $Pe \gg 1$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_w}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial q_w}{\partial x} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q_w}{\partial x} = (\rho_{21} - 1) \zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial q_u}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial q_u}{\partial x} = (1 - \rho_{21}) \zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

$$\frac{\partial q_r^1}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial q_r^1}{\partial x} + T_{1r} q_u = \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial r} \right)_\zeta \zeta + \frac{\partial^2 q_r^1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial q_r^2}{\partial Fo} = a_{21} \left[r_w \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial r} \right)_{r_w} - \zeta \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial r} \right)_\zeta + \frac{\partial^2 q_r^2}{\partial x^2} \right].$$

Тут $q_u = \int_0^\zeta u r dr$, $q_r^2 = \int_\zeta^{r_w} \tau_2 r dr$, аналогічно - інші функції $q(Fo, x)$. Якщо

$Pe \gg w$ не дотримується, система (4.6.6) ускладнюється, оскільки необхідно враховувати конвективні потоки теплоти збуреної системи також і по x , а самі рівняння руху розплаву повинні містити нелінійні конвективні члени, що не дозволило б осереднити рівняння (4.6.1) без введення додаткових гіпотез щодо профилей швидкостей і температури.

Граничні умови (4.6.2) не мають значення при визначеному способі виводу усереднених рівнянь, їх можна змінити більш загальними умовами, зокрема, скінченості збурень швидкостей і температури розплаву на осі каналу, що, очевидно, більш виправдано фізично, ніж (4.6.2). Слід також помітити, що в застосовуваному підході перші два рівняння системи (4.6.6) можна не розглядати, оскільки на тепловому режимі основний вплив забезпечує радіальна складова швидкості руху. Зрозуміло, що в разі тонкого шару кристалічної фази можна приблизно покласти $r_w d\tau_2 / dr = -Bi \cdot q_r^2 / s$ замість граничної умови (4.6.5), після чого будемо мати, враховуючи (4.6.6), наступну систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_r^1}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial q_r^1}{\partial x} + T_{1r} q_u = \frac{\partial^2 q_r^1}{\partial x^2} + (1 - \rho_{21}) \zeta^2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) T_{1r}, \\ \frac{\partial q_u}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial q_u}{\partial x} = (1 - \rho_{21}) \zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

$$\frac{\partial q_r^2}{\partial Fo} = a_{21} \left[\frac{\partial^2 q_r^2}{\partial x^2} - Bi \frac{q_r^2}{s} + \kappa_{12} (\rho_{21} - 1) \zeta (T_{1r} \zeta + R_\lambda) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial Fo} + Pe \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right].$$

Тут використано граничне значення $(\partial \tau_1 / \partial r)_{\zeta}$, отримане інтегруванням передостаннього рівняння системи поблизу межі фазового переходу: $(\partial \tau_1 / \partial r)_{\zeta} = -(\partial q_w / \partial x) T_{lr}$.

У загальному випадку задача про деформування межі фазового переходу дуже складна, оскільки вимагає розгляду пов'язаної задачі гідродинаміки в області, зайнятій рідкою фазою, та завдання пружності у твердій фазі, а в більш точній постановці необхідно враховувати ще й скінченість товщини зони кристалізації з урахуванням впливу розподілу тиску на зростання кристалів. У даній модельній постановці вважається, що кристалізація відбувається практично миттєво на лінії, де досягається температура, рівна температурі кристалізації, і кристалічна фаза досить міцна, щоб витримати коливання гідродинамічного тиску в каналі без механічного руйнування межі. Тому, як видно з (4.6.7), завдання суттєво спрощується, вплив гідродинамічних процесів на еволюцію межі розділу проявляється лише через профіль температури.

Як видно із системи (4.6.7), вплив збурення межі фазового переходу на гідродинамічні характеристики має третій порядок, тоді як на температуру системи цей вплив четвертого порядку, звідки випливає, що у разі малих збурень цей вплив малий, особливо – на тепловий стан системи. Останнє пояснює той факт, що дослідження малих збурень системи в рамках лінійної теорії припустимо для коливань скінченної досить малої амплітуди, причому, добрим наближенням рішення може бути вже нульове, як було показано вище.

Крім того, оскільки зворотний вплив коливань температури на еволюцію межі фазового переходу більш сильний, ніж аналогічний вплив пульсацій швидкості та тиску, стає зрозумілим і інший вище отриманий в лінійній постановці результат, що за певних умов тепловий режим визначає повністю стійкість межі незалежно від режиму течії розплаву.

Аналіз системи диференціальних рівнянь показує, що при $Pe \gg 1$ в основі хвильових процесів лежить кінематична хвиля $\partial / \partial Fo = -Pe \cdot \partial / \partial x$ (раніше було отримано в лінійному наближенні, що $\omega = Pe \cdot k$ відповідає резонансу системи). Розглянемо, наприклад, збурення течії розплаву виду $q_u = q_u(x - Pe \cdot Fo)$, яке в лінійному наближенні є резонансним. Нехай $\zeta = \zeta(x - Pe \cdot Fo)$ і введемо нову змінну $\tilde{x} = -Pe \cdot Fo$, тоді з (4.6.7)

$$\frac{\partial^2 q_r^1}{\partial \tilde{x}^2} = T_{lr} q_u, \quad \frac{\partial^2 q_r^2}{\partial \tilde{x}^2} - a_{12} Pe \frac{\partial q_r^2}{\partial \tilde{x}} - \frac{Bi}{s} q_r^2 = 0. \quad (4.6.8)$$

Вважаючи в (4.6.8) $q_u = q_u^0 \cos \tilde{x}$, будемо мати:

$$q_\tau^1 = c_1 \tilde{x} + c_2 - T_{1,r} q_u, \quad q_\tau^2 = c_3 e^{\psi_{1,\tilde{x}}} + c_4 e^{\psi_{2,\tilde{x}}}, \quad (4.6.9)$$

де $\psi_{1,2} = a_{12} Pe / 2 \pm \sqrt{a_{12}^2 Pe^2 / 4 + Bi / s}$, $c_i (i = \overline{1,4}) = const$. Як видно з (4.6.9), збурення температури розплаву має складову, зумовлену вимушеною конвекцією (вона подібна до виду збурення швидкості), тоді як власне збурення температури лінійне по \tilde{x} , внаслідок чого без кондуктивного збурення повне збурення температури має той же характер, що і гідродинамічне.

Коливання тиску в потоці призводять, таким чином, до відповідної зміни температури області, що, в свою чергу, збурює межу фазового переходу. Як випливає з перших двох рівнянь (4.6.6), у розглянутому випадку $\partial q_w / \partial x = 0 \rightarrow q_w = q_w(Fo)$, тому $\partial p / \partial x = -(2 / \zeta^2) \partial q_w / \partial Fo$, звідки випливає, що градієнт збуреного тиску має порядок $1 / \zeta^2$ по координаті x (аналог рівняння Бернуллі в каналі). Збурення температури твердої фази, як показує вираз (4.6.9), суттєво залежить від умов на зовнішній межі та може регулюватися, оскільки модифіковане число Біо у виразах $\psi_{1,2}$ відображає властивості регулятора, як показано раніше.

У разі сталості температури стінки каналу ($Bi = 0$) збурення температури твердої фази відсутнє (тепловідведення ідеальне, збурення гасяться поза каналом), оскільки $q_\tau^2 \rightarrow \infty$, при $\zeta \rightarrow \infty$ відкидається як фізично нереальний випадок. У разі $Pe \gg a_{21} \sqrt{Bi / s}$ - аналогічно.

За наявності системи управління потоками теплоти, коли $Bi < -a_{12}^2 Pe^2 s / 4$ (чим тонший шар твердої фази s , тим менше Bi), рішення $q_\tau^2(\zeta)$ має коливальну складову $q_\tau^2 = q_{\tau 0}^2 \cos(a_{12}^2 Pe^2 / 4 + Bi / s) \zeta$, звідки видно, що за допомогою Bi можна регулювати довжину хвилі та фазу теплового збурення, зокрема, підібрати її рівною відповідній довжині хвилі збурення межі розділу. Якщо в останньому випадку вибрати синфазне збурення q_τ^2 , межа руйнується, якщо в протифазі - стабілізується: у місцях заглиблень у тверду фазу відбуватиметься намерзання розплаву за рахунок охолодження межі в цьому місці. У місцях виступів - навпаки, оплавлення межі потоками теплоти.

4.7 Висновки за розділом

Проведені дослідження показали основні особливості параметричних коливань меж фазового переходу, які, на відміну від розглянутих у другому і третьому розділах коливань поверхні плівок, визначаються в основному обміном енергією між регулятором та об'єктом (а не імпульсом, як у плівках). Іншими словами, якщо у другому та третьому розділах розглянуто силову дію, то тут - тепла, внаслідок чого частота застосовуваного електромагнітного поля в даному випадку значення не має, вона повинна бути лише достатньо високою, щоб джоулеві тепловиділення відбувалися в тонкому скін-шарі поблизу межі розділу фаз (для здійснення граничного керування). У плівках же при керуванні хвилеутворенням та розповсюдженням хвиль пондеромоторні сили динамічно діють на рідину, збуджуючи (пригнічуючи) на поверхні плівок коливання та хвилі певної форми і частоти.

Колівання меж фазового переходу, як показано в цьому розділі, мають порівняно низьку частоту, система має значну інертність у термодинамічному відношенні. При цьому стабілізація (придушення коливань) можлива з допомогою джоулевих тепловиділень, тобто. стабілізуючий вплив електромагнітного поля опосередкований та енергетичні витрати, як показали проведені дослідження, порівняно малі. Як видно з наведених результатів, циліндричні межі фазового переходу мають значно більшу стійкість, ніж плівки, і більшу стійкість, ніж плоскі фронти кристалізації [227, 228], які мають лише вузькі області нестійкості.

Високочастотні коливання як плоских, так і циліндричних фронтів кристалізації фізично нереальні завжди, де мають місце порівняно невеликі градієнти температури, тобто практично у всіх технологічних установках і процесах. Найбільш нестійкими є довгохвильові коливання, а короткохвильові швидко згасають за відсутності зовнішнього впливу, що збуджує коливання. Встановлено наступне:

- для постановки граничних умов необхідно враховувати характер збурень, оскільки для симетричних та антисиметричних мод граничні умови можуть відрізнятися (виведені відповідні умови);
- при незначній вимушеній конвекції у разі довгохвильових збурень меж фазового переходу коливання температури (температурні хвилі) у всій області одного порядку, а короткохвильові завжди згасають поблизу межі (зі збільшенням Pe процес посилюється);

- при $Pe \gg 1$ конвективна теплопередача переважає молекулярну і в лінійному малоамплітудному наближенні виходить резонанс системи при $\omega = k \cdot Pe$;
- для всіх значень Pe існує k^* , таке, що при $k > k^*$ коливання згасають;
- у більшості лінійних задач власні значення λ задачі стійкості можуть бути визначені вже у нульовому наближенні; при цьому в нульовому наближенні по λ вплив збурень швидкості не проявляється, а в першому наближенні за відсутності системи керування і у разі дуже тонкого шару твердої фази, якщо градієнт температури незбуреної системи суттєво менше відношення теплоти фазового переходу та ентальпії $\chi_1^0 \ll R_\lambda$, перше наближення практично збігається з нульовим;
- умова стійкості $Bi_{k,m} > Bi_{k,m}^*$ часто легко задовольняється без керуючих впливів; критичні значення модифікованого числа Біо $Bi_{k,m}^*$ різко зростають при зменшенні товщини шару твердої фази (гарнісажу) і при зростанні числа Пекле Pe ;
- при великих Pe та малих товщинах твердої фази модифіковані числа Біо $Bi_{k,m}^*$ великі. Для стабілізації системи потрібні великі витрати, систему управління важко налаштувати автоматично на задану моду коливань, оскільки стабілізуючі потоки теплоти одного порядку з основними, через що порушується тепловий режим;
- при $Pe \gg k$ короткі хвили можуть наростати в часі, якщо плівка твердої фази досить тонка: $s-1 \ll 1/k$; при $k(s-1) \gg 1$ керування системою важко реалізується, оскільки область вузька (утворюється примежовий шар по $Bi_{k,m}$);
- лінійна теорія, на відміну плівок, щодо межі фазового переходу працює досить добре як для малих збурень; в основі нелінійного хвильового процесу лежить кінематична хвиля з фазовою швидкістю Pe (у разі лінійних збурень $\omega = k \cdot Pe$ - резонансні хвили);
- термічний опір стінки каналу в багатьох випадках є суттєвим і вибором властивостей багатошарової стінки можна придушити деякі типи збурень або послабити швидкість їх наростання.

Результати цього розділу є розвитком робіт [75, 166, 229]. У прикладному плані завдання створення систем стабілізації меж фазового

переходу має важливе значення для організації захисту стінок сталеплавильних агрегатів [272] від термічного та хімічного руйнування за допомогою гарнісажу. Саме з цією метою таке завдання було вперше поставлено наприкінці 1970-х років академіком В.М. Глушковим.

Розвинений у розділі клас задач, будучи частиною проблеми параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ, представляє також самостійний теоретичний та практичний інтерес, оскільки подібні задачі дозволяють вивчати нові гідродинамічні та теплові явища, пов'язані зі стійкістю та стабілізацією фронтів кристалізації розплавів, що рухаються у циліндричних каналах. Розроблені математичні моделі дозволяють продовжити дослідження як у плані розвитку теорії параметричних коливань фронтів кристалізації розплавів, так і практичних застосувань (захист футерування агрегатів за допомогою штучного гарнісажу або, навпаки, руйнування природного гарнісажу, який приводить до заростання каналів).

Матеріали розділу доповідалися та обговорювалися на різних наукових форумах [50, 164, 182, 183] та опубліковані у препринті [175] і статтях [155-159, 170].

Глава 5. Параметричні коливання на межах розділу фаз у гетерогенних суцільних середовищах

У попередніх двох розділах монографії розглянуто параметричні коливання на межах розділу рідких суцільних однофазних середовищ, у тому числі з фазовими переходами розплаву з рідкого стану в твердий на межі розділу середовищ. При цьому розривів полів швидкості та температури не було, були лише розриви щільності та тиску, за рахунок якого деформувалася межа розділу рідких середовищ.

У цьому розділі розглянемо складніший випадок меж розділу суцільних середовищ, що має місце в гетерогенних суцільних середовищах, де в кожній макроточці об'єму, зайнятого середовищем, на мікрорівні є складна картина меж розділу фаз з розривами полів щільності, швидкості, тиску, температури і т.п. та взаємодія середовищ відбувається досить хаотично. У цьому випадку можна досліджувати закономірності параметричних коливань, користуючись замкненими феноменологічними системами рівнянь (континуальний підхід), отриманих з урахуванням процесів на мікрорівні (структурний підхід).

У гетерогенних суцільних середовищах, на відміну від гомогенних контактуючих середовищ, за окремими межами розділу стежити вже неможливо, оскільки у кожній точці об'єму відбувається взаємодія середовищ та компонентів середовищ через їхні межі розділу (шляхом обміну потоками маси, теплоти, імпульсу тощо). При цьому, якщо, як і раніше, одне з середовищ електропровідне, то можна розглядати електромагнітний спосіб збудження та придушення коливань на межах розділу середовищ. Однак у даному випадку такий спосіб управління набагато складніше реалізувати практично. Адже управління, по-перше, виходить не граничне, а об'ємне (внаслідок розподілу фаз і компонентів у просторі займаного об'єму) і, по-друге, поведінка меж розділу неконтрольована з огляду на їх неоглядну кількість.

5.1 Фізико-математична модель суцільного гетерогенного середовища з урахуванням розривів полів на межах розділу фаз

Розглянемо задачу про термогідродинамічні коливання в системах з гранулярними шарами, що межують з масивами, що служать для тепловідведення або теплової ізоляції системи. У рівноважному стані текучі середовища (газ, рідина), що знаходяться в гранулярному шарі, можуть рухатися або бути нерухомими. Якщо ці середовища

електропровідні, взаємодія з-поміж них ускладнюється, оскільки важливу роль відіграють електромагнітні сили. Такі складні гетерогенні системи мають численні застосування у технологічних установках та процесах сучасної промисловості [89, 171-173, 176, 177, 296, 387, 425]. Їх відмінна риса - просторова неоднорідність речовин та фізичних характеристик і розриви полів швидкості, тиску, температури тощо.

Параметричні коливання в насичених гранулярних шарах зустрічаються в таких галузях як ядерна енергетика, хімічна технологія, медицина, нафто- та газодобувна промисловість, геотермія, космічна техніка тощо. При цьому в кожній області виникають свої специфічні завдання, однак ряд відмінних рис є загальним для всіх завдань. Тому розгляд теплогідравлічних коливань у гранулярних середовищах, що є у полі дії різних змінних полів, представляє не тільки теоретичний інтерес.

Нині є роботи дослідників різних країн, присвячені отриманню фундаментальних рівнянь нестационарного неізотермічного руху теплоносії в гранулярних шарах [294-297, 366, 367, 425, 514]. Вирішення різних практичних завдань проводилося з використанням спрощених математичних моделей і схематизації досліджуваних фізичних явищ [89, 171-173, 176, 177, 367, 382].

Застосування аналітичних та чисельних методів з використанням сучасних ЕОМ дозволило встановити деякі характерні риси систем, важливі для практики. Але у більшості робіт процес нестационарного теплообміну досліджувався зведенням багатозв'язної багатокомпонентної системи до умовного континууму з осередненими за простором параметрами. А це виправдане лише у випадку, коли характерний час вирівнювання температур частинок і флюїду малий і локальний теплообмін частинок з потоком не має суттєвого значення.

Оскільки в практиці описаний підхід часто неприйнятний, необхідно відмовитися від гіпотези квазігомогенності середовища та розглядати її як гетерогенну, що краще відповідає реальності. Нами дане завдання розглядалося з позицій термогідродинаміки гетерогенних середовищ [294, 295] з урахуванням наступних обмежень:

- розміри частинок гранулярного шару значно більші за молекулярно-кінетичні, але набагато менші за лінійні розміри макросистеми,
- фазові переходи та деформації твердої фази відсутні,
- інерційні сили знехтувано малі, а в'язкість текучого середовища впливає лише на динамічну взаємодію фаз.

Припустимо, що досліджувана фізична система містить проникний масив, що складається з K монодисперсних прошарків, розташованих

послідовно і пронумерованих знизу вгору, як показано на Рис. 5.1.1. Тоді з урахуванням прийнятих припущень та рівнянь насиченого гранулярного шару [294] математична модель системи має вигляд:

$$\begin{aligned}
 \rho_{1\kappa} \left(1 + \frac{\alpha_{2\kappa}}{2} \right) \frac{\partial \vec{v}_{1\kappa}}{\partial t} + \alpha_{1\kappa} \nabla p_{1\kappa} + \rho_{1\kappa} \vec{g} + \vec{F}_{\mu\kappa} &= 0, \\
 \rho_{1\kappa} \frac{\alpha_{2\kappa}}{2} \frac{\partial \vec{v}_{1\kappa}}{\partial t} &= \alpha_{2\kappa} \nabla p_{1\kappa} + \rho_{2\kappa} \vec{g} - \vec{F}_{\mu\kappa} - \operatorname{div} \sigma_{\kappa}, \\
 \left(\frac{1 - v_{jk}^{\sigma}}{\alpha_{1\kappa} \beta_{p1}} + \frac{1}{\alpha_{2\kappa} \beta_{pk2}} \right) \frac{\partial \alpha_{1\kappa}}{\partial t} &= \frac{1 - v_{jk}^{\sigma}}{\beta_{p1}} \left(\frac{1}{\rho_{1\kappa}} \frac{\partial \rho_{1\kappa}}{\partial t} + \beta_{T1} \frac{\partial T_{1\kappa}}{\partial t} \right) + \frac{v_{jk}^{\sigma} v_{jk}^*}{\beta_{p2\kappa}} \beta_{T2\kappa} \frac{\partial T_2}{\partial t}, \\
 \frac{\partial \rho_{1\kappa}}{\partial t} &= - \left(\rho_{1\kappa} \operatorname{div} \vec{v}_{1\kappa} + \vec{v}_{1\kappa} \nabla \rho_{1\kappa} \right), \quad \alpha_{1\kappa} + \alpha_{2\kappa} = 1, \\
 \rho_{1\kappa} c_{1V} \left(\frac{\partial T_{1\kappa}}{\partial t} + \vec{v}_{1\kappa} \nabla T_{1\kappa} \right) &= \vec{F}_{\mu\kappa} \cdot \vec{v}_{1\kappa} + \frac{\alpha_{1\kappa}}{\rho_{1\kappa}^0} p_{1\kappa} \left(\frac{\partial \rho_{1\kappa}^0}{\partial t} + \vec{v}_{1\kappa} \nabla \rho_{1\kappa}^0 \right) + \\
 &+ \operatorname{div} \left(\lambda_{1\kappa}^* \nabla T_{1\kappa} \right) + Q_{\Sigma}, \quad \vec{v}_{2\kappa} \approx 0, \\
 \rho_{2\kappa} c_{2\kappa} \frac{\partial T_{2\kappa}}{\partial t} &= \operatorname{div} \left(\lambda_{2\kappa}^* \nabla T_{2\kappa} \right) - Q_{\Sigma}, \quad \rho_3 c_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\lambda_3 \nabla T_3 \right).
 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Тут: $\rho_{jk} = \rho_{jk}^0 \alpha_{jk}$ - щільності фаз, $j=1,2,3$ відповідно, для поточного середовища, частинок гранулярного шару (на Рис. 5.1.1 позначені кружальцями) і оточуючого теплопровідного масиву. Нульові індекси відповідають істинним щільностям фаз, α_j - об'ємні вмісти фаз, $\vec{g} = \{0, 0, g\}$ - прискорення сили тяжіння, v_{jk}^{σ} - характеристика пружності скелета гранулярного шару, β_p і β_T - коефіцієнти, що характеризують зміну щільності фаз залежно від тиску та температури.

Параметри міжфазної термогідродинамічної взаємодії такі [294]:

$$\vec{F}_{\mu\kappa} = \mu_{1\kappa} \vec{v}_{1\kappa} \frac{\alpha_{1\kappa}}{K_0} \left(\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{1\kappa}} \right)^n, \quad T_{\kappa} = \frac{\lambda_{1\kappa} \operatorname{Nu}_1 T_{1\kappa} + \lambda_{2\kappa} \operatorname{Nu}_2 T_{2\kappa}}{\lambda_{1\kappa} \operatorname{Nu}_1 + \lambda_{2\kappa} \operatorname{Nu}_2},$$

$$\sigma_{\kappa} = \alpha_{2\kappa} v_{f\kappa}^{\sigma} \left[p_{1\kappa} - \left(\frac{2}{3} \mu_{f\kappa}^{\sigma} + \lambda_{f\kappa}^{\sigma} \right) \beta_{T_{2\kappa}} (T_2 - T_{20}) \right], \quad v_{f\kappa}^* = \frac{\lambda_{f\kappa}^{\sigma} + (2/3) \mu_{f\kappa}^{\sigma}}{\lambda_{2\kappa}^{\sigma} + (2/3) \mu_{2\kappa}^{\sigma}},$$

$$Q_{\Sigma} = 4\pi b^2 \beta_{1\kappa} (T_{1\kappa} - T_{\kappa}), \quad b_{1\kappa} = \sqrt{K_{\kappa} \alpha_{2\kappa}},$$

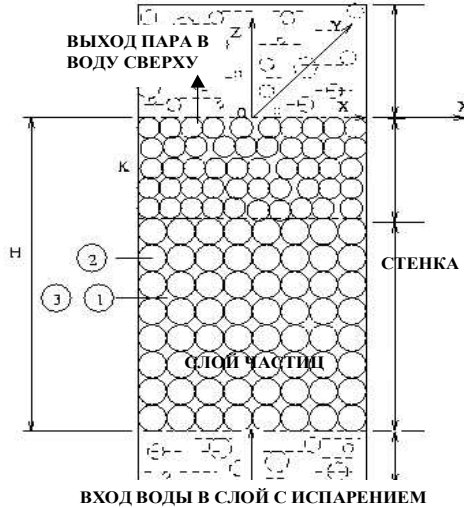


Рис.5.1.1 Структурна схема гетерогенного насиченого середовища, оточеного непроникним масивом

де b, b_1 - характерні радіуси частинок шару та порожнеч (пор) у шарі, K, c, β, λ^* - коефіцієнти проникності, теплоємності, теплообміну на межі з Σ - фазою [294] та теплопровідності; $\lambda_2^{\sigma}, \mu_2^{\sigma}$ - модулі пружності Ламе, σ_{κ} - ефективні напруження в шарі, κ - номер шару. Для числа Нуссельта за частинками покладемо $Nu_2 \approx 2$, а для рідкої фази використовуємо закон Фрослінга: $Nu_2 \approx 2 + 0,6Pr^{1/3} Re_v^{1/2}$.

Рівняння (5.1.1) записані для течії газу (пари), а для рідини рівняння енергії першої фази необхідно замінити наступним:

$$\rho_{1\kappa} c_{1\kappa} \left(\frac{\partial T_{1\kappa}}{\partial t} + \vec{v}_{1\kappa} \nabla T_{1\kappa} \right) = \text{div} (\lambda_{1\kappa}^* \nabla T_{1\kappa}) + Q_{\Sigma}.$$

Для газу можна скористатися термодинамічними формулами [409]:

$$\lambda_1 = \mu_1 \frac{c_1}{Pr}, \quad \rho_{1k}^0 = \frac{P_{1k}}{RT_{1k}}, \quad \frac{\mu_1}{\mu_{10}} = \left(\frac{T_1}{T_{10}} \right)^m, \quad (5.1.2)$$

де R - універсальна газова стала, Pr - число Прандтля, $n=10$, $m = 0,5 \pm 1,0$. При високих тисках співвідношення (5.1.2) правильні лише у вузьких межах по z . Вважається, що сили тяжіння врівноважують сили тертя у шарі, але система перебуває до псевдозрідження. Є контакт твердих частинок (гранул), проте їх кінетична енергія зневажливо мала.

Кінетична енергія хаотичного руху частинок та їх взаємодія через зіткнення, що призводять до $\sigma_{2*}^{kl} \neq 0$, також зневажливо малі. Несуча фаза – газ (пар), тому $\rho_1^0 \ll \rho_2^0$, кінетична енергія дрібномасштабного руху несучої фази порядку кінетичної енергії руху дисперсної фази x .

При дослідженні параметричних коливань в описаній системі слід мати на увазі, що через складність математичної моделі для її реалізації потрібне застосування чисельних методів та ЕОМ, тому може виникнути завдання розрізнення фізичної та чисельної нестійкості.

Двовимірна модель

Розглянемо далі течію теплоносія в моногранулярному середовищі в двовимірній постановці, нехтуючи зміною параметрів. Вважаючи, що рух відбувається знизу вгору і шар з боків межує з непроникним масивом, з рівнянь (5.1.1) з урахуванням вищевикладеного отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1^0}{\partial t} + \rho_1^0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) + u_1 \frac{\partial \rho_1^0}{\partial x} + w_1 \frac{\partial \rho_1^0}{\partial z} = 0, \quad \rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nabla p_1 + (\rho_1 - \rho_2) \vec{g} = \text{div} \sigma_r, \\ \rho_1 c_{1v} \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \nabla T_1 \right) = \alpha_1 R T_1 \frac{\partial \rho_1^0}{\partial t} + \text{div} (\lambda_1 \nabla T_1) + Q_2 + \mu_1 (u_1^2 + w_1^2) \frac{\alpha_1}{K}, \\ \rho_j c_j \frac{\partial T_j}{\partial t} = \text{div} (\lambda_j \nabla T_j) + (j-3) Q_2, \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

$$\rho_1^0 \left(1 + \frac{\alpha_2}{2} \right) \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nabla p_1 + \mu_1 \frac{\vec{v}_1}{K_0} \left(\frac{\alpha_{10}}{\alpha_1} \right)^n + \rho_1^0 \vec{g} = 0,$$

где $j=2,3$, $K = K_0 (\alpha_1 / \alpha_{10})^n$. Величини з нульовим індексом беруться при $T_j = T_{j0}$. Звідси випливає:

$$u_1 \ll w_1, \quad \frac{\partial \rho_1^0}{\partial x} \ll \frac{\partial \rho_1^0}{\partial z}, \quad u_1 = \left(1 + \frac{\alpha_2}{2} \right) \frac{K \alpha_2}{\mu_1 \alpha_1} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad w_1 = (\rho_1 + \rho_2 - \rho_1^0) \frac{gK}{\mu_1},$$

внаслідок чого $\vec{v}_1 \nabla \rho_1^0 \ll \rho_1^0 \operatorname{div} \vec{v}_1$ при $T_1 \approx c(x)(\rho_2 g z - p_0)$.

Вираз для вертикальної складової швидкості у першому наближенні відповідає закону Дарсі, оскільки $\rho_1^0 \ll \rho_1 + \rho_2$, а для горизонтальної швидкості містить фізичну суперечність: рух з позитивним градієнтом тиску у напрямку потоку, що можна пояснити грубістю прийнятого припущення $\rho_2 \partial u_2 / \partial t \ll \rho_1 \partial u_1 / \partial t$. Хоча $u_1 \gg u_2$, однак $\rho_1 \ll \rho_2$ і тому інерційні сили газу і частинок можуть мати однаковий порядок. Оскільки горизонтальні швидкості малі, прийmemo для u_1 закон Дарсі.

Крайові умови

Задаються початкові розподіли параметрів системи:

$$t = 0, \quad P_1 = P_1^0(x, z), \quad u_1 = u_1^0(x, z), \quad \alpha_1 = \alpha_1^0(x, z), \quad T_j = T_j^0(x, z), \quad (5.1.4)$$

Система вважається симетричною щодо вертикальної осі:

$$x = 0, \quad x = x_L, \quad u_1 = 0. \quad (5.1.5)$$

Умова рівності температур і теплових потоків на межі з непроникним масивом, з урахуванням $\alpha_1 \sim \alpha_2$, $\lambda_1 \ll \lambda_2$, дає:

$$x = x_L, \quad T_j = \text{idem}, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}. \quad (5.1.6)$$

На значній відстані від межі проникного шару з непроникним масивом температура постійна:

$$x = x_\infty, \quad \partial T_3 / \partial x = 0. \quad (5.1.7)$$

На нижній межі температури середовищ постійні:

$$z = -H, \quad T_j = T_{jH}, \quad j=1, 2, 3. \quad (5.1.8)$$

На верхній межі відомий тиск флюїду і задаються умови теплообміну з навколишнім середовищем та лінійність температури теплоносія:

$$z = 0, \quad P_1 = P_{1n}, \quad \frac{\partial T_1}{\partial z} = \text{const}, \quad \lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial z} = \lambda_{jc} (T_j - T_c), \quad j=2,3, \quad (5.1.9)$$

λ_{jc} - коефіцієнт теплообміну з навколишнім середовищем та T_c - температура навколишнього середовища.

Безрозмірна форма крайового завдання

Прийнявши такі масштаби довжини, часу, швидкості, тиску і температури: H , H^2/a_2^0 , a_2^0/H , $\mu_{10}a_2^0/K_0$ і ΔT , де ΔT - характерний перепад температури в системі, крайове завдання (5.1.3)-(5.1.9) для випадку $\alpha_1 = const$ можна записати:

$$u_1 = -\left(\frac{T_{10}}{T_1}\right)^m \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad \rho_1^0 = \kappa_p \frac{p_1 \cdot \text{Re}_*^2}{\text{Pe} \cdot T_1}, \quad \frac{\partial \rho_1^0}{\partial \text{Fo}} = -\rho_1^0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right),$$

$$w_1 = (1 - \alpha_1) \left[\text{Pe} - \kappa_p \text{Ra}^* (T_2 - T_{20}) - \text{Re}_*^2 \frac{p_1}{T_1} \right] \left(\frac{T_{10}}{T_1} \right)^m,$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = \text{Pe}(\alpha_1 - 1) [1 - \Delta_2 (T_2 - T_{20})] - \text{Re}_*^2 \frac{\alpha_1 p_1}{T_1}, \quad (5.1.10)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}} = (1 - \gamma_1) T_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) - \left(u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) + (\gamma_1 - 1)(u_1^2 + w_1^2) \left(\frac{T_{10}}{T_1} \right)^m \frac{T_1}{p_1} +$$

$$+ \frac{\gamma_1 \text{Pe} (T_1/T_{10})^m}{\alpha_1 \kappa_p \kappa_p \text{Re}_*^2 p_1} \left\{ T_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right) + m \left[\left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \xi \text{Nu}_1 T_1 (T_2 - T_1) \right\},$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \text{Fo}} = \frac{(1 - \alpha_1)^{-1}}{1 - \Delta_2 (T_2 - T_{20})} \left[\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \xi \frac{\text{Nu}_1}{\kappa_i} \left(\frac{T_1}{T_{10}} \right)^m (T_1 - T_2) \right], \quad \frac{\partial T_3}{\partial \text{Fo}} = a_{32} \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2} \right).$$

Крайові умови у безрозмірному вигляді:

$$\text{Fo} = 0, \quad p_1 = p_1^0(x, z), \quad T_j = T_j^0(x, z), \quad j=1, 2, 3; \quad (5.1.11)$$

$$x = 0, \quad \partial T_1 / \partial x = \partial T_2 / \partial x = 0, \quad x = x_\infty, \quad \partial T_3 / \partial x = 0. \quad (5.1.12)$$

$$x = x_L, \quad u_1 = 0, \quad T_j = \text{idem}, \quad \partial T_2 / \partial x = \lambda_{32} \partial T_3 / \partial x; \quad (5.1.13)$$

$$z = 0, \quad p_1 = p_{1n}, \quad \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial T_j}{\partial z} = N_{jn} (T_j - T_c), \quad j=2, 3; \quad (5.1.14)$$

$$z = -1, \quad T_j = T_{jn}, \quad j=1, 2, 3; \quad (5.1.15)$$

де $\text{Pe} = w_0 H / a_2^0$ - число Пекле, $w_0 = \rho_{20}^0 K g / \mu_{10}$, $\text{Re}_v = w_0 b_1 / \nu_{10}$ - число Рейнольдса по пару, $\text{Da} = \kappa / H^2$ - число Дарсі, $\text{Ra}^* = \text{GrPr}^* \text{Da}$ - число Релея (фільтраційне), $\text{Re}_*^2 = gH / (\Delta T)$, $\text{Gr} = g \Delta_2 H^3 \nu_{10}^{-2}$ - число Грасгофа,

$Fo = a_2^0 t / H^2$ - число Фур'є, $\kappa_a = a_2^0 / a_1^0$, $\kappa_p = \rho_{20}^0 / \rho_{10}^0$, $\kappa_\lambda = \lambda_2 / \lambda_1^0$, $a_{32} = a_3 / a_2^0$, $a_1^0 = \lambda_1^0 / (\rho_{10}^0 c_1)$, $N_{jn} = \lambda_{jc} H / \lambda_j$ - число Нуссельта, $\xi = s_{12} H^2 / b_1$ - параметр структури гранулярного шару, s_{12} - питома міжфазна поверхня. У прийнятій моделі для характерного радіусу пір виходить $b_1 = b \sqrt{2\pi(2-\pi/3)}$. Для більш пухких упаковок частинок характерний радіус пір дещо збільшується.

При мінімальних розмірах частинок і високих розмірах шару гетерогенну модель реалізувати складно з огляду на те, що рівняння енергії містять у правих частинах члени з добутком $\xi(T_2 - T_1)$, які при великих значеннях ξ у разі близьких температур викликають особливості типу $0 \cdot \infty$. Остання обставина дає сильну нестійкість при чисельному розв'язанні задачі, причому вона проявляється тим сильніше, чим менш виражена гетерогенність системи. Нижче встановлені межі застосування побудованої моделі.

5.2 Кінцево-різницеві схеми для чисельного моделювання параметричних коливань у суцільному гетерогенному середовищі

Крайова задача (5.1.10)-(5.1.14) вирішувалася чисельно кінцево-різницевиими методами на ЕОМ. Для цього було розроблено та реалізовано у вигляді ФОРТРАН-програм дві кінцево-різницеві схеми - явна та неявна, з аналізом відмінних рис кожної з них та областей їх застосування.

Явна КРС

Вводячи різницеву сітку з регульованими кроками просторової сітки та кроком за часом, похідні за просторовими змінними апроксимували правосторонніми різницями першого порядку, а похідні за часом - різницями вперед. Отримана явна КРС першого порядку точності для крайової задачі (5.1.10)-(5.1.14) досліджувалась на стійкість та точність і була випробувана на ЕОМ.

Різницевий аналог крайової задачі (5.1.10)-(5.1.14) реалізує обчислення значень шуканих функцій на n -му часовому шарі за відомими значеннями $(n-1)$ -го шару. КРС, як неважко переконатися, задовольняє умову апроксимації крайового завдання. Щоб хоча б приблизно оцінити величину кроків за часом, які забезпечують стійкість КРС, розглядали у спрощеній постановці задачі стійкості чисельної схеми. У початковий

момент часу всі параметри отримали збурення виду хвилі з амплітудами, залежними від часу, і далі простежили за еволюцією цих збурень. Якщо амплітуди збурень не зростають у часі, *KPC* стійка. В іншому випадку - нестійка і її використання на тривалому інтервалі неможливе.

Тут, на відміну від раніше розглянутих задач, збурення можливі лише малоамплітудні, оскільки вони - це похибки наближених обчислень. Збільшення числа вузлів сітки *KPC* веде до зменшення амплітуд, але якщо система нестійка, то цим шляхом досягти стійкості неможливо, можна лише збільшити (незначно, як правило) час наростання коливань параметрів.

З аналізу стійкості схеми виходить, що для дослідження стійкості *KPC* необхідно вирішити систему рівнянь, яка складніша за вихідну і тому також вимагає застосування ЕОМ. Існує багато різних способів подолання чисельної нестійкості, вони полягають у побудові стійких апроксимацій, тобто у заміні розв'язуваної системи її аналогом, що має стійкість. Засобів автоматичної стабілізації *KPC* (придушення нестійкості за допомогою параметричних коливань певного виду, як це було розглянуто вище для фізичних процесів), нам не відомо.

При чисельній нестійкості коливання, зазвичай, не короткохвильові, тому можна спростити вирішення завдання стійкості. Враховуючи специфіку задачі, отримані наближені умови зменшення похибки обчислень (стійкості *KPC*). Аналіз отриманих умов стійкості показав, що практична реалізація явної *KPC* ускладнена вимогою чисельної стійкості алгоритму, яку не завжди вдається задовольнити. Тому була побудована також абсолютно стійка неявна *KPC*, яка складніше розглянутої, але може успішно реалізовуватися для обчислень на ЕОМ.

Неявна KPC для вирішення крайової задачі

Побудована неявна кінцево-різницева схема для чисельного вирішення крайової задачі (5.1.10)-(5.1.14) заснована на методі дробових кроків [413], відповідно до якого вихідна крайова задача замінюється розщепленою. На нижньому часовому півшарі:

$$u_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \left(\frac{T_{10}}{T_1} \right)^m, \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} = \mathbf{Pe}(\alpha_1 - 1)[1 - \Delta_2(T_2 - T_{20})] - \mathbf{Re}_*^2 \frac{\alpha_1 p_1}{T_1},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho_1^0}{\partial \mathbf{Fo}} = -\rho_1^0 \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad w_1 = (1 - \alpha_1) \left[\mathbf{Pe} - \kappa_\rho \mathbf{Ra}^*(T_2 - T_{20}) - \mathbf{Re}_*^2 \frac{p_1}{T_1} \right] \left(\frac{T_{10}}{T_1} \right)^m,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{Fo}} &= (1 - \gamma_1) T_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + (\gamma_1 - 1) u_1^2 \left(\frac{T_{10}}{T_1} \right)^m \frac{T_1}{p_1} + \\ &+ \frac{\gamma_1 \mathbf{Pe} (T_1 / T_{10})^m}{\alpha_1 \kappa_a \kappa_\rho \mathbf{Re}_*^2 p_1} \left[T_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + m \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)^2 + \alpha \xi \mathbf{Nu}_1 T_1 (T_2 - T_1) \right], \quad \frac{1}{2} \frac{\partial T_3}{\partial \mathbf{Fo}} = a_{32} \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{Fo}} &= \frac{(1 - \alpha_1)^{-1}}{1 - \Delta_2 (T_2 - T_{20})} \left[\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \alpha \xi \frac{\mathbf{Nu}_1}{\kappa_k} \left(\frac{T_1}{T_{10}} \right)^m (T_1 - T_2) \right]. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Аналогічно - на верхньому часовому півшарі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial z} &= \mathbf{Pe} (\alpha_1 - 1) [1 - \Delta_2 (T_2 - T_{20})] - \mathbf{Re}_*^* \frac{\alpha_1 p_1}{T_1}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_1^0}{\partial \mathbf{Fo}} = -\rho_1^0 \frac{\partial w_1}{\partial z}, \\ u_1 &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} \left(\frac{T_{10}}{T_1} \right)^m, \quad w_1 = (1 - \alpha_1) \left[\mathbf{Pe} - \kappa_\rho \mathbf{Ra}^* (T_2 - T_{20}) - \mathbf{Re}_*^* \frac{p_1}{T_1} \right] \left(\frac{T_{10}}{T_1} \right)^m, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{Fo}} &= (1 - \gamma_1) T_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} - w_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} + (\gamma_1 - 1) w_1^2 \left(\frac{T_{10}}{T_1} \right)^m \frac{T_1}{p_1} + \\ &+ \frac{\gamma_1 \mathbf{Pe} (T_1 / T_{10})^m}{\alpha_1 \kappa_a \kappa_\rho \mathbf{Re}_*^2 p_1} \left[T_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + m \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \right)^2 + (1 - \alpha) \xi \mathbf{Nu}_1 T_1 (T_2 - T_1) \right], \quad \frac{1}{2} \frac{\partial T_3}{\partial \mathbf{Fo}} = a_{32} \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{Fo}} &= \frac{(1 - \alpha_1)^{-1}}{1 - \Delta_2 (T_2 - T_{20})} \left[\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + (1 - \alpha) \xi \frac{\mathbf{Nu}_1}{\kappa_k} \left(\frac{T_1}{T_{10}} \right)^m (T_1 - T_2) \right]. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

де α - параметер апроксимації: $\alpha \in [0; 1]$.

Розщеплення за просторовими змінними звело двовимірну крайову задачу до двох одновимірних, що дозволяє скоротити обсяг обчислювальних робіт. Вибір здійснюється за умов оптимізації обчислень. Різницевий аналог рівнянь (5.2.1), (5.2.2) виходить так. Похідні всередині двовимірної області апроксимуються центральними різницями другого порядку точності, а за часом першого порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_n^{i+1,j} - f_n^{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_n^{i+1,j} - 2f_n^{i,j} + f_n^{i-1,j}}{(\Delta x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Fo}} = \frac{f_{n+1}^{i,j} - f_n^{i,j}}{\Delta \tau},$$

де Δx , $\Delta \tau$ - відповідно кроки кінцево-різницевої сітки за простором і за часом. На межі області похідні апроксимувалися правосторонніми

різницями першого порядку. По координаті z аналогічним чином кінцево-різницева сітка відрізняється від раніше розглянутої заміною верхнього індексу i на j .

Різницевий аналог крайової задачі (5.2.1), (5.2.2) з урахуванням викладеного має наступний вигляд. На нижньому часовому півшарі:

$$\begin{aligned} (\rho_{1,n+0.5}^0)^{i,j} &= (\rho_{1,n}^0)^{i,j} + (\rho_{1,n}^0)^{i,j} \frac{\tau}{2h_x} \left[\beta_1 (u_{1,n+0.5}^{i-1,j} - u_{1,n+0.5}^{i+1,j}) + (1-\beta_1) (u_{1,n}^{i-1,j} - u_{1,n}^{i+1,j}) \right] \\ p_{1,n}^{i,j+1} &= p_{1,n}^{i,j-1} + 2h_z \left\{ \mathbf{Pe}(\alpha_1 - 1) [1 + \Delta_2 (T_{20} - T_{2,n}^{i,j})] - \alpha_1 \mathbf{Re}_*^2 \frac{p_{1,n}^{i,j}}{T_{1,n}^{i,j}} \right\}, \quad u_{1,n}^{i,j} = \frac{p_{1,n}^{i-1,j} - p_{1,n}^{i+1,j}}{2h_x} \left(\frac{T_{10}}{T_{1,n}^{i,j}} \right)^m, \\ w_{1,n}^{i,j} &= (1 - \alpha_1) \left\{ \mathbf{Pe} [1 + \Delta_2 (T_{20} - T_{2,n}^{i,j})] - \mathbf{Re}_*^2 \frac{p_{1,n}^{i,j}}{T_{1,n}^{i,j}} \right\} \left(\frac{T_{10}}{T_{1,n}^{i,j}} \right)^m, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{1,n+0.5}^{i,j} - T_{1,n}^{i,j}}{\tau} &= \frac{1 - \gamma_1}{2h_x} \left[\beta T_{1,n+0.5}^{i,j} + (1 - \beta) T_{1,n}^{i,j} \right] \left[\beta_1 (u_{1,n+0.5}^{i+1,j} - u_{1,n+0.5}^{i-1,j}) + (1 - \beta_1) (u_{1,n}^{i+1,j} - u_{1,n}^{i-1,j}) \right] + \\ &+ (1 - \beta_1) (u_{1,n}^{i,j})^2 \left[\frac{(\gamma_1 - 1) \left[\beta T_{1,n+0.5}^{i,j} + (1 - \beta) T_{1,n}^{i,j} \right]^{m+1}}{\left[\beta_2 p_{1,n+0.5}^{i,j} + (1 - \beta_2) p_{1,n}^{i,j} \right] T_{10}^m} + \left[\beta_1 (u_{1,n+0.5}^{i,j})^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. (1 - \beta_1) (u_{1,n}^{i,j})^2 \right] \frac{(\gamma_1 - 1) \left[\beta T_{1,n+0.5}^{i,j} + (1 - \beta) T_{1,n}^{i,j} \right]^{m+1}}{\left[\beta_2 p_{1,n+0.5}^{i,j} + (1 - \beta_2) p_{1,n}^{i,j} \right] T_{10}^m} + \right. \\ &+ \frac{1}{2h_x} \left[(\beta_1 - 1) u_{1,n}^{i,j} - \beta_1 u_{1,n+0.5}^{i,j} \right] \left[\beta (T_{1,n+0.5}^{i+1,j} - T_{1,n+0.5}^{i-1,j}) + (1 - \beta) (T_{1,n}^{i+1,j} - T_{1,n}^{i-1,j}) \right] + \\ &+ \frac{\gamma_1 \mathbf{Pe} \left[\beta T_{1,n+0.5}^{i,j} + (1 - \beta) T_{1,n}^{i,j} \right]^m}{\alpha_1 \kappa_a \kappa_\rho \mathbf{Re}_*^2 \left[\beta_2 p_{1,n+0.5}^{i,j} + (1 - \beta_2) p_{1,n}^{i,j} \right] T_{10}^m} \left\{ \left[\beta_2 T_{1,n+0.5}^{i,j} + (1 - \beta_2) T_{1,n}^{i,j} \right] \left[\beta (T_{1,n+0.5}^{i+1,j} - 2T_{1,n+0.5}^{i,j} + T_{1,n+0.5}^{i-1,j}) + \right. \right. \\ &+ (1 - \beta) (T_{1,n}^{i+1,j} - 2T_{1,n}^{i,j} + T_{1,n}^{i-1,j}) \left. \right] \frac{1}{h_x^2} + \frac{m}{4h_x^2} \left[\beta_2 (T_{1,n+0.5}^{i+1,j} - T_{1,n+0.5}^{i-1,j}) + (1 - \beta_2) (T_{1,n}^{i+1,j} - T_{1,n}^{i-1,j}) \right]^2 + \\ &+ \alpha_2 \xi \mathbf{Nu}_1 \left[\beta_2 T_{1,n+0.5}^{i,j} + (1 - \beta_2) T_{1,n}^{i,j} \right] \left[\beta_5 T_{2,n+0.5}^{i,j} + (1 - \beta_5) T_{2,n}^{i,j} - \beta_5 T_{1,n+0.5}^{i,j} + (\beta_5 - 1) T_{1,n}^{i,j} \right] \left. \right\}, \\ \frac{T_{2,n+0.5}^{i,j} - T_{2,n}^{i,j}}{\tau} &= (1 - \alpha_1) \left\{ 1 + \Delta_2 \left[T_{20} - \beta_4 T_{2,n+0.5}^{i,j} + (\beta_4 - 1) T_{2,n}^{i,j} \right] \right\} = \frac{1}{h_x^2} \left[\beta (T_{2,n+0.5}^{i+1,j} - 2T_{2,n+0.5}^{i,j} + \right. \\ &+ T_{2,n+0.5}^{i-1,j}) + (1 - \beta) (T_{2,n}^{i+1,j} - 2T_{2,n}^{i,j} + T_{2,n}^{i-1,j}) \left. \right] + \frac{\alpha_2 \xi \mathbf{Nu}_1}{\kappa_k T_{10}^m} \left[\beta_3 T_{1,n+0.5}^{i,j} + (1 - \beta_3) T_{1,n}^{i,j} \right]^m. \end{aligned}$$

$$\cdot \left[\beta_5 (T_{1,n+0.5}^{i,j} - T_{2,n+0.5}^{i,j}) + (1 - \beta_5) (T_{1,n}^{i,j} - T_{2,n}^{i,j}) \right],$$

$$\frac{T_{3,n+0.5}^{i,j} - T_{3,n}^{i,j}}{\tau} = \frac{a_{32}}{h_x^2} \left[\beta (T_{3,n+0.5}^{i+1,j} - 2T_{3,n+0.5}^{i,j} + T_{3,n+0.5}^{i-1,j}) + (1 - \beta) (T_{3,n}^{i+1,j} - 2T_{3,n}^{i,j} + T_{3,n}^{i-1,j}) \right]$$

Аналогічно - на верхньому часовому півшарі. Різницевий аналог крайових умов має вид

$$p_{1,1} = p_1^0(i, j), \quad T_{1,1} = T_1^0(i, j), \quad T_{2,1} = T_2^0(i, j), \quad T_{3,1} = T_3^0(i, j),$$

$$p_{1,n}^{i,1} = p_1^{top}(i), \quad T_{1,n}^{i,1} = \frac{1}{3} (4T_{1,n}^{i,2} - T_{1,n}^{i,3}), \quad T_{3,n}^{i,j} = \frac{1}{3} (4T_{3,n}^{i-1,j} - T_{3,n}^{i-2,j});$$

$$T_{l,n}^{i,1} = \frac{T_{l,n}^{i,3} - 4T_{l,n}^{i,2} + 2h_z N_l^{top} T_{top}}{2h_z N_l^{top} - 3}, \quad l = 2, 3; \quad T_{1,n}^{i,j} = T_{1H}(i), \quad T_{2,n}^{i,j} = T_{2H}(i), \quad T_{3,n}^{i,j} = T_{3H}(i);$$

$$T_{1,n}^{1,j} = \frac{1}{3} (4T_{1,n}^{2,j} - T_{1,n}^{3,j}), \quad T_{2,n}^{1,j} = \frac{1}{3} (4T_{2,n}^{2,j} - T_{2,n}^{3,j}); \quad (5.2.4)$$

$$u_{1,n}^{i,j} = 0, \quad T_{1,n}^{i,j} = T_{2,n}^{i,j} = T_{3,n}^{i,j}, \quad 3T_{2,n}^{i,j} - 4T_{2,n}^{i-1,j} + T_{2,n}^{i-2,j} = k_{32} (3T_{3,n}^{1,j} - 4T_{3,n}^{2,j} + T_{3,n}^{3,j}).$$

Отримана різницева крайова задача (5.2.3), (5.2.4) вирішувалася чисельно на ЕОМ. Застосовувались дві триточкові скалярні прогони по x і z . Апроксимуючі множники служать для оптимізації обчислень. Нелінійні члени обчислювались ітеративно: спочатку беруться значення параметрів попереднього часового шару, потім - попередньої ітерації і так на кожному часовому шарі чи на півшарі. Ітеративний процес припиняється, коли дві послідовні ітерації відрізняються на величину, меншу за заданий рівень. Далі відбувається перехід до наступного часового шару (півшару). При слабкій нелінійності і малому часовому кроці ітеративна процедура не потрібна.

Для рішення триточкового крайового завдання вводилися рекурентні формули: на нижньому часовому півшарі та на верхньому, відповідно. Якщо переписати систему рівнянь у тридіагональному вигляді на нижньому та на верхньому півшарі, то матимемо прогінні коефіцієнти. Прогін правий і лівий. На верхньому часовому півшарі всі формули для правої прогонки.

5.3 Обчислювальний експеримент з параметричних коливань у газонасиченому гранулярному середовищі, оточеному непроникним масивом

В описаній фізичній системі "насичене теплоносим (або охолоджуючим) флюїдом гранулярне середовище - теплопровідний непроникний масив" за певних умов можуть виникати параметричні коливання, які в одних технологічних процесах необхідно придушувати, в інших, навпаки, збуджувати. Порушувати і придушувати такі коливання можна за допомогою зовнішніх полів (електромагнітних, акустичних тощо).

Електромагнітне управління процесом можливе, якщо хоча б одне із середовищ електропровідне. При цьому можна розглянути, наприклад, випадки порушення коливань збуренням початкових параметрів системи, впливом об'ємних і поверхневих зовнішніх сил (коливання тиску і температури теплоносія) і т.п. Створене матзабезпечення дозволяє досліджувати такі фізичні ситуації:

- Коливання в початковий момент часу відсутні і зовнішніх впливів, що збурюють, немає;
- У початковий момент є параметричні коливання характеристик системи, а зовнішні збурення відсутні;
- Є зовнішні змінні впливи (електромагнітне, акустичне та інші поля);
- Різні комбінації трьох попередніх ситуацій.

Складність розрахунку коливальних процесів на ЕОМ посилюється тим, що чисельну нестійкість, коливання помилок наближених обчислень не завжди можна відокремити від коливань параметрів фізичної системи. Тому тут необхідний особливо ретельний аналіз одержуваних розрахункових даних та їх перевірка на адекватність.

Розрахунок параметрів системи у незбуреному стані

Створене матзабезпечення було апробовано для вирішення завдання першої фізичної ситуації. Результати розрахунків наведено на Рис. 5.3.2-

5.3.5. Значення параметрів такі [171]: $K = 1,510^{-4} \text{ м}^2$, $H = 10^3 \text{ м}$, $\Delta T = 200^\circ \text{ К}$, $\lambda_2^0 = 1,58 \text{ Вм} / (\text{м} \cdot \text{град})$, $\lambda_4^0 = 24,1 \cdot 10^{-3} \text{ Вм} / (\text{м} \cdot \text{град})$, $\alpha_1 = 0,26$, $\rho_{10}^0 = 0,58 \text{ кг} / \text{м}^3$, $\rho_{20}^0 = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$, $\mu_{10} = 124 \cdot 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$, $\gamma_1 = 1,28$, $a_1^0 = 2,04 \cdot 10^{-5}$, $a_2^0 = 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{с}$, $\beta_{T2} = 10^{-5} \text{ 1/град}$, $P_{1m} = 1,52 \cdot 10^5 \text{ Н} / \text{м}^2$, $T_{10} = 1,865$, $\text{Re}^2 = 0,113$, $\text{Gr} = 9,35 \cdot 10^{22}$, $\text{Pe} = 5 \cdot 10^4$, $\text{Da} = 1,5 \cdot 10^{-20}$, $\text{Pr} = 1,05 \cdot 10^{-3}$, $Nu_1 = 2,01$, $\text{Ra}^* = 47,7$, $T_j^0(x, z) = T_{j0}^0 - c_j z$, $c_j = \text{const}$.

Рис. 5.3.2, 5.3.3 показують розрахунки для грубої кінцево-різницевої сітки 11x6, а Рис. 5.3.4, 5.3.5 – для сітки 21x11. Дві послідовні ітерації на кожному часовому шарі при кроці за часом не більше 10^{-8} ($Fo=10^{-5}$ відповідає 1 року за прийнятих значень параметрів природної підземної системи) повністю збігаються з точністю до п'яти значущих цифр.

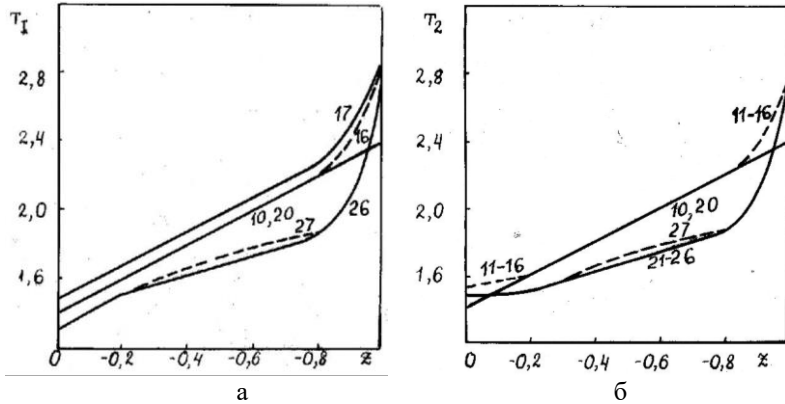


Рис. 5.3.2 Розподіл температури пари (а) та частинок (б) у гранулярному шарі: сітка 11x6; індекси ij , i відповідають двом перерізам по x : $i=1 - x=0$, $i=2 - x=1$; j - різним часовим моментам: $j=0, Fo=0$; $j=1-7, Fo=10^{-10}-10^{-4}$.

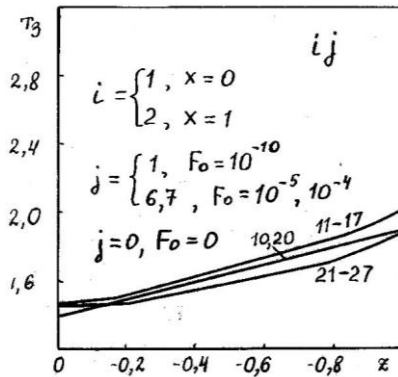


Рис. 5.3.3а Розподіл температури навколишнього непроникного масиву: сітка 11x6

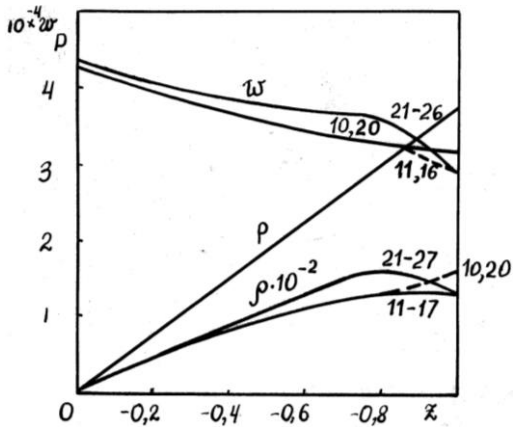


Рис. 5.3.3б Розподіл швидкості, щільності, тиску флюїду у шарі: сітка 11x6; індекси ij , i відповідають двом перерізам по x : $i=1 - x=0$, $i=2 - x=1$; j відповідають різним часовим моментам: $j=0$, $Fo=0$; $j=1-7$, $Fo=10^{-10}-10^{-4}$.

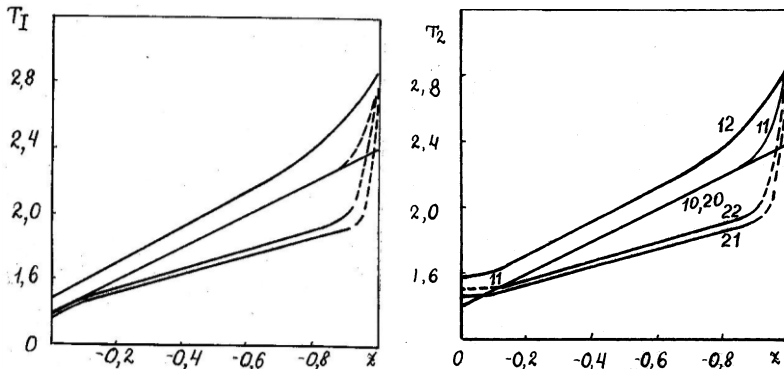


Рис. 5.3.4а Розподіл температури флюїду у шарі: сітка 21x11

Рис. 5.3.4б Розподіл температури частинок у шарі:

сітка 21x11, індекси ij , i відповідають двом перерізам по x : $i=1 - x=0$, $i=2 - x=1$; j відповідають різним часовим моментам: $j=0$, $Fo=0$; $j=1-7$, $Fo=10^{-10}-10^{-4}$.

Виняток становить лише горизонтальна швидкість течії, яка зневажливо мала порівняно з вертикальною (не більше 1%, а в основному на 4-6 десяткових порядки менше – залежно від способу упаковки гранул шару).

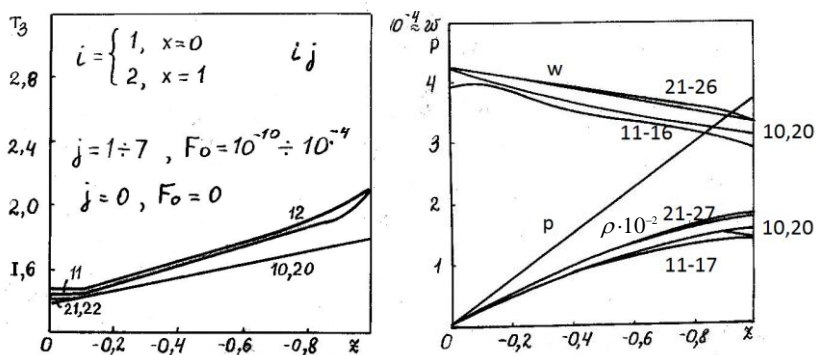


Рис. 5.3.5а Розподіл температури навколишнього непроникного масиву: сітка 21×11

Рис. 5.3.5б Розподіл швидкості, щільності, тиску флюїду у шарі: сітка 21×11 ; індекси ij , i відповідають двом перерізам по x : $i=1 - x=0$, $i=2 - x=1$; j відповідають різним часовим моментам: $j=0, Fo=0$; $j=1-7, Fo=10^{-10}-10^{-4}$.

Початковий крок за часом не більше 10^{-8} , оскільки в іншому випадку похибка обчислень перевищує допустимий рівень і деякі з характеристик виходять за межі області допустимих значень, внаслідок чого рахунок припиняється. Зі збільшенням параметра ζ (зменшенням розмірів гранул шару) знижується вплив гетерогенності системи і погіршується збіжність КРС (необхідний крок у часі зменшується). Це призводить до того, що при малих розмірах частинок (гранул), коли характерний час вирівнювання температури в системі малий, цю гетерогенну модель системи застосовувати недоцільно, оскільки вона значно складніша за квазігомогенні моделі, а результати за двома моделями близькі. Більш того, при дуже малих розмірах частинок гетерогенна модель може дати навіть невірні результати через великі похибки, пов'язані з великою величиною ζ .

Вищеописані дослідження явної КРС показали, що для стійкості схеми потрібен крок за часом не більше $10^{-8}-10^{-6}$ (при зміні z від -1 до 0), а в цілому він приблизно такого ж порядку, як і для неявної схеми, що має більш складну реалізацію. Але для великих просторових сіток крок за часом може бути значно більшим. Розрахунки на різницевих сітках 11×6 та 21×11 , як видно з Рис. 5.3.2, 5.3.3 та Рис. 5.3.4, 5.3.5 помітно відрізняються лише поблизу вільної поверхні проникного гранулярного

шару і на нижній межі $z=-1$, тоді як в основній частині шару різниця обчислень на цих двох сітках незначна, в цілому вона менше 5%. Ще менша відмінність розрахунків на сітках 21×11 та 41×21 . Проте остання сітка потребує значно більшого обсягу оперативної пам'яті. Можна застосувати значно кращу сітку, що дає високу точність. Однак отримати прийнятну точність обчислень можливо і при порівняно грубій сітці, простий у реалізації.

Як видно з Рис. 5.3.2-5.3.5, ефекти нестационарності системи помітні приблизно з $Fo=10^{-7}$, що свідчить про її інерційність. Відмінність температур текучого середовища і частинок проникного шару проявляється, головним чином, поблизу вільної поверхні, де теплоносії спливає в навколишній простір, а всередині шару всі параметри практично лінійно залежать від вертикальної координати z , лише при $z=0$ і $z=-1$ нелінійність істотна (кінцеві, примежові ефекти). Щільність теплоносія та швидкість його руху в гранулярному шарі є слабонелінійними функціями z , які повільно змінюються з часом.

Всі параметри системи практично не залежать від x у всій області, що розглядається, крім вузької околиці межі гранулярного шару з навколишнім непроникним масивом, де є суттєві температурні неоднорідності. У цих досить вузьких (примежових) областях швидкість руху флюїду вища, ніж у решті шару, на 5-15% (збільшення швидкості спостерігається з наближенням до нижньої межі шару $z=-1$). Найбільш широкий діапазон зміни щільності текучого середовища (0-30%).

Зворотний вплив проникного гранулярного шару на навколишній непроникний масив досить слабкий. Збурення температури масиву в міру віддалення від межі з проникним шаром різко зменшується, так що в багатьох практичних випадках його можна не враховувати (Рис. 5.3.3, 5.3.5), беручи до уваги тільки тепловий потік з шару в масив, що його оточує. Останнє можна спрощено врахувати в граничних умовах, опустивши рівняння теплопровідності непроникного масиву, якщо розподіл температури в масиві знати не потрібно. Таке спрощення математичної моделі системи можливе у всіх випадках, коли непроникний масив має великий термічний опір та виконує роль утеплювача. Якщо ж він служить для відведення теплоти, то необхідно використовувати розроблену модель та матзабезпечення для ЕОМ, які у загальному дозволяють проводити розрахунок термогідродинамічних процесів у насиченому гранулярному середовищі та аналіз, досліджувати взаємодію температурних, гідродинамічних, електромагнітних та інших полів середовищ, що входять до системи.

Врахування нестационарності, неізотермічності, гетерогенності та інших ефектів дозволяє виявити нові закономірності, використання яких у технологічних установках та процесах може призвести до інтенсифікації та оптимізації процесів та пристроїв. Апробоване таким чином матзабезпечення буде далі використано для дослідження параметричних коливань в описаній системі.

Збурення початкового стану системи

У розглянутому прикладі розподіл температур у початковий момент часу був рівномірним по x і лінійним по z , температури флюїду та частинок збігалися, температура непроникного масиву трохи відрізнялась. Далі досліджується випадок збуреного початкового стану теплоносія, що надходить у шар:

$$T_1^0(x, z) = T_{10}^0(x, z) + \theta_1^0 \sin k_1 x \cdot \sin m_1 z, \quad (5.3.1)$$

де $T_{10}^0(x, z)$ - початковий рівномірний розподіл температури, θ_1^0 - амплітуда збурення, k_1, m_1 - хвильові числа збурення. Фізично це може бути як наявність аномальних термопроявів (наприклад, у технологічній установці з гранулярним засипанням внаслідок перебоїв у подачі газу чи пари), а в підземному проникному шарі [172] – як результат виходу глибинних джерел теплоти, особливо - у вулканічних областях).

Результати комп'ютерного моделювання параметричних коливань системи з урахуванням (5.3.1) для $\zeta=4 \cdot 10^4$ наведено нижче. Еволюція температурних полів простежується по Рис. 5.3.6-5.3.9. Температура нижньої межі проникного шару змінюється в початковий момент часу стрибком і далі залишається практично постійною, як і у попередньому випадку. Стрибок температури на нижній межі призводить до зростання температури на межі розділу проникного та непроникного масивів ($Fo=2 \cdot 10^{-9}$).

Приблизно до $Fo=2 \cdot 10^{-6}$ картина залишається майже незмінною за всіма параметрами системи, а далі - поступове вирівнювання температури теплоносія, що рухається в шарі. Але вже при $Fo=2 \cdot 10^{-5}$ розрахунок припиняється через чисельну нестійкість, що відбувається, в основному при $x=0,4$ - незалежно від кроку алгоритму за часом і початкового розподілу температури (коливального чи рівномірного). Варіювання фізичних характеристик системи (пористості, розмірів частинок шару, початкових розподілів тощо) не впливає на виявлену нестійкість процесу: при $x=0,4, Fo=2 \cdot 10^{-5}$ різке зростання температури

газу призводить на наступному кроці до зупинки чисельного розв'язку через великі похибки просторової сітки з малою кількістю вузлів.

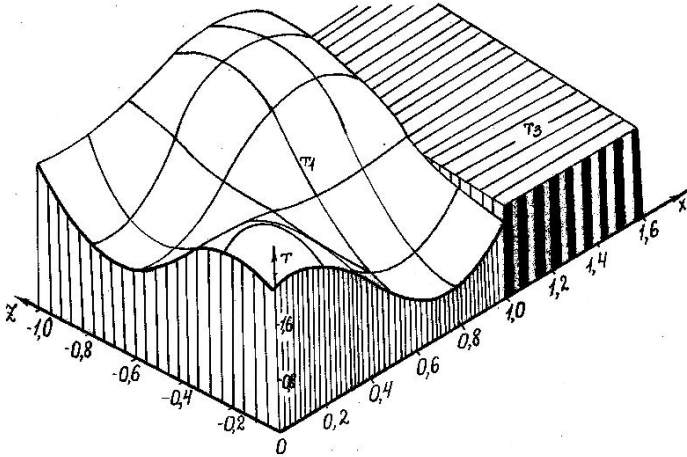


Рис. 5.3.6 Початковий розподіл температури системи:
 $Fo=0$, варіант В1, $x \in [0,1]$ - T_1, T_2 , $x \in (1, \infty)$ - T_3

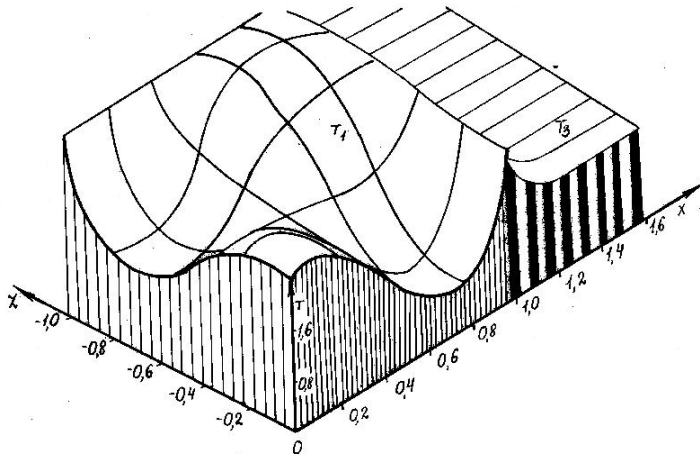


Рис. 5.3.7 Еволюція поля температур системи:
 $Fo = 2 \cdot 10^{-9}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-11}$, $\alpha = 0,26$, $\xi = 4 \cdot 10^4$

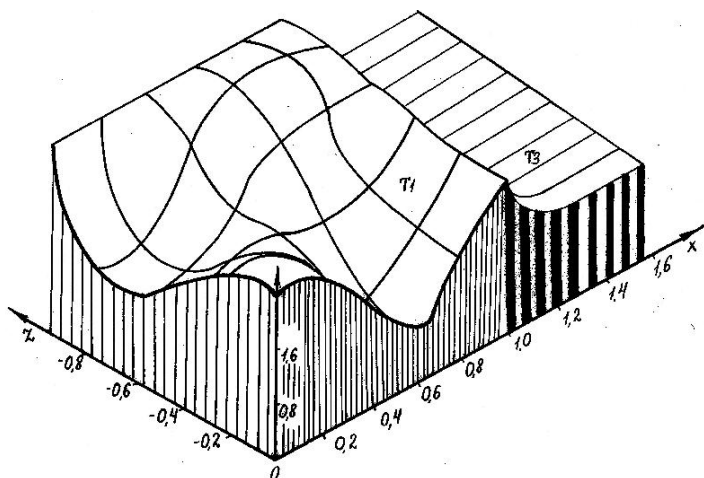


Рис. 5.3.8 Еволюція поля температур у гранулярному шарі та навколишньому масиві: $Fo = 2 \cdot 10^{-6}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-8}$, $\alpha = 0,26$, $\xi = 4 \cdot 10^4$

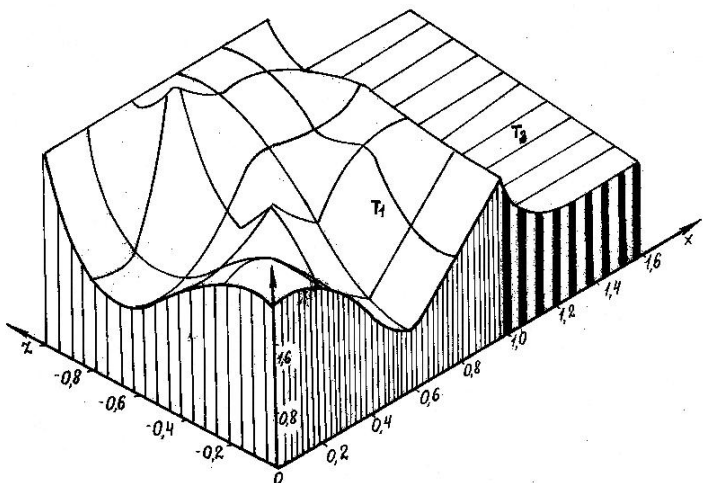


Рис. 5.3.9 Еволюція поля температур у гранулярному шарі та навколишньому масиві: $Fo = 2 \cdot 10^{-5}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-7}$, $\alpha_1 = 0,26$, $\xi = 4 \cdot 10^4$

Температура гранул проникного шару змінюється стрибком в початковий момент і надалі практично не змінюється (флюїд не встигає за проміжок часу, що розглядається, істотно змінити температуру частинок шару, через який він протікає). Нестійкість температури мало впливає на інші параметри системи, які відчувають слабші "биття" в окремих частинах аналізованої області, як видно з Рис. 5.3.10-5.3.21:

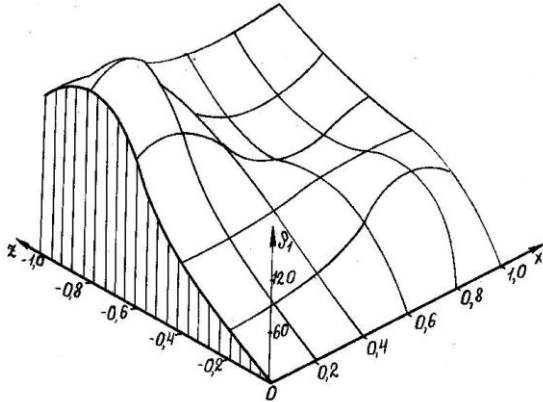


Рис. 5.3.10 Еволюція поля щільності флюїду у гранулярному шарі:
варіант В1, $Fo = 0$

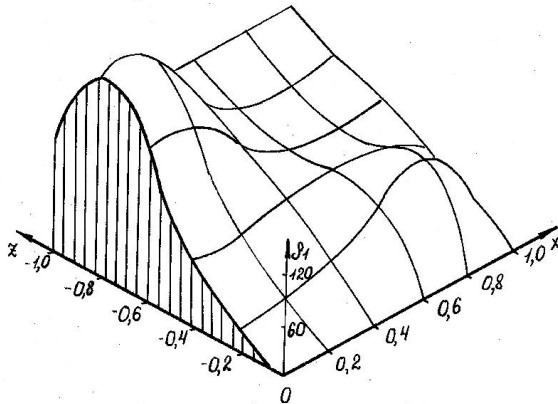


Рис. 5.3.11 Еволюція поля щільності флюїду у гранулярному шарі:
варіант В1, $Fo = 2 \cdot 10^{-9}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-11}$

Це пояснюється значною величиною похибки розрахунку, пов'язаною із застосуванням сітки з малим числом вузлів.

Випадки $\zeta=4 \cdot 10^4$ і $\zeta=4 \cdot 10^2$ (характерний розмір частинок-гранул становить, відповідно, порядку 0,01 і 0,1 висоти шару) відрізняються тим, що при більших частинках вирівнювання температур йде не тільки від межі розділу непроникного і проникного масивів, але також і від осі.

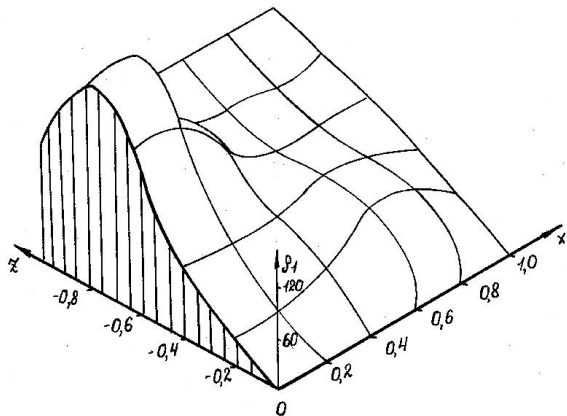


Рис. 5.3.12 Еволюція поля щільності флюїду у гранулярному шарі:
варіант В1, $Fo = 2 \cdot 10^{-7}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-9}$

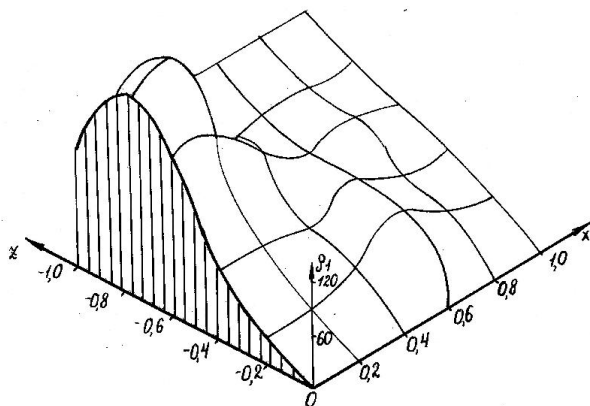


Рис. 5.3.13 Еволюція поля щільності флюїду у гранулярному шарі:
варіант В1, $Fo = 2 \cdot 10^{-5}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-7}$

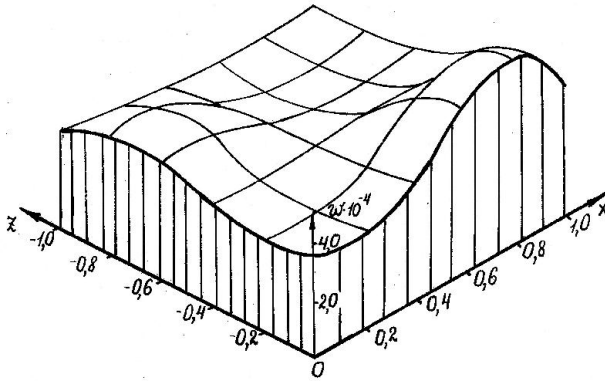


Рис. 5.3.14 Еволюція вертикальної швидкості флюїду: $Fo = 0$

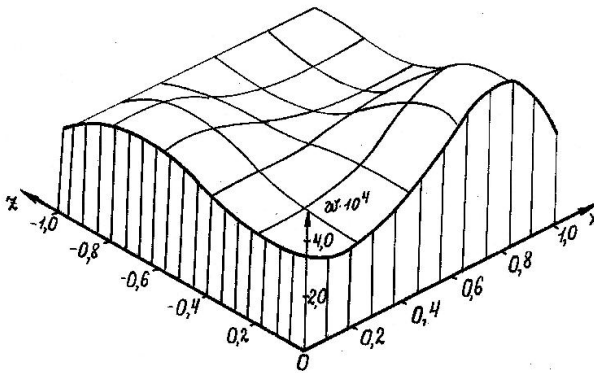


Рис. 5.3.15 Еволюція вертикальної швидкості флюїду у шарі: варіант В1,
 $Fo = 2 \cdot 10^{-9}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-11}$

Зазначені похибки обчислень більш виражені, як видно з наведених нижче даних. Розрахунок для $\zeta = 4 \cdot 10^6$ майже збігається з випадком $\zeta = 4 \cdot 10^4$, тобто вплив гетерогенності системи починає губитися за цих значень параметра ζ . Оскільки застосовується стійка (неявна) кінцево-різницька схема, чисельної нестійкості немає, але сітка є занадто грубою і не дозволяє розраховувати швидкоплинні процеси. Перший варіант розрахунків, що відповідає значенню $\zeta = 4 \cdot 10^4$ демонструє особливості поведінки системи при слабкому прояві гетерогенності (неоднорідності)

системи «гранулярний шар – теплоносний флюїд», коли неоднорідність просторової структури впливає на поведінку системи помітним чином, але все ж таки не так сильно, як при $\zeta=4 \cdot 10^2$. Останній випадок розглянуто нижче.

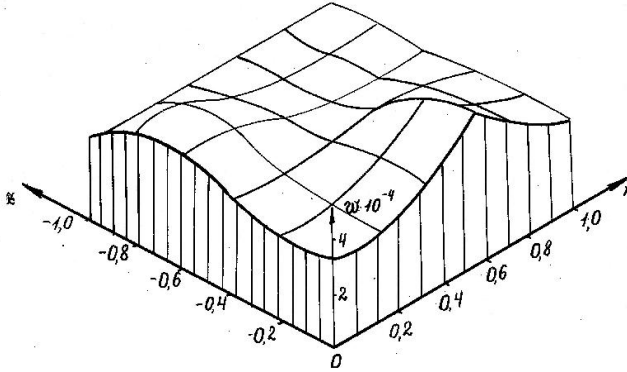


Рис. 5.3.16 Еволюція вертикальної швидкості флюїду у гранулярному шарі: варіант В1, $Fo = 2 \cdot 10^{-7}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-9}$

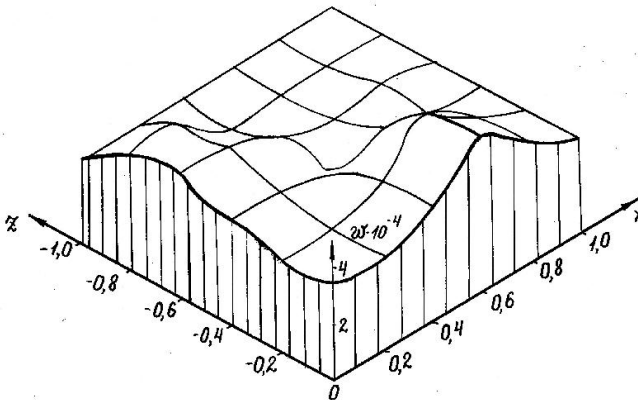


Рис. 5.3.17 Еволюція вертикальної швидкості флюїду: варіант В1, $Fo = 2 \cdot 10^{-5}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-7}$

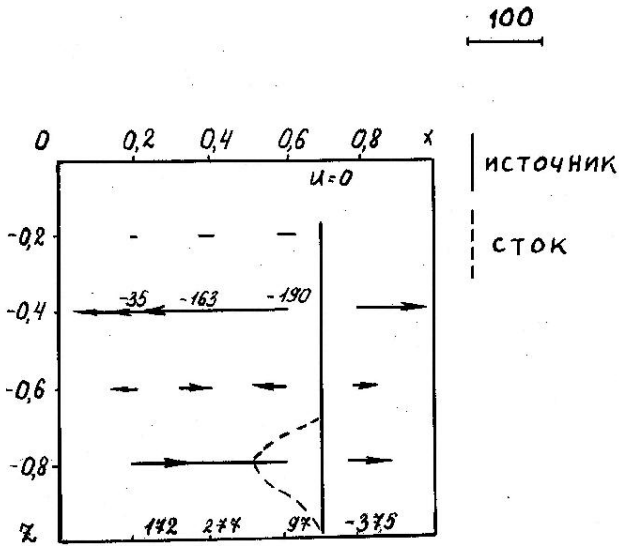


Рис. 5.3.18 Еволюція горизонтальної швидкості течії флюїду в гранулярному шарі: варіант В1, $Fo=0$

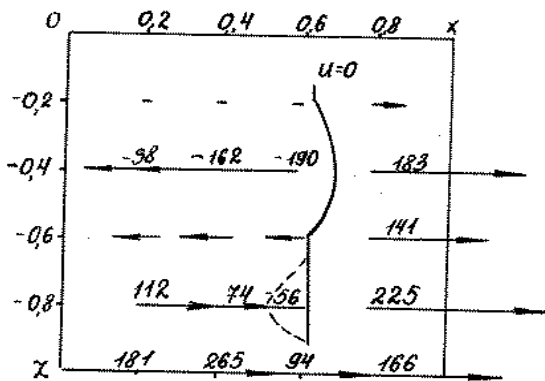


Рис. 5.3.19 Еволюція горизонтальної швидкості течії флюїду в гранулярному шарі: варіант В1, $Fo=2 \cdot 10^{-9}$, $\Delta Fo=2 \cdot 10^{-11}$

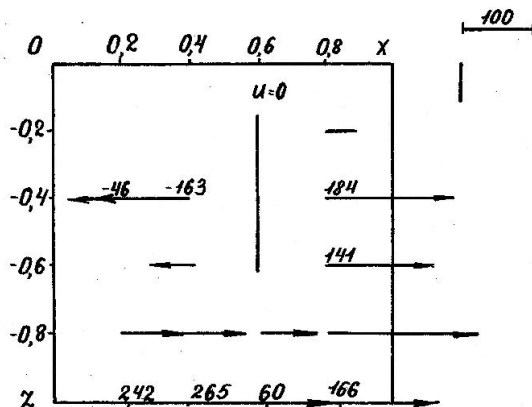


Рис. 5.3.20 Еволюція горизонтальної швидкості течії флюїду в гранулярному шарі: варіант В1, $Fo = 2 \cdot 10^{-7}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-9}$

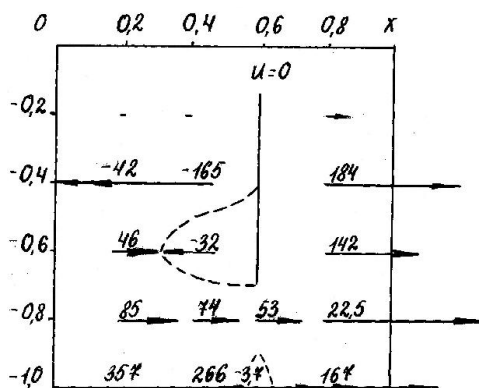


Рис. 5.3.21 Еволюція горизонтальної швидкості течії флюїду в гранулярному шарі: варіант В1, $Fo = 2 \cdot 10^{-5}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-7}$

Ця модель гетерогенного насиченого шару реалізована вперше. Зазвичай подібні системи розглядаються при спрощуючих припущеннях щодо локальної термодинамічної рівноваги та інших. Але якщо прийняти гіпотезу про миттєве вирівнювання температури частинок і флюїду, що

протікає, то цей випадок буде дуже грубим і не годиться для детального дослідження поведінки системи відбору теплоти від гранулярного шару або, навпаки, про нагрівання гранул протікаючим флюїдом.

5.4 Вплив параметрів фаз та структури гетерогенного середовища на поширення параметричних коливань

Поля щільності та швидкості руху теплоносія розраховувались за отриманими розподілами температурних полів (на кожному часовому етапі). Аналіз даних на Рис. 5.3.9-5.3.21, показує, що горизонтальний рух у верхній частині шару практично відсутній у початковий момент часу, а надалі з'являється порівняно слабкий рух біля зовнішньої межі проникного шару. У середній частині шару йдуть спочатку дві області різноспрямованого руху: інтенсивна (течія відбувається в основному до осі шару і тільки на зовнішній межі - у бік непроникного масиву) і малоінтенсивна (розподіл потоків аналогічний, а швидкість течії у бік осі шару значно менша, ніж на периферію).

В області інтенсивних конвективних потоків швидкості сягають величин близько 0,5% від вертикальної складової, зумовленої значним перепадом тиску по z . На Рис. 5.3.18-5.3.21 суцільною вертикальною лінією орієнтовно позначено межу областей різноспрямованого руху. Оскільки теплоносій від цієї лінії розтікається, вона названа лінією джерел – на відміну від аналогічних ліній стоку, до яких флюїд підтікає (пунктирні лінії мають переважний напрямок у бік межі розділу проникного та непроникного масивів. Тут величина горизонтальної складової швидкості сягає 1% від величини вертикальної складової.

У початковий момент часу течія поблизу межі розділу масивів різко інтенсифікується, а далі залишається майже незмінною. Як видно з наведених даних, похибки розрахунку тут значно менші, ніж при визначенні температурних полів. Аналіз розрахункових даних показує, що тиск у шарі є практично лінійною функцією z :

$$p_1 \approx p_{1n} + (\alpha_1 - 1) Pe \cdot z \quad (5.4.1)$$

Якщо покласти $T_1 = T_2 = 1,865 - z$, то для $\alpha_1 = 0,26$ розрахунки за формулою (5.4.1) дають $P_{1n} = 3,73 \cdot 10^4$, а чисельне рішення крайової задачі (5.1.10)-(5.1.14) на ЕОМ призводить до значення $P_{1n} = 3,76 \cdot 10^4$, і ця похибка є максимальною, внаслідок чого можна стверджувати, що тиск у шарі з високим ступенем точності відповідає лінійній апроксимації.

Для вертикальної швидкості руху теплоносія аналогічна формула

$$w_1 = \left[(1 - \alpha_1) Pe - \frac{0,113}{1,865 - z} \right] \sqrt{\frac{1,865}{1,865 - z}} \quad (5.4.2)$$

Порівняння з чисельним рішенням свідчить, що формула (5.4.2) дає значну похибку, тобто швидкість руху теплоносія в шарі може оцінюватися за спрощеною формулою (5.4.2) лише за порядком величини, але не для точних розрахунків.

При досить великих значеннях H/b вирівнювання температур у середовищі відбувається за короткий проміжок часу, що відповідає загальновідомим уявленням про дрібнозернисті гранулярні засипки. Для кількісного аналізу цього добре відомого в теорії та практиці факту розглянемо випадок, для якого з (5.1.10) при $T_1 \neq T_2, \xi \gg 1$ наближено:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 \exp(-E \cdot Fo) \quad (5.4.3)$$

Тут $\varepsilon_{12}^0 = (T_1 - T_2)_{Fo=0}$, $E = Nu_1 \xi \left(\frac{T_1}{T_{10}} \right)^m \left[\frac{\gamma_1}{\alpha_1 \kappa_a \rho_1^0} + \frac{1}{(1 - \alpha_1) \kappa_\lambda} \right]$. Звідси видно, що для зменшення відносної різниці температур частинок шару і потоку теплоносія виходить залежність (5.4.3), експоненціальне вирівнювання температур з часом. Вважаючи $\gamma_1 = 1,28$, $\alpha_1 = 0,26$, $\rho_1^0 = 100$, $\kappa_a = 0,03$, $\kappa_\lambda = 66$, $Nu_1 = 2$, $T_1 = T_{10}$, з виразу (5.4.3) отримаємо, що в системі з $H/b = 10^2$ температури фаз вирівнюються за час $Fo = 5 \cdot 10^{-5}$, а при $H/b = 10^4$, відповідно, $Fo = 5 \cdot 10^{-9}$. Такі оцінки показують характерний час прояву гетерогенності системи у кожному конкретному випадку.

5.5 Нелінійні та резонансні явища

Аналіз результатів обчислювального експерименту показав, що термогідродинамічні коливання у гранулярному шарі суттєво залежать від параметрів системи. Нелінійність системи та вплив гетерогенності сильно підвищуються із збільшенням відносних розмірів гранул. При цьому, як видно з Рис. 5.5.1-5.5.4, похибки обчислень є більш вираженими, що ускладнює проведення обчислювального експерименту і вимагає застосування більш точної різницевої сітки. Повномасштабна реалізація таких обчислювальних експериментів можлива на ЕОМ типу

сучасних робочих станцій^{9,10}. Проте обмежені обчислювальні експерименти можна проводити на сучасних персональних 64-разрядних комп'ютерах. Оптимальна кінцево-різницева сітка повинна містити не менше 50 вузлів по кожній координаті, проте може бути і нерівномірною з урахуванням фізичних властивостей системи. Наприклад, у наведеному випадку можна збільшити кількість вузлів КРС по вертикальній координаті порівняно до горизонтальної координати, оскільки градієнти функцій у цих напрямках суттєво відрізняються. Аналогічно можна змінювати крок за безрозмірним часом Fo , оскільки зміна функцій у часі на різних інтервалах також сильно відрізняється.

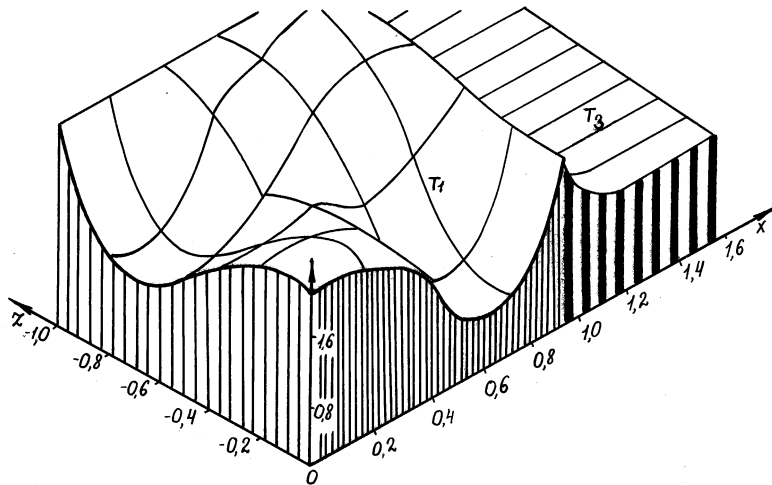


Рис. 5.5.1 Еволюція поля температур у гранулярному шарі:
 варіант 2, $Fo = 2 \cdot 10^{-6}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-8}$, $\alpha_1 = 0,26$, $\xi = 4 \cdot 10^2$

⁹ Kazachkov I.V. and Konovalikhin M.J. *A Model of a Steam Flow through the Volumetrically Heated Particle Bed*// Int. J. of Thermal Sciences.- 2002.- Vol.41, 1077-1087.

¹⁰ Kazachkov I.V., Konovalikhin M.J. and Sehgal B.R. *Dryout Location in a Low-porosity Volumetrically Heated Particle Bed*// J. of Enhanced Heat Transfer. 2001.- Vol.8, no.6, p.397-410.

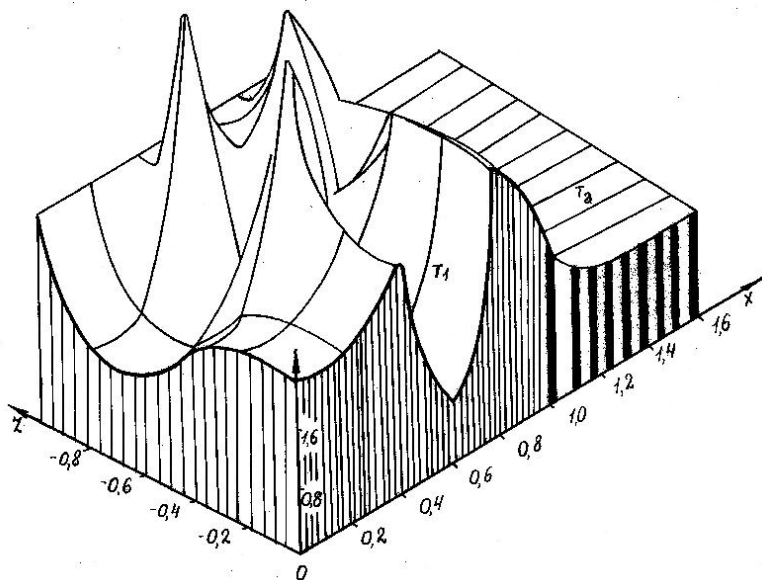


Рис. 5.5.2 Поля температур у гранулярному шарі на початку розвитку резонансу: варіант 2, $Fo = 2 \cdot 10^{-5}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-8}$, $\alpha_1 = 0,26$, $\xi = 4 \cdot 10^2$

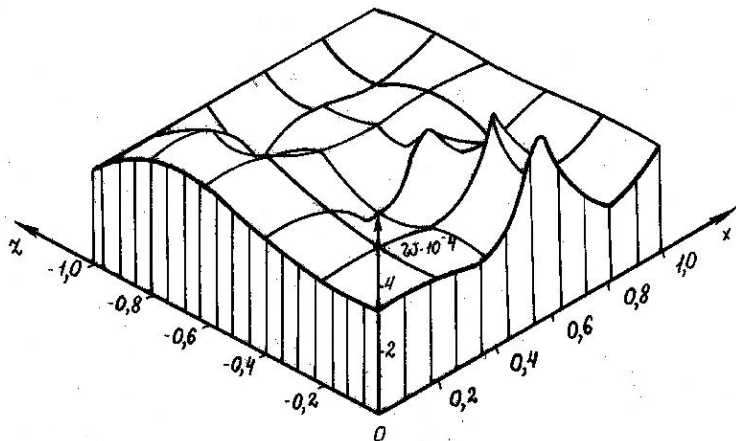


Рис. 5.5.3 Поле вертикальної швидкості флюїду в резонансному режимі: варіант 2, $Fo = 2 \cdot 10^{-5}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-8}$, $\alpha_1 = 0,26$, $\xi = 4 \cdot 10^2$

Як видно з Рис. 5.5.1-5.5.4, нелінійний розвиток та взаємодія теплових і гідродинамічних коливань у гранулярному шарі при суттєвій гетерогенності системи призводить до резонансу, коли пряма та відбита від межі непроникного масиву теплові хвилі накладаються, посилюються, викликають підвищення температури та (як наслідок) швидкості руху флюїду з відпливом теплоти та маси з інших областей. Останнє викликає зменшення швидкості руху та температури газу в інших областях і т.д. В результаті настає резонансне руйнування рівноважного стану: газ проривається в окремих місцях, шар замикається, потоки маси і теплоти йдуть в окремих місцях. Таке явище може бути аварійним або просто порушуючим технологічний процес.

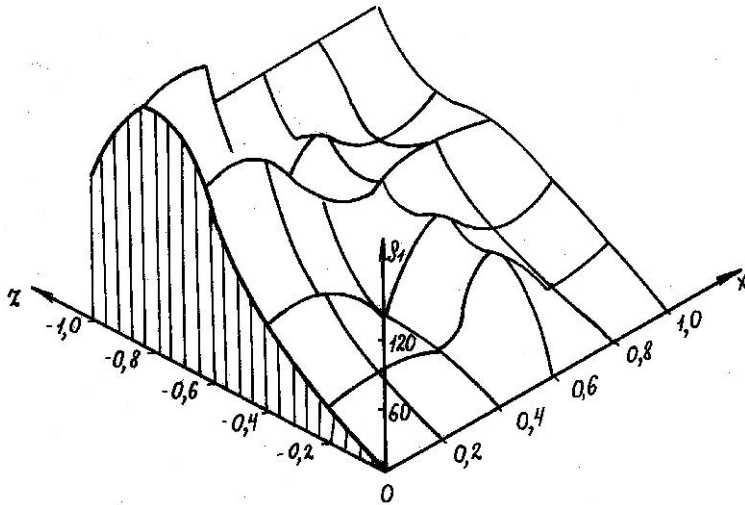


Рис. 5.5.4 Розподіл щільності флюїду у шарі у резонансному режимі:
варіант 2, $Fo = 2 \cdot 10^{-5}$, $\Delta Fo = 2 \cdot 10^{-8}$, $\alpha_1 = 0,26$, $\xi = 4 \cdot 10^2$

Наприклад, при охолодженні гранул у грануляторах з газовим охолодженням це викличе нерівномірність охолодження і, як наслідок, псування гранульного напівфабрикату, оскільки при отриманні аморфних матеріалів основне значення набуває режим швидкого рівномірного охолодження (і застигання). У геотермальних системах цим можна пояснити прорив газу чи пари у вулканічних областях [172].

5.6 Висновки за розділом

В результаті проведених досліджень термогідродинамічних параметричних коливань в описаній системі, що містить гранулярний шар, виявлено нові закономірності взаємодії нестационарності, неізотермічності та гетерогенності в умовах, коли можливі різні зовнішні збурення системи (електромагнітні, акустичні і т.п. поля). Використання виявлених закономірностей у дослідженні фізики явищ, а також у практичних роботах у різних технологічних установках і процесах сучасної промисловості і техніки дає можливість підвищення їх продуктивності та покращення якості виробленої продукції.

Так, застосування викладеної методики до розрахунку процесів термогідродинаміки підземних проникних шарів геотермальних [171-173] та нафтогазових родовищ дозволяє врахувати нестационарний прогрів пласта та зробити розрахунок режимів для конкретних умов підземної частини з урахуванням розмірів блоків та інших конкретних гідрогеологічних умов родовища. Параметричні коливання в таких системах дозволяють збільшити видобуток теплоносія або сировини у разі руйнування структурних утворень, що перешкоджають такому процесу у звичайному стані, а введення системи в резонанс таїть у собі ще не використані можливості, наприклад, розрив пласта тощо.

Широкі застосування отримані результати можуть знайти у хімічній технології [387], виробництві гранул [201, 81], де часто зустрічаються системи розглянутого типу з істотним проявом гетерогенності та неізотермічності, а також нестационарності. Оскільки такого роду системи в описаній постановці раніше не досліджувались, виявлені нові закономірності дозволяють більш докладно проаналізувати характер термогідродинамічних явищ у конкретних процесах і дати їх кількісні характеристики для оптимізації роботи і вибору режимів і конструкцій.

Представлені результати моделювання термогідродинамічних коливань у насичених гранулярних середовищах з урахуванням їх взаємодії з навколишніми непровідними масивами, отримані при використанні системи диференціальних рівнянь термогідродинаміки гранулярного насиченого середовища акад. Нігматуліна Р.І. [294], є першою спробою дослідження такого роду.

Створене матзабезпечення дозволяє проводити обчислювальні експерименти, які дають можливість розкрити особливості збудження і розповсюдження термогідродинамічних коливань в гранулярних шарах, через які рухається газоподібний флюїд. При цьому модель враховує

раніше не досліджені локальні взаємодії частинок (гранул) шару і флюїду та граничну взаємодію проникного і непроникного масивів, обмін енергією між ними. Потоки теплоти на межах розділу залежать від початкового розподілу температури у системі та фізичних властивостей середовищ. Можна розглядати нагрівання (охолодження) газу в гранулярному шарі, оточеному тепловідвідним (нагріваючим, теплоізолюючим) масивом, що при певному співвідношенні параметрів, як показано, сприяє придушенню коливань або, навпаки, зростанню, і нелінійній взаємодії прямих і відбитих хвиль, яка може призвести до критичних режимів.

Розвиток моделі відбуватиметься у напрямі більш поглибленого вивчення процесів локального теплообміну, з урахуванням нелінійності фізичних властивостей (деякі були враховані) тощо. Представлені результати повідомлялися на наукових нарадах [39, 172, 184], опубліковані у статтях [171, 173, 177] і препринті [176].

Розділ 6. Експериментальне дослідження параметричних коливань на межах розділу суцільних середовищ

Представлені в попередніх розділах результати досліджень дозволили виявити характерні особливості параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ на прикладі трьох класів задач: плівкових течій, меж фазового переходу з рідкого у тверде та гранулярних насичених середовищ. Параметричні дії розглядались трьох видів: електромагнітні, вібраційні, теплові (обмін імпульсом та енергією на межах розділу середовищ, фаз). У всіх трьох класах задач знайдені режими з загостренням (кризові) або резонансні, що дозволяють оптимальним чином досягти потрібного технологічного ефекту при мінімальних енерговитратах (вони становлять основу створення енергозберігаючих технологій).

У цьому розділі описані експериментальні установки для дослідження параметричних коливань на межах розділу суцільних середовищ, підтверджено теоретичні результати та виявлено деякі нові гідродинамічні явища та процеси, у тому числі ті, які мають суттєві технологічні застосування (перетворюючі керуючі впливи). Розділ містить також відомості щодо практичного застосування розробок.

6.1 Експериментальні установки та методики проведення експериментів з електромагнітного збудження коливань у плівках провідної рідини

Для встановлення адекватності теоретичних досліджень і виявлення нових закономірностей процесів збудження розпаду плівок провідної рідини на краплі (з метою диспергування, розбрикування рідини або подальшої їх солідифікації в гранули) нами були проведені експериментальні роботи на фізичних модельних установках із застосуванням галію як модельного металу. Викладемо основні принципи фізичного моделювання досліджуваних процесів і наведемо результати відповідного моделювання.

Вакуумна МГД-установка для дослідження електромагнітного руйнування плівок на краплі

Загальний вигляд експериментальної установки для дослідження плівкових МГД-течій, параметричних коливань поверхні плівок і процесів їх розпаду на краплі наведено на Рис. 6.1.1. Формувачі

краплинних потоків як елементи грануляторів називаються диспергаторами [201]. Диспергатори плоских і радіальних плівок оснащуються насадками, що формують такі плівки. Вони можуть бути різних типів, як показано на Рис. 6.1.2.

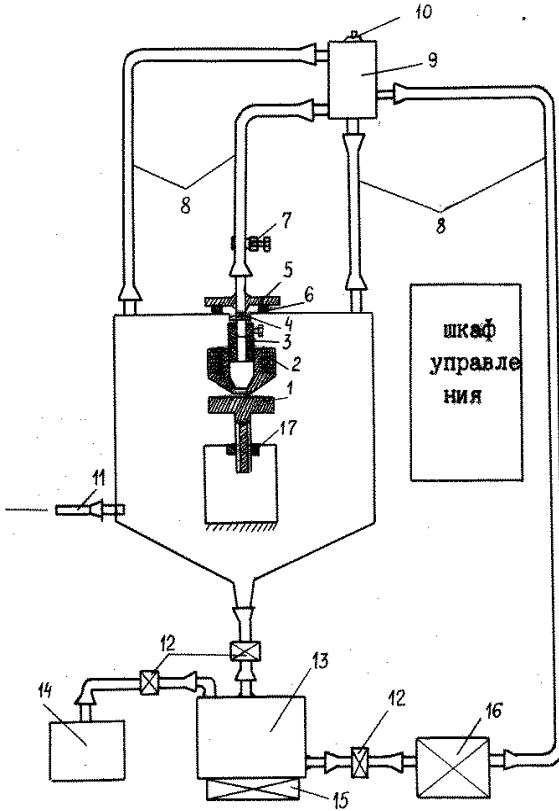


Рис. 6.1.1 Вакуумна МГД-установка для електромагнітного збудження коливань у плівках провідної рідини: 1- столик, 2- індуктор, 3- ізоляційна втулка, 4- знімне сопло, 5- центруюча платформа, 6- ущільнювальна шайба, 7- регулятор швидкості із сопла, 8- трубопровід, 9- бачок постійного рівня розплаву, 10- повітряний клапан, 11 - газопровід, 12 - затвор, 13 - витратний бачок, 14 - форвакуумний насос, 15-нагрівник, 16- індукційний насос, 17 - регулятор положення столика, 18 - герметичний бокс

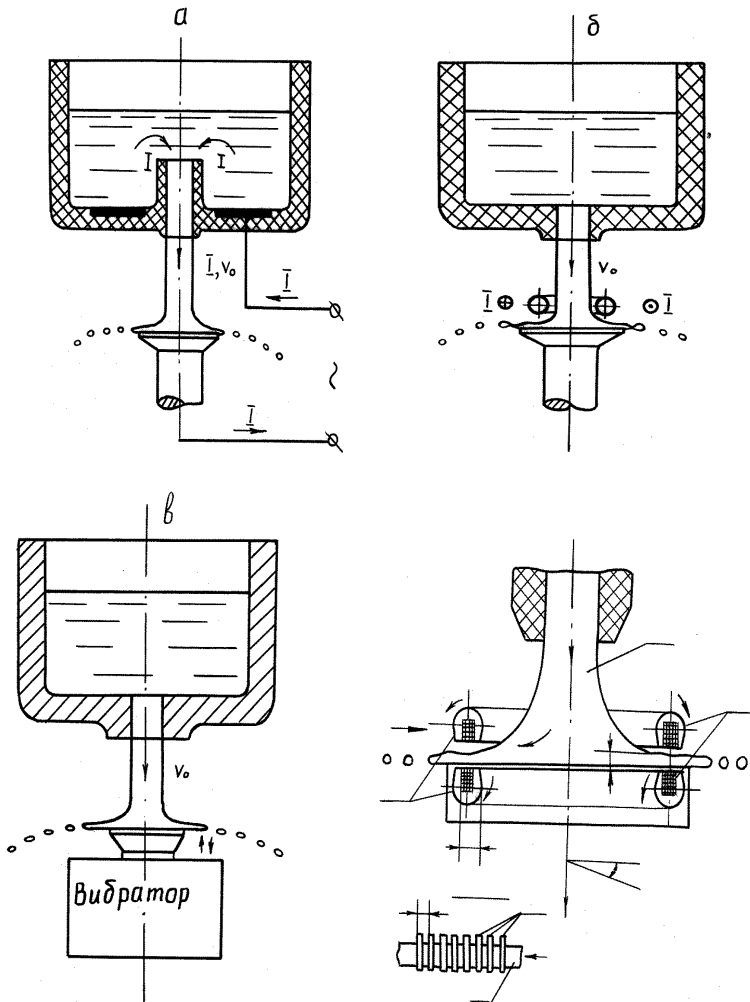


Рис. 6.1.2 Системи збудження розпаду плівок у плівкових диспергаторах: а-кондукційна, б-індукційна, в-вібраційна, г-електромагнітна

Принцип дії диспергаторів заснований на перетворенні рідкого струменя прямокутного або круглого поперечного перерізу в один або два плоскі струмені в першому випадку і в струмінь, що радіально

розтікається, - в другому випадку. Обидва випадки відповідають застосуванню насадків, що формують струмені подібно до сопла Вітошинського (забезпечення прямокутного профілю швидкості на зрізі сопла) для виключення вихорів у вихідному струмені та плівках.

Системи збудження розпаду у плівкових диспергаторів (руйнівників, розбризкувачів струменів на краплі) можуть бути різних типів. Найбільш простий у реалізації тип складається з елементів кондукційного підведення струму до вихідного струменя (тобто струм йде по самому електропровідному струменю, Рис. 6.1.2а). Диспергатор заснований на застосуванні модуляції швидкості в струмені з використанням ефекту створення магнітного тиску при просторовому розтіканні струмів у витоку струменя і в місці його натікання на диск-розсікач, що формує плоску плівку або плівку, яка радіально розтікається.

Магнітний тиск має подвоєну частоту по відношенню до струму, що протікає в струмені. При застосуванні промислової частоти 50 Гц виходить 100 Гц, відповідно. На Рис. 6.1.2г зображена електродна система підведення струму до витоку струменя. Вона складається з кільцевого струмопідведення та ізоляційного буртика, обтічного струмом у меридіональному напрямку. У торцевому перетині буртика створюються електромагнітні сили: поміщаючи їх у поздовжнє змінне магнітне поле або створюючи за допомогою електродинамічних систем вертикальні коливання диска, на який натікає струмінь. В обох згаданих випадках для управління процесом розпаду можна застосовувати джерело полігармонічного струму, що живить відповідно індуктор осьового поля або вібросистему електродинамічного типу (Рис. 6.1.2в).

Спостереження процесу розпаду плівок може проводитися візуально у світлі стробоскопічного джерела із застосуванням фото- та відеореєструючої апаратури. Для багатьох розплавів необхідно вести процес у контрольованій атмосфері або у вакуумі (такими є алюміній, галій та ін.) через появу окисної плівки в активному середовищі. Окисна плівка може докорінно змінити режим течії, оскільки капілярні сили стають визначальними та призводять до хаотизації всієї системи.

Індукційна система

Основним елементом МГД-диспергатора є індукційна система, призначена для створення змінного електромагнітного поля, що керує розпадом рідкометалевої плівки на краплі. Один із таких індукторів представлений схематично на Рис. 6.1.3, де на диску-розсікачі 4

вертикальний круглий струмінь трансформується в плівку, що радіально розтікається. Схема експериментальної установки з таким індуктором зображена на Рис. 6.1.4.

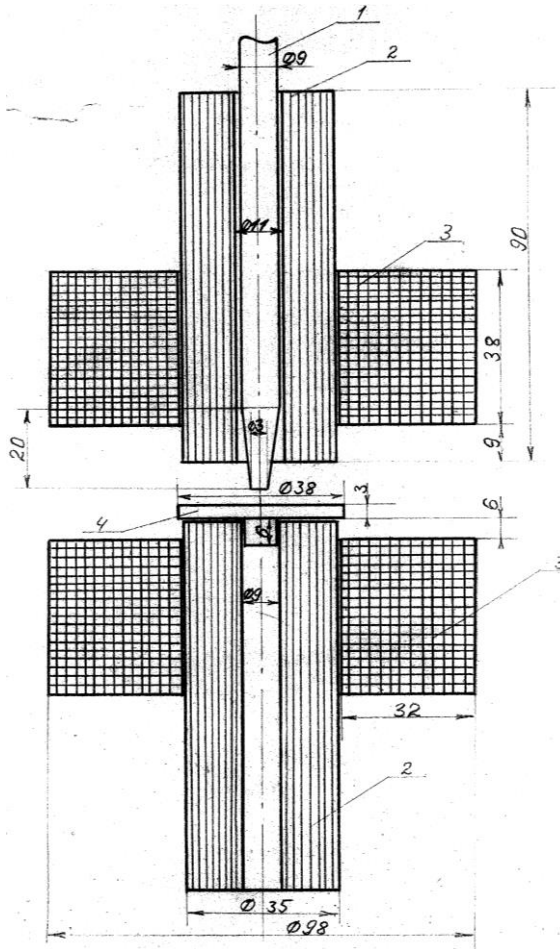


Рис. 6.1.3 Схема електромагнітного індуктора для керованого руйнування плівки на краплі: 1 - насадок, 2 - шихтований магнітопровід, 3 - електромагніти, 4 - диск-розсікач, на якому вертикальний струмінь 1 трансформується в плівку, що радіально розтікається

Було розроблено, виготовлено та випробувано декілька установок різного типу, на яких вивчались способи та методи диспергування металів та моделюючих рідин. Насадок для підведення до диска-розсікача рідкого металу виготовлявся зі скляної трубки. Керамічний диск-розсікач оснащений сталевими електродами, вмонтованими в диск урівень. Розташування електродів показано на Рис. 6.1.5.

Така система дозволяє реєструвати миттєву електродинамічну і магнітогідродинамічну картину в рідкометалевій плівці, а по них потім обчислювати зусилля, що розвиваються полем у плівці, і визначати умови руйнування її на краплі (диспергування).

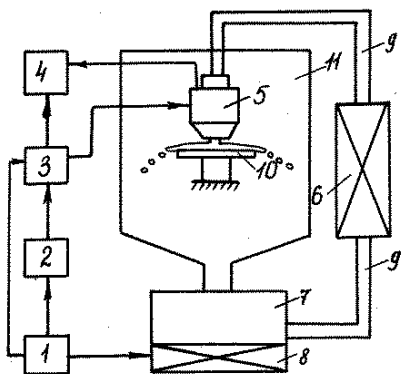


Рис. 6.1.4 Схема експериментальної установки з індуктором:

1- блок живлення, 2 - задаючий генератор, 3 - імпульсний блок живлення, 4 - контрольно-вимірювальний блок, 5 - індуктор, 6 - рідкометалевий насос, 7 - ємність для збирання розплаву, 8- піч для підігріву, 9- трубопровід, 10- столик для формування рідкометалевої плівки, 11- герметична камера з інертним середовищем

Так, у нерухомій плівці при струмі $I=1\text{A}$ на поверхні диска були зареєстровані наступні потенціали: $1'-2'$: 10мВ, $2'-3'$: 5мВ, $1'-3'$: 15мВ, $1-3$: 12 мВ, $1-4$: 14 мВ, $1-5$: 16 мВ, $4-5$: 3 мВ, $3-4$: 3 мВ, $2-3$: 3 мВ. Значення потенціалів від струму в обмотці індуктора (промислова частота) при $I = 1, 2, 3, 4, 5\text{A}$ відповідно такі: 9, 17, 24, 30, 37 мВ. Результати випробувань індуктора наведено на Рис. 6.1.6-6.1.8, де $B(\text{Тл})$ - індукція електромагнітного поля, $I(\text{А})$ - струм в індукторі, $\omega(\text{Гц})$ - частота струму, що живить індуктор. На Рис. 6.1.6 наведено характеристики

електромагнітного поля постійного струму при включенні тільки верхньої котушки 1, тільки нижньої - 2 та двох котушок разом- 3.

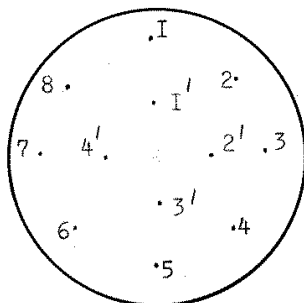


Рис. 6.1.5 Схема розташування електродів на диску-розсікачі

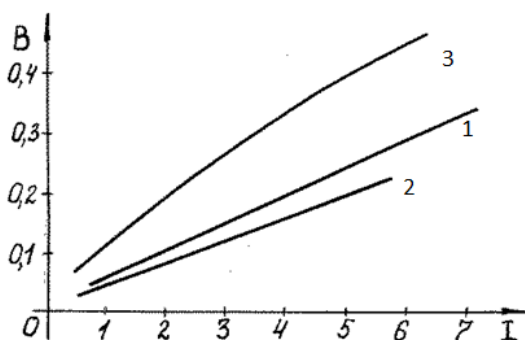


Рис. 6.1.6 Величина індукції електромагнітного поля постійного струму в площині диска

Характеристики є слабонелінійними функціями струму в обмотках індуктора. На Рис. 6.1.7 показано зміну індукції електромагнітного поля в площині диска-розсікача від змінного струму з частотою $\omega=100$ Гц (1 верхня котушка, 2 нижня). Невеликий розкид точок характеристик 1 і 2 пояснюється похибкою вимірювань та різною відстанню диска-розсікача від верхньої та нижньої котушок. На Рис. 6.1.8 показана залежність індукції електромагнітного поля від частоти струму, що живить індуктор, при спільній роботі обох котушок, коли струм в них дорівнює 1А. Звідси видно: до $\omega=600$ Гц вказана характеристика поля є практично лінійною. Наведені дані показують, що за достатньої компактності розроблений

електромагнітний індуктор створює поле з індукцією до 1 Тл при струмі в кілька ампер у робочому діапазоні частот 100-800 Гц, що дозволяє здійснити надійну роботу плівкового МГД-диспергатора. Отже, такий індуктор придатний до роботи у перспективних плівкових МГД-грануляторах рідких металів [81].

Нижче наведено результати випробувань такого роду грануляторів.

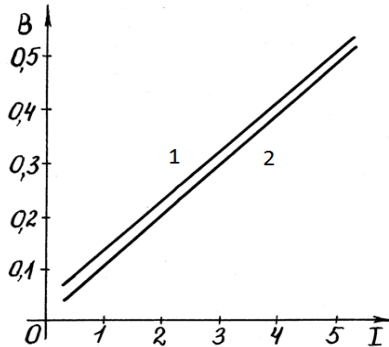


Рис. 6.1.7 Розмір індукції електромагнітного поля змінного струму частотою 100Гц у площині диска

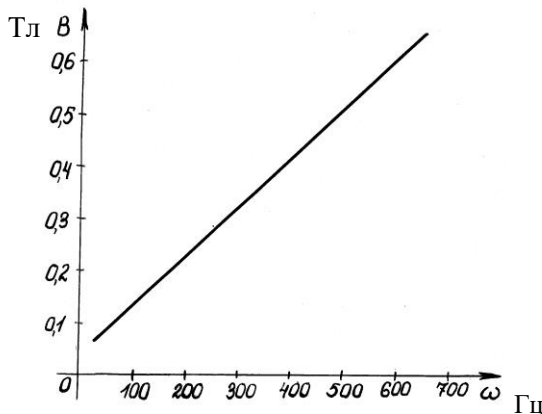


Рис. 6.1.8 Залежність індукції електромагнітного поля від частоти струму в індукторі

Методика проведення експериментів

Для дослідження основних режимів параметричного збудження коливань у плівках провідної рідини та умов їх розпаду на краплі були проведені експериментальні дослідження процесу в широкому діапазоні варійованих параметрів. Як показує аналіз рівнянь процесу, записаних у безрозмірному вигляді [81], до основних факторів, що визначають хвильові рухи плівок і умови їх розпаду на краплі, слід віднести:

1. Безрозмірні критерії: гідродинамічне та магнітне числа Рейнольдса Re , Re_m , число Фруда Fr , Вебера We , Галілея Ga та чисел Ейлера (звичайного та магнітного) - Eu , Eu_m .
2. Характер і вид сили, що збурює.
3. Геометричні характеристики системи.
4. Симплекси - відношення щільностей, в'язкостей розплаву та оточуючого плівку середовища і т.д.

В експерименті у кожному окремому випадку можна вважати заданими геометричні параметри і симплекси. Якщо експеримент проводиться на одній модельній рідині, то $v, v_m = const$ при постійній температурі середовища або слабкій її зміні. Радіус сопла вважаємо фіксованим для даного випробування з номером j , тому Re і Re_m можна варіювати в кожному j -му випробуванні шляхом регулювання швидкості витікання із сопла u_0 . Для планування експерименту необхідно встановити границі зміни основних безрозмірних критеріїв, вибрати для них крок варіювання, після чого оптимізувати організацію проведення експерименту. Причому, оскільки $Re = u_0 r_0 / \nu$, $Re_m = u_0 r_0 / \nu_m$, $We = \rho u_0^2 / \sigma$, $Fr = u_0 / \sqrt{g a}$, $Eu_m = \mu H^2 / (\rho u_0^2)$ - динамічні критерії, а числа Онезорге $Oh = \sqrt{We} / Re = \sqrt{\rho / (\sigma r_0)} \nu$ і Галілея $Ga = \sqrt{g r_0} r_0 / \nu$ - кінематичні, то для характеристики процесу розпаду плівки можна користуватися в кожному j -ому експерименті тільки динамічними критеріями.

Виходячи з викладеного, можна зробити висновок, що фізичний процес визначається в загальному випадку величинами Re , Ga , Oh , Eu - для вібраційної дії на плівку і Re , We , Ga , Oh , Eu_m - для електромагнітної. Тому послідовність ведення експерименту можна представити так:

- Рідина та сопло вибрані, We , Ga , Oh відомі, варіюючи сопла, варіюємо ці критерії;
- Змінюючи швидкість течії u_0 , варіюємо Re , Eu (Eu_g), Eu_m .

Наприклад, нехай в експериментальній установці є сопла трьох радіусів: r_{01} , r_{02} , r_{03} . Виберемо крок варіювання чисел Рейнольдса та Ейлера з умов зміни розходу, що визначаються типом застосовуваного

насоса, та інтенсивності зовнішнього впливу. Нехай $u_0 = Q / (\pi r_0^2)$, де Q - об'ємна витрата рідини, тоді з урахуванням викладеного:

$$\text{Re} = \frac{Q}{\pi r_0^2 \nu}, \quad Eu_m = \frac{\mu_m}{\rho} \left(\frac{H}{Q} \pi r_0^2 \right)^2, \quad (6.1.3)$$

звідки випливає:

$$\begin{aligned} \text{Re}_{\min} &= \frac{Q_{\min}}{\pi \nu (r_0)_{\max}}, & (Eu_m)_{\min} &= \frac{\mu_m}{\rho} \left(\frac{H_{\min}}{Q_{\max}} \pi (r_0)_{\min}^2 \right)^2, \\ \text{Re}_{\max} &= \frac{Q_{\max}}{\pi \nu (r_0)_{\min}}, & (Eu_m)_{\max} &= \frac{\mu_m}{\rho} \left(\frac{H_{\max}}{Q_{\min}} \pi (r_0)_{\max}^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

На основі формули (6.1.4) можна встановити границі можливих значень Re , Eu_m . Нехай, $(r_0)_{\max} / (r_0)_{\min} = 4$, тоді $Q_{\max} / Q_{\min} = 25$ забезпечує варіювання значення Re на одній модельній рідині на два десяткові порядки.

Зважаючи на обмежену потужність насоса та фізичні умови, практично це реалізувати складно: зверху обмеження за потужністю насоса, знизу - по фізичному існуванню плівки (для існування плівкової течії необхідно, щоб сили інерції щонайменше перевищували втрати напору на подолання сил тертя рідини на диску-розсікачі).

Відношення максимального та мінімального магнітних чисел Ейлера складає

$$\frac{(Eu_m)_{\max}}{(Eu_m)_{\min}} = \left(\frac{H_{\max} Q_{\max} (r_0)_{\max}^2}{H_{\min} Q_{\min} (r_0)_{\min}^2} \right)^2 = \left(\frac{H_{\max} \text{Re}_{\max} (r_0)_{\max}}{H_{\min} \text{Re}_{\min} (r_0)_{\min}} \right)^2, \quad (6.1.5)$$

звідки видно, що відношення може бути значним навіть при $(r_0)_{\max} \sim (r_0)_{\min}$, оскільки вже за таких малих діапазонів зміни $H_{\max} / H_{\min} = 5$, $\text{Re}_{\max} / \text{Re}_{\min} = 5$ виходить досить широкий діапазон варіювання електромагнітних чисел Ейлера: $(Eu_m)_{\max} / (Eu_m)_{\min} = 625$.

Щоб аналізувати вплив чисел Онезорге і Галілея на фізичний процес, необхідно в різних експериментах мати однакові значення Re , Eu_m . З набором сопел з радіусами r_{0i} ($i=1, I$) розіб'ємо область зміни Re на N частин, а Eu_m - на L частин і вимагатимемо, щоб за числом Рейнольдса в кожному інтервалі $[r_{0i}, r_{0i+1}]$ по n_i значень Re співпадало і по l_i значень Eu_m також співпадало. Тоді вирішується завдання розбиття

інтервалу варіюємих значень діаметра сопла $[(r_0)_{\min}, (r_0)_{\max}]$ і вибору відповідних кроків по $Re, Eu_m (\Delta Re, \Delta Eu_m)$ з урахуванням заданого діапазону $[(Q_0)_{\min}, (Q_0)_{\max}]$. У загальному випадку це - складне завдання, тому отримуємо основні співвідношення, за допомогою яких можна його вирішити. Аналізуючи з урахуванням сказаного описану фізичну ситуацію, матимемо (щоб j було цілим, слід за заданих $n_i, N, Q_{\min}, Q_{\max}$ вибрати $(r_0)_{\max} = r_{0i}$):

$$Q_{\min} \leq r_{0i} \left[\frac{Q_{\max}}{(r_0)_{\min}} + \frac{j}{N-1} \left(\frac{Q_{\min}}{(r_0)_{\max}} - \frac{Q_{\max}}{(r_0)_{\min}} \right) \right] \leq Q_{\max}, \quad (6.1.6)$$

звідки випливає $(r_0)_{\min} = r_{0i}$, і при цьому має виконуватись

$$j_{i+1,1} = l_i N_i + \frac{(l_i - 1) N Q_{\min}}{Q_{\max} \prod_{i=1}^{l_i-1} l_i - Q_{\min}}, \quad (6.1.7)$$

де $l_i = (n_{i,j} M_{i,j})^{1/4}$. За індексами, що повторюються, сума не береться.

Оскільки l_i - раціональне число, то через те, що $\prod_{i=1}^{l_i-1} l_i = (r_0)_{\max} / (r_0)_{\min}$ відоме, l_i можна визначити з умови

$$l_i = \frac{j_{i+1,1} \left\{ (Q_{\max} / Q_{\min}) \left[(r_0)_{\max} / (r_0)_{\min} \right] - 1 \right\} + N}{N_i \left\{ (Q_{\max} / Q_{\min}) \left[(r_0)_{\max} / (r_0)_{\min} \right] - 1 \right\} + N}. \quad (6.1.8)$$

Так, вибираючи в (6.1.8) $N_i = idem, j_{i+1,1} = idem$, отримаємо $N_i = Ni / I, j_{i,1} = N(i-1) / I, j_{i+1,1} = Ni / I$, тобто $l_i = 1 \Rightarrow (r_0)_{\max} = (r_0)_{\min} = r_0$, що означає тривіальний випадок. Використовуємо вирази (6.1.6)-(6.1.8) при виборі способу розбиття інтервалу. При досить великих інтервалах одночасного варіювання кількох параметрів експериментальної установки робити таке розбиття без запропонованих формул важко. Лише у простих ситуаціях це завдання можна вирішити простим перебором варіантів.

Управління процесом розпаду плівки за допомогою джерела полігармонічних струмів

При керованому розпаді струменів і плівок провідної рідини форма крапель (гранул), що утворюються, залежить від закону зміни керуючих впливів [202]. Магнітний тиск, що діє на струмені та плівки, створюється при взаємодії струму, що індукується у провідній рідині, з полем індуктора (для індукційних систем), або при взаємодії струму, що вводиться в канал з провідною рідиною, із зовнішнім магнітним полем (для кондукційних) систем). Закон зміни магнітного тиску визначається законом зміни струму в індукторі або струму в провідній рідині.

При електромеханічному (вібраційному) способі управління розпадом струменів і плівок форма та розміри крапель (частинок), що утворюються, визначаються характером течії і, зокрема, законом руху диска-розсікача, що впливає на струмені і плівки. Закон руху диска-розсікача визначається видом струму в обмотці електромагніту ВЕДС-10А, що створює рух диска (у нашому випадку це рух строго вертикальний). Для управління процесом розпаду плівок, що сходять з диска-розсікача, як і у випадку електромагнітного впливу при електромеханічному управлінні, необхідні спеціальні джерела струму, які дають струм заданого виду. Джерела, розроблені та випробувані в ІЕД АН УРСР [80, 81] в різних установках, забезпечили полігармонічні зовнішні впливи на струмені та плівки [81, 100, 202, 203].

Джерело полігармонічних струмів (ИПТ) складається з блоку управління (БУ), що забезпечує заданий закон зміни струму, і силового блоку-підсилювача потужності (УМ), що забезпечує необхідну величину струму. БУ може бути виконаний із «жорсткою» логікою управління, тобто з незмінним алгоритмом, коли забезпечується певний закон зміни струму. Але можна виконати БУ з можливістю перепрограмування, коли задаються різні необхідні алгоритми функції, що дозволяють відтворювати задані закони зміни струму.

ИПТ і БУ на «жорсткій» логіці раціонально використовувати для отримання частинок однієї форми в заданих умовах з однієї робочої рідини. ИПТ з непрограмованим БУ дозволяє оперативно змінювати форму кривої струму в навантаженні, що дає можливість працювати з різними рідинами та керувати режимом розпаду струменів та плівок (по можливості керуючи і формою та розмірами крапель). Мікропроцесорні засоби дозволяють будувати БУ, що реалізують алгоритми управління практично будь-якого ступеня складності. Такі БУ, як правило, містять власне мікропроцесор, носій програми-алгоритму або пристрій введення програми-алгоритму і формувач вхідних сигналів для підсилювача потужності. Пристроєм введення програми може бути клавішний пульт

для введення закону зміни вихідного струму ИПТ. Введення алгоритму з пульта використовується у разі потреби змін алгоритму.

Носій програми - постійний запам'ятовуючий пристрій (ПЗУ), в якому у вигляді цифрових кодів зберігається алгоритм. Змінне ПЗУ як носій програми використовується, якщо алгоритми управління відомі заздалегідь та їх порівняно небагато. Мікропроцесор є логічним блоком, що виконує операції з обробки вихідних даних про алгоритм та вироблення всіх сигналів управління ИПТ. Формувач вхідних сигналів для підсилювача потужності - цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП), якщо у складі ИПТ як підсилювач потужності використовується підсилювач безперервної дії. На вхід підсилювача подається сигнал, що представляє апроксимацію кривої заданого закону зміни вихідного струму ИПТ. Вид апроксимаційної кривої вибирається виходячи з необхідної точності відтворення заданого закону зміни струму.

Якщо у складі ИПТ використовується ключовий підсилювач, то формувач повинен за сигналами мікропроцесора сформувати дискретні сигнали з певним рівнем і часовими співвідношеннями, які підсилювачем перетворюються на сигнали аналогової форми. Серед ключових підсилювачів формування сигналів із заданим законом посилення найбільше поширення отримали підсилювачі зі ступінчастою і імпульсно-кодовою модуляцією, з апроксимацією посилюваного сигналу ступінчастою функцією. Ця операція здійснюється у вихідному каскаді посилення. Як найпростіші пристрої, що здійснюють подібні операції, можуть використовуватися типові двотактні підсилювачі.

Ключові підсилювачі в порівнянні з підсилювачами безперервної дії мають більш високий ККД, але також більш високий рівень нелінійних спотворень. Тому при високих вимогах до точності заданого закону зміни струму переважне застосування у підсилювачів безперервної дії. Для проведення експериментальних досліджень керованого розпаду струменів і плівок в ІЕД АН УРСР був розроблений перепрограмований ИПТ, який з незначними змінами використовувався також у дослідно-промислових установках електромагнітного та електромеханічного диспергування рідких металів та в інших пристроях подібного типу.

Функціональна схема ИПТ

Процес формування вихідного струму $I_{\text{вих}}$ ИПТ за заданим законом зручно пояснити, користуючись Рис. 6.1.9, розглядаючи для прикладу випадок, коли ИПТ повинен сформувати таку криву струму, яка при магнітодинамічному управлінні розпадом струменів [80, 81] дає

частинки сферичної форми. Вид такого полігармонічного впливу представлений на Рис. 6.1.10.

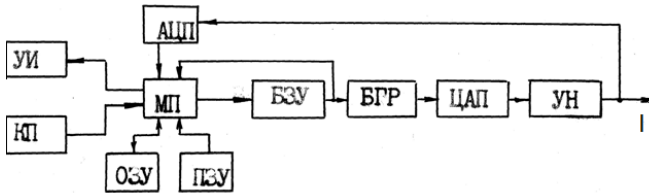


Рис. 6.1.9 Функціональна схема ИПТ

При формуванні кривої в БУ ИПТ використовувався метод кусково-лінійної апроксимації, відповідно до якого залежно від необхідної точності відтворення задана крива розбивається на n ділянок тривалістю ΔT_i , кожна з яких апроксимується відрізком прямої, причому період зміни $I_{вих}$ дорівнює $T = \sum_{i=1}^n \Delta T_i$. В оперативний запам'ятовуючий пристрій (ОЗП, ОЗУ) мікропроцесора (МП) з клавішного пульта (КП) вводяться величини амплітуд струму (точки $A_0 \pm A_n$) в моменти t_i та тривалості часових інтервалів $\Delta T_0 \pm \Delta T_n$. Інформація з КП відображається на пристрої індикації (УІ, УИ), що дозволяє контролювати правильність введення.

По програмі, що зберігається в МП ПЗУ, обчислюються амплітуди точок, розташованих на кривій через інтервали дискретизації ΔT_i . Інтервал дискретизації кривої вибирається в залежності від необхідної точності відтворення кривої з урахуванням швидкодії МП і ЦАП, причому збільшення амплітуд точок на інтервалі Δt для i -ої ділянки дорівнює $\Delta A_i = (A_{i+1} - A_i) \Delta / \Delta T_i$. Обчислені за цією формулою амплітуди у відповідних цифрових кодах переписуються в буферний пристрій (БЗУ). Ланцюг зворотного зв'язку, що охоплює БЗУ, дозволяє контролювати і коригувати дані, що переписуються з ОЗУ. БЗУ дозволяє збільшити швидкість видачі кодів ЦАП, оскільки маємо менший час зчитування, ніж ОЗУ МП. Це дає можливість вибрати меншу величину ΔT_i . Крім того, робота з буферною пам'яттю звільняє МП від функцій управління ЦАПом, що дозволяє використовувати МП контролю сигналу на виході ИПТ. ЦАП перетворює послідовність цифрових кодів, що відповідають точкам кривої $I_{вих}$ в аналоговий сигнал, що змінюється за заданим законом. Розрядність ЦАП вибирається за умови дотримання необхідної точності апроксимації кривої, оскільки вона визначає похибку

апроксимації заданої кривої через амплітудну дискретність сигналу на виході ЦАП. З виходу ЦАП сигнал надходить на вхід УМ, вихід якого є виходом ИПТ.

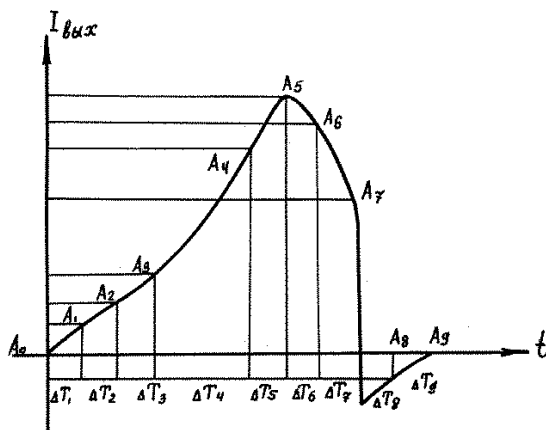


Рис. 6.1.10 Варіант форми полігармонічного струму

Сигнал з виходу УМ, перетворений аналого-цифровим перетворювачем (АЦП), вводиться в ОЗУ МП, де він аналізується і у разі відхилень за формою або амплітудою від заданих проводиться корекція кодів, що видаються на АЦП для усунення цих відхилень. Наявність ланцюга зворотнього зв'язку через АЦП, що охоплює весь тракт формування вихідного струму, робить ИПТ системою автоматичного регулювання, що володіє достатньою стійкістю до різних відхилень параметрів, у тому числі зовнішніх (регулярних або випадкових) збурень. Для підвищення перешкодозахищеності БУ введено блок гальванічної розв'язки (БГР), включений між БЗУ та ЦАП. Проведені дослідження програмованих ИПТ підтвердили ефективність застосування таких джерел для формування необхідних полігармонічних впливів при проведенні керованого руйнування струменів і плівок.

6.2 Взаємозв'язок, взаємовплив параметрів плівки та електромагнітного поля. Умови розпаду плівок на краплі

Основні взаємозв'язки параметрів плівки та електромагнітного поля теоретично досліджено у розділах 2, 3, де визначено також умови розпаду плівок на краплі, у тому числі резонансні режими. Тут отримані відомості

підтверджуються та поглиблюються шляхом фізичного моделювання досліджуваних явищ на експериментальних установках. Перші роботи проведені на установці, загальний вигляд якої показано на Рис. 6.2.1, структурну схему якої наведено на Рис. 6.1.1. Це одна з найбільш простих установок, дослідження на ній показали, що плівка галію в слабоконтрольованій азотній атмосфері (вільне витіснення повітря азотом, що подається в камеру, без попереднього глибокого вакуумування камери) за рахунок утворення окисної тонкої плівки на її поверхні стає некерованою. Капілярні сили окисної плівки на поверхні рідкометалевої плівки хаотично рвуть плівку і роблять процес розпаду некерваним (Рис. 6.2.2).

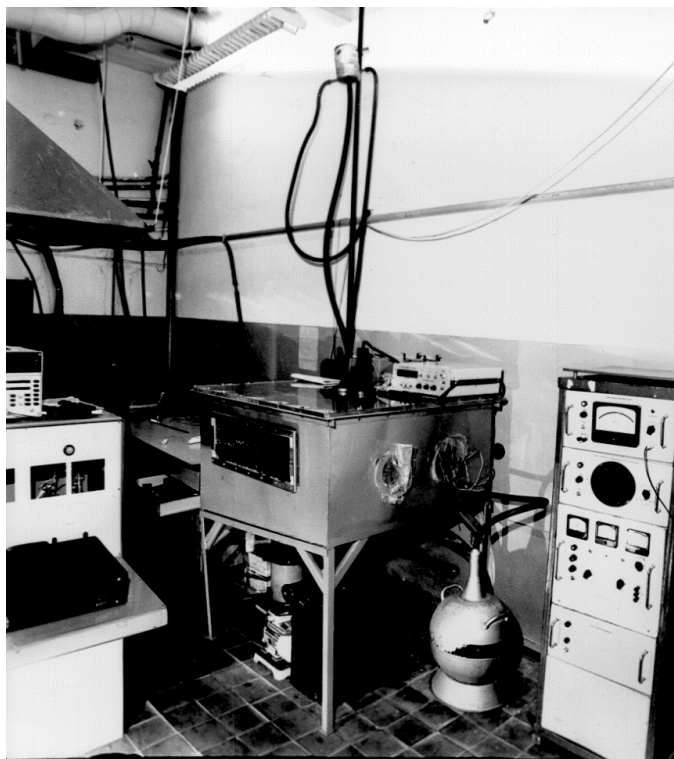


Рис. 6.2.1 Установа з азотною атмосферою у камері



Рис. 6.2.2 Течія півки галію в слабкій азотній атмосфері

Навіть застосування потужних імпульсних полів від спеціальних генераторів імпульсних струмів (ГІС, ГІТ) не дозволило отримати значної переваги електромагнітних сил над капілярними, внаслідок чого розпад півки хаотичний і управління розпадом можливе лише за дуже великих енергетичних витрат. Тому управління параметричним збудженням коливань поверхні таких півок та їх розпадом внаслідок значної енергоємності недоцільно. Застосування розробленої установки виявилось можливим лише у системах спеціального призначення.

Зважаючи на зазначені особливості, експериментальні дослідження розпаду півок проводилися на установці, представленій на Рис. 6.1.4, загальні види якої надано на Рис. 6.2.3, 6.2.4. Дана установка має вакуумну робочу камеру, в якій розміщені диск-розсікач вертикального струменя металу, що подається МГД-насосом через сопло (для цього є замкнутий рідкометалевий контур). Розташування сопла над диском-розсікачем регульоване. На сопло надіта індукційна система, поміщена в циліндричний герметичний бокс діаметром 520 та висотою 500 мм (робоча камера установки), де досягається вакуум до 0,1 Па (в робочому стані було в середньому 0,4 Па). Установка має замкнутий

рідкометалевий контур, тиск на виході з насоса розвивався близько 160 кПа, при цьому швидкість витоку становила до 5 м/с. Сопла різнокаліберні, легкозамінні, з діаметрами 2-7 мм.

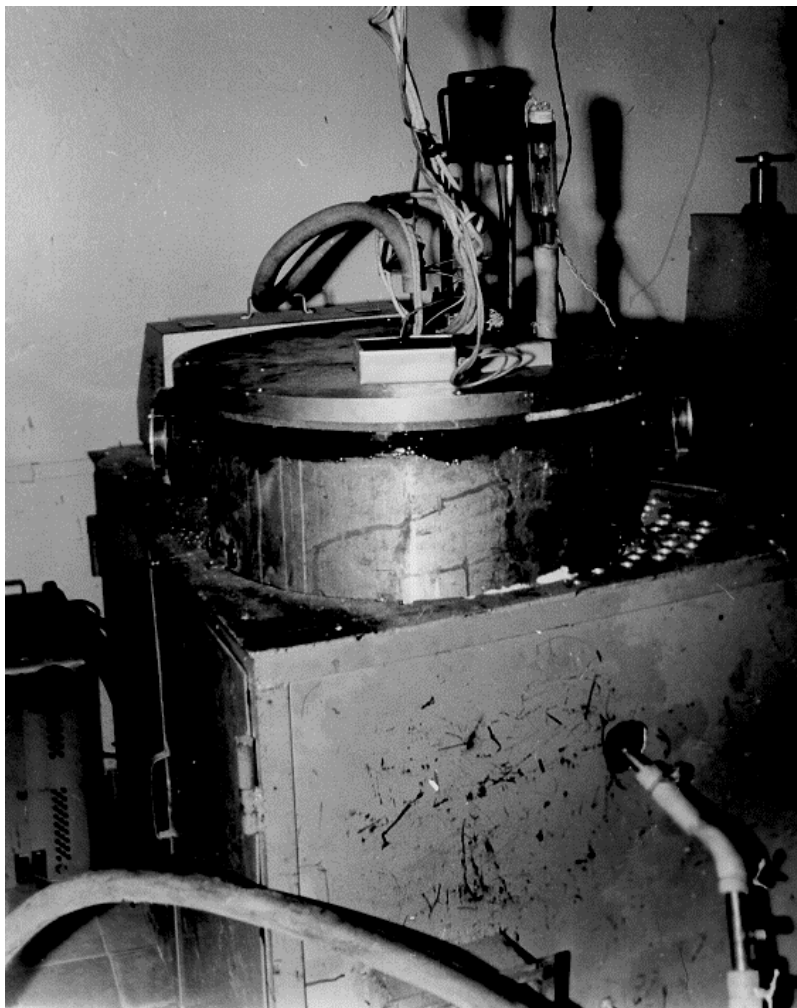


Рис. 6.2.3 Загальний вигляд вакуумної рідкометалевої установки



Рис. 6.2.4 Робота на вакуумній рідкометалевій установці:
руйнування рідкометалевої плівки за допомогою електромагнітних полів;
спостереження за процесом через оглядові вікна

Електромагнітна дія на плівку здійснюється індуктором, представленим на Рис. 6.2.2, розташованим над диском-розсікачем. Індуктор створює осьове щодо струменя електромагнітне поле (вертикальне) з характеристиками, наведеними на Рис. 6.1.6-6.1.8. Диски-розсікачі також змінні, легкозамінні, оснащені спеціальною системою вимірювання струмів, що індукуються в плівці, що дозволяє експериментально визначати для досліджуваних режимів діючої плівки змінні електромагнітні сили, контролюючи параметричний вплив безпосередньо у самій плівці. Верхня та нижня котушки індуктора, розташовані на одному магнітопроводі, можуть підключатися як до одного, так і до різних джерел постійного та змінного струму (синусоїдального або полігармонічного, як було описано вище), що дозволяє керувати параметричними коливаннями у плівці шляхом зміни форми та сили струму з використанням вищеописаних джерел (ИПТ).

Набір змінних фторопластових дисків-розсікачів різної конструкції (з гладкою поверхнею, з каналами і т.д.), живлення індуктора від ИПТ та інші вищеописані можливості дозволяють досліджувати режими керованого розпаду плівок в широкому діапазоні параметрів, що варіюються - чисел Рейнольдса, магнітного числа Ейлера та інших.

Проведені на описаній вакуумній установці дослідження електромагнітного збудження коливань і розпаду плівок галію на краплі показали хорошу працездатність установки та можливість ефективного управління МГД-розпадом плівок. Зважаючи на значні труднощі, розробка точної вимірювальної апаратури виявилася предметом великої самостійної роботи, яка успішно ведеться, а в даній роботі дослідження носять, в основному, якісний характер і зіставлення з результатами теоретичних досліджень проводилось за інтегральними параметрами. Достовірне вимірювання локальних змін полів швидкості, сил і т.д. у плівці поки що виявилось неможливим.

<i>I</i>	1	2	3	4	5
Контакти 1-2	9	17	24	30	37

Табл. 6.2.1

Труднощі, зокрема, пов'язані з проблемами виключення наведень і надійності контакту під час руху плівки (найбільш підходящими виявились сталеві електроди, мідні швидко змиваються галієм). Результати вимірювань напруженості поля у плівці при малих швидкостях руху дані в Табл. 6.2.1 для живлення індуктора струмом

промислової частоти 50 Гц, де струм вимірюється в A , різниця потенціалів U між контактами - в мВ. Для $I=1A$ відповідні дані представлені Табл. 6.2.2, звідки видно, що розподіл струмів у плівці близький до рівномірного, про що свідчить візуально рівний край плівки та постійна її товщина. Розглянемо далі деякі особливості процесу розпаду плівок галію, виявлені на цій установці із соплом діаметром 2,5 мм. Так, на Рис. 6.2.5 наведено картину вільного розпаду плівки (без впливу поля) за швидкості течії $u_0 \sim 2$ м/с. Розпад, як видно, полідисперсний, край плівки трохи нерівний.

Зі збільшенням швидкості течії струменя ($u_0 \sim 4$ м/с) плівка на незмочуваному диску поділяється на струмки ще на диску і відривається від поверхні диска, як видно з Рис. 6.2.6. В останньому випадку під дією поля можна вносити збурення з частотою, що дорівнює релеївській частоті хвиль максимального зростання для окремих струмків, що утворюються. Це дозволяє отримати резонансний розпад плівки.

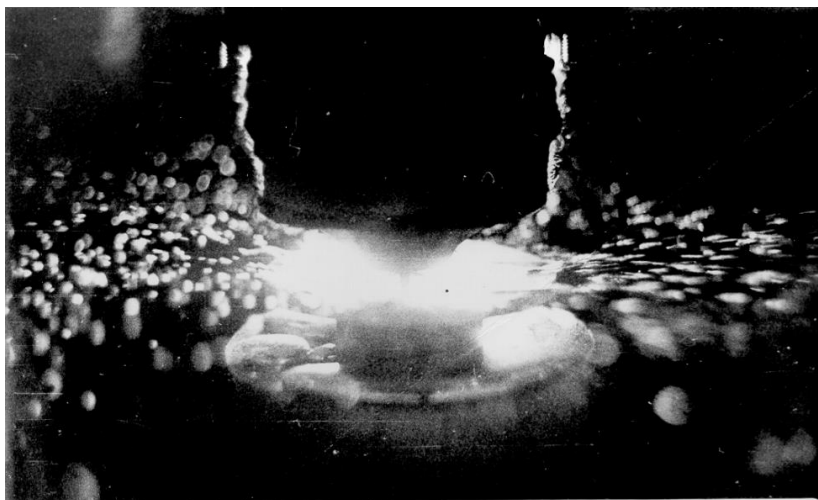


Рис. 6.2.5 Вільний розпад плівки галію у вакуумній камері

контакти	1-3	1-4	1-5	4-5	3-4	2-3	1-2	2-3	1-3
U	12	14	16	3	3	3	10	5	15

Табл. 6.2.2

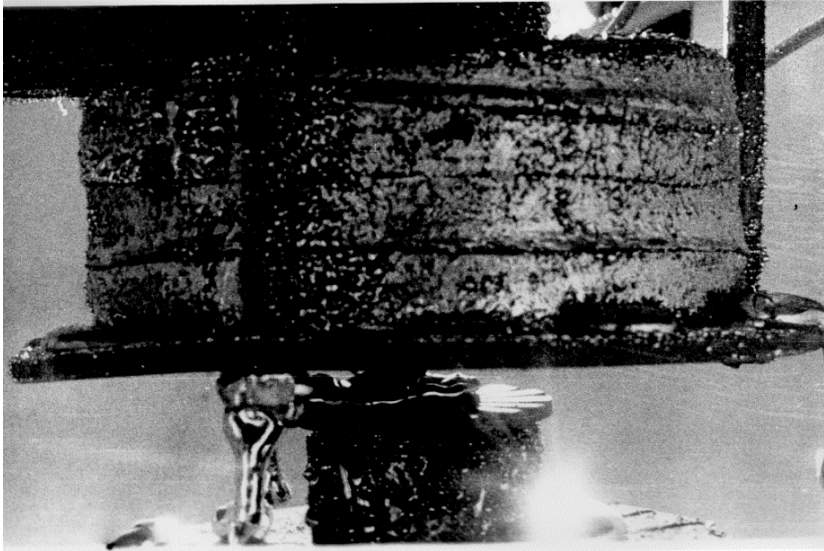


Рис. 6.2.6 Відрив півки галію від незмочуваної поверхні

При малій швидкості руху розплаву ($u_0 \sim 2$ м/с) поле з індукцією порядку 0,5Т (Рис. 6.2.7) замикає потік, викидає півку вгору, що якісно узгоджується з результатами теоретичних досліджень розділу 2. Змінне поле (Рис. 6.2.8) викликає параметричне накачування збурень півки та її розпад на краплі, причому, якщо застосувати механічні роздільники півки по краю на струмки, легко ввести систему в резонанс, підбираючи число Струхалія $Sh = u_0 / \lambda_p \omega$ рівним 1; де λ_p - довжина хвилі резонансного збурення, ω - частота збурюючої сили (вона дорівнює половині частоти живильного струму індуктора).

Вибираючи полігармонійний вплив з автономним регулюванням амплітуди окремих мод, можна домогтися розпаду на будь-яку задану кількість фракцій. Управління формою струму дозволяє регулювати також форму одержуваних крапель (гранул, якщо розглядати гранулятор [81, 100]). Якісно і, в першому наближенні, кількісно результати експериментальних досліджень адекватні теоретичним результатам розділу 2, проте, як показали експерименти, реальна картина істотно складніша через те, що проявляється вплив багатьох неврахованих в математичних моделях факторів: змочування диска, пульсацій швидкості течії, нерівностей диска і т.д.

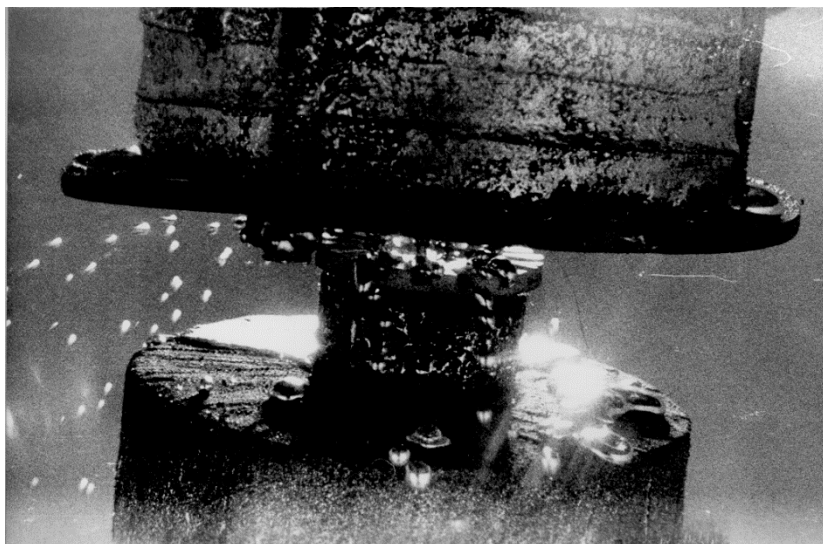


Рис. 6.2.7 Електромагнітне руйнування плівкової течії на краплі

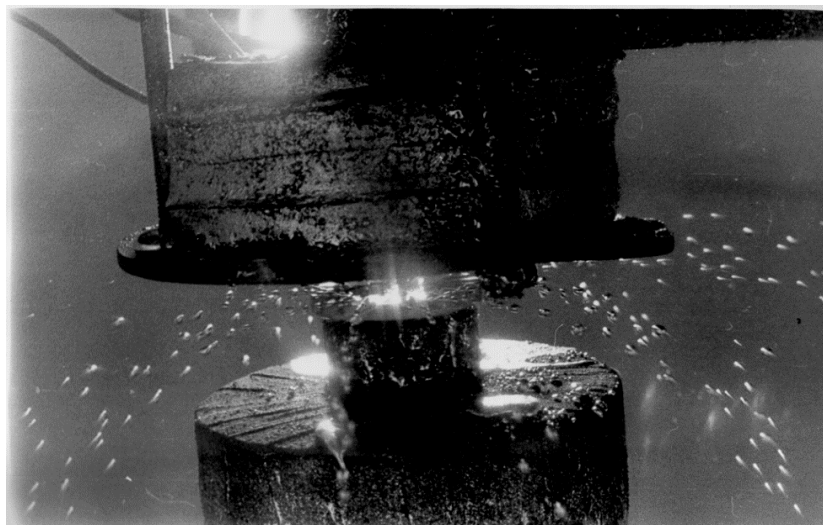


Рис. 6.2.8 Електромагнітне руйнування плівки в резонансному режимі

Побудувати адекватну кількісну теорію для скільки-небудь загального випадку неможливо унаслідок складності явищ та їх математичних моделей. Для застосувань важливішими є сильні ефекти та нові параметричні явища, тому якісно адекватна модель цілком придатна, що підтверджено у додатку конкретним прикладом.

6.3 Установки для дослідження вібраційного впливу коливань плівок в'язкої рідини та процесів краплеутворення

Далі розглянемо експериментальні дослідження вібраційного (електродинамічного) збудження коливань поверхні плівок. На відміну від раніше описаного, тут збуджуюча (керуюча) сила вже не електромагнітного, а електромеханічного походження і прикладена вона до диска-розсікача, що перетворює вертикальний круглий струмінь в горизонтальну плівку, що радіально розтікається. Диск діє на плівку із заданою періодичною силою. У загальному випадку сила може бути полігармонійною, як зазначалося.

Набір дисків-розсікачів широкий, можна отримувати плівки, що радіально розтікаються, окремі струмки, що радіально розтікаються, і інші випадки течій, досліджувані при варіюванні частоти і амплітуди вібрацій та інших параметрів. Головна увага приділяється резонансним випадкам та сильним гідродинамічним ефектам, що відкривають нові процеси або явища, покладені в основу перспективних технологій. При описаному способі збудження коливань плівок та їх розпаду на краплі та струмки, що сходять з диска з прорізами, за рахунок впливу вібрацій (згинальні збурення осі струмків) відчуються як раніше описані осесиметричні (релеєвські) коливання, так і згинальні, що викривляють їх вісь. Згинальні збурення з довжиною хвилі, істотно вищою ділянки релеєвського розпаду, практично не впливають на розпад струмків і визначають лише їх форму. Відомо [517] три режими розпаду струменів, що визначаються числами Oh і Re .

Дослідження ділянки незруйнованого струменя при модулюванні осової швидкості на початку струменя наводилося в [201-206, 450], причому, в [202, 203], дана оцінка рівня зовнішнього впливу на початку струменя, достатнього для її розпаду на n -ій довжині хвилі. Там же на основі чисельно-аналітичних рішень проблем вільного і примусового розпаду струменів вдалося встановити, що регулярний контрольований розпад можливий тільки при $k < 1$ і найменш енергоємному контролі при резонансі (збіг частоти сили форсування з природною частотою

коливань, коли частота сили примусу дорівнює частоті струму, що постачає електродинамічний вібратор).

Контроль розпаду струменів і плівок за рахунок згинаючих збурень практично не вивчений. На відміну від раніше описаних випадків, здійснення контрольованого резонансного розпаду під дією згинаючих збурень ускладнене через практично неможливу повну синхронізацію введених збурень з власними модами коливань струменя. Плівки як двовимірні аналоги струменів мають безліч схожих особливостей зі струменями. Коли плівки рухаються по поверхні твердих тіл, сили тертя значні і швидкість зменшується, у вільних плівках вона майже постійна по товщині і мало змінюється по довжині.

Експериментальна установка відкритого типу

Для встановлення закономірностей збудження коливань плівки і умов їх розпаду на крапельки, а також для вивчення взаємозв'язку дисперсійного складу отриманих крапель з параметрами системи була побудована фізична модель відкритого типу з водою як робочою рідиною і навколишнім повітрям. Особливу увагу було приділено якісному та кількісному аналізу процесу розпадання плівки та розробки ефективних методів дисперсії, реалізованих у структурах грануляторів та в перспективних технологіях. Загальний вигляд експериментальної та структурної схеми модельних установок для вивчення контрольованого електродинамічного розпаду плівок - на Рис. 6.3.1, 6.3.2.

До складу установки входить віброелектродинамічний стенд ВЕДС-10А, пристрій його керування (Рис. 6.3.1 показано зліва) і система подачі води. У систему подачі води входять: зливна ємність 1, вузол для кріплення насадків 2, ємність для збору води 3, пристрій регулювання рівня води (швидкісного напору) 4. Електродинамічний вібратор 5 встановлений всередині ємності для збору води на чотирьох опорах, що здійснюють його жорстке кріплення до нерухомої основи. Рухлива частина вібратора містить стійку 6, призначену для кріплення змінних дисків-розсікачів 7. Зливна ємність призначена для забезпечення сталості витрати рідини, що подається на диск-розсікач, для чого в ній є дренажний отвір, завдяки якому рівень рідини в ємності підтримується постійним. У зливну ємність подається вода із водопровідної мережі. Отвір для подачі води розташовується трохи нижче за дренажний отвір.

Подача води на диск-розсікач здійснюється через отвір у дні зливної ємності, рівень якої контролюється і може легко змінюватися за допомогою системи з двох блоків, троса та намотувального барабана. Рух

зливної ємності відбувається за напрямними. Штуцер нижнього отвору зливної ємності з'єднаний з гнучким насадком шлангом, забезпеченим для зручності автономними регуляторами витрати води від його максимального для даного напору значення до нуля. Насадок, призначений для формування циліндричного струменя, виконаний змінним з метою забезпечення можливості зміни діаметра струменя.

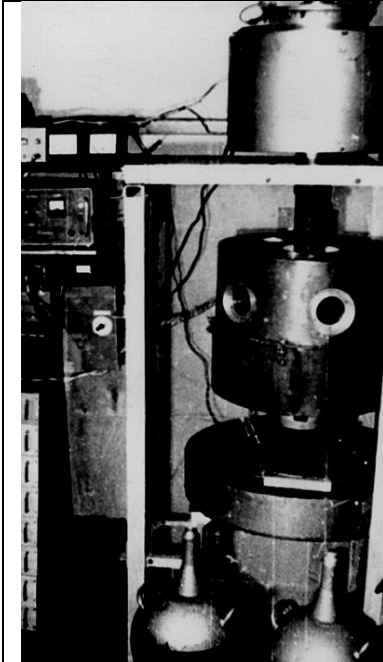


Рис. 6.3.1 Установка дослідження плівок непровідних рідин

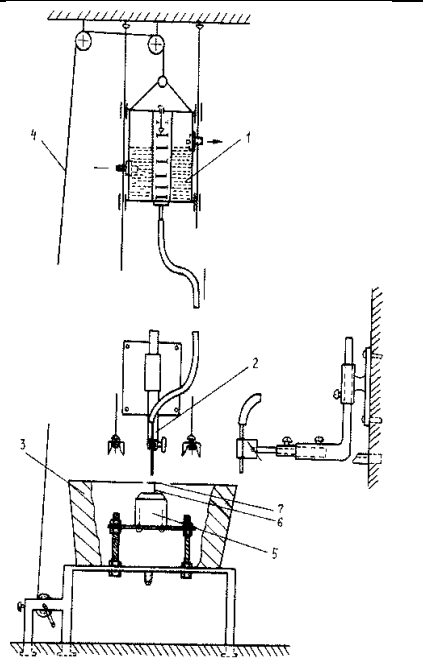


Рис. 6.3.2 Структурна схема установки керованого розпаду плівок

Насадок фіксується затискачем у вертикальному положенні. Центрівка його щодо центру горизонтального диска-розсікача виконується за допомогою поворотного пристрою, що дозволяє переміщати насадок у радіальному та тангенціальному напрямках. Кут нахилу робочої поверхні диска-розсікача забезпечується зміною нахилу площини під вібратором. Нахил площини регулюється переміщенням кріпильних гайок по чотирьох стрижнях, що мають різьблення.

Диски-розсікачі виконані змінними. Їхнє кріплення зі стійкою здійснюється різбовим з'єднанням. Для експериментів використовувались кілька типів дисків-розсікачів різних розмірів, представлених на Рис. 6.3.3:

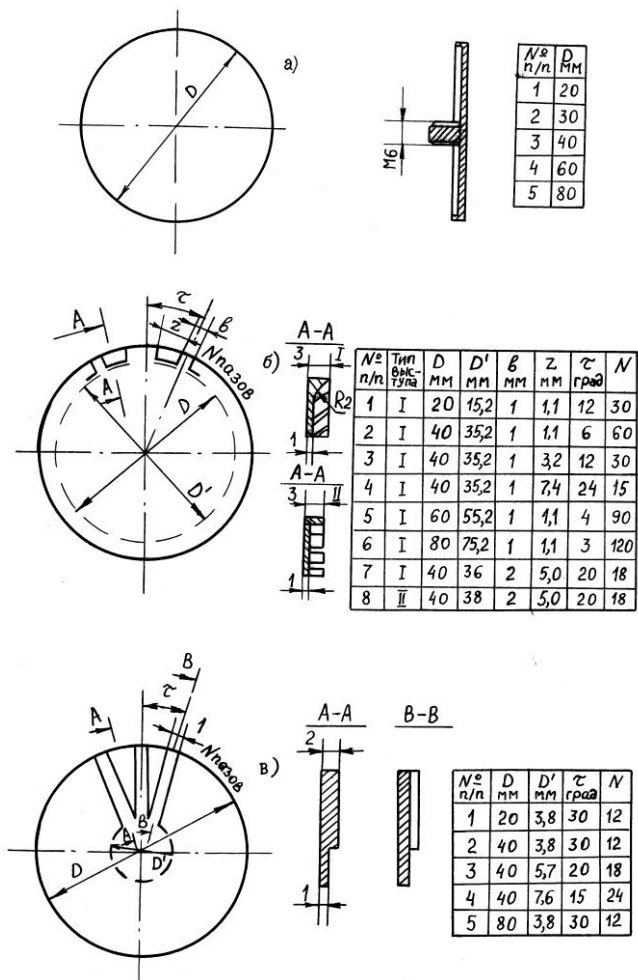


Рис. 6.3.3 Типи застосовуваних дисків-розсікачів

Використовувалося 5 різних дисків: 20, 30, 40, 60, 80 мм. На Рис. 6.3.3а представлений розсікач з гладкою робочою поверхнею, призначений для моделювання процесу розпаду плівок. Підставою для встановлення ємності збору води та кріплення вібратора є зварна рама, забетонowana в підлогу. На рамі змонтовано також барабан для підйому та опускання зливної ємності.

Рис. 6.3.3б представляє розсікачі, що перетворюють вертикальний циліндричний струмінь у ряд струмків меншого діаметра. У першому випадку утворення струмків відбувається завдяки наявності виступів з пазами по колу диска, у другому поділ вертикального струменя відбувається в центрі диска за допомогою радіально розбіжних каналів, нарізаних на робочій поверхні диска. У таблицях, поміщених поруч із малюнками, представлені розміри наявних дисків-розсікачів, набір яких містить 6 дисків розсікачів з виступами з шириною паза 1 мм і 2 з шириною паза 2 мм.

Розсікачі мають різні числа пазів, ширину виступів, діаметри. Розсікачі з каналами виконані різних діаметрів із шириною каналів 1 мм. Кількість каналів варіюється. До складу віброелектродинамічного стенду ВЕДС-10А, крім вібратора, входить також пульт управління, що містить блоки підмагнічування, генерації синусоїдальних або складних коливань, вимірювань вібрацій та підсилювач низької частоти. Для більш точного визначення частоти вібрації насадка та його амплітуди, в експерименті застосовувався п'єзо-датчик ІС-318, закріплений знизу робочого диска-розсікача. Сигнал з датчика реєструвався на двопроміневому електронному осцилографі ІС69.

Така система вимірювання дозволяла реєструвати частоту та амплітуду вібрації диска-розсікача з урахуванням реальних умов його роботи, тобто враховувалася зміна форми сигналу за рахунок індуктивності робочої котушки вібратора, а також зміна амплітуди вібрації за рахунок приєднаної маси струменя при варіюванні швидкості натикання на диск-розсікач. Крім того, при живленні вібратора полігармонічними струмами відтворювалася реальна картина вібрації з урахуванням всіх зовнішніх впливів на диск-розсікач. Пристрій подачі води забезпечує плавне регулювання швидкості витікання води від 0 до 4,5 м/с. Для варіювання витрати використовувалися насадки з діаметрами 1,6; 2,5; 3,5; 4,5; 5,3; 6,0 і 7,5 мм.

Контроль процесу розпаду струменів та плівок проводився візуально з використанням стробоскопічного тахометра ТСТ-100, що дозволяє контролювати частоту та амплітуду вібрацій, та за допомогою

відеозйомки. Вимірювання амплітуди вібрацій робилось візуальним методом дистанційно за допомогою світловода та іншим способом (для контролю): розрахунком за відомими віброприскоренням і частотою вібрацій.

При візуальному способі зображення краю диска-розсікача, що вібрує, передається на вхід мікроскопа з ціною розподілу 0,05 мм. Домагаючись регулюванням частоти стробоскопічного освітлення повної візуальної зупинки віброуючого диска-розсікача, за показаннями строботахометра можна уточнити частоту вібрацій. Аналогічним шляхом можна встановити частоту слідування (швидкість розповсюдження хвиль на плівці).

Методика досліджень

Як видно з основних рівнянь розділу 3.5, досліджувані явища збудження коливань поверхні струменів та плівок та умови їх розпаду на краплі визначаються такими факторами:

1. Безрозмірними критеріями – основними (числа Ейлера, Рейнольдса, Фруда, Вебера) та похідними (числа Онезорге $Oh = \sqrt{We} / Re$ та Галілея $Ga = Re / Fr$).
2. Характером і видом збурюючої сили.
3. Геометричними та фізичними параметрами системи.
4. Співвідношенням щільностей і в'язкостей рідини та навколишнього середовища.

Для характеристики рівня зовнішнього впливу запроваджено вібраційне число Ейлера $Eu_s = g_v r_0 / u_0^2$, відношення зовнішньої сили до інерційної. Тут $g_v = A\Omega^2$ - віброприскорення, що розвивається вібратором, де A, Ω - амплітуда і частота вібрацій.

При виконанні фізичного моделювання на вищеписаній установці можна вважати заданими геометричні параметри системи (іноді вони також можуть змінюватись), співвідношення щільностей і в'язкостей середовищ і вид збурювальної сили (може змінюватись у різних експериментах, як показано нижче). Радіус сопла (насадка) зручно вибирати фіксованим для даного експерименту (випробування j -го), внаслідок чого варіюється при $j = \text{const}$ за рахунок регулювання швидкості течії u_0 . При цьому спочатку необхідно встановити діапазон зміни Re , потім визначитися з кроком зміни Re в експериментах. Аналогічно – за іншими безрозмірними критеріями.

Для виявлення впливу різних критеріїв на характер досліджуваних процесів необхідно побудувати програму проведення фізичного моделювання таким чином, щоб області різних значень Re , Eu_g , We , Ga , Oh перетиналися хоча б в одній точці (для виявлення їх відносного впливу). За масштабні величини зручно обирати параметри вертикального струменя. А критерії для плівок за потреби можна за ними перераховувати.

Метою фізичного моделювання було встановлення характеру хвильових процесів та умов руйнування струменів і плівок на краплі залежно від збурюючої сили та вищевказаних критеріїв. Так, число Онезорге $Oh = \sqrt{\rho_1 v_1 / \sigma_{12}} r_0$ практично не змінюється, оскільки r_0 змінюється в порівняно вузьких межах, а v_1, σ_{12} також мало залежать від температури та навколишнього середовища, внаслідок чого $Oh \approx const$. Дещо ширший діапазон зміни іншого критерію, що не залежить від умов течії, - числа Галілея $Ga = \sqrt{r_0 g} r_0 / v_1$.

Виходячи з цього, запропоновано наступну послідовність проведення фізичного моделювання на описаній установці:

- моделююча рідина - вода, навколишнє середовище - повітря;
- 5 насадків (при фіксованій температурі це 5 пар значень Ga , Oh);
- для кожного сопла вибирався ряд значень швидкості витікання (витрат) води, що визначають ряд чисел Рейнольдса;
- при заданих $r_0(Ga, Oh)$, $u_0(Re)$, перебирається ряд значень Eu_g шляхом зміни g_v .

Оскільки при $g_v = const$ режими хвильових течій струменів і плівок можуть також відрізнятися, то необхідно варіювати параметри A , Ω . Вибираючи сопло, фіксуємо числа Онезорге та Галілея і виражаємо швидкість течії та віброприскорення за формулами:

$$u_0 = Re \cdot v / r_0, \quad g_v = Eu_g Re^2 v^2 / r_0^3. \quad (6.3.1)$$

Вирази (6.3.1) дозволяють вибирати діапазон зміни чисел Рейнольдса та Ейлера і відповідний крок зміни цих критеріїв, після чого можна встановити відповідний ряд значень Oh і Ga . При цьому необхідно для різних насадків ($r_0 \text{ var}$) мати хоча б по одному спільному значенню Re і Eu_g (або u_0 і g_v), для того, щоб виявити вплив Oh і Ga (або We).

Основні режими течії струменів та плівок під дією вібрацій

Основні режими течії струменів і плівок під дією вібрацій, досліджувались при вказаних насадках в діапазоні чисел Рейнольдса: 10^3 - 10^4 , Галілея: 70-500, Онезорге: $(2-5)10^{-3}$, Ейлера: 0-1. У резонансних режимах роботи вібратора досягалися віброприскорення $g_v > 10^3$ м/с². Відповідні значення вібраційного числа Ейлера Eu_g були досягнуті вище 10. В основному ж при $Re \sim 10^4$ числа Ейлера були значно менше одиниці: $Eu_g \sim 10^{-2}$. При великих Eu_g спостерігалися найцікавіші для практики гранулювання режими розпаду плівок, що характеризуються високою інтенсивністю вібраційної дії, що призводить до розпилювання плівок на дрібні краплі (діаметром 0,5-0,05 мм і менше).

При малих Eu_g і $\Omega \sim 1$, як видно з Рис. 6.3.4-6.3.7, вібраційна дія викликає появу довгих згинальних хвиль, по поверхні яких поширюється капілярна бриж. При $\Omega \gg 1$, коли довжина згинальних хвиль співмірна з довжиною капілярних, ці два типи збурень поверхні плівки практично нерозрізненні, незалежно від віброприскорення g_v .

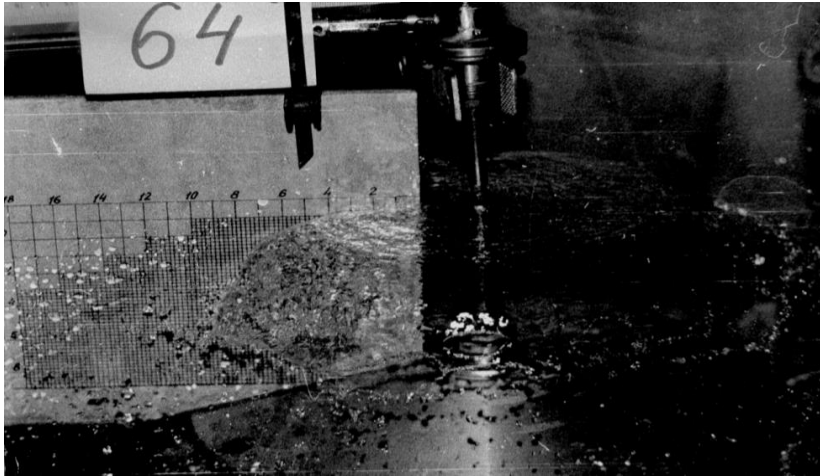


Рис. 6.3.4 Вібраційне управління згинальними коливаннями плівок:

$$r_0 = 3,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}, u_0 = 2,6 \text{ м/с}, D = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \Omega = 20 \text{ Гц}, g_v = 39 \text{ м/с}^2,$$

$$Re = 7,44 \cdot 10^3, We = 13,6, Ga = 549, Oh = 2,48 \cdot 10^{-3}$$

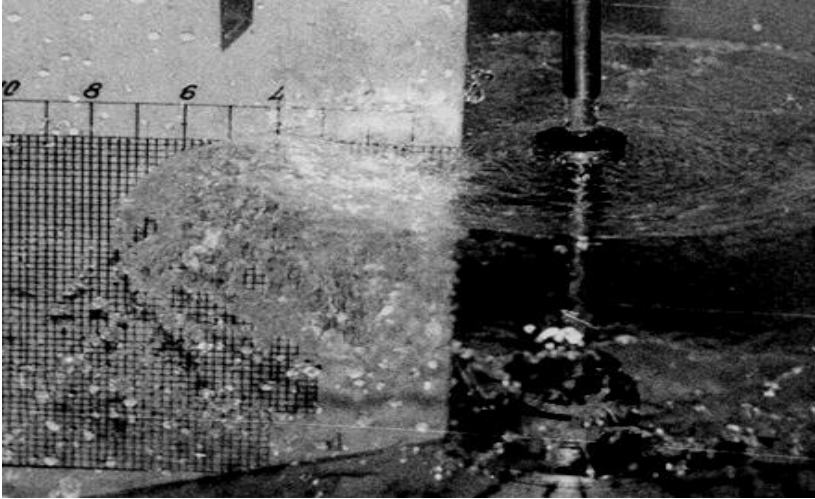


Рис. 6.3.5 Вібраційне управління згинальними коливаннями плівок:

$$\Omega = 34,7 \text{ Гц}, \quad g_v = 180 \text{ м/с}^2, \quad \Delta R = R_{\max} - R_{\min} = 12 \text{ мм}$$

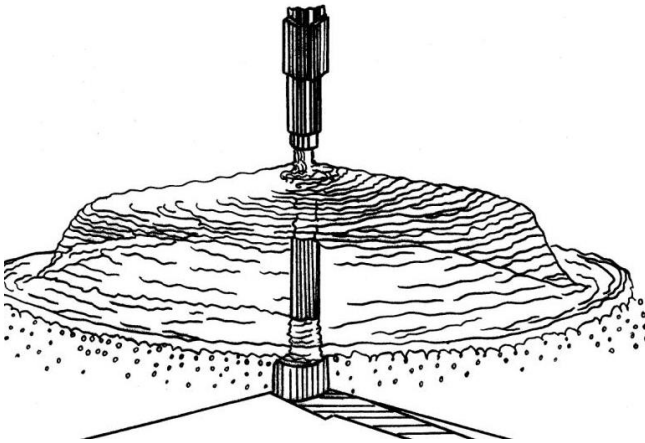


Рис. 6.3.6 Вібраційне управління згинальними коливаннями плівок:

$$r_0 = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad u_0 = 3,95 \text{ м/с}, \quad D = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \Omega = 20 \text{ Гц}, \quad \text{Re} = 8,89 \cdot 10^3, \\ \text{We} = 483, \quad \text{Fr} = 26,6$$



Рис. 6.3.7 Згинальні коливання плівки при вібрації диска:
 $\Omega = 20$ Гц, $g_v = 70 \text{ м/с}^2$

При $\Omega = 10, 20, 40$ Гц згинальні хвилі значно перевищують капілярні по довжині та амплітуді (особливо – при великих g_v). Причому, у ряді випадків хвилі зовні схожі на солітони: Рис. 6.3.5, 6.3.7. Було помічено впорядковуючу дію згинальних збурень на процес розпаду плівки: за досить великих g_v і порівняно малих Ω (до 80 Гц) край дзвоноподібної плівки стає більш рівним, а краплі, що виходять в результаті її розпаду - більш однорідними за розмірами (приблизно в 2-3 рази).

Збільшення частоти вібрацій згладжує зазначений ефект при $\Omega \sim 200$ Гц, так що навіть порівняно високе віброприскорення $g_{v\text{max}} = 160 \text{ м/с}^2$ дає картину, ідентичну відсутності вібрацій. Лише у резонансному випадку, при $g_v > 10^3 \text{ м/с}^2$ картина різко змінюється: плівка перестає існувати і жорстким чином (вибух) розпадається (розпорошується), практично починаючи з місця удару вертикального струменя з диском-розсікачем. У деяких випадках плівка продовжує існувати і при $g_v \sim 10^3 \text{ м/с}^2$ і розпадається звичайним чином. Одночасно з цим з верхньої поверхні зриваються дрібні крапельки (фонтанування з поверхні плівки).

Установка з азотною атмосферою та кристалізатором

Для перевірки технологічних та конструктивних рішень, покладених в основу проекту напівпромислового плівкового гранулятора

легких сплавів з рідинним азотним кристалізатором [100] (Рис. 6.3.9), була створена електродинамічна установка, представлена на Рис. 6.3.8. Дана установка дозволила встановити основні закономірності розпаду плівок у диспергаторах з електродинамічним збудженням, зокрема, вдалося отримати відомості про вплив швидкості руху розплаву, величини віброприскорень диска-розсікача та інших факторів на величину і однорідність крапель (гранул після застигання).

Електродинамічна модельна установка (ЕДМУ) дозволяє проводити експериментальні дослідження процесу параметричного збудження коливань, принципу і закономірностей плівкового гранулювання в пристроях з електродинамічним вібраційним диспергатором на модельних рідинах, як провідних (розплави галію, алюмінію, свинцю і т.д.), так і непровідних (розплави солей, вода, олія). Модельна рідина або розплав металу по теплоізолюваному металопроводу 1, що обігривається, і каліброваному змінному насадку 2, формує циліндричний струмінь, подається на диск-розсікач 3. Останній з'єднаний штоком 4 з резонуючою мембраною 5 (є набір мембран різної товщини). ВЕДС встановлена на штатному столику вібратора 6.

Кристалізатор з рідким азотом являє собою рознімну теплоізолювану посудину, що складається з верхньої кришки 7 з оглядовим вікном 8 і нижнього корпусу 9. Вузол обертання 10 дозволяє нижньому корпусу 9 здійснювати обертання навколо центральної осі гранулятора. Кришка кристалізатора виконана нерухомою, а встановлена під нею тонкостінна оболонка 11 утворює спільно з корпусом кристалізатора гідравлічний затвор, що дозволяє за рахунок випаровування азоту всередині кристалізатора створити надлишковий тиск, що запобігає контакту кристалізованих гранул модельного металу (або сплаву) з киснем повітря.

Напівпромисловий плівковий гранулятор [100] (Рис. 6.3.9) має умови охолодження та застигання (солідіфікації) крапель та гранул, при яких виключається їх злипання. Ці умови визначаються відповідним вибором рівня холодоагенту (рідкого азоту) у кристалізаторі та його безперервною циркуляцією. Крім того, передбачаються створення плівкової кільцевої зависи хладагента, що покращує умови кристалізації крапель і сприяє підвищенню швидкості процесу охолодження та застигання. В експериментальній установці (Рис. 6.3.8), що відображає загалом основні принципи, покладені в основу відповідної дослідно-промислової установки, але має значно менші габарити, максимальний

рівень рідкого азоту становить всього 3-4 см, що зумовлено конструктивними та технологічними обмеженнями.

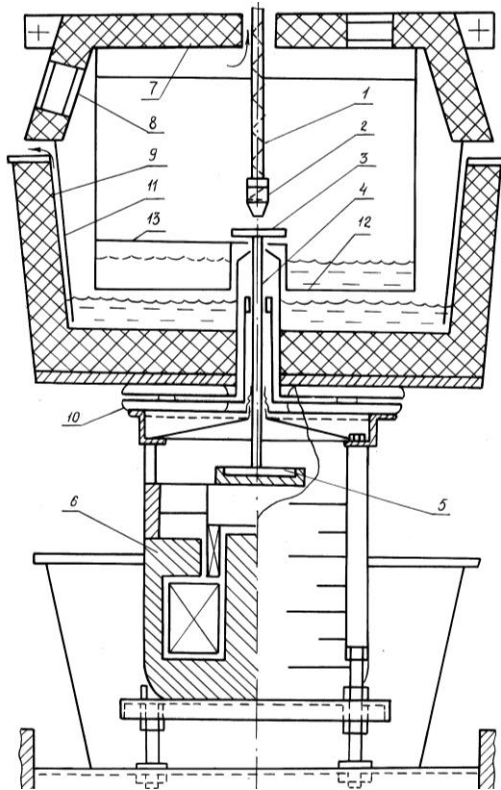


Рис. 6.3.8 ЕДМУ з азотним кристалізатором

Усунення можливості злипання гранул, достатньої для визначення гранулометричного складу частини гранул, в експериментальній установці здійснено шляхом установки всередині кристалізатора нерухомої внутрішньої ємності 12, на дні якої вирізаний сектор 13. При цьому краплі (гранули), що пролітають у площині сектора, потрапляють на обертове дзеркало рідкого азоту. Швидкість обертання корпусу під дзеркалом рідкого азоту регулюється в межах від 0 до 10-20 об/хв.

Для виявлення основних режимів розпаду плівок на описаних установках було проведено експериментальні дослідження із застосуванням модельних рідин води та галію. Так, були організовані експерименти на воді із застосуванням вібраційної сили, що збуджує розпад плівки. Фізичні властивості води [409] наведені в Табл. 6.3.1:

t °C	10	16	20	30	50
$10^{-3} \rho$, кг/м ³	1,00	0,999	0,998	0,996	0,989
$10^6 \nu$, м ² /с	1,306	-	1,006	0,805	0,556
$10^2 \sigma$, Н/м	7,42	7,32	7,27	7,12	-

Табл. 6.3.1 Фізичні властивості води

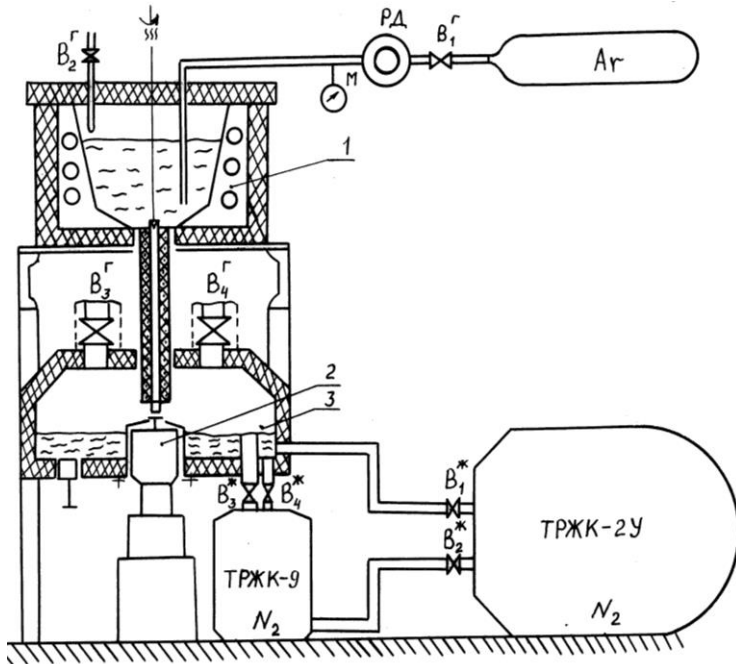


Рис. 6.3.9 Проект напівпромислового плівкового гранулятора легких сплавів із рідинним азотним кристалізатором

Експериментальні дослідження електродинамічного збудження розпаду плівки

Для $r_0=2,25 \cdot 10^{-3}$ м, $u_0=3,95$ м/с, $Re=8,89 \cdot 10^3$ виходить $Re_{\max} \approx 12000$. Використані сопла: $r_0=0,8 \cdot 10^{-3}$, $r_0=1,25 \cdot 10^{-3}$, $r_0=1,75 \cdot 10^{-3}$, $r_0=2,25 \cdot 10^{-3}$, $r_0=3,0 \cdot 10^{-3}$ м. Вибиралось сопло, чим фіксувались Oh , Ga і далі варіювались Re (за допомогою u_0 або Q_0), а для кожного $Re=const$, у свою чергу, змінювалось Eu_g , відповідно до (6.3.1). Для $Re=200, 600, 1000$ відповідні параметри наведені в Табл. 6.3.2:

Re	200	600	1000	2000	6000	10000
u_0 , м/с	$8,88 \cdot 10^{-2}$	0,266	0,444	0,88	2,66	4,44
Q_0 , л/с	$1,43 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	0,07

Табл. 6.3.2 Параметри течії плівки в експерименті

Відповідні значення g_v (м/с²) наведено в Табл. 6.3.3, звідки видно, що максимальне досягнуте віброприскорення становило 14000 м/с², або $g_v=1400g$, що значно (майже 100 разів) перевищило заводські можливості вібростенду ВЕДС-10А. Для цього було знайдено та використано режими роботи стенду в резонансі на різних частотах (різних мембранах вібратора).

Re	200	600	1000	2000	6000	10000
Eu_g						
0,004	0,014	0,13	0,35	1,4	12,7	35,2
0,04	0,14	1,3	3,5	14,0	127	352
0,4	1,4	13	35	140	1270	3520
4,0	14	127	352	1400	12700	
40,0	140	1270	3520	14000		

Табл. 6.3.3 Значення віброприскорення g_v в експериментах

З огляду на Табл. 6.3.2 за умови перетину областей за безрозмірним критерієм Eu_g при різних числах Рейнольдса Re було запропоновано програму експерименту в Табл. 6.3.4, де $u_0=3,9$ м/с. Аналогічно для

$Q_0 = 2,01 \cdot 10^{-3} u_0$, $u_0 = 1,26 \cdot 10^{-3} Re$, $r_0 = 0,8 \cdot 10^{-3}$ м дані представлені в Табл. 6.3.5, 6.3.6.

Re	200	600	1000	2000	6000	10000
g_v	14	13	3,5	14	13	3,5
	70	64	17,5	70	64	17,5
	140	127	35	140	127	35
			70			70
			140			140

Табл. 6.3.4 Набори значень віброприскорень g_v

Re	200	600	1000	2000	6000
u_0 , м/с	0,25	0,76	1,26	2,5	7,6
Q_0 , л/с	0,5	1,5	2,5	5,1	15

Табл. 6.3.5 Значення швидкості та витрати течії плівки при різних значеннях числа Рейнольдса Re

Re	60	100	200	600	1000	2000	6000
g_v	7,2	10	8	7,2	10	8	7,2
	14,4	20	16	14,4	20	16	14,4
	29	40	40	29	40	40	29
	72	80	80	72	80	80	72
	144	160	160	144	160	160	144

Табл. 6.3.6 Набори значень g_v в експериментах за різних Re

Для $r_0 = 1,25 \cdot 10^{-3}$ м ($u_0 = 1,26 \cdot 10^{-3} Re$, $Q_0 = 4,9 \cdot 10^{-3} u_0$, $g_v = 5,2 \cdot 10^{-4} Re^2 Eu$), і для $r_0 = 1,75 \cdot 10^{-3}$ м ($u_0 = 5,77 \cdot 10^{-4} Re$, $g_v = 1,9 \cdot 10^{-4} Re^2 Eu$, $Q_0 = 9,6 \cdot 10^{-3} u_0$), і для групи $r_0 = 3,0 \cdot 10^{-3}$ м ($u_0 = 3,37 \cdot 10^{-4} Re$, $g_v = 3,78 \cdot 10^{-5} Re^2 Eu$, $Q_0 = 25,3 u_0 \cdot 10^{-3}$) дані зведені у зазначеному порядку в Табл. 6.3.7, 6.3.8.

Як видно з Табл. 6.3.8, перші дві області по Eu_g мають перетин у 4 точках, друга і третя – у двох. За числами Рейнольдса загальних точок більше. Програма експерименту, що дає досить представницьку вибірку значень основних безрозмірних критеріїв, було складено та проведено експериментальні дослідження процесів керованого розпаду плівок з фотореєстрацією основних режимів.

Re	100	200	600	1000	2000	6000	10000	20000
u_0 м/с	0,08	0,16	0,48	0,81	1,62	4,85		
		1,12	0,35	0,58	1,15	3,5	5,8	
		0,067	0,20	0,34	0,67	2,02	3,4	6,7
$Q_0 \cdot 10^3$ л/с	0,39	0,78	2,35	3,9	7,8	23,5		
		1,1	3,3	5,5	11	33	55	
		2	5,7	9,5	19	57	95	190

Табл. 6.3.7 Значення швидкості та витрати течії плівки при різних Re, $r_0=1,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}$

Re	100	200	600	1000	2000	6000	10000	20000
g_v 2,0	10,4	8,3	7,5	10,4	8,3	7,5		
4,0		20,8	21	15	20,8	21	15	
10		52	42	37,5	52	42	37,5	
20		104	83	75	104	83	75	
30		156	166	150	156	166	150	
g_v 0,4		3,0	7,0	7,6	3,0	7,0	7,6	
2,0		15,2	13,7	19	15,2	13,7	19	
4,0		30,4	27,4	38	30,4	27,4	38	
10		76	68	76	76	68	76	
20		152	137	152	152	137	152	
g_v 10		15,1	19,0	7,6	15,1	19,0	7,6	15,1
20		30,2	18,1	15,2	30,2	18,11	15,2	30,2
40		60,4	45,3	38	60,4	45,3	38	60,4
80		120,8	90,6	76	120,8	90,6	76	120,8
100		151	136	152	151	136	152	151

Табл. 6.3.8 Значення Eu_g в залежності від g_v і Re

Так, наприклад, для $t=16 \text{ } ^\circ\text{C}$, $r_0=2,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $u_0=3,95 \text{ м/с}$, $\nu=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\rho=10^3 \text{ кг/м}^3$, $\sigma=7,27 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$ виходить $We=483$, $Fr=26,6$, $Ga=334$, $Re=8,89 \cdot 10^3$, $Oh=2,47 \cdot 10^{-3}$. Закономірності процесу хвилеутворення та розпаду плівки на краплі в цьому випадку наступні. Наприклад, для

диска-розсікача діаметром 40 мм маємо: довжина згинальної хвилі $l=60$ мм при $\Omega=10$ Гц, амплітуда відповідно дорівнює $A=0,9; 3,5$ мм при $g_V=3,5; 17,5$ м/с², а при $g_V>35$ маємо $A>5$ ($A=5$ - межа застосовуваних вимірювальних засобів). Зі збільшенням частоти з точністю до похибки вимірювань довжина хвилі має порядок $1/\Omega$. При збільшенні g_V довжина хвилі дещо скорочується, фронт її стає крутішим і дисперсний склад крапель дещо звужується. В [100] є також інформація про типи застосовуваних дисків-розсікачів.

Відстань від зрізу сопла до площини диска-розсікача вибиралася 10 мм. Основні режими розпаду плівок реєструвалися кіно- і фотоапаратурою, а також ще й візуально із застосуванням спеціально сконструйованого координатного пристрою, що дозволяє у світлі стробоскопічного джерела фіксувати максимальний і мінімальний діаметри плівки і параметри згинальної хвилі при різних режимах течії і параметрах вібраційних впливів (Ω, A).

6.4 Параметричні резонанси, м'які та жорсткі режими втрати стійкості

Резонансних режимів поширення згинальних збурень не виявлено. Як випливає з [130], для наведених вище значень параметрів при $t=20^{\circ}\text{C}$ виходить наближений зв'язок виду $\omega_* = 3,8/a_0^2$, де радіус струмка вимірюється в мм. Для $a_0 = 1; 0,5; 0,25$ відповідно: $\omega_* = 3,8; 15,2; 60,8$, звідки для струменів $a_0 \sim 1$ при $t \ll 20^{\circ}\text{C}$ (наприклад, 10°C), коли в'язкість більша приблизно 1,3-1,5 рази, $\omega_* \sim 5$ Гц, тобто нижче робочого діапазону.

Лише для тонких струмків ω_* потрапляє в робочий діапазон частот, але за допомогою описаних дисків-розсікачів струмка з $a_0 < 0,5$ отримувати складно через те, що великі капілярні сили перешкоджають проходженню води в канали і рідина тече по верхній поверхні диска у вигляді суцільної плівки. Резонансні режими коливань диска, що забезпечують значення $g_V > 10^3$ м/с², здійснюються на ряді кратних частот, які дещо змінюються залежно від типу диска-розсікача та умов течії.

Так, при $t=8^{\circ}\text{C}$, $r_0=3,75 \cdot 10^{-3}$ м, $u_0=2,6$ м/с, $t_{\text{пов}}=14^{\circ}\text{C}$ для диска №4.2 виходить $\Omega_*=440, 880, 1760$ Гц. При $\Omega_*=440$ Гц розпил із поверхні слабкий, при $\Omega_*=880$ Гц - сильніший, а при $\Omega_*=1760$ Гц розпил відбувається прямо з поверхні диска-розсікача, але є також коротка плівка (Рис. 6.4.1, 6.4.2).

При $u_0=2,8$ м/с для диска №4.3 виходить: $\Omega_*=490, 805, 1610, 3100$ Гц, причому, $\Omega_*=1610$ Гц дає майже повний розпил, тоді як інші режими дають лише ореол по краю плівки (розпил). Вказані випадки, представлені на Рис. 6.4.1-6.4.3, - м'які режими втрати стійкості: поступове наростання амплітуди коливань диска відповідно призводить до монотонного наростання амплітуди збурень поверхні плівки.

При $Eu_g \gg 1$, коли, як показано в розділі 3, процес параметричних коливань плівки описується видозміненим рівнянням Бюргерса, монотонне наростання віброприскорення g_v призводить до вибухового сплескування плівки, розпилу її в найдрібніші крапельки, невидимі для очей. При цьому на вертикальному струмені чітко видно конічну ударну хвилю, що переходить на неї з плівки: струмінь виходить з гострим носиком (утворюючи – лінії ударної хвилі), що дотикається поверхні диска (див. рис. 6.4.4). Крапельки, що розпоршуються, знаходяться всередині конуса, що утворюється навколо струменя ударною хвилею.

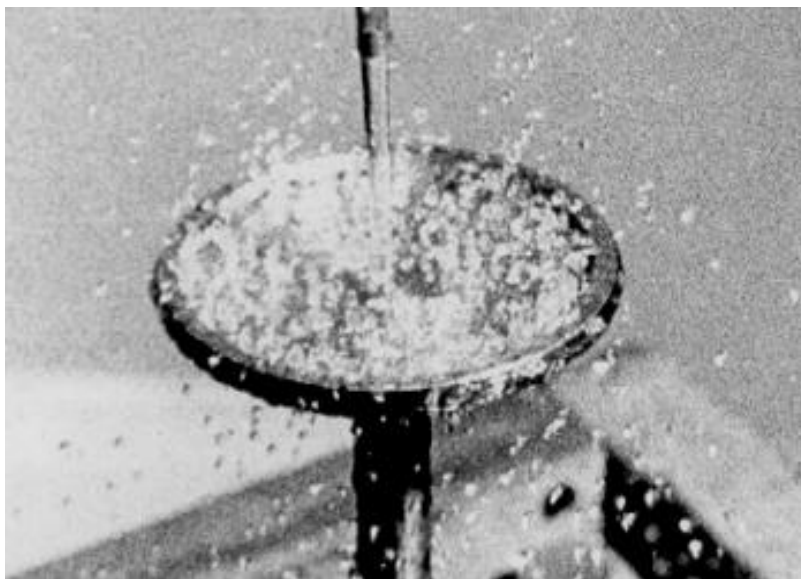


Рис. 6.4.1 Початок режиму віборозпилу плівки: $r_0=3,75 \cdot 10^{-3}$ м, $u_0=2,6$ м/с, $\Omega_*=1880$ Гц, $D=0,02$ м, $We=342$, $Fr=13,6$, $Re=7,44 \cdot 10^3$

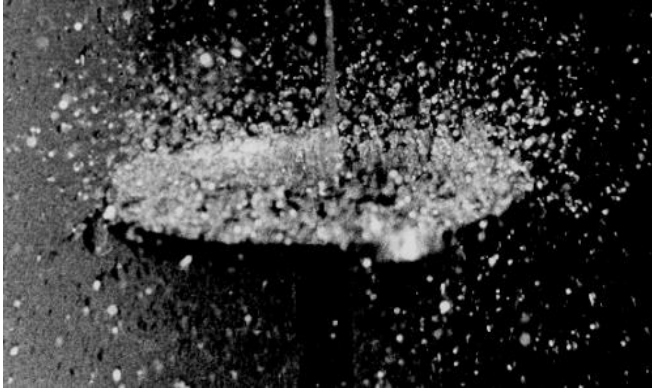


Рис. 6.4.2 Режим часткового вібророзпили півки:
 $\Omega^*=1750$ Гц, $g_V=160g$, $D=0,03$ м

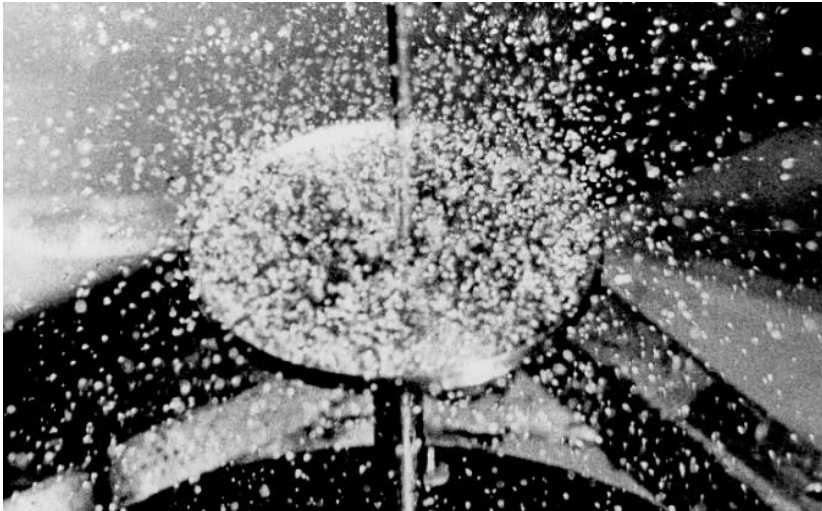


Рис. 6.4.3 Режим солітонної руйнації півки на краплі:
 $r_0=0,8 \cdot 10^{-3}$ м, $u_0=0,2$ м/с, $\Omega^*=450$ Гц, $D=0,03$ м, $g_V=250g$

Що стосується електромагнітних впливів, жорстких режимів втрати стійкості півок не було виявлено, що пов'язано, на наш погляд, з недостатньо сильним полем (до 0,6 Т). Параметричні резонанси

досягалися при порівняно слабких полях, нижня межа електромагнітного впливу розмита, її точне значення, яке визначається порогом дисипації енергії в плівці, експериментально не вдалося встановити.

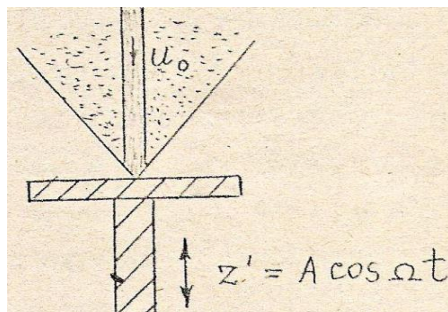


Рис. 6.4.4 Тонкодисперсне ударно-хвильове руйнування плівки

Параметричний резонанс у плівці складно реалізувати через труднощі стабільної течії плівки, тоді як у разі механічного поділу краю плівки на окремі струмки рівного діаметра цього досягти легко, вибираючи частоту поля кратною власній частоті струмків.

Дисперсний склад одержуваних крапель (гранул)

З урахуванням знайдених закономірностей розпаду плівок, найбільш технологічним режимом для отримання гранул виявився резонансний, заснований на використанні механічних резонансів мембрани електродинамічного вібратора. У цих режимах при малих енергетичних витратах досягаються великі віброприскорення (до 1000 м/с^2 , або $g_V=100g$, і більше). Залежність віброприскорення від товщини мембрани вібратора для трьох типів мембран дана на Рис. 6.4.5, де розриви кривих, побудованих за експериментальними даними, пояснюються обмеженими можливостями застосовуваного датчика віброприскорень.

Режим високих віброприскорень, як показує аналіз, створює на поверхні плівки систему нелінійних хвиль, що руйнують плівку на краплі. При цьому віброприскорення, що забезпечують $Eu_g \sim 1$, відповідають випадку солітонних рішень (рівняння типу КВД описують процес хвилеутворення), а при $Eu_g \gg 1$ з'являється ударна хвиля, що переходить на вертикальний струмінь (рівняння типу Бюргерса), і плівка зникає, відбувається жорсткий режим втрати стійкості (перехід плівки в

дрібні краплі, розпил із поверхні диска в місці торкання струменя з диском).

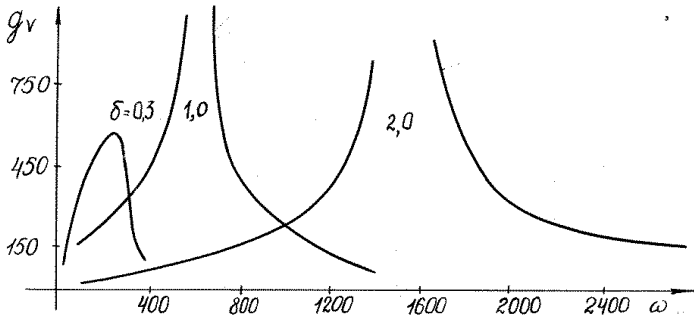


Рис. 6.4.5 Резонансні режими роботи вібратора ВЕДС-10А при різних товщинах мембран: 0,3; 1,0; 2,0 мм

Поява солітонів при $Eu_g \sim 1$ призводить до того, що дисперсія хвиль у плівці, що радіально розтікається, зникає і окремі солітони під дією вібрацій працюють як окремі вертикальні струмки, з гребенів яких зриваються краплі. Для перевірки однорідності дисперсного складу на раніше описаній установці з азотною атмосферою було отримано гранули галію (Рис. 6.4.6):

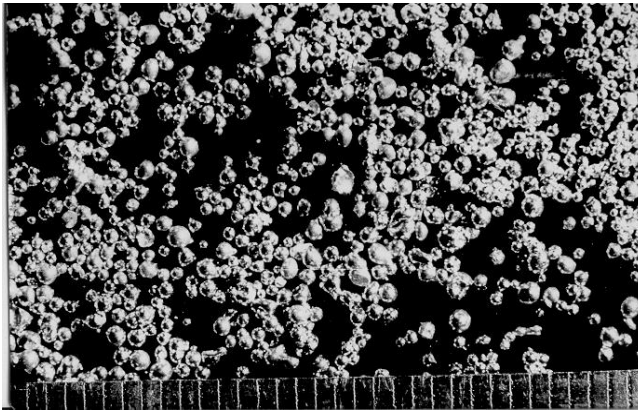


Рис. 6.4.6 Гранули галію, отримані на віброгрануляторі ГПА-1 (охолодження в рідкому азоті)

Результати досліджень гранулометричного складу отриманих гранул, охолоджених у рідкому азоті (тричі було розглянуто 15 партій гранул по 10 штук), наведено в Табл. 6.4.1, де n -кількість гранул, d -діаметр гранул (в мм). Еквівалентний діаметр гранул дорівнює

$$d_{\text{екв}} = \frac{\sum_{i=1}^{12} n_i d_i}{\sum_{i=1}^{12} n_i} \approx 0,88$$

n	12	24	25	19	15	15	9	14	8	3	3	3
d	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6

Табл. 6.4.1 Гранулометричний склад отриманих гранул

Звідси видно: дисперсійний склад досить однорідний, особливо, якщо врахувати, що тут є значна похибка експериментальних даних, пов'язана з нестационарністю процесу (дрейфом резонансу вібратора в залежності від розходу розплаву). Здійснюючи контроль дрейфу резонансу та його автоматичне утримання, можна суттєво звузити дисперсійний склад гранул.

Розроблені нові принципи гранулювання дозволили побудувати плівкові МГД- і електродинамічні гранулятори, що не мають аналогів у світовій практиці. Вони відрізняються істотно більшою продуктивністю, ніж відомі струменеві [201] (на один-два десяткові порядки), значно ширшим діапазоном одержуваних моногранул, простотою конструкції і малими енерговитратами. Один з напівпромислових грануляторів такого типу, ГПА-1 (гранулятор плівковий для алюмінієвих сплавів, модель 1), був успішно випробований в лабораторних умовах і на підприємстві [204]. Роботи в даному напрямку [100, 101, 181, 202, 203, 205, 206] перспективні для багатьох галузей промисловості та технології, проте з 1991 р. припинено за відсутністю фінансування.

6.5 Висновки за розділом

Експериментальні дослідження параметричного збудження коливань на межах розділу суцільних середовищ показали, що у разі течії таких розплавів як галій, алюміній тощо, велике значення має окисна плівка, що утворюється на вільній поверхні розплаву навіть за наявності малої кількості кисню. Така окисна плівка створює настільки великі капілярні сили, що конкурувати з ними можуть лише поля з індукцією більше 1Т та вібрації з віброприскореннями 100g (~10³ м/с²). Причому, оскільки окисна плівка неоднорідно розподілена по поверхні розплаву,

переважним є ефект Марангоні. Виключити хаотизацію системи і зробити її керованою дозволяють контрольована атмосфера (азотна, наприклад) або вакуумування установки, що значно ускладнює експерименти.

Проведене фізичне моделювання процесів збудження коливань поверхні плівок та їх розпаду під дією електромагнітних полів та вібрацій показало справедливість основних положень побудованої нами теорії та можливість відкриття нових явищ. Подальше поглиблене дослідження параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ, шляхи якого вказані тут, дозволить виявити нові не вивчені ефекти, у тому числі пов'язані з проявом нелінійної взаємодії хвиль, кавітацією, резонансами тощо. Так, при $g_V > 100g$ дія вібрацій диска-розсікача призводить до режиму кавітаційної течії плівки, що супроводжується сильним акустичним шумом. Безліч кавітаційних бульбашок у плівці схлопуються, створюючи потужну акустичну хвилю, що дробить відірвані від плівки крапельки. Радіус одержуваних при цьому крапель можна оцінити за формулою $r_k \approx 0,78 [\sigma / (\rho_1 f^2)]^{1/3}$, де $f = \Omega / (2\pi)$ (r_k вимірюється в м, Ω - в Гц). Для води це дає $r_k \approx 0,11 / \Omega^{2/3}$, звідки у разі $\Omega = 10^3$ і $6,4 \cdot 10^4$ виходить $r_k \sim 10^{-3}$, 10^{-4} , відповідно.

Експериментальні дослідження при $\Omega = 2 \cdot 10^3$ показали, що розмір крапель утворюється менше 10^{-4} м (0,1 мм), тобто вібрації з частотою близько 2 кГц породжують кавітацію на диску-розсікачу, що створює акустичну хвилю з частотою близько 100 кГц. Таким чином, нелінійна взаємодія полів і середовищ, параметричні ефекти, перекачування енергії мод, кавітація та інші явища дають підставу сподіватися на відкриття нових непізнаних явищ, що мають не тільки теоретичне значення, але і сильні практичні застосування [100, 101, 181, 202-206].

В результаті проведеного фізичного моделювання вдалося виявити 3 нових явища параметричного збудження коливань у плівках:

- $Ei_g \ll 1$, згинальні збурення (упорядковують процес розпаду плівки шляхом вирівнювання краю);
- $Ei_g \sim 1$, солітонний режим (по поверхні плівки біжать солітони, що працюють як окремі струмки, що дають монодисперсний розпад внаслідок відсутності дисперсії);
- $Ei_g \gg 1$, ударно-хвильове руйнування плівки (ударна хвиля переходить із плівки на вертикальний струмінь у вигляді конічної хвилі, розпиляючи плівку на дрібні краплі).

У перехідних областях по Eu_g залежно від значень Oh , Fr , Re та інших визначальних параметрів можливі також комбіновані режими, ускладнені специфічними ефектами (наприклад, кавітацією).

При електромагнітному збудженні розпаду плівок нижню межу Eu_m у разі резонансної дії точно встановити неможливо ($Eu_m \sim 0$). Нерезонансне руйнування плівки наростаючими коливаннями її поверхні можливе при використанні полів з індукцією близько 0,5 Т і вище.

Заключні висновки

Представлені результати теоретичних та експериментальних робіт з параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ є розвитком нового напрямку в сучасній гідродинаміці, теплофізиці та теорії управління процесами в суцільних середовищах. Напрямок пов'язаний з вивченням параметричних впливів (електромагнітних, теплових, вібраційних і т.д.) на межах розділу суцільних середовищ з метою їх руйнування, стабілізації або вимушених коливань заданого виду, що має важливе прикладне значення.

Теоретичне та експериментальне дослідження цієї проблеми стало можливим завдяки успішному розвитку останнім часом техніки генерації коливань та теорії управління процесами з розподіленими параметрами. У монографії представлено рішення проблеми параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ на прикладі трьох класів задач:

1. Плівкові течії рідких та непровідних рідин у навколишньому непровідному середовищі.
2. Течії розплавів у багатошарових каналах із кристалізацією на внутрішній поверхні каналів.
3. Термогідродинаміка гранулярних насичених середовищ.

Параметричні дії розглядались трьох типів: електромагнітні, теплові поля та вібрації. Можливі їх комбінації. Дія, що надається параметричним впливом на межу розділу середовищ, дає можливість динамічно керувати поведінкою межі: руйнувати її, стабілізувати, створювати коливання заданого виду для інтенсифікації тепломасообмінних процесів тощо. В результаті проведених робіт розвинені теорія капілярних плівкових МГД течій з деформованою вільною поверхнею, теорія параметричних коливань меж затвердіння розплавів в циліндричних багатошарових каналах, вивчені

термогідродинамічні коливання в гранулярних насичених середовищах з урахуванням розривів полів.

Основні висновки проведених робіт наступні:

1. Розвинена теорія капілярних плівкових МГД-течій, що включає випадки плоских і радіальних плівок (вільних і обмежених твердою поверхнею, з урахуванням впливу навколишнього середовища), під дією електромагнітних полів і вібрацій. Параметричного збудження та придушення коливань поверхні плівок та умов їх розпаду на краплі виявило наступні нові результати:
 - Математичні моделі лінійних та нелінійних коливань поверхні плівок та умови розпаду плівок на краплі задовільно узгоджуються з результатами експериментальних досліджень та літературними даними у широкому діапазоні визначальних критеріїв ($Re, Al, Ha, Fr, We, Eu, Oh$) і можуть бути використані для дослідження нових гідродинамічних явищ, пов'язаних із руйнуванням (диспергуванням) та стабілізацією плівок;
 - Теоретично передбачені та експериментально підтверджені нові гідродинамічні явища параметричного збудження режимів солітонного та ударно-хвильового руйнування плівок, покладені в основу створених та впроваджених принципово нових високоефективних технологій (гранулятори металів та плавів);
 - Виявлено явище кавітаційного розпилу плівок при високих віброприскореннях, що дозволяє отримувати розпилення рідин і тонкодисперсні порошки при порівняно низьких енерговитратах за рахунок використання механічних резонансів системи;
 - Розрахунковим і експериментальним шляхом показані особливості поширення електромагнітних хвиль у плівках провідної рідини (короткі електромагнітні хвилі витісняються на край плівки; зі збільшенням хвильового числа k процес різко посилюється) та їх вплив на збудження поверхневих хвиль, що призводять до руйнування плівки на краплі.
2. На розроблених математичних моделях параметричного збудження і придушення коливань меж фазового переходу (прістінних фронтів кристалізації) розплавів у циліндричних багатощарових каналах в широкому діапазоні безрозмірних варійованих критеріїв (Re, Pe, Bi, Fo і ін.) встановлені умови стабілізації та розвитку коливань меж фазового переходу:

- Умова стабілізації (або дестабілізації) межі фазового переходу виражається функцією модифікованого числа Біо $Bi_{k,m}$ для кожної моди коливань із хвильовими числами k,m ;
 - Обчислювальний експеримент на основі розроблених математичних моделей показав наявність вузьких областей нестійкості, яку можна розвинути або придушити вибором параметрів системи регулювання потоків теплоти на межі фазового переходу з твердого стану до рідкого;
 - Знайдено критичні режими (труднокеровані, що вимагають великих енерговитрат, високої роздільної здатності системи управління і т.д.), показано, що вони є винятковими і рідкісними в практиці;
 - Встановлено, що розвинена в роботі лінійна теорія дає досить добрі результати не лише для малоамплітудних коливань, але й для коливань кінцевої амплітуди (проведено нелінійний аналіз завдання);
 - Детальний аналіз різних граничних випадків та оцінки відносного впливу різних параметрів задачі довів достовірність розроблених математичних моделей;
 - На відміну від плівок, коливання меж фазового переходу є низькочастотними і в основі нелінійного хвильового процесу лежить кінематична хвиля з фазовою швидкістю, що дорівнює Pe ;
 - Термічний опір і склад багат шарової стінки каналу відіграє істотну роль, деякі типи збурень можна придушувати шляхом підбору властивостей складових стінок матеріалів.
3. Теоретично досліджено термогідродинамічні коливання на межах розділу фаз у суцільних гетерогенних середовищах, обґрунтовано математичну модель та її чисельну реалізацію на ЕОМ. Результати обчислювального експерименту показали:
- Термогідродинамічні коливання в гранулярних насичених середовищах визначаються співвідношенням лінійних розмірів частинок (гранул) і шару, коефіцієнтів теплопровідності середовищ та іншими факторами;
 - Оточуючий гранулярне середовище непроникний масив може послаблювати або посилювати термогідродинамічні коливання в гранулярному шарі - залежно від співвідношення температур і коефіцієнтів теплопровідності;

- Виявлено режим відбиття теплових хвиль від межі гранулярного шару з непроникним масивом, при якому можливе накладання та посилення термогідродинамічних коливань у шарі із замиканням потоку у всій області, крім окремих вузьких місць, де потоки флюїду та теплоти різко посилюються (критичний режим);
- На відміну від границь кристалізації, параметричні коливання на границях розділу фаз в суцільних гетерогенних середовищах істотно нелінійні та тривимірні, причому, особливості поширення, відбиття та посилення термогідродинамічних хвиль визначаються структурою та властивостями гетерогенного середовища та навколишнього масиву;
- Внаслідок нелінійної теплопровідності газу (пари) при його фільтрвції в гранулярному шарі можливі явища локального анамального розігріву (локалізація дисипативних процесів).

В результаті виконаних автором теоретичних досліджень та проведених спільно зі співробітниками експериментів показана можливість ефективного збудження та придушення коливань на межах розділу суцільних середовищ за допомогою електромагнітних та теплових полів, вібрацій та інших впливів.

На прикладі трьох класів задач (течії плівок, фронти кристалізації розплавів у циліндричних каналах, гранулярні насичені середовища) виявлено нові гідродинамічні та теплові явища. Показано загальні та відмінні риси процесів параметричного збудження та придушення коливань на межах розділу гомогенних та гетерогенних середовищ. Описані нові технологічні установки, принцип дії яких ґрунтується на виявлених закономірностях.

Список літератури

1. Абрамов О.В. Кристаллизация металлов в ультразвуковом поле. М. Металлургия, 1972. 256с.
2. Авдуский В.С., Бармин И.В., Гришин С.Д. и др. Проблемы космического производства. М. Машиностроение, 1980. 221с.
3. Агеев С.Г. Условие нарушения сплошности свободной поверхности вибрирующего столба жидкости. – В кн.: Оптимизация параметров машин и производственных процессов. Сб. н. Тр. ЧПИ, №180. Челябинск, 1976, с. 24-28.
4. Агранат Б.А., Кириллов О.Д., Преображенский Л.В. и др. Ультразвук в гидрометаллургии. М. Металлургия, 1969.
5. Ажищев Н.А., Антипин В.А., Борисов А.А., Самойлов В.А. Волны разрежения в свободных засыпках. ИФЖ, 1987, т. 52, №1, с.15-19.
6. Аитов Т.Н., Кириллина Е.М. Течение электропроводной жидкости в тонком слое со свободной поверхностью при воздействии сильного магнитного поля. Магнитная гидродинамика, 1985, №3, с.71-76.
7. Аитов Т.Н., Тананаев А.В. Об асимптотических МГД-течениях. Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, №5, с.159-165.
8. Акименко В.Б., Буланов В.Я., Рукин В.В. и др. Железные порошки. М., Наука, 1982, 264с.
9. Акустика океана. Под ред. Дж. Де Санто. М., Мир, 1982, 318с.
10. Алгоритмы, математическое обеспечение и архитектура многопроцессорных вычислительных систем. М., Наука, 1982, 336с.
11. Александров В.М., Коваленко Е.В., Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М., Наука, 1986, 336с.
12. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М., Мир, 1987. 360с.
13. Альфвен Х., Фельтхаммер К. Космическая электродинамика. М., Мир, 1967.
14. Аминов А.Б., Сиразетдинов Т.К. Метод функций Ляпунова в задачах о полиустойчивости движения ПММ, 1987, т.51, вып.5, с.709-716.
15. Андреевский А.А. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. –В кн.: Температурный режим и гидравлика парогенераторов. Л., Наука, 1978, с.181-230.
16. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М, Наука, 1959, 915с.
17. Антановский Л.К. Уточненные уравнения движения пленки жидкости по плоской стенке. –В кн.: Задачи гидродинамики со свободными границами. Новосибирск, ИГ СО АН СССР, 1987, вып. 81, с.37-42.
18. Антоновцев С.Н. О характере возмущений, описываемых решениями многомерных вырождающихся параболических уравнений. –В кн.: Динамика жидкости со свободными границами. Новосибирск, Наука, 1979, вып.40, с.25-30.

19. Апштейн Э.З., Григорян С.С., Якимов Ю.Л. Об устойчивости роя пузырьков воздуха в колеблющейся жидкости. Изв.АН СССР. МЖГ, 1969, №3, с.100-104.
20. Арбузов В.А., Кузнецов Е.А., Носков Н.Н. и др. О параметрическом возбуждении волн на поверхности жидкости. Новосибирск, 1977, 13с. (препринт Ин-т автоматики и электрометрии, СО АН СССР, №57).
21. Аристов С.Н., Фрик П.Г. Динамика крупномасштабных течений в тонких слоях жидкости. Свердловск., 1987. 47с. (Препринт/ИМСС УНЦ АН СССР).
22. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978, 304с.
23. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., Наука, 1974, 432с.
24. Асаре, Такаси, Гоффман. Эксперименты с плоскими жидкими струями. Теор. Основы инж. Расчеты, 1981, т.103, №4, с.198-209.
25. Асланов С.К., Борко В.П. Исследования температурных возмущений и их воздействие на устойчивость течения в круглой трубе с переменной вязкостью.- В кн.: Математические методы тепломассопереноса. Днепропетровск, ДГУ, 1980, с.71-77.
26. Астрахан И.М., Гадиев С.М., Трусуфус А.В. Оценка эффективности вибротермического воздействия на нефтяной пласт. Тр. Москов. Ин-та нефтехимии. И газ. Пром-сти, 1984, №186, с.45-50.
27. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. о возникновении и структуре аттрактора Лоренца. ДАН, 1977, т.234, №2, с.336-339.
28. Аэров М.Э., Годес О.М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л., Химия, 1968, 510с.
29. Бабак О.В., Казачков И.В., Караченец Д.В. и др. Вопросы моделирования и оптимизации технологических процессов в металлургии и нефтехимии. Киев, 1981, 51с. (Препринт/Ин-т кибернетики АН УССР, №81-20).
30. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М., Наука, 1986, 744с.
31. Балеску. Статистическая механика заряженных частиц. М., Мир, 1967, 514с.
32. Баранов Г.А., Хухарев В.В. Исследование свободного кольцевого струйного течения жидкости. Л., 1980, 57с. (Препринт/НИИЭФА, №П-А-0471).
33. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л., Гидрометеиздат, 1982, 255с.
34. Бармин А.А. Исследование поверхностей разрыва с выделением (поглощением) энергии в магнитной гидродинамике. ПММ, 1962, №5, с./801-812.
35. Басов Н.И., Любартович С.А., Любартович В.А. Виброформирование полимеров. Л., Химия, 1979, 159с.
36. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.Н. Осреднение процессов в периодических средах. М., Наука, 1984, 352с.

37. Бахтин В.И., Павленко Ю.П. Исследование радиуса растекающейся жидкой пленки, образуемой при соударении двух струй. ИФЖ, 1987, т.53, №3, с.491.
38. Белодед В.Д., Казачков И.В., Шестопапов И.В. и др. Рекомендации по расчету и проектированию системы добычи теплоносителя в Мутновском месторождении. Отчет ИТТФ АН УССР. Киев, 1985, 90с. (№ гос.рег. 81083885).
39. Белодед В.Д., Зиновьев П.П., Казачков И.В. и др. Перспективы развития Камчатки до 2000 года. Тезисы докл. Всес. конф. по возобнов. источ. энергии. Ереван, 1985, с.20.
40. Белоносов С.М., Черноус К.А. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. М., Наука, 1985, 312с.
41. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М., Наука, 1982, 391с.
42. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М., Наука, 1984, 519с.
43. Берд Р., Стюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М., Химия, 1974, 687с.
44. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М., Наука, 1983, 448с.
45. Березин Ю.А. Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме. Новосибирск, Наука, 1977, 112с.
46. Бернштам В.А., Козырев С.В., Костенко Ю.Т. и др. Жидкометаллическая защита элементов перспективных энергоустановок. Харьков, Изд. НТО энергетики и электротехн. пром-ти, 1987, 80с.
47. Бинецкий Г.В., Водянюк В.О., Казачков И.В. и др. Способ получения порошка из расплава, 1985, А.С. №1184153.ДСП.
48. Бишоп Р. Колебания. М., Наука, 1986, 192с.
49. Блаженков В.В., Дмитриев А.С., Шишов В.В. Монодиспергирование вещества (от опытов Савара до современных технологий: ретроспектива и перспективы). М., Труды МЭИ, 1983, вып.615, с.3-12.
50. Блинов В.И., Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. К вопросу об устойчивости и стабилизации фронта кристаллизации расплава, движущегося в цилиндрической камере. Тез. докл. Респ. н-т. конф. «Инт. ур-ия в прикл. моделировании», Киев, 1986, ч.І, с.69,70.
51. Блинов В.И., Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. Численное исследование вращательного МГД-течения с непроводящими полидисперсными включениями в цилиндрическом канале. Магнитная гидродинамика, 1987, №3, с.78-80.
52. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний., М., Наука, 1974, 504с.
53. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М., Гостехиздат, 1946, 119с.
54. Богоряд И.Б. Динамика вязкой жидкости со свободной поверхностью. Томск, ТГУ, 1980, 102с.

55. Богоявленский Р.Г. Гидродинамика и теплообмен в высокотемпературных ядерных реакторах с шаровыми твэлами. М., Атомиздат, 1978, 112с.
56. Богуславский В.Я., Экнадиосянц О.К. О физическом механизме распыливания жидкости акустическими колебаниями. Акустический журнал, 1969, т.15, вып.1, с.17-25.
57. Борисов Ю.Я. Мощные газоструйные излучатели звука и интенсификация технологических процессов. Дис.... д-ра техн. наук. М., АКИН, 1984, 414с.
58. Бостанджиян С.А., Мержанов А.Г., Худяев С.И. О гидродинамическом тепловом взрыве. ДАН, 1965, т.163, №1, с.133-135.
59. Бояревич В.В., Фрайберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.В. Электровихревые течения. Рига, Зинатне, 1985, 315с.
60. Брискман В.А. Параметрическая стабилизация границ раздела жидкостей. ДАН, 1976, т.226, вып.5, с.1041-1044.
61. Брискман В.А., Шайдуров Г.Ф. Параметрическое возбуждение неустойчивости жидкости в магнитном и электрических полях. Магнитная гидродинамика, 1969, вып.3, с.15-19.
62. Брунштейн Б.И. Фишбейн Г.А. Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. Л., Химия, 1977, 280с.
63. Бубнов В.А. К теории тепловых волн. ИФЖ, 1982, т.43, №3 с.431-437.
64. Буевич Ю.А., Кудымов С.Ф. К характеристике слабонелинейных стационарных волн в тонкой жидкой пленке. –В кн.: Физико-химическая гидродинамика. Свердловск, 1986, с.33-42.
65. Бундя А.П., Гориславец Ю.М., Казачков И.В. и др. Получение монодисперсных металлических порошков на основе методов управляемого МГД-распада свободных струй и пленок. Тез. докл. II Респ. н-т. сем. «Электродинамические технологии в порошковой металлургии». Рига, 1986, с.117, 118. ДСП.
66. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., Наука, 1965, 474с.
67. Бутковский А.Г., Полтавский Л.Н. Оптимальное управление волновыми процессами. Автоматика и телемеханика, 1966, т.27, №9, с.30-34.
68. Бучин В.А., Цыпкин А.Г. О неустойчивости Релей-Тейлора поляризующихся и намагничивающихся жидкостей в электромагнитном поле. ДАН, 1974, т.219, вып.5, с.1085-1088.
69. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М., Мир, 1983, 136с.
70. Бэтчелор Дж.К. Введение в динамику жидкости. М., Мир, 1973, 758с.
71. Вайсман А.М., Гольдштик М.А. Динамическая модель движения жидкости в пористой среде. Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, №6, с.89-95.
72. Ван Вингаарден Л. Одномерные течения жидкости в пузырьками газа. - В кн.: Реология суспензий. М., Мир, 1975, с.68-103.
73. Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А. и др. Взаимодействие нелинейных волн в средах без дисперсии. М., Наука, 1983, 151с.

74. Васильев В.И., Казачков И.В. Применение принципа максимума в задачах имитационного управления.- В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. Киев, Наук. думка, 1984, вып.61, с.
75. Васильев В.И., Ладиков Ю.П., Казачков И.В. Об устойчивости и стабилизации гарнисажа в сталеплавильных агрегатах. Киев, 1981, 33с. (Препринт/Ин-т кибернетики АН УССР, №81-18.)
76. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., Наука, 1970, 672с.
77. Велихов Е.П. Устойчивость плоского пуазейлева течения идеально проводящей жидкости в продольном магнитном поле. ЖЭТФ, 1959, т.36, с.1192-1195.
78. Верте Л.А. Электромагнитный транспорт жидких металлов. М., Металлургия, 1965, 236с.
79. Владимиров В.В., Мосиук А.И., Параметрическое возбуждение коротковолновых капиллярных волн на поверхности жидкого металла, граничащей с неустойчивой плазмой. Письма в ЖТФ, 1983, т.9, вып.4, с.236-238.
80. Волошин А.Я., Буденный В.Ф., Колесниченко А.Ф., Шидловский А.К. Электромагнитное управление процессом грануляции жидких металлов с помощью специализированных систем питания. Техн. электродинамика, 1985, №3, с.3-8.
81. Волошин А.Я., Ивановоч И.Н., Казачков И.В. и др. Электродинамическое возбуждение распада жидкометаллических пленок и задача создания пленочных МГД-грануляторов, Киев, 1988, 40с. (Препринт/Ин-т электродинамики АН УССР, №).
82. Воронцов Е.Г., Тананайко Ю.М. Теплообмен в жидкостных пленках. Киев, Техника, 1972, 194с.
83. Вулис Л.А., Гусика П.Л., Кусаинов М.К. и др. Нестационарные течения ртути в лотке в поперечном поле. Магн. гидродинамика, 1966, №2, с.61-72.
84. Гавриков В.К., Кац А.В., Канторович В.М. Вынужденное рассеяние на поверхностных волнах, ДАН, 1969, т.186, вып.5, с.1052-1054.
85. Гагарин А.Г. Влияние постоянного электрического поля на пленочное течение жидкого диэлектрика. ИФЖ, 1985, т.ХIVIII, №3, с.432-436.
86. Галактионов В.А. О некоторых свойствах бегущих волн в среде с нелинейной теплопроводностью и источником тепла. ЖВММФ, 1981, т.21, №4, с.980-989.
87. Галицкий Б.М., Ложкин А.Л., Ушаков А.Н. Теплообмен и гидродинамика в пористой среде при колебаниях газового потока. Весці АН БССР. Сер. фіз.-энерг.наук. Минск, 1986, №2, с.101-104.
88. Галицкий Б.М., Рыжов Ю.А., Якуш Е.В. и др. Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М., Машиностроение, 1977, 256с.

89. Ганиев Р.Ф., Лапчинский В.Ф. Проблемы механики в космической технологии. М., Машиностроение, 1978, 119с.
90. Ганичев А.И., Домашенко А.М., Несмелов А.Г. и др. Определение порога каплеобразования и разрушения свободной поверхности криогенной жидкости при вертикальных вибрациях емкости. Труды МВТУ, Москва, 1985, №442, с.33-42.
91. Гельфгат Ю.М., Лиелаусис О.А., Щербинин Э.В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил. Рига, Зинатне, 1975, 248с.
92. Генкин А.Л., Кукес В.И., Ярин Л.П. О распространении струи несмешивающихся жидкостей. –В кн.: Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики. Алма-Ата, 1973, №9, с.100-104.
93. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., Наука, 1972, 392с.
94. Герценштейн С.Я., Филянд Л.В., Шкадов В.Я. Неустойчивость и образование капель во вращающейся капиллярной струе. –В сб. Нелин. волнов. процессы в двухфаз. средах. Новосибирск, 1977, с.172-180.
95. Гидродинамика межфазных поверхностей. Механика, Новое в зарубежной науке. М., Мир, 1984, 210с.
96. Гидродинамическая и конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1984, 120с.
97. Гидромеханика и процессы переноса в невесомости. Свердловск. УНЦ АН СССР, 1983, 168с.
98. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн.1. М., Мир, 1984, 350с.
99. Гликман Б.Ф. Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей. М., Машиностроение, 1974, 396с.
100. Глухенький А.И., Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. и др. Электромеханическое управление распадом струй и пленок вязких жидкостей и разработка перспективных грануляторов. Киев, 1988, 40с. (Препринт/Ин-т электродинамики АН УССР, №527).
101. Глухенький А.И., Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. и др. Способ гранулирования жидких металлов и устройство для его осуществления. А.С. ДСП.
102. Глухих В.А., Тананаев А.В., Кириллов И.Р. Магнитная гидродинамика в ядерной энергетике. М., Энергоатомиздат, 1987, 264с.
103. Гогосов В.В., Налетова В.А., Тактаров Н.Г. и др. Гидродинамика поверхностных явлений. ПММ, 1984, т.48, вып.3, с.388-396.
104. Гольдштик М.А. Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1984, 164с.
105. Горбунов Е.В. Термокапиллярная устойчивость тонкой пленки жидкости. Письма в ЖТФ, 1985, II, №23, с.1456-1157.
106. Гордеев Ю.Н., Кудряшов Н.А., Мурзенко В.В. Фильтрационные режимы с экстремумами температуры при движении газа в пористой среде. Изв. АН СССР. МЖГ, 1987, №4, с.71-77.

107. Гориславец Ю.М., Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. Полидисперсное МГД-течение в цилиндрическом сосуде. Магнитная гидродинамика, 1986, №1, с.85-92.
108. Гордин К.А., Истратов А.Г., Либрович В.Б. Кинетика деформирования и дробления жидкой капли в газовом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, №1, с.8-16.
109. Горицкий С.В. О постановке стохастических граничных условий в численной модели гранулированной среды.-В кн.: Проблемы прикладной механики. М., МФТИ, 1986, с.49-54.
110. Григорьев В.А., Шишов В.В. Криодисперсная технология – новое направление криотехники. М., Труды МЭИ, 1981, вып.545, с.25-42.
111. Григорян С.С., Жигачев Л.И., Когарко Б.С. и др. Параметрический резонанс в сообщающихся сосудах при вертикальных переменных нагрузках. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, №2, с.148-150.
112. Григорян С.С., Дао Минь Нгок, Гидродинамические проблемы хим. технологии. М., НИИ механики МГУ, 1979, 161с.
113. Гоот де С, Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., Мир, 1964, 456с.
114. Гупало Ю.П., Рязанцев Ю.С., Чалюк А.Т. Диффузия в капле при больших числах Пекле и конечных числах Рейнольдса. Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, №2, с.161,162.
115. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. Киев, Наук. думка, 1984, 288с.
116. Данилов С.Д., Миронов М.А. Сплющивание и дробление капли в звуковом поле. Акуст. журнал, 1987, т.XXXIII, вып.2, с.233-239.
117. Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. М., Наука, 1987, 312с.
118. Дерягин Б.В., Чураев Н.В. Смачивающие пленки. М., Наука, 1984, 159с.
119. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М., Мир, 1981, 640с.
120. Дитякин Ю.Ф., Клячко Л.А., Новиков Б.Ф. и др. Распыление жидкостей. М., Машиностроение, 1977, 208с.
121. Добаткин В.И., Елагин В.И. Гранулируемые алюминиевые сплавы.- (Достижения отечественного металловедения). М., Металлургия, 1981, 176с.
122. Донцов В.Е. Распространение волн давления в насыщенной жидкостью пористой среде. – В кн.: Актуальные вопросы теплофиз. и физич. гидрогазодин. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1985, с.59-68.
123. Дородницын А.А. Лекции по численным методам решения уравнений вязкой жидкости. М. ВЦ АН СССР, 1969, 200с.
124. Дэвис С. Задачи с линиями контакта в механике жидкости. –В кн.: Успехи прикладной механики. М., Мир, 1986, с.85-101.
125. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика, Теория поля и вариационные принципы. М., Мир, 1974, 304с.

126. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде. ЖВММФ, 1983, т.23, №2, с.380-388.
127. Ентов В.М. Динамика пленок вязких и упругих жидкостей. М., 1979, 47с. (Препринт/ИПИМ АН СССР, №130).
128. Ентов В.М., Рожков А.Н., Фейзханов У.Ф. и др. Распространение малых изгибных возмущений по плоским пленкам воды и растворов полимеров. ЖПМТФ, 1986, №4, с.45-52.
129. Ентов В.М., Султанов Ф.М., Ярин А.Л. Распад жидких пленок под действием перепада давления окружающего газа. ДАН, 1985, т.284, №5, с.1116-1120.
130. Ентов В.М., Ярин А.Л. Динамика струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей. Итоги науки и техники. МЖГ. М., 1984, т.18, с.112-197.
131. Ентов В.М., Кестенбойм Х.С., Рожков А.Н. и др. О динамической форме равновесия пленки вязкой и упруго-вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, №2, с.9-18.
132. Епихин В.Е. О формах кольцевых струй капельной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, №1, с.9-14.
133. Епихин В.Е. О формах кольцевых струй капельной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, №5, с.144-148.
134. Епихин В.Е., Шкадов В.Я. О затягивании полости кольцевых струй, взаимодействующих с окружающей средой. Изв. АН СССР, МЖГ, 1983, №6, с.3-11.
135. Жаворонков Н.М., Фридландер И.Н., Шалин Р.Е. Композиционные материалы – важнейший фактор технического прогресса. Вест. АН СССР, 1987, №8, с.77-83.
136. Жежерин Р.П. Проблема «электромагнитного тигля». –В кн.: Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Рига, Изд. АН Латв.ССР, 1959, с.279-294.
137. Жуховицкий А.А., Шатов А.А. Связь поверхностных явлений и гидродинамических процессов. ЖФХ, 1985, т.59, №10, с.2570-2572.
138. Зак М.А. Неклассические проблемы механики сплошных сред. Л. Изд. ЛГУ, 1974, 120с.
139. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П. и др. Теория солитонов: метод обратной задачи. М., Наука, 1980.
140. Зельдович Я.Б., Компанеев А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. –В кн.: Сборник, посвященный 70-летию А.Ф. Иоффе. М., Изд. АН СССР, 1950, с.61-71.
141. Зинкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М., Мир, 1986, 318с.
142. Зиновьев А.Т. Нелинейная резонансная неустойчивость плоскопараллельных течений. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР. Дис...к.ф.-м.н., 1987, 140с.
143. Змитренко Н.В. Михайлов А.П. Инерция тепла. М., Знание, 1982, 64с.

144. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М., Наука, 1971, 415с.
145. Зубков В.В., Линьков А.М. Граничные интегральные уравнения фильтрации, электро- и теплопроводности в блочной среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1986, №6, с.72-76.
146. Зуев А.Л., Пшеничников А.Ф. Деформация и разрыв пленки жидкости под действием термокапиллярной конвекции. ЖПМТФ, 1987, №3, с.90-95.
147. Зьонг Нгок Хай, Мусаев Н.Д., Нигматулин Р.И. Автомодельные решения задачи тепло- и массопереноса в насыщенной пористой среде с объемным источником тепла. ПММ, 1987, т.51, вып.6, с.973-983.
148. Зябицкий А. Теоретические основы формирования волокон. М., Химия, 1979, 503с.
149. Иванцов Г.П., Василивицкий А.В., Смирнов В.И. Непрерывный сталеплавильный процесс. М., Металлургия, 1967, 147с.
150. Йоффе А.Ф. Полупроводниковые термоэлементы. М.-Л., Изд. АН СССР, 1960, 187с.
151. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М., Мир, 1983, 301с.
152. Кадомцев Б.Б. Опытный термоядерный реактор. Докл. III Всес. конф. по ИПТР. м., ЦНИИатоминформ., 1984, т.І, с.7-13.
153. Кадомцев Б.Б., Карпман В.И. Нелинейные волны.-УФН, 1971, т.103, вып.2, с.193-232.
154. Казаков А.А. Непрерывные сталеплавильные процессы. М., Металлургия, 1977, 272с.
155. Казачков І.В. Исследование устойчивости и стабилизация гарнисажа в сталеплавильных агрегатах. Автоматика, 1982, №1, с.70-76.
156. Казачков І.В. Об оптимальной толщине гарнисажа в сталеплавильных агрегатах с цилиндрической камерой. –В кн.: Имитационные и самоорганизующиеся модели сложных систем. Киев, ИК АН УССР, 1982, с.55-60.
157. Казачков І.В. Об устойчивости фронта кристаллизации вязкой жидкости, движущейся в цилиндрической камере. Киев, Наук. думка. Респ. межвед. сб. «Гидромеханика», 1984, вып.50, с.42-44.
158. Казачков І.В. Об устойчивости фронта кристаллизации в цилиндрической камере. Всес. межвуз. сб. «Гидроаэромеханика и теория упругости». Днепропетровск, ДГУ, 1983, вып.31, с.60-64.
159. Казачков І.В. Устойчивость фронта кристаллизации в цилиндрической камере. –В кн.: Математическое обеспечение пакетов программ. Киев, ИК АН УССР, 1983, с.68-76.
160. Казачков І.В., Колесниченко А.Ф. Распад жидкометаллических пленок под действием электромагнитного поля. Техническая электродинамика, 1984, №3, с.16-19.

161. Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. Влияние переменного электромагнитного поля на волнообразование в жидкометаллической пленке. Магнитная гидродинамика. 1985, №3, с.77-82.
162. Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. О разрушении жидкометаллической пленки, находящейся в непроводящей среде, с помощью электромагнитного поля. Магнитная гидродинамика. 1984, №1, с.44-46.
163. Казачков И.В. Электромагнитное возбуждение волн в жидкометаллической пленке. Магнитная гидродинамика, 1985. №3, с.135-137.
164. Казачков И.В. К вопросу об устойчивости и стабилизации фронта кристаллизации расплава, движущегося в цилиндрической камере. Тез. докл. Респ. науч.-техн. конф. «Интегральные уравнения в прикладном моделировании», ч.1, Киев, 1983, с.69,70.
165. Казачков И.В. К вопросу о математическом моделировании гетерогенных турбулентных струй в цилиндрической камере. Автоматика, 1980, №5, с.3-8.
166. Казачков И.В. Исследование турбулентного смещения и защиты стенки с помощью гарнисажа в струйных аппаратах, работающих на высокотемпературных взаимно нерастворяющихся жидкостях. Дисс. канд. физ.-мат. наук, Киев, ИК АН УССР, 1981, 138с.
167. Казачков И.В., Накорчевский А.И. Линии тока в турбулентной двухфазной струе взаимно нерастворяющихся жидкостей. Аннотации V Всес. съезда по теор. и прикл. мех. Алма-Ата, 1981, с.177.
168. Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. К вопросу об электромагнитном индуцировании распада жидкометаллических пленок/ Тез. докл. 11 Рижского сов. по магнитной гидродинамике, Рига, ч.1, 1984, с. 135-138.
169. Казачков И.В. К вопросу о распаде жидкометаллической пленки под действием электромагнитного поля. Магнитная гидродинамика, 1984, №3, с.85-88.
170. Казачков И.В., Колесниченко А.Ф., Кушталов А.И. Исследование неустойчивости и стабилизации цилиндрического фронта кристаллизации движущегося металлического расплава. –В кн.: Тепло и массообменные процессы. Сб. научн. тр. под ред. В.И. Толубинского. Киев, Наук. думка, 1986, с.69-75.
171. Казачков И.В. О математическом моделировании процессов нестационарной неизотермической фильтрации в геотермальных системах. М., 1984, 16с. ДЕП, ЦНТИ «Информэнерго» №1672 ЭН-84 Дсп.
172. Казачков И.В. О влиянии неоднородности проницаемых слоев на термогидродинамические процессы, протекающие в геотермальных системах. Тез. докл. VI Всес. вулканолог. сов. Петропавловск-Камчатский. Изд. ИВ АН СССР, 1985, с.46-48.
173. Казачков И.В. О математическом моделировании процессов нестационарной неизотермической фильтрации в геотермальных системах. –В кн.: Вычислительная и прикладная математика. Сб. н. тр. КГУ. Киев, 1986, вып.60, с.55-60.

174. Казачков І.В. Електромагнітне возбуждення параметричних коливань в жидкометалітичних плінках, розпространяючих с непроводячих серед. Киев, 1986, 52с. (Препринт/Ин-т електродинаміки АН УССР, № 454).
175. Казачков І.В. Електромагнітне подавлення параметричних коливань циліндричних фронтів кристалізації. Киев, 1986, 49с. (Препринт/Ин-т електродинаміки АН УССР, №457).
176. Казачков І.В. Параметричні коливання в гранулярних насичених серед. М., 1986, 57с. (Препринт/Ин-т електродинаміки АН УССР, №462).
177. Казачков І.В. Термогідродинамічні коливання в гранулярних насичених серед. М., 1986, 40с. ДЕП, ЦНТИ «Инфорэнгеро» №2309-ЭН.
178. Казачков І.В., Лысак Н.В. Комплекс ФОРТРАН-программ для решения нестационарных краевых задач о распространении параметрических колебаний в течении со свободными границами и в насыщенных гранулярных сред. –В кн.: Применение ЭВМ в моделировании задач матфизики. Сб. н. тр. Красноярского ун-та. Красноярск, 1988, с
179. Казачков І.В., Колесниченко А.Ф. Електромагнітне возбуждення волн на поверхності радіально растекаючихся плінок вязкої електропровідної жидкості. Тез. докл. 12 Рижского сов. по магнітній гідродинаміці. Рига, 1987, ч.І, с.119-122.
180. Казачков І.В., Колесниченко А.Ф. Електромагнітне управління распадом жидкометалітичних плінок. Всес. межвуз. сб. «Гідроаэромеханіка і теорія пружості». Днепропетровск, ДГУ, 1987, с.20-24.
181. Малахов В.В., Казачков І.В., Колесниченко А.Ф., і др. Спосіб отримання металітичного порошка из расплавленного металла. ДСП. А.с. СССР 1476736, 1989.
182. Казачков І.В., Колесниченко А.Ф. Расчет процесса электромагнитной стабилизации границы фазового перехода. Тезисы докл. Всес. конф. «Воздействие элетромагнитных полей на металлы и сплавы». Рига, 1987, с. ДСП.
183. Казачков І.В. Електромагнітне подавлення неустойчивості циліндричних фронтів кристалізації. Там же, с. ДСП.
184. Казачков І.В. Нестационарные термогідродинамічні процеси при движении газа в гранулярном слое, окруженном теплоизолятором. Тез. докл. VI Респ. конф. «Нелин. задачи матем. физики». Донецк, 1987, с.54.
185. Казенков А.К., Каллистов Ю.Н., Карликов В.П. и др. Исследование тонких кольцевых струй несжимаемой жидкости. Тр. ин-та механики МГУ, 1970, №1, с.21-33.
186. Калашников А.С. О характере движения фронтов при нестационарной фильтрации жидкостей, не подчиняющихся закону Дарси. Успехи матем. наук, 1982, т.37, вып.4, с.118-119.
187. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. Мир, М., 1971, 400с.

188. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. –ЖЭТФ, 1948, т.18, вып.1, с.3-28.
189. Капица П.Л., Капица С.П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1949, т.19, вып.2, с.105-120.
190. Карпачева С.М., Рагинский Л.С., Муратов В.М. Основы теории и расчета горизонтальных пульсационных аппаратов и пульсаторов. М., Атомиздат, 1981, 191с.
191. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., Наука, 1973, 176с.
192. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии. М., Химия, 1971, 496с.
193. Кириллов В.Х., Логачевский В.И., Тихоненко Л.Я. К теории тонкого слоя вязкой жидкости по вертикальной поверхности с конечной высотой выступов регулярной шероховатости. Тез. докл. Респ. н. конф. «Диф. и интегр. уравнения и их приложения». Одесса, 1987, с.39.
194. Кирко И.М. Жидкий металл в электромагнитном поле. М.-Л., Энергия 1964, 160с.
195. Клоповский Б.А. Исследование акустического распада жидкости на однородные капли и разработка акустических грануляторов для минеральных удобрений. Тр. ВНИИ хим. маш. М., 1975, вып.71, с.13-19.
196. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск, Наука, 1981, 304с.
197. Коган Б.Ю. Размерность физической величины. М., Наука, 1968, 71с.
198. Коджаев Ш.Я., Кочетков А.А. Экспериментальное исследование механизма циклического извлечения нефти из трещиновато-пористых сред. М., Наука, 1970, 140с.
199. Козлов Л.Ф. Теоретические исследования пограничного слоя. Киев, Наук. думка, 1982, 293с.
200. Колебательные явления в многофазных средах и их использование в технологии. Под ред. Р.Ф. Ганиева. Киев, Техника, 1980, 142с.
201. Колесниченко А.Ф. Технологические МГД-установки и процессы. Киев, Наук. думка, 1980, 192с.
202. Колесниченко А.Ф., Казачков И.В., Водянюк В.О., Лысак Н.В. Капиллярные МГД течения со свободными границами. Киев, Наук. думка, 1988, 176с.
203. Колесниченко А.Ф., Гориславец Ю.М., Казачков И.В. и др. Разработать элементы теории и методы электромагнитного воздействия на технологические процессы в системах с жидкими проводниками. Киев, ИЭД АН УССР. Отчет, 1986, 90с., № Гос. рег. 01840047289. ДСП.
204. Колесниченко А.Ф., Казачков И.В., Малахов В.В. и др. Разработка методов магнитогидродинамической грануляции сплавов на основе магния. Киев, ИЭД АН УССР. Отчет по дог. с п. я. № А-1147, 1987, 65с. ДСП.

205. Колесниченко А.Ф., Казачков І.В., Лысак Н.В. и др. Разработка магнитогидродинамического метода грануляции алюминиевых сплавов. Киев, ИЭД АН УССР. Отчет по дог. с ВИЛС, 1987, 35с. ДСП.
206. Колесниченко А.Ф., Казачков І.В., Водянюк В.О. и др. Разработка и исследование конструкции генератора струйно-капельного потока диафрагмы опытного термоядерного реактора (ОТР). Киев-Ленинград-Москва, ИЭД АН УССР-НИИЭФА им. Д.В. Ефремова-ИАЭ им. І.В. Курчатова. Отчет 2-х частях, 1986, 80с., 1987, 53с.
207. Коловандин Б.А. Устойчивость течения проводящей жидкости со свободной поверхностью при наличии магнитного и электрического полей. Прикладная механика, 1965, т.І, с.95-105.
208. Коловандин Б.А. Стационарное течение вязкой проводящей жидкости со свободной поверхностью при наличии скрещенных электрических и магнитных полей. –В кн.: Техническая электромагнитная гидродинамика. Донецк, 1965, с.321-324.
209. Колодяжный А.А. Бифуркации решения магнитогидродинамических уравнений в задачах со свободными границами. Дис. ... канд. физ. – мат. наук. Киев, ИК АН УССР им. В.М. Глушкова, 1985, 117с.
210. Колпашников А.И., Ефремов А.В. Гранулированные материалы. М., Металлургия. 1977, 240с.
211. Коритыцкий Я.И. Колебания в текстильных машинах. М., Машиностроение, 1973, 320с.
212. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., Наука, 1974, 832с.
213. Коровин В.М. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в переменном магнитном поле. ЖПМТФ, 1984, №2, с.94-98.
214. Коровин В.М. Релей-тейлоровская неустойчивость поверхности раздела проводящей и непроводящей жидкости в переменном магнитном поле. Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, №1, с.31-37.
215. Коротеев А.С., Рей І.Н. Неустойчивость Релея-Тейлора в тонких жидкометаллических пленках при наличии магнитного поля. Изв. СО АН СССР, сер. т.н., 1984, №10. вып.2, с.113-116.
216. Забарный Г.Н. Методы расчетов процессов теплопереноса в системах извлечения геотермальной энергии/ дис. д-ра техн. наук.- НАН Украины, Отд. Высокотемп. преобразования энергии Ин-та проблем энергосбережения.- К.- 1995.- 356с.
217. Кулагина Н.А. Моделирование фазовых переходов при неизотермической фильтрации сжимаемой жидкости. –В кн.: Задачи гидродинамики со свободными границами. Новосибирск, ИГ СО АН СССР, 1987, с.90-102.
218. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика, М., Физматгиз, 1962, 246с.
219. Курдюмов С.П. Локализация диффузионных процессов и возникновение структур при развитии в диссипативной среде режимов с обострением.

- Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук М., ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1979, 38с.
220. Кутателадзе С.С. Анализ подобия в теплофизике. Новосибирск, Наука, 1982, 280с.
221. Кутателадзе С.С., Накоряков В.Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск, Наука, 1984, 304с.
222. Кухтенко А.И., Ладиков Ю.П. Теория автоматического регулирования и термоядерный синтез. Матер. сов.-мер. совещания по динамич. стабилизации плазмы. Сухуми, 1975, с.79.
223. Лаврентьев М.А. К теории длинных волн. Сб. н. тр. ИМ АН УССР, 1946, №8, с.13-69.
224. Лаврентьев. М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1973, 416с.
225. Лаврентьева О.М. Об управлении формой фронтов фазового перехода в процессе зонной плавки. ИПМТФ, 1987, №1, с.106-115.
226. Ладиков Ю.П., Самойленко Ю.И. Применение системы ортогонализированных обмоток с автоматически регулируемым токами для стабилизации плазмы в системах токамак. ЖТФ, 1972, т.17, №9, с.129-134.
227. Ладиков Ю.П. Стабилизация процессов в сплошных средах. М., Наука, 1978, 432с.
228. Ладиков Ю.П., Ткаченко В.Ф. Гидродинамические неустойчивости в металлургических процессах. М., Наука, 1983, 248с.
229. Ладиков Ю.П., Васильев В.И., Казачков И.В. Исследование устойчивости гарнисажа в сталеплавильных агрегатах. Автоматика, 1980, №4, с.80-85.
230. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Наука, 1970, 288с.
231. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М., Мир, 1981, 600с.
232. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теор. физика. т.VI, Гидродинамика, М., Наука, 1986, 736с.
233. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959, 699с.
234. Ленюк М.П. О волновом уравнении теплопроводности. Украинский математический журнал, 1972, т.24, №6, с.832-838.
235. Лесков Л.В. Теория электромагнитных ускорителей плазмы. М., 1973, 119с.
236. Лин. Влияние отвердевания поверхности на устойчивость многослойных жидких пленок. Теор. основы инж. расчетов, 1983, №1, с.195-200.
237. Линде Хю, Шварц П., Вильке Х. Диссипативные структуры и нелинейная кинетика неустойчивости Марангони. Механика. Новое в заруб. науке. М., 1984, №34, с.79-116.
238. Лионе Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., Мир, 1972, 414с.
239. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз. 1962, 480с.
240. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1973, 847с.

241. Локшин А.А. Нелинейная ударная волна в наследственной среде и точная факторизация нелинейного волнового оператора. Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, №6, с.104-108.
242. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М., Наука, 1975, 478с.
243. Лыков А.В., Алексашенко А.А., Алексашенко В.А., Сопряженные задачи конвективного теплообмена. Минск. Изд. БГУ, 1971, 346с.
244. Лышевский А.С. Распыливание топлива в судовых дизелях. Л., Судостроение, 1971, 100с.
245. Лэкс П.Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. –В сб.: Математика, 1969, 13, №5, с.128-150.
246. Любимов Д.В., Черепанов А.А. О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле. Изв. АН СССР. МЖГ, 1986, №6, с.8-13.
247. Ляхов Г.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М., Наука, 1982. 288с.
248. Магнитно-импульсная обработка ферропорошков в технологии создания композиционных материалов и реологических сред. Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. М., 1985, №449. 164с. ДСП.
249. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. М., Мир, 1977. 584с.
250. Мансуров В.В., Наталуха И.А. О нелинейных колебаниях в процессах объемной кристаллизации. ИФЖ, 1988, т.54, №2, с.286-294.
251. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М., Наука, 1967. 376с.
252. Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., Мир, 1980. 368с.
253. Мартинсон Л.К. Тепловая самоизоляция локализованных структур в средах с объемным поглощением тепла. Письма в ЖТФ, 1980, т.6, вып.4, с.211-215.
254. Мартинсон Л.К. Пространственная локализация тепловых возмущений в движущихся нелинейных средах. ТВТ, 1979, №5, с.1019-1023.
255. Мартинсон Л.К. Эволюция теплового импульса в среде с нелинейной теплопроводностью. Тр. МВТУ. М., 1982, №374, с.14-34.
256. Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М., Наука, 1986, 312с.
257. Материалы II Науч. шк. по нелинейн. колеб. и волнам в распредел. системах. Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. XVII, №4.
258. Маурин Л.Н., Сорокин В.С. О волновом течении тонких слоев вязкой жидкости. ЖПМТФ, 1962, №4, с.186.
259. Медведев А.Г. Исследование влияния вибрационных воздействий на гидродинамические характеристики дисперсно-кольцевых течений в горизонтальной трубе. Ин-т машиновед. им. Благоднарова АН СССР, Автореф. идс. к. т. н. М., 1987, 18с.

260. Меркулов В.И. Управление движением жидкости. Новосибирск, Наука, 1981. 174с.
261. Механика. Новое в зарубежной науке. Успехи прикладной механики. т.38. М., Мир, 1986. 284с.
262. Механика. Новое в зарубежной науке. Нелинейные волновые процессы. т.42. М., Мир, 1987. 296с.
263. Микельсон А.Э., Черный З.Д. Электродинамическое возбуждение и измерение колебаний в металлах. Рига, Зинатне, 1979. 152с.
264. Моалеми М.К., Висканта Р. Анализ плавления около движущегося источника тепла. Межд. ж. «Тепло- и массоперенос», 1987, №4, с.1271-1282.
265. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика., т.I. М., Наука, 1965. 639с.
266. Монин А.С. Гидродинамическая неустойчивость. Успехи физических наук, 1986, т.150, №1, с.61-105.
267. Моффарт Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М., Мир, 1980. 344с.
268. Муравьев Е.В. Диверторы для реакторов-токамаков. Атом. техника за рубежом, 1981, №1, с.13-18.
269. Муравьев Е.В., Тананаев А.В., Чудов А.В. и др. МГД-течение со свободной поверхностью по подложке жидкометаллической диафрагмы. –В кн.: II Рижское совещание по магнитной гидродинамике. Т.I. Рига, 1984, с.111-114.
270. Найденов В.И. Стационарная теория вязкостного взрыва в неньютоновских средах. ИФЖ, 1984, т.46, №5, с.837-843.
271. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М., Мир, 1984. 535с.
272. Накорчевский А.И., Басок Б.И. Гидродинамика и теплоперенос в гетерогенных системах и пульсирующих потоках (под ред. А.А. Долинского).- Киев: Наук. Думка.- 2001.- 348 с.
273. Накорчевский А.И. Реактор для непрерывного рафинирования металла. А. с. №492554, опубл. в Б.И. 1975, №43.
274. Накорчевский А.И. Гетерогенные турбулентные струи. Киев, Наук. думка, 1980. 142с.
275. Накорчевский А.И., Казачков И.В. Расчет турбулентной двухфазной струи. –В кн.: Системы автоматизации непрерывных технологических процессов. Сб. науч. тр. Киев, ИК АН УССР, 1979, с.86-97.
276. Накоряков В.Е., Шрейбер И.Р. Волны на поверхности тонкого слоя жидкости. –ЖПМТФ, 1973, №2, с.109-113.
277. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1983. 238с.
278. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Алексеенко С.В. и др. Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости. ИФЖ, 1977, т.33, №3, с.399-404.
279. Неволин В.Г. Параметрическое возбуждение поверхностных волн. ИФЖ, 1984, т. XXVII, №6, с.1028-1042. Обзор.

280. Неволин В.Г. Возможный механизм акустического пеногашения. ЖТФ, 1980, т.50, вып.7, с.1556-1558.
281. Неволин В.Г. Параметрическая неустойчивость жидких пленок. –В кн.: II Всес. сем. по гидромех. и тепломассообмену в невесомости. Тез. докл. Пермь, ИМСС УНЦ АН СССР, 1981, с.117,118.
282. Неволин В.Г. Влияние растворимых ПАВ на диспергирование жидкости. Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, №5, с.160-164.
283. Неволин В.Г. Влияние термокапиллярного эффекта на параметрическое возбуждение поверхностных волн. ИФЖ, 1984, №3, с.424-428.
284. Некоторые задачи устойчивости поверхности жидкости. Под ред. Брискмана В.А. Свердловск, 1984. 77с. (Препринт/ИММС УНЦ АН СССР).
285. Нелинейные волны: Самоорганизация. М., Наука, 1983. 263с.
286. Нелинейные волны: Под ред. С. Лейбовича и А. Сиббаса. М., Мир, 1977. 320с.
287. Нелинейные волны: Структуры и бифуркации. Ред. А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович.- М.: Наука.- 1987.- 401 с.
288. Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Матер. XX Сиб. теплофиз. семинара 1976г. Под ред. С.С. Кутателадзе. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1977. 417с.
289. Нелинейные волны. Матер. III Науч. шк. по нелинейн. колеб. и волнам в распределен. системах. Изв. вузов. Радиофизика, 1976. т.XIX, №5,6.
290. Непомнящий А.А., Симановский И.Б. Термокапиллярная конвекция в двухслойных системах при наличии ПАВ на границе раздела. Изв. АН СССР. МЖГ, 1986, №2, с.3-8.
291. Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я. Автоколебания неоднородной жидкости, помещенной в электрическое поле. ДАН, 1981, т.256, №2, с.318-320.
292. Нестеров С.В. Развитие волн на границе раздела нестационарных потоков. – В кн.: Методы гидрофизич. исследований. Матер. I Всес. школы. Солнечногорск, окт. 1983. Горький, 1984, с.127-136.
293. Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я. Об устойчивости границы раздела быстроосциллирующих потоков. Изв. АН СССР, физ. атм. и океана, 1980, т.16, вып. II, с.1212-1214.
294. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М., Наука. 1978. 336с.
295. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М., Наука, 1987. ч.1.-464с., ч.2.-360с.
296. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т. и др. Механика насыщенных пористых сред. М., Недра, 1970. 335с.
297. Николаевский В.Н. Механика трещиноватых и пористых сред. М., Недра, 1984. 232с.
298. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М., Мир, 1979. 512с.

299. Новицкий Б.Г. Применение акустических колебаний в химико-технологических процессах. М., Химия, 1983. 192с.
300. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978. 399с.
301. Оганян Г.Г. Об одном частном решении уравнения Бюргерса-Кортевега-де Вриза. Изв. АН Арм.ССР, 1987, X, №2, с.38-42.
302. Оганян Р.А. Исследование быстрорежущей стали 10P6M5, полученной из распыления пневмоакустическим методом порошков. Дис....канд. техн. наук. Черноголовка. ИФТТ АН СССР. 1983. 160с.
303. Огороков Н.В. Электромагнитное перемешивание металла. М., Metallurgizdat, 1961. 176с.
304. Остроградский М.В. Избр. труды. М., АН СССР, 1968. 583с.
305. Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М., Наука, 1979. 320с.
306. Охотский В.Б. Образование капель при истечении струи жидкости в другую жидкость. ИФЖ, 1988, т.54, №2, с.203-211.
307. Пажи Д.Г., Галустов В.С. Распылители жидкости. М., Химия, 1979. 214с.
308. Пакеты прикладных программ. М., Наука, 1983, 152с.
309. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М., Наука, 1984. 285с.
310. Патера А.Т., Микич Б.Б. Использование гидродинамических неустойчивостей при резонансном усилении теплообмена. Межд. ж. «Тепло- и массоперенос», 1987, №4, с.1127-1138.
311. Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К. Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин, Валгус, 1984. 154с.
312. Петров Н., Бранков Й. Современные проблемы термодинамики. М., Мир, 1986. 288с.
313. Петровский И.Г. Избранные труды. Диф. уравнения и теория вероятности. М., Наука, 1987. 424с.
314. Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Пакет программ для решения тепловых задач ТЕКОН. М., 1978. 46с. (Препринт/ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, №65).
315. Повх И.Л., Капуста А.Б., Чекин Б.В. Магнитная гидродинамика в металлургии. М., Металлургия, 1974. 240с.
316. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Везуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса. М., Наука, 1987. 272с.
317. Половин Р.В., Демуцкий В.П. Основы магнитной гидродинамики. М., Энергоатомиздат, 1987. 208с.
318. Потапьевский А.Г., Лапчинский В.Ф., Вайнерман А.Е. Импульсно-дуговая сварка алюминиевых сплавов. Л., Знание, 1966, с.38-43.
319. Применение магнитной гидродинамики в металлургии и литейном производстве. Тез. докл. 2-й Всес. к.-т. конф. Киев, ИПЛ АН УССР 1981. 226с.

320. Проблемы нелинейной акустики. Матер. XI Междун. симп. по нелинейной акустике. Новосибирск, 1987. ч.І-490с., ч.ІІ-218с.
321. Раушенбах Б.В. Вибрационное горение. М., Физматгиз, 1960. 500с.
322. Рафалович И.М. Теплопередача в печах и аппаратах, работающих на расплавленных средах. М., Metallurgia, 1972. 216с.
323. Рахматуллин Х.А., Шкенов Ю.С. Взаимодействие сред и полей. Ташкент, Фан, 1985. 231с.
324. Рей У. Методы управления технологическими процессами. М., Мир, 1983. 368с.
325. Релей Дж.У.І.Б. Теория звука, т.І,ІІ, М.-Л, Гостехиздат, 1955. 504с., 476с.
326. Репин В.Б. Теплообмен при течении вязкой жидкости в плоском канале в поле поперечных акустических колебаний. Изв. АН СССР, МЖГ, 1985, №3, с.41-49.
327. Роч П. Вычислительная гидродинамика. М., Мир, 1980. 616с.
328. Руазар С., Тондые Д. Теплоперенос в фильтрующих неподвижных слоях с зависящими от температуры физическими свойствами. Межд. ж. "Тепло- и массоперенос", 1986, т.29, №7, с.1021-1031.
329. Рудерман М.С. Влияние вязкости на распространение нелинейных альфвеновских волн по тангенциальному МГД разрыву в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР. МЖГ. 1986, №6, с.94-104.
330. Салли И.В. Кристаллизация при сверхбольших скоростях охлаждения. Киев. Наук. Думка, 1972. 136с.
331. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др. Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянной теплопроводностью. М., 1979. 76с. (Препринт/ИПИМ им. М.В. Келдыша АН СССР, №28).
332. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П. и др. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия ее проявления в эксперименте. М., 1977. 87с. (Препринт/ИПИМ им. М.В. Келдыша АН СССР, №103).
333. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П. и др. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. ДАН, 1975, т.223, №6, с.1344-1347.
334. Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн. ЖВММФ, 1963, т.3, №4, с.702-719.
335. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., Наука, 1977. 656с.
336. Самарский А.А. Современная прикладная математика и вычислительный эксперимент. Коммунист, 1983, т.18, с.31-42.
337. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., Наука, 1987. 480с.
338. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, Вища школа. Голов. изд-во, 1987. 288с.

339. Самойленко Ю.И. О разрешающей способности пространственно распределенных систем управления Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, №4, с.137-142.
340. Самойленко Ю.И. Пространственно распределенные системы автоматического управления и способы их реализации. Автоматика и телемеханика, 1968, т.29, №2, с.39-43.
341. Самойлович Ю.А. Кристаллизация слитка в электромагнитном поле. М., Металлургия, 1986. 168с.
342. Самойлович Ю.А., Тимошпольский В.И. Расчеты затвердевания отливок цилиндрической формы по методу Лейбензона. ИФЖ, 1987, т.52, №3, с.485-490.
343. Сандуляк А.В., Корхов О.В., Дахненко В.Л. др. Скоростные режимы фильтрации при магнитном охлаждении частиц из малоцентрированных моно- и полидисперсных суспензий магнетика. ИФЖ, 1985. т.XVIII, №4, с.598-602.
344. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М., Мир, 1984. 472с.
345. Сардаров С.С.(мл.), Савина Е.В. Геотермическое поле разлома. ДАН, 1984, т.276, №5, с.1091-1094.
346. Саяхов Ф.Л., Хабибуллин И.Л., Насыров Н.И. и др. Температурное поле в пористой среде при воздействии электромагнитных полей с учетом фазового перехода насыщающей фазы.— В кн.: Физико-химическая гидродинамика, Уфа, 1985, с.44-51.
347. Седельников Т.Х., Абрамов О.В. Некоторые задачи, связанные с распылением струи жидкого металла. М. 1982. 48с. Деп. ВИНТИ, №3012.
348. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М., Наука, 1981. 447с.
349. Седов Л.И. Научные теории, модели и реальность. Природа, 1984, №11, с.3-10.
350. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М., Наука, 1973. Т.1-536с. Т.2-584с.
351. Седов Л.И. О перспективных направлениях и задачах механики сплошных сред. Вестник АН СССР, 1977, №2, с.36-49.
352. Селезов И.Т., Селезова Л.В. Волны в магнитогидроупругих средах. Киев, Наук. думка, 1975. 163с.
353. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., ИЛ, 1963. 256с.
354. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск, Наука, 1987. 231с.
355. Сиразетдинов Т.К. К аналитическому конструированию регуляторов для магнитогиродинамических процессов. Автоматика и телемеханика, 1967, ч.1, П - №№10, 12.

356. Славин Г.А., Столпнер Е.А. и др. Управление процессом кристаллизации путем динамического воздействия дуги. Сварочное производство, 1974, №8, с.23.
357. Щербань А.Н., Бабинец А.Е., Цырульников А.С., Дядькин Ю.Д. Тепло Земли и его извлечение. Киев, Наукова Думка, 1974, 262 с.
358. Соболенко Т.М., Тесленко Т.С. Свойства алюминиевых сплавов после обработки ударными волнами. –В кн.: Нестационарные проблемы механики. Новосибирск, ИГ СО АН СССР, 1986, вып. 74, с.68-73.
359. Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. Под ред. Дж. Бэтчелора и Г. Моффата. М., Мир, 1984. 501с.
360. Солоухин Р.И. Ударные волны и детонация в газах. М., Физматгиз, 1963.
361. Сорокин В.И. Об эффекте фонтанирования капель с поверхности вертикально колеблющейся жидкости. Акуст. журнал, 1957, т.3, №3, с.262-273.
362. Спивак А.Ф., Черепанова Т.А. О пространственно-периодических нестационарных процессах при кристаллизации. ЖПМТФ, 1987, №1, с.116-124.
363. Стампис Д.У., Кларк Дж.А. Нестационарная термоклинная деградация в насыщенной жидкостью пористой среде. Межд.ж. «Тепло- и массоперенос», 1987, №4, с.1063-1070.
364. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. Киев, Наук. думка, 1987. 268с.
365. Странные аттракторы. М., Мир, 1981. 256с.
366. Тактаров Н.Г. Конвекция намагничивающихся жидкостей в электропроводных пористых средах. Магнитная гидродинамика. 1984, №3, с.38-40.
367. Тактаров Н.Г. Фильтрация намагничивающейся жидкости с деформируемой пористой среде. ИФЖ, 1985, т.XVIII, №1, с.49-54.
368. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. М., Мир, 1981. 408с.
369. Технологические эксперименты в невесомости. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1983. 184с.
370. Тимохин А.Д. Получение потоков монодисперсных нейтральных и заряженных макрочастиц. Труды МЭИ. М., 1981, вып. 545, с.3-24.
371. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М., Наука. 1967. 444с.
372. Тихомиров В.К. Пены. Теория и практика их получения и разрушения. М., Химия, 1975. 264с.
373. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1972. 724с.
374. Тонкаль В.Е., Казачков И.В., Колесниченко А.Ф. К расчету параметров электромагнитного поля, индуцирующего распад жидкометаллической пленки. ДАН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. 1987, №10, с.56-58.
375. Грантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М., ГИТТЛ, 1956. 204с.

376. Трифонов Ю.Я., Цвелодуб О.Ю. Трехмерные стационарные бегущие волны на вертикально стекающей пленке жидкости. ЖПМТФ, 1986, №6, с.35-43.
377. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977. 624с.
378. Физика и техника мощного ультразвука. Т.3. Физические основы ультразвуковой технологии. Под ред. Л.Д. Розенберга. М., Наука, 1970. 380с.
379. Филатов А.Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, Фан, 1971. 279с.
380. Фольмер М. Кинетика образования новой фазы. М., Наука, 1986. 208с.
381. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. М.-Л., ГИТТЛ, 1945. 360с.
382. Фридрих Р., Рудраях Н. Автомодельные решения уравнений Бринкмана для двумерной плоской струи в пористой среде. Тр. амер. общ-ва инж.-механиков. 1983, т.105, №4, с.148-153.
383. Фролов К.В. Нелинейные резонансные эффекты в механических системах при учете свойств источника энергии. Вест. АН СССР, 1987. №10, с.9-22.
384. Хабахпашев Г.А. Влияние трения жидкости о дно на динамику гравитационных возмущений. Изв. АН СССР. МЖГ, 1987, №3, с.119-127.
385. Хакен Г. Синергетика. М., Мир, 1980. 404с.
386. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., Мир, 1976. 632с.
387. Хейфец Л.И., Неймарк А.В. Многофазные процессы в пористых средах. М., Химия, 1982. 320с.
388. Хо, Лин. Начинающееся изнутри плавление вещества в кольцевой цилиндрической полости. Энергетические машины, 1986, №4, с.140-145.
389. Цеберс А.О. Неустойчивость свободной поверхности магнитной жидкости в тангенциальном к ней вращающемся магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1981, №3, с.41-49.
390. Чандрасекар С. Замечания к статьям Э.Ферми. –В кн.: Ферми Э. Научные труды. М., Наука, 1972, т.2, с.588.
391. Чен С.И. Численное интегрирование уравнений Навье-Стокса. Ракет. техника и космонавтика, 1970, т.8, №12, с.3-13.
392. Чехонадских А.И. Экспериментальные исследования влияния объемных электромагнитных сил на форму кривой свободной поверхности. Л., Труды ЛПИ, 1982, №383, с.28-31.
393. Чернов Д.К. Записки рус. техн. общ-ва. С.-П., 1879, вып.1, с.140-152.
394. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М., Наука, 1980. 384с.
395. Чернышев А.Д. О теории теплопроводности при конечной скорости распространения тепла. ИФЖ, 1975. т.28, №3, с.523-527.
396. Чернышев И.А. Электромагнитные воздействия на металлические расплавы. М., Металлургия, 1963. 85с.
397. Чинь Лыонг Куанг. Влияние частотного скольжения на распространение длинных волн в вязкой жидкости. Минск. БГУ им. В.И. Ленина. Дис. ... к. ф.-м. н., 1987, 123с.

398. Чураев Н.В. Физический механизм смачивания твердых поверхностей. ИФЖ, 1987. т.53, №5, с.795-802.
399. Шестой Всес. съезд по теор. и прикл. механике. Аннотации докладов. Ташкент. 1986. 669с.
400. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, №1, с.43-51.
401. Шкадов В.Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости. Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, №1, с.63-66.
402. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974, 712с.
403. Шмарев С.И. Автомодельная многомерная задача Стефана. –В кн.: Нестационарные проблемы механики. Новосибирск, ИГ СО АН СССР, 1986. вып.74, с.126-146.
404. Шмидт Г. Параметрические колебания. М., Мир. 1978. 336с.
405. Шульман З.П., Байков В.И. Реодинамика и теплообмен в пленочных течениях. Минск, Наука и техника, 1979. 295с.
406. Эшби У.Р. Введение в кибернетику. М. ИЛ, 1959, 432с.
407. Юдович В.И. Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости. ДАН, 1970, 195, №2, с.292-295.
408. Юдович В.И. Возникновение автоколебаний в жидкости. ПММ, 1971, 35, №3, с.79-84.
409. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М., Наука, 1958. 940с.
410. Яворский Н.И. Вариационный принцип для вязкой теплопроводной жидкости с релаксацией. Изв. АН СССР. МЖГ, 1986, №3, с.3-10.
411. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М., Наука, 1987. 328с.
412. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., Мир, 1974. 488с.
413. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Наука, 1967. 195с.
414. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., Наука, 1977. 344с.
415. Aitov T.N., Ivanov A.B., Kirilina E.M. Divertor plates with a protective film/ In-tor-related Tokamak concept innovations.- Phase IIA, third part, v. II.- Vienna.- 1986.- E.7.19.
416. Allen D.N. de G., Southwell R.V. Relaxation methods applied to determine the motion in two dimensions of a viscous fluid past a fived cylinder// Quart. J. of Mech. And Appl. Math.- 1955.- v. 8.- P. 129-145.
417. Alpher R.A. et al. Some studies of free surface mercury magneto-hydrodynamics// Rev. of Modern Physics.- 1960.- v. 32.- N 4.- P. 758-769.
418. Anno J.N. The mechanics of fluid jets.- Lexington, Mass-Toronto.- 1977.- XIII.- 102 pp.
419. Anthony L. Hiles, Robert N. Maddox. Mass Transfer. Fundamentals and Applications.- Prentice-Hall, Inc.- New Jersey.- 1985.- 542 pp.

420. Arai Takakage, Hashimoto Hiroyuki. Disintegration of thin liquid sheet in cocurrent gas stream. Wave motion of thin liquid sheet and breakup patterns// *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.*- 1985.- B51.- N 470.- P. 3336-3342.
421. Arneodo A., Coulet P., Tresser C. A possible new mechanism for the onset of turbulence// *Phys. Letters.*- 1981.- v. 81A.- N 4.- P. 197-201.
422. Azuma Tsuneo, Hoshino Tatsuro. The radial flow of a thin liquid film// *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.*- 1984.- B 50.- N 432. 1st report: Laminar-turbulent transition.- P. 974-981; 2nd report: Film thickness.- P. 982-989; 3rd report... P. 1126-1133; 4th report... P. 1136-1143; 5th report: Influence of wall roughness on laminar-turbulent transition.- P. 3176-3188.
423. Babchin A.J. Frenkel A.L., Levich B.G. Nonlinear saturation of Rayleigh-Taylor instability in thin films// *Phys. Fluids.*- 1983.- 26.- N 11.- P. 3159-3161.
424. Baker G.R., Mc Crory R.L., Verdon C.P., Orszag S.A. Rayleigh- Taylor instability of fluid layers// *J. Fluid Mech.*- 1987.- 178.- P. 161-175.
425. Bear J. Dynamics of fluids in porous media.- New-York.- American Elsevier Pub.- 1972.- 764 pp.
426. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid saturated porous solid// *J. Acoust. Soc. Am.*- 1956.- v. 28.- N 2.- P. 168-191.
427. Bhattacharyya S.P., Abbas M. Instability of a planar liquid layer in an alternating longitudinal magnetic field with non-zero mean// *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*- 1986.- 95.- N 1.- P. 13-21.
428. Bohr N. Determination of Surface-Tension of Water by the Method of Jet Vibration// *Trans. Roy. Soc.- Ser. A.*- 1909.- v. 209.- N 447.- P. 281-317.
429. Boldrini J.L. Asymptotic behavior of traveling wave solutions of the equations for the flow of a fluid with small viscosity and capillarity// *Quart. Of appl. Math.*- 1987.- v. XLIV.- N 4.- P. 697-708.
430. Brauer H. Grundlagen der Einphasen and Mehrphasen strömungen.- Aarau.- Frankfurt am Mein: Somerländer.- 1971.- P. 955 s.
431. Brauner Neima, Maron David Moalem, Dukler Abraham E. Modeling of wavy flow in inclined thin films in the presence of interfacial shear// *Chem. Eng. Sci.*- 1985.- 40.- N 6.- P. 923-937.
432. Bussman K., Muenz H. Die stabilität der laminar Reibungsschicht mit Absaugung// *Deutsch. Lutabfahrtforsch. Zbl. Wiss., Ber.-Wes.*- 1942.- B. 1.- S. 35.
433. Campbell D.R., Mueller T.J. A numerical and experimental investigation of incompressible laminar ramp-induced separated flow. UNDASTN-1068-M1.- Dep. Of Aerospace Eng. Univ. of Notre Dame.- Indiana. – 1968.
434. Chakraborty B.B. R.-T. instability in the presence of a oscillating magnetic field permeating both heavier and lighter fluids// *Phys. Fluids.*- 1980.- v. 23.- N 3.- P. 464-471.
435. Chandrasekhar S. Hydrodyn. and hydromagnetic stability.- Oxford.- Clarendon Press.- 1961.- 654 pp.
436. Chesters I.H. Continuous steelmaking in the pipeline// *Chem. And Process Eng.*- 1971.- v. 52.- N 12.- P. 3

437. Ciliberto S., Gollub J.P. Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves// *J/ Fluid Mech.*- 1985.- 158.- P. 381-398.
438. Clark C.J. Dombrowski N. Aerodynamic instability and disintegration of inviscid liquid sheets// *Proc. Roy. Soc. London.*- 1972.- A329.- N 1579.- P. 467-478.
439. Clark C.J. Dombrowski N. On the formation of drops from the rims of fan spray sheets// *J. Aerosol. Sci.*- 1972.- 3.- N 3.- P. 173-183.
440. Collet P., Eckmann J.-P., Landford O.E. Universal properties of maps on the interval// *Commun. Math. Phys.*- 1980.- v. 76.- N 3.- P. 211-254.
441. Corriel S.R., Cordes M.R., Boettinger W.J. Convective and interfacial instabilities during unidirectional solidification of a binary alloy// *J. Crystal Growth.*- 1980.- v. 49.- P. 13-28.
442. Crank J. Free and moving boundary problems.- Oxford: Clarendon Press.- 1984.- 425 pp.
443. Crapper G.D., Dombrowski N. A note on the effect of forced disturbances on the stability of thin liquid sheets and on the resulting drop size// *Int. J. Multiphase Flow.*- 1984.- 10.- N 6.- P. 731- 736.
444. Crapper G.D., Dombrowski N., Jepson W.P. Wave growth on the thin sheets of non-Newtonian liquids// *Proc. Roy. Soc. London.*- 1975.- A342.- N 1629.- P. 225-236.
445. Crapper G.D., Dombrowski N., Pyott G.A.D. Large amplitude Kelvin-Helmholtz waves on thin liquid sheets// *Proc. Roy. Soc. London.*- 1975.- A342.- N 1629.- P. 209-224.
446. Crowley I.M. Effect of electromagnetic force on the stability of liquid films// *Industrial and Engineering Chemistry.*- 1967.- v. 6.- N 2.- P. 243-246.
447. Cruickshank J.O., Munson B.R. Viscous fluid buckling of plane and axisymmetric jets// *J. Fluid Mech.*- 1981.- 113.- P. 221-239.
448. Davis S. Rupture of thin liquid films. *Waves Fluid Interfaces/ Proc. Symp.*- Madison, Wisc. 18-20 Oct. 1982.- New York e.a.- 1983.- P. 291-302.
449. Davis S.H. Moving Contact Lines and Rivulet Instabilities. Part 1. The Static Rivulet// *J. Fluid Mech.*- 1980.- 98.- P. 225-242.
450. Dem'janenko V.N., Gorislavets Yu.M., Kazachkov I.V. et al. Controlled decomposition of liquid metal jets and films in technological and power devices/ Abstracts of Symp. LM MHD, 16-21 May 1988.- Riga.- P. 47.
451. Din-Yu-Hsien. Stability of a conducting fluid flowing down an inclined plane in a magnetic field// *Phys. Fluids.*- 1965.- v. 8.- N 10.- P. 1785-1791.
452. Drazin P.G. Stability of parallel flow in an oscillating magnetic field// *Q. J. Mech.*- 1967.- v. 20.- pt.2.- P. 201-218.
453. Dussan V E.B. Hydrodynamic stability and instability of fluid systems with interfaces// *Arch. Rat. Mech. Anal.*- 1975.- v. 57.- P. 363.
454. Dussan V E.B., Davis S.H. On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface// *J. Fluid Mech.*- 1974.- v. 65.- P. 71.
455. Dutta A., Ryan M.E. Dynamics of a creeping Newtonian jet with gravity and surface tension: a finite difference technique for solving steady free-surface flows

- using orthogonal curvilinear coordinates// *AICHE Journal*.- 1982.- 28.- N 2.- P. 220-232.
456. Dynamical problems in soliton systems/ Ed. By S. Takeno.- Berlin: Springer.- 1985.- 277 pp.
457. Eisenmenger W. Dynamic properties of the surface tension of water and aqueous solutions of surface active agents with standing capillary waves// *Acustica*.- 1959.- v.9.- P. 237-340.
458. Entov V.M., Yarin A.L. The dynamics of thin liquid jets in air// *J. Fluid Mech.*- 1984.- 140.- P. 91-111.
459. Esser P.D., Paul D.D., Abdel-Khalik S.I. Stability of the lithium «waterfall» first wall protection concept for inertial confinement fusion reactors// *Nucl. Technol. Fusion*.- 1981.- 1.- N 2.- P. 285-294.
460. Faraday M. On a peculiar class acoustical figures and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elastic surfaces// *Phil. Trans. Roy. Soc. London*.- 1931.- v. 121.- P. 299-318.
461. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformation// *J. Stat. Phys.*- 1978.- v. 19.- N 1.- P. 25-51.
462. *Free Boundary Problems: Applications and Theory*.- Vol. 3/ Ed. Bossavit A.- Boston: Pitman.- 1985.- 303 pp.
463. Fronts, interfaces and patterns/ Proc. Of the 3rd annual Intern. Conf. of the Center for Nonlinear studies.- Los Alamos (NM), May 2-6, 1983/ Ed. Bishop A.R. et al.- Amsterdam.- North-Holland physics publ.- 1984.- 9.- 436 pp.
464. Funada T. Marangoni instability of thin liquid sheets// *J. Phys. Soc. Jap.*- 1986.- 55.- N 7.- P. 2191-2202.
465. Gallez D., Prevost M. Linear and nonlinear dynamics of free liquid films// *Physicochem. Hydrodyn.*- 1985.- 6.- N 5-6.- P. 731-745.
466. Garnier M. Roˆle de ´stabilisant d´un champ magnetique alternatif applique´ au voisinage d´une interface// *C.R. Acad. Sci. Paris*.- 1977.- Se´r B.- v. 284.- P. 365-368.
467. Gagniol R. Seppecher P. Modelisation to fluid-fluid interface with material properties// *J. Mec. Theor. Et Appl.*- 1986.- 5.- NUM. SPEC.- P. 225-247.
468. Gibbs J.W. On the Equilibrium of Heterogeneous Substances.- The Collected Works of J. Willard Gibbs.- 1949.- v. 1.- P. 55-353.
469. Glansdorf P. Dynamical systems and microphysics.- Springer-Verlag.- 1980.- P. 199-224.
470. Gussis D., Kelly R.E. Effects of viscosity variation on the stability of film flow down heated or cooled inclined surface long-wavelength analysis// *Phys. Fluids*.- 1985.- 28.- N 11.- P. 3207-3214.
471. Goussis D.A. Effects of viscous dissipation on the stability of a liquid film flowing down a heated inclined plane// *Int. J. Heat and Mass Transfer*.- 1987.- 30.- N 4.- P. 757-762.
472. Green A.E., Naghdi P.M. Non-isothermal theory of rods, plates and shells// *Int. J. Solid and Struct.*- 1970.- 6.- N 2.- P. 209-244.

473. Haenlein A. Ueber den Zerfall eines Fluessigkeitstrahles Forshung// Ing. Wes.- 1931.- Bd 2.- S. 139-149.
474. Hagerty W.W. Shea J.F. A study of the stability of plane fluid sheets// J. Appl. Mech.- 1955.- 22.- N 4.- P. 509-514.
475. Han C.D., Shetty R. Flow instability in tubular film blowing.- 1. Experimental study// Ind. Eng. Chem. Fundam.- 1977.- 16.- N 1.- P. 49-56.
476. Hasegawa E. Nonlinear stability of a thin liquid layer flowing down an oscillating plane// Bull. Of the JSME.- 1981.- v. 24.- no 193.- P. 1145-1150.
477. Heggs P.J. O'Sullivan P.A. A numerical solution of the effects of fluid convection and axial conduction and solid internal conduction on the heat transfer in porous media. Numer. Meth. Therm. Probl./ Proc. 3rd Int. Conf. Seattle, 2-5 Aug., 1983.- Swansea.- 1983.- P. 184-196.
478. Hieftje G.M., Malmstadt H.V. A New Approach to Flame Spectrometric Analysis Utilizing Isolated Droplets of Sample Solution// Analytical Chem.- 1969.- v. 41.- N 13.- P. 1735-1744.
479. Hirose A., Lonngren K.E. Introduction to wave phenomena.- New York: Wiley.- 1985.- 355pp.
480. Hirt C.W., Cook I.L., Butler T.D. Lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface// J. Comput. Physics.- 1970.- N 5,- P. 103-124.
481. Hoffman M.A., Takahashi R.K. Monson R.D. Annular liquid jet experiments// Trans. ASME: J. Fluid Eng.- 1980.- 102.- N 3.- P, 344-349.
482. Holitzner H., Wolf G.H. The use resonance for the dynamic stabilization of the R.- T. instability and for the excitation of the related parametric instabilities// Rev. Sci. Instrum.- 1975.- v. 44.- N 8.- P. 988-990.
483. Hooper A.P. Long-wave instability at the interface between two viscous fluids: thin layer effects// Phys. Fluids.- 1985.- 28.- N 6.- P. 1613-1618.
484. Huang J.C.P. The break-up of axisymmetric liquid sheets// J. Fluid Mech.- 1970.- 43.- N 2.- P. 305-320.
485. Hwang Shyh-Hong, Chang Hsueh-Chia. Turbulent and inertial roll waves in inclined film flow// Phys. Fluids.- 1987.- 30.- N 5.- P. 1259-1268.
486. Jacobs J.W. and Catton I. Three-dimensional R.-T. instability. Part 1. Weakly nonlinear theory// J. Fluid Mech.- 1988.- v. 187.- p. 329-352.- Part 2. Experimental.- P. 353-371.
487. Jepson W.P. The effect of surface agents on the growth of waves on thin liquid sheets// Trans. Can. Soc. Mech. Eng.- 1980-1981.- 6.- N 4.- P. 203-209.
488. Kant Rama, Malik S.K. Nonlinear internal resonance in magnetic fluids// J. Magn. and Magn. Mater.- 1987.- 65.- N 2-3.- P. 347-349.
489. Kelleher M.D., Kwang-Tsu-Yang. A steady conjugate heat transfer problem with conduction and free convection// Appl. Sci. Res.- 1967.- v. 17.- P. 249.
490. Kern J. Zur Hydrodynamik der Rinnsale// Verfahrenstechnik.- 1971.- 5.- S. 289-294.

491. Kern J. Stabilitätsprobleme der Rinnsalströmung// Verfahrenstechnik.- 1969.- 3.- S. 425-430.
492. Korteweg D.J. Vries G. de. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves// Philos. Mag.- 1895.- v. 39.- P. 422- 443.
493. Lahiri S., Dhar S.K. On the motion of conducting liquid down an inclined plane// Ind. J. Theor. Phys.- 1984.- 32.- N 3.- P. 255-260.
494. Lee Wei-Kuo. The rheological nature of solid pressure of granular media// Powder technology.- 1987.- 51.- N 3.- P. 261-266.
495. Lin S.P. Film waves. Waves Fluid Interfaces/ Proc. Symp. Madison, Wisc. 18-20 Oct.- 1982.
496. Lindsay K.A., Kelvin-Helmholtz instability for a viscous interface// Acta Mech.- 1984.- 52.- N 1-2.- P. 51-61.
497. Lomdahl P.S., Layne S.P., Bigio I.J. Solitons in biology// Los Alamos Sci.- 1984.- N 10.- P. 2-22.
498. Lorenz E.N. Deterministic Non-periodic Flow// J. Atmos. Sci.- 1963.- v. 20.- N 3.- P. 130-141.
499. Low A.R. On the criterion for stability for a layer of viscous fluid heated from below// Proc. Roy. Soc.- A.- 1929.- v. 125.- P. 180.
500. Lyell M.J., Huerre P. Linear and nonlinear stability of plane stagnation flow// J. Fluid Mech.- 1985.- 161.- P. 295-312.
501. Ma Yan-Chow. Wilton ripples phenomenon with a background current// Phys. Fluids.- 1985.- 28.- N 4.- P. 1033-1039.
502. Magarvey R.H. Taylor B.W. Apparatus for Production of Large Water Drops// Rev. Sci. Instrum.- 1956.- v. 27.- N 11.- P. 944-947.
503. Maldarelli C., Jain R.K., Ivanov I.B. et al. Stability of symmetric and unsymmetrical thin liquid films to short and long wavelength perturbations// J. Colloid and Interface Sci.- 1980.- 78.- N 1.- P. 118-143.
504. Maldarelli C., Jain R.K. The linear hydrodynamic stability of an interfacial perturbed, transversely isotropic, thin planar viscoelastic film. I. General formulation and a derivation of the dispersion equation// J. Colloid and Interface Sci.- 1982.- 90.- N 1.- P. 233-262.
505. Meixner J. und Reik H.G. Thermodynamic irreversible Prozesse.- Handbuch der Physik/ Ed. S. Fluegge.- Springer.- 1959.- v. VIII/2.- P. 413- 523.
506. Melcher J. Electrohydrodynamic surface waves/ Proc. Symp. Waves Fluid Interfaces.- Madison, Wisc., 18-20 Oct.- 1982.- New-York e.a.- 1983.- P. 167-200.
507. Mercer J.W., Faust Ch.R. A review of numerical simulation of hydrothermal systems// Hydrol. Sci. Bull. d. Sci. Hydrol.- 1979.- 24.- N 3.- P. 335-343.
508. Miles John W. Parametrically excited solitary waves// J. Fluid Mech.- 1984.- N 148.- P. 451-460.
509. Minoshima W., White J.L. Stability of continuous film extrusion process// Polym. Eng. Reviews.- 1983.- 2.- N 3.- P. 212-226.

510. Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D. Korteweg-de-Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constant s of motion// J. Math. Phys.- 1968.- v. 9.- P. 1204-1209.
511. Miyatake Osamu, Miki Yasuhiro// Караку когаку ромбунсю.- 1987.- 13.- N 2.- C. 252-256.
512. Moretti G. The importance of boundary conditions in the numerical treatment of hyperbolic equations/ Polytechn. Inst. Brooklyn, PIBAL Rept.- 1969.- N 68-34.
513. Murakami Youichi. Damped four-wave resonant interaction with external forcing// Wave Motion.- 1987.- v. 9.- N 5.- P. 393-400.
514. Nilson R.H. Gas-driven fracture propagation// Trans. ASME. J. Appl. Mech.- 1981.- v. 48.- N 4.- P. 757-762.
515. Nobuki, Mori Kazutoshi, Kimura Nasahiro et al. Study on disintegration of liquid film by air flow. Atomization characteristics// Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. – 1985.- B51.- N 469.- P. 2880-2886.
516. Numerical methods for fluid dynamics/ Ed. K.W. Morton, M.j. Baines.- Oxford.- Clarendon Press.- 1986.- 679 pp.
517. Ohnesorge W. Zeitschrift fuer angewandte Mathematik und Mechanik.- 1936.- N 16.- S. 355.
518. Omodei B.J. Computer solutions of a plane Newtonian jet with surface tension// Comput. and Fluids.- 1979.- 7.- N 2.- P, 79-96.
519. Orszag Steven A., Israel Moshe, Deville Michel. Boundary conditions for incompressible flows// J. Sci. Comput.- 1986.- 1.- N 1.- P. 75-111.
520. Oshima Shuzo, Yamane Ryuichiro, Mochimaru Yoshihiro et al. Investigation of film flow of a conducting fluid in a transverse magnetic field// Bull. JSME.- 1986.- 29.- N 253.- P. 2070-2085.
521. Peskin R., Raco R. Ultrasonic atomization of liquids// J. Acoust. Soc. Am.- 1963.- v. 35.- N 9.- P. 1378-1385.
522. Plateau J. Statique experimentale et theorique des liquids soumis aux seules forces moleculaires. T. 1-2.- Paris.- Gautier-Vallars.- 1873, t.1.- 450 pp; t.2.- 495 pp.
523. Ponstain J. Instability of rotating cylindrical jets// Appl. Scientific research.- 1959.- A8.- N 6.- P. 425-456.
524. Progress and supercomputing in computational fluid dynamics/ Ed. By E.M. Murman, S.S. Abarbanel.- Boston.- Birkhäuser.- 1985.- 403 pp.
525. Radev S., Tchavdarov B. Spectral analysis of the Orr-Sommerfeld equation for capillary liquid jets// Zeit. Angew. Math. und Mech.- 1985.- 65.- N 4.- P. 230-232.
526. Ramaswamy B., Kawahara M. Arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for the analysis of free surface fluid flows. Comput. Mech. Theory and Appl. // Proc. Int. Conf. Tokyo.- 1986.- v. 2.- VII/103-VII/108.
527. Reed A.W. A Mechanistic Explanation of channels in Debris Beds// Trans. of the ASME.- 1986.- N 1.- P. 130-136.
528. Richardson L.F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with application to the stresses in a masonry dam// Trans. Roy. Soc. London.- 1910.- Ser. A.- v. 210.- P. 307-357.

529. Rowlinson J.S., Widom B. *Molecular Theory of Capillarity*- Clarendon Press.- Oxford Science Publications.- 1982.- 327 pp.
530. Ruschak K.J. Flow of a thin liquid layer due to ambient disturbances// *AICHE Journ.*- 1987.- 33.- N 5.- P. 801-807.
531. Saha Susama, Chaudhuri Krishna M. Thermal convection instability of liquid metals in magneto-hydrodynamics// *Astrophys. And Space Sci.*- 1983.- 89.- N 1.- P. 33-51.
532. Savart F. Memoire sur la constitution des veines liquids lances par des orifices circulaires en mince paroi// *Annal. Chimie.*- 1833.- 2 ser., t. 53.- N 3.- P. 337-386.
533. Schnell E. Slippage of water over nonwetable surface// *J. Appl. Phys.*- 1956.- Vol. 27.- P. 1149.
534. Sengar R.S., Indu Gupta. Thermal instability of a heterogeneous fluid layer with free boundaries in the presence of a magnetic field// *Proc. Nat. Acad. Sci. India.*- 1986.- Sec.2.- v. 56.- N 1.- P. 62-76.
535. Sero-Guillaume O. and Bernardin D. Note on a Hamiltonian formalism for the flow of a magnetic fluid with a free surface// *J. Fluid Mech.*- 1987.- v. 181.- P. 381-386.
536. Shen M.C., Sun S.M. Critical viscous surface waves over an incline// *Wave Motion.*- 1987.- 9.- N 4.- P. 323-332.
537. Shima Akira, Tomita Yukio. Mechanism of impulsive pressure generation and damage pit formation by cavitation bubble collapse// *Нихон кикай гаккайсю J. Jap. Soc. Mech. Eng.*- 1987.- 90.- N 819.- P. 164-169.
538. Shivamoggi B.K. Nonlinear surface waves in magnetohydrodynamics// *Acta mech.*- 1986.- 61.- N 1-4.- P. 51-58.
539. Shyh C.K., Munson B.R. Interfacial instability of a oscillating shear layer// *Journ. of fluids Engineering.*- 1986.- N 1.- P. 89-96.
540. Singhal Rama, Srivastava Krishna M. Thermal convection instability of liquid metals in magnetohydrodynamics// *Astrophys. and Space Sci.*- 1983.- 89.- N 1.- P. 33-51.
541. Southwell R.V. *Relaxation Methods in Engineering Science - A Treatise on Approximate Computation.*- New York: Oxford Univ. Press.- Read Books Design.- 2010.- 268 pp.
542. Squire H.B. Investigation of the instability of a moving liquid film// *Brit. J. Appl. Phys.*- 1953.- 4.- N 6.- P. 167-169.
543. Suleiman S.M., Munson B.R. Viscous buckling of thin fluid layers// *Phys. Fluids.*- 1981.- 24.- N 1.- P. 1-5.
544. Swatik D.S. *Nonimpact Printing.*- In: *Electrostatics and its Applications/ Ed. A.D. Moore.*- N.-Y.: Wiley-Interscience.- 1973.- P. 307-335.
545. Taniuti T., Wei C.C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation, I// *J. Phys. Soc. Japan.*- 1968.- v. 24.- N 4.- P. 941-966.
546. Taniuti T., Yajima N. Perturbation method for a non-linear wave modulation. I, II// *J. Math. Physics.*- 1969.- v. 10.- N 8.- P. 1369-1372; v. 10.- N 11.- P. 2020-2024.

547. Taniuti T. Reductive perturbation method and far fields of wave equations. Part 1. General Theory// Supplement of the Progress of theoretical physics.- 1974.- N 55.- P. 1-35.
548. Taylor G. The dynamics of thin sheets of fluid// Proc. Roy. Soc. London.- 1959.- A253.- N 1274.- P. 289-321; 1960.- N 1296.- P. 1-17.
549. Thom A., Apelt C.J. Field computations in engineering and physics.- London, N.Y.: C. Van Nostrand Company, Ltd.- 1961.- 168 pp.
550. Thoman D.C., Szewczyk A.A. Numerical solutions of time dependent two dimensional flow of a viscous, incompressible fluid over stationary and rotating cylinders.- Techn. Rept. 66-14.- Notre Dame.- Indiana.
551. Toda S., Sugiyama H., Owada H. Et al. Laminar flow heat transfer in a tube with internal solidification. Heat transfer/ Proc. 8th Int. Conf., San Francisco.- Calif., Aug. 17-22.- 1986.- Washington e.a. 1986.- v. 4.- P. 1745-1750.
552. Troyon F., Gruber R. Theory of the dynamic stabilization of the R.-T. instability// Phys. Fluids.- 1971.- 14.- N 10.- P 2069-2073.
553. Twizell E.H. Computational methods for partial differential equations.- Chichester.- Horwood.- 1984.- 276 pp.
554. Velarde M.G., Castillo J.L. Thermohydrodynamic instabilities: buoyancy-thermocapillary convection. Nonequibr. Coop. Phenom.- Phys. And Relat. Fields/ Proc. NATO Adv. Study Inst. El Escorial.- Madrid.- Aug., I-II, 1983.- New York, London.- 1984.- P. 179-196.
555. Vichnevetsky Robert. Wave propagation analysis of difference schemes for hyperbolic equations: a review// Int. J. Numer. Meth. Fluids.- 1987.- 7.- N 5.- P. 409-452.
556. Vodyanuk V.O., Karasev B.G., Kolesnichenko A.F. et al. Droplet contact device of divertor. Intor-related. Tokamak concept innovations. Phase IIA, third part.- v. II.- Vienna.- 1986.- E7.17.
557. Waterman Herman A. Measurement of the dynamic shear modulus of surface layers. 1. Theory// J. Colloid and Interface Sci.- 1984.- 101.- N 2.- P. 377-383.
558. Weber C. Zum den Zerfall eines Fluessigkeitstrahles// Zeitschr. Angew. Math. Und Mechanik.- 1931.- BD.11.- H.3.- S. 136-154.
559. Weihs D., Frankel I. Equilibrium shape and stability of a liquid cylinder in cross flow at low Weber numbers// J. Fluid Mech.- 1982.- 116.- P. 393-410.
560. Weiland R.H., Davis S.H. Moving Contact Lines and Rivulet Instabilities. Part 2. Long Waves on Flat Rivulets// J. Fluid Mech.- 1981.- 107.- P. 261-280.
561. Wendel H., Bisch P.M. Gallez D. Hydrodynamics of dielectric fluid films// Colloid and Polym. Sci.- 1982.- 260.- N 4.- P. 425-434.
562. Wolf G.H. Dynamic stabilization of the Rayleigh-Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium// Z. Physik.- 1969.- 227.- P. 291-300.
563. Wuest W. Nahrungsweise Berechnung und Stabilitätsverhalten von laminar Grenzschichten mit Absaugung durch Einzelschlitze// Ingen. Arch.- 1953.- 21.- P.90.

564. Xu J.-J., Davia S.H. Instability of capillary jets with thermocapillarity// J. Fluid Mech.- 1985.- 161.- P. 1-25.
565. Yeow Y.L., Stability of tubular film flow: a model of the film blowing process// J. Fluid Mech.- 1976.- 75.- N 3.- P. 577-591.
566. Yoon Sung B., Liu Philip L.-F. Resonant reflection of shallow-water waves due to corrugated boundaries// J. Fluid Mech.- 1987.- 180.- P. 451-469.
567. Yih C.-S. Stability of liquid flow down an inclined plane// Phys. Fluids.- 1963.- 6.- N 3.- P. 321-334.
568. Zabusky N.J. Synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction.- In: Nonlinear partial differential equations.- N.-Y.: Acad. Press.- 1967.- N 4.- P. 222-258.
569. Zak M. Shape instability in thin viscous films and jets// Acta Mech.- 1985.- 55.- N 1-2.- P. 33-50.
570. Zhang Jun, Melville W.K. Three-dimensional instabilities of nonlinear gravity-capillary waves// J. Fluid Mech.- 1987.- 174.- P. 187-208.

Наукове видання

Казачков І. В.

ГРАНИЧНЕ ПАРАМЕТРИЧНЕ
УПРАВЛІННЯ КОЛИВАНЬ
В ПОТОКАХ РІДИНИ ТА ТЕПЛОТИ

Монографія

Технічний редактор – І. П. Борис
Комп'ютерна верстка та макетування – В. М. Косяк

Підписано до друку 06.06.23	Формат 60x84/16	Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman	Обл.-вид. арк. 17,7	Тираж ел. вид.
Замовлення №	Ум. друк. арк. 18,3	



Ніжинський державний університет
імені Миколи Гоголя
м. Ніжин, вул. Воздвиженська, 3-А
(04631] 7–19–72
E-mail: vidavn_ndu@ukr.net
www.ndu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 2137 від 29.03.05 р.