Віра М.Б.

ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

Навчальний посібник

Ніжинський державний університет

імені Миколи Гоголя

Віра М.Б.

Навчальний посібник

ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

Ніжин
2024

УДК 51(075.8)
В 52

Рекомендовано Вченою радою
Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя
Протокол №11 від 14.03.2024 р.

Рецензенти:
ст. викл. **Харченко В. М.,**
к. фіз.-м. н., доц. **Лисенко І. М.**

Віра М. Б.
В 52 Задачі з параметрами в курсі математики середньої школиб навч. посібн. Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2024. 61 с.

У посібнику пропонується короткий огляд теоретичного матеріалу та можливостей його застосування до розв’язування задач різних типів з параметрами; наведено ряд задач з параметрами, які пропонувалися на ЗНО з математики з 2016 по 2021 роки; продемонстровано можливості розв’язування задач з параметрами за допомогою динамічної системи GeoGebra.

Запропонований посібник може бути використаний студентами заочного та денного відділення спеціальності 014 Середня освіта (Математика) при вивченні курсу «Методика навчання математики».

Зміст

Вступ. Поняття «задача з параметром»

Термін «параметр» означає «відміряти». До необхідності розв’язувати задачі з параметром приводить велика кількість прикладних задач (економічних, технічних, медичних). Можна стверджувати, що параметр – це величина, яка в певному завданні (рівнянні, нерівності, системі) не виражена конкретним числом. З математичної точки зору, параметр – змінна величина.

Рівняння (нерівність, система, тощо) з параметром – це таке рівняння (нерівність, система, тощо), до запису якого крім змінної та числових коефіцієнтів входять буквенні коефіцієнти, які є величинами, значення яких не вказані конкретно, але вони вважаються відомими та заданими на деякій числовій множині.

За вимогою задачі завдання з параметрами поділяються на 2 види:

1) розв’язати рівняння (нерівність, систему, тощо) залежно від значень параметра; 2) знайти значення параметра, при яких виконується певна умова (умови).

Єдиної схеми схеми розв’язування задач, що містять параметр не існує. Для їх розв’язання часто використовують як аналітичний так і графічний методи. У цьому посібнику зупинимося лише на аналітичному підході до розв’язування задачі з параметром.

Перш ніж приступити до розгляду задачі з параметром слід дотримуватися певних рекомендацій до їх розв’язування:

1. Спершу слід визначити до якого розділу алгебри належить дане рівняння (нерівність, система, тощо).

2. Встановити вид рівняння (нерівності, системи, тощо). Для цього слід записати рівняння у стандартному вигляді, порівняти отриманий запис із означенням цього виду рівняння.

3. Залежно від виду обрати спосіб розв’язування, та здійснити орієнтовний план розв’язування.

4. Розпочати варто із знаходження області визначення рівняння (область визначення змінної та параметра). Слід зауважити, що реалізація умов області визначення рівняння дозволяє уникнути громіздких обчислень.

5. У процесі розв’язання задач з параметрами важливо здійснювати рівносильні перетворення, проте це не завжди вдається.

6. Щоб не втратити окремі випадки при розв’язуванні задач з параметром варто позначити знайдені вже розв’язки на «прямій параметра». Пряма параметра – це пряма, на якій позначені знайдені розв’язки залежно від значень параметра.

7. Відповідь у задачі з параметром, де ставиться вимога «розв’язати рівняння (нерівність, систему, тощо) залежно від значень параметра», зазвичай складається із кількох пунктів, кожен з яких записується за шаблоном «якщо…, то …». Якщо ставиться вимога «знайти значення параметра, при яких виконується певна умова (умови)», у відповідь записують лише знайдені значення параметра. Для значень параметра, які не входять в область визначення рівняння, пишуть «задача не має змісту» або «задача не визначена».

1. Раціональні рівняння з параметром

1.1. Лінійні рівняння

Лінійним рівнянням із змінною і параметром будемо називати таке лінійне рівняння

$$Ax = B \tag{1}$$

зі змінною x, у якому хоча б одна з величин A чи B є виразом, що містить параметр (є функцією від параметра). Наприклад, $a^2x = 2 - a$ - це лінійне рівняння з параметром a.

Як розв'язувати лінійне рівняння з параметром?

1. Якщо $A \neq 0$, то поділимо обидві частини рівняння (1) на A, отримаємо єдиний розв'язок

$$x = \frac{B}{A}.$$

2. Якщо $A = 0$, то лінійне рівняння набуває вигляду

$$0 \cdot x = B.$$

2.1. Якщо $A = 0$, $B = 0$, то отримаємо $0 \cdot x = 0$, розв'язком якого може бути будь-яке число. Тому рівняння (1) має безліч коренів $x \in R$.

2.2. Якщо $A = 0, B \neq 0$, то отримаємо $0 \cdot x = B$. Тому рівняння не має коренів.

Найчастіше лінійні рівняння розв'язуються аналітично, безпосереднім методом.

Зауваження! Перш ніж розв'язувати лінійні рівняння слід знайти область визначення параметра. При тих значеннях, коли параметр не визначений, задача є невизначеною. У таких випадках пишуть, що при цих значеннях параметра "задача не має змісту".

Приклад 1.1. Розв'яжіть лінійне рівняння з параметром

$$(a^2 - a)x = a^3.$$

Розв'язання: Нехай $a^2 - a \neq 0$, тобто $a \neq 0, a \neq 1$, тоді рівняння має єдиний розв'язок $x = \frac{a^3}{a^2-a}$, звідки $x = \frac{a^2}{a-1}$. Якщо $a = 0$, то при підстановці у вихідне рівняння отримаємо $0 \cdot x = 0$. Тому при $a = 0$ розв'язком є будь-яке дійсне число. Якщо $a = 1$, то при підстановці у вихідне рівняння отримаємо $0 \cdot x = 1$. Тому при $a = 1$ розв'язків немає.

Відповідь: якщо $a = 0$, то $x \in R$; якщо $a = 1$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = \frac{a^2}{a-1}$.

1.2. Квадратні рівняння

Квадратним рівнянням з параметром називають рівняння виду

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \qquad (2)$$

де x – змінна і хоча б одна з величин A, B, C - функція від параметра, причому $A \neq 0$. Наприклад, $(a^3 - 1)x^2 + 5ax - 2a - 5 = 0$ – квадратне рівняння з параметром.

Як розв'язувати квадратне рівняння з параметром?

1. Привести рівняння до виду (2).

2. Розглянути випадок, коли $A = 0$, якщо це можливо (утвориться лінійне рівняння).

3. Розглянути випадок, коли $A \neq 0$, якщо це можливо (утвориться квадратне рівняння) і обчислити дискримінант $D = B^2 - 4AC$.

4. Проаналізувати дискримінант та визначити розв'язки, якщо вони існують.

4.1. Якщо $D > 0$, то знайдемо два корені рівняння (2) за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A};$$

4.2. Якщо $D = 0$, то знайдемо два рівні корені рівняння (2) за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-B}{2A};$$

4.3. Якщо $D < 0$, то рівняння (2) коренів не має.

Приклад 1.2. При яких значеннях параметра рівняння не має розв'язків

$$ax^2 - (a - 1)x + 2 = 0.$$

Розв'язання: Нехай $a = 0$, тоді отримаємо $-x + 2 = 0, x = 2$ – єдиний розв'язок рівняння. Нехай $a \neq 0$, тоді знайдемо дискримінант

$$D = (a - 1)^2 - 4a \cdot 2 = a^2 - 10a + 1.$$

Прирівняємо його до нуля і розв'яжемо отримане рівняння

$$a^2 - 10a + 1 = 0,$$

$$D = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 96,$$

$$a_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = 5 \pm \sqrt{24}.$$

$D < 0$, якщо $a \in \left(5 - \sqrt{24}; 5 + \sqrt{24}\right)$.

Відповідь: дане рівняння не має розв'язків, якщо $a \in \left(5 - \sqrt{24}; 5 + \sqrt{24}\right)$.

1.3. Дробово-раціональні рівняння

Рівняння зі змінною x і параметром a будемо називати *дробово-раціональним рівнянням* зі змінною x і параметром a, якщо у рівнянні є хоча б один дробовий вираз. Наприклад, $\frac{x-2}{x+3} = \frac{a-x}{x+5}$ – дробово-раціональне рівняння зі змінною x і параметром a.

Як розв'язувати дробово-раціональне рівняння з параметром?

1. Зводимо ліву і праву частини рівняння до найменшого спільного знаменника.

2. Використовуємо умову рівності двох дробів з однаковими знаменниками, записуємо відповідну систему.

3. Розвязуємо утворену систему.

4. Знаходимо область визначення рівняння та враховуємо її.

Приклад 1.3. Розв'яжіть дробово-раціональне рівняння з параметром

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x - a} = 0.$$

Розв'язання: дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x - a \neq 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} (x-1)(x-4) = 0, \\ x \neq a, \end{cases}$$

а, отже,

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 4, \end{array}\right. \\ x \neq a. \end{cases}$$

Очевидно, що коли $a = 1$, то $x = 4$; якщо $a = 4$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1, a \neq 4$, то $x = 1, x = 4$.

Відповідь: якщо $a = 1$, то $x = 4$; якщо $a = 4$, то $x = 1$; якщо $a \in (-\infty; 1) \cup (1; 4) \cup (4; +\infty)$, то $x_1 = 1, x_2 = 4$.

2. Раціональні нерівності з параметром

2.1. Лінійні нерівності

Нерівності виду $Ax > B, Ax \geq B, \ Ax < B, Ax \leq B$ зі змінною x, де хоча б одна з величин A, B є функцією від параметра, називають *лінійними нерівностями зі змінною x і параметром.*

Наприклад, $(a-5)x > 2a+5$ – лінійна нерівність зі змінною x і параметром a.

Як розв'язувати лінійну нерівність з параметром?

Слід дотримуватися правила – заміна нерівності рівносильною нерівністю на основі властивостей нерівностей. Для прикладу розглянемо нерівність

$$Ax > B. \tag{3}$$

1. Якщо $A > 0$, то нерівність (3) рівносильна нерівності $x > \frac{B}{A}$. Отже, розв'язком є проміжок $x \in \left(\frac{B}{A}; +\infty\right)$.

2. Якщо $A < 0$, то нерівність (3) рівносильна нерівності $x < \frac{B}{A}$.

3. Якщо $A = 0$, $B = 0$, то нерівність (3) матиме вигляд $0 \cdot x > 0$, що є неправильною нерівністю. Тому отримаємо $x \in \emptyset$.

4. Якщо $A = 0$, $B > 0$, то нерівність (3) матиме вигляд $0 \cdot x > B$, що є неправильною нерівністю. Тому отримаємо $x \in \emptyset$.

5. Якщо $A = 0$, $B < 0$, то нерівність (3) матиме вигляд $0 \cdot x > B$, що є правильною нерівністю. Тому отримаємо $x \in R$.

Зауваження! Слід обов'язково знайти допустимі значення змінної і параметра.

Приклад 2.1. Розв'яжіть нерівність з параметром $(a-2)x < 3a$.

Розв'язання: 1. Нехай $a - 2 > 0$, $\quad a > 2$, $\quad x < \frac{3a}{a-2}$, $x \in \left(-\infty; \frac{3a}{a-2}\right)$;

2. Нехай $a - 2 < 0$, $\quad a < 2$, $\quad x < \frac{3a}{a-2}$, $x \in \left(\frac{3a}{a-2}; +\infty\right)$;

3. Нехай $a - 2 = 0$, $\quad a = 2$, $\quad 0 \cdot x < 6$, що є неправильною нерівністю, тому $x \in \emptyset$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 2)$, то $x \in \left(\frac{3a}{a-2}; +\infty\right)$; якщо $a = 2$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in (2; +\infty)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{3a}{a-2}\right)$.

2.2. Квадратні нерівності

Нерівності виду $Ax^2 + Bx + C > 0$, $Ax^2 + Bx + C \geq 0$, $Ax^2 + Bx + C < 0$, $Ax^2 + Bx + C \leq 0$, зі змінною x, де хоча б одна з величин A, B, C є функцією параметра, причому $A \neq 0$, будемо називати *квадратними нерівностями зі змінною x та параметром a.* Наприклад, $(a-3)x^2 + ax + 5 - 3a^2 > 0$ – квадратна нерівність з параметром a і змінною x.

Як розв'язувати квадратичну нерівність з параметром?

Квадратичні нерівності з параметром розв'язують переважно аналітичним методом. При цьому використовується метод інтервалів.

Приклад 2.2. Розв'язати нерівність

$$ax^2 - 4x - 2 < 0.$$

Розв'язання: 1. Припустимо, що коефіцієнт біля x^2 від'ємний, тобто $a < 0$.

Обчислимо дискримінант $D = 16 + 8a$.

1.1. Нехай $D = 0$, тобто $16 + 8a = 0$, звідки $a = -2$. Тоді $x_1 = x_2 = -1$, а дану нерівність запишемо у вигляді $(x+1)^2 > 0$. Звідси $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

1.2. Нехай $D > 0$, тобто $16 + 8a > 0$, звідки $a > -2$. Врахуємо основне обмеження на параметр у пункті 1, і отримаємо, що при $a \in (-2; 0)$,

$x_1 = \frac{2+\sqrt{4+2a}}{a}, x_2 = \frac{2-\sqrt{4+2a}}{a}$, причому $x_1 < x_2$. Тоді розв'язок даної нерівності запишеться у вигляді $x \in \left(-\infty; \frac{2+\sqrt{4+2a}}{a}\right) \cup \left(\frac{2-\sqrt{4+2a}}{a}; +\infty\right)$.

1.3. Нехай $D < 0$, тобто $16 + 8a < 0$, звідки $a < -2$. У такому випадку квадратний тричлен набуває від'ємних значень при всіх значеннях x.
Тому $x \in R$.
2. Припустимо, що коефіцієнт біля x^2 додатний, тобто $a > 0$.
2.1. Нехай $D > 0$, тобто $a > -2$. Врахуємо основне обмеження на параметр у пункті 2 і отримаємо $a > 0$. Тоді $x_1 = \frac{2-\sqrt{4+2a}}{a}, x_2 = \frac{2+\sqrt{4+2a}}{a}$, причому $x_1 < x_2$ і розвязок даної нерівності набуває вигляду $x \in \left(\frac{2-\sqrt{4+2a}}{a}; \frac{2+\sqrt{4+2a}}{a}\right)$.
3. Припустимо, що коефіцієнт біля x^2 рівний нулю, тобто $a = 0$. Тоді отримаємо нерівність $-4x - 2 < 0, x > -\frac{1}{2}$.
Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -2)$, то $x \in R$; якщо $a = -2$, то $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; якщо $a \in (-2; 0)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{2+\sqrt{4+2a}}{a}\right) \cup \left(\frac{2-\sqrt{4+2a}}{a}; +\infty\right)$; якщо $a = 0$, то $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; якщо $a \in (0; +\infty)$, то $x \in \left(\frac{2-\sqrt{4+2a}}{a}; \frac{2+\sqrt{4+2a}}{a}\right)$.

2.3. Дробово-раціональні нерівності

Нерівності зі змінною x і параметром a називають будемо називати *дробово-раціональними*, якщо у них є хоча б один дробовий вираз. Наприклад, $\frac{2ax-3}{a+x} < 1$ – дробова нерівність зі змінною x та параметром a.

Як розв'язувати дробово-раціональну нерівність з параметром?

1. Визначити область допустимих значень змінної x та параметра a.
2. Звести нерівність до вигляду $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0\right)$, де $f(x), g(x)$ - многочлени, що містять змінну і параметр.
3. Розкласти многочлени в чисельнику і знаменнику на множники (якщо це можливо).
4. Визначити нулі функцій $f(x), g(x)$ і проміжки знакосталості функції $\frac{f(x)}{g(x)}$.
5. Встановити знак функції, що знаходиться зліва на кожному проміжку знакосталості.
6. Вибрати необхідні проміжки та записати відповідь.

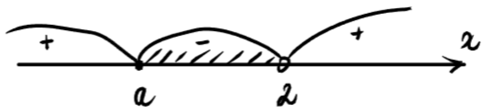
Приклад 2.3. Розв'язати нерівність $\frac{x-a}{x-2} \leq 0.$

Розв'язання: дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases}(x-a)(x-2) \leq 0; \\ x-2 \neq 0.\end{cases}$

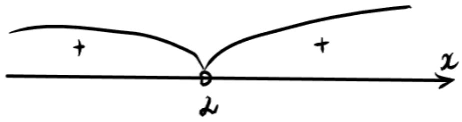
Розглянемо три випадки взаємного розміщення нулів функції

$$f(x) = (x-a)(x-2).$$

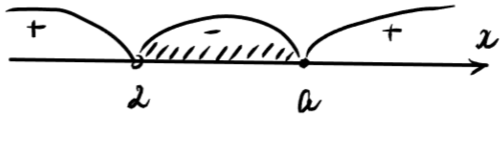
1. Якщо $a < 2,$ тоді $x \in [a; 2);$



2. Якщо $a = 2,$ тоді $x \in \emptyset;$



3. Якщо $a > 2,$ тоді $x \in (2; a].$



Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 2),$ тоді $x \in [a; 2);$ якщо $a = 2,$ тоді $x \in \emptyset;$ якщо $a \in (2; +\infty),$ тоді $x \in (2; a].$

3. Системи лінійних рівнянь і нерівностей з параметром

3.1. Лінійні системи двох рівнянь з двома невідомими

Системою двох лінійних рівнянь з двома невідомими та параметром називають систему виду

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1; \\ A_2x + B_2y = C_2, \end{cases}$$

де x, y – невідомі, $A_1, B_1, A_2, B_2, C_1, C_2$ – це числа або функції параметрів. Наприклад, $\begin{cases} (a-7)x + 3y = -1; \\ 5x + 2ay = a, \end{cases}$ − система двох лінійних рівнянь зі змінними x, y та параметром a.

Як розв'язувати систему лінійних рівнянь з параметром?

Розглянемо алгоритм розв'язування таких систем алгебраїчним методом (метод Крамера): для цього знайдемо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1,\ \ \Delta_x = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} = C_1B_2 - C_2B_1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = A_1C_2 - A_2C_1.$$

При розв'язуванні даної системи можуть бути випадки:

1) $\Delta \neq 0$, тоді система має єдиний розв'язок: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$. (формули Крамера)

2) $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0$. У цьому випадку система несумісна (не має розв'язків).

3) $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0$. У цьому випадку система має безліч розв'язків.

Приклад 3.1. Знайти значення параметра, при яких система не має розв'язків

$$\begin{cases} -4x + ay = 1 + a; \\ (6+a)x + 2y = 3 + a. \end{cases}$$

Розвязання: використаємо метод Крамера. Якщо $\Delta = 0$ і хоча б одна з умов $\Delta_x \neq 0$ чи $\Delta_y \neq 0$ виконується, то система немає розв'язків.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & a \\ 6+a & 2 \end{vmatrix} = -(a+2)(a+4),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1+a & a \\ 3+a & 2 \end{vmatrix} = -(a+2)(a-1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -4 & 1+a \\ 6+a & 3+a \end{vmatrix} = -(a+2)(a+9).$$

Відповідь: $a = -4$.

3.2. Лінійні системи двох нерівностей

Системою двох лінійних нерівностей з параметром називають таку систему лінійних нерівностей, у якій хоча б одна нерівність є лінійною нерівністю з параметром. Наприклад, $\begin{cases}(a-7)x \le -1; \\ 3x \ge 1,\end{cases}$ – система двох лінійних нерівностей зі змінною x та параметром a.

Як розв'язувати систему лінійних нерівностей з параметром?

При розв'язуванні слід враховувати особливості розв'язування нерівностей без параметра.

Приклад 3.2. Розв'яжіть систему нерівностей з параметом a $\begin{cases}ax > -1, \\ x+a > 0.\end{cases}$

Розвязання: змінна і параметр можуть набувати довільних значень.

1. Розв'яжемо кожну із нерівностей системи окремо.

1.1. Розв'яжемо першу нерівність $ax > -1.$ Звідси

1) якщо $a > 0,$ то $x > -\frac{1}{a}.$

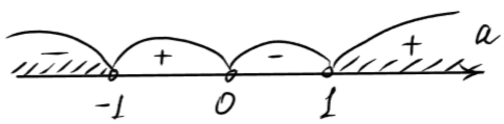
2) якщо $a < 0,$ то $x < -\frac{1}{a}.$

3) якщо $a = 0,$ то $0 \cdot x > -1, x \in R.$

1.2. Розв'яжемо другу нерівність $x + a > 0.$ Звідси $x > -a$ при будь-якому значенні параметра.

2. Залежно від значень, яких набуває параметр можна розглянути три системи: для $a \in (-\infty; 0),$ $a = 0,$ $a \in (0; +\infty).$ Розглянемо кожну з трьох систем. Але спершу визначимо взаємне розташування чисел $-a$ і $-\frac{1}{a}.$ Зокрема число $-\frac{1}{a}$ лежить лівіше числа $-a,$ якщо

$-\frac{1}{a} < -a,$ $-\frac{1}{a} + a < 0,$ $\frac{(a-1)(a+1)}{a} < 0,$ $a(a-1)(a+1) < 0,$ звідси



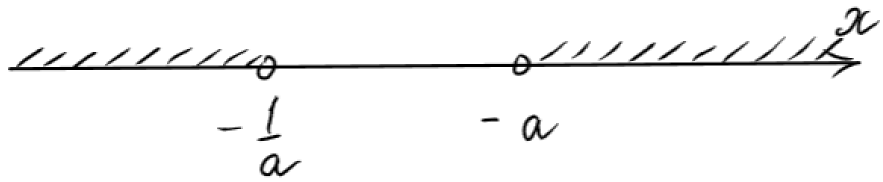
$a \in (-\infty; -1); (0; 1).$

Очевидно, що число $-\frac{1}{a}$ лежить правіше числа $-a,$ якщо $-\frac{1}{a} > -a,$ тобто коли $a \in (-1; 0); (1; +\infty).$ І ці числа збігаються, якщо $a = \pm 1.$

3. Нехай $a \in (-\infty; 0)$, тоді отримаємо систему

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{1}{a}\right), \\ x \in (-a; +\infty). \end{cases} \tag{*}$$

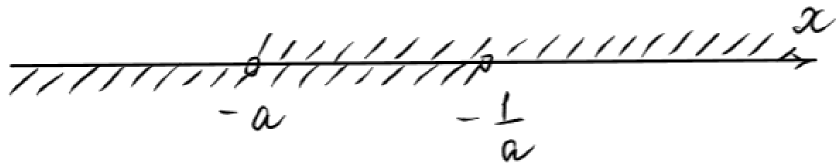
3.1. Нехай $-\frac{1}{a} < -a$, що можливо при $a \in (-\infty; -1); (0; 1)$. Враховуючи головне обмеження на параметр у цьому пункті ($a \in (-\infty; 0)$), отримаємо $a \in (-\infty; -1)$.



Отже, система (*) не має розв'язків при $a \in (-\infty; -1)$.

3.2. Нехай $-\frac{1}{a} = -a$, що можливо при $a = \pm 1$. Враховуючи головне обмеження на параметр у цьому пункті ($a \in (-\infty; 0)$), маємо $a = -1$. Тоді система (*) набуває вигляду $\begin{cases} x \in (-\infty; 1), \\ x \in (1; +\infty), \end{cases}$ звідки $x \in \emptyset$.

3.3. Нехай $-\frac{1}{a} > -a$, що можливо при $a \in (-1; 0); (1; +\infty)$. Враховуючи головне обмеження на параметр у цьому пункті ($a \in (-\infty; 0)$), маємо $a \in (-1; 0)$.



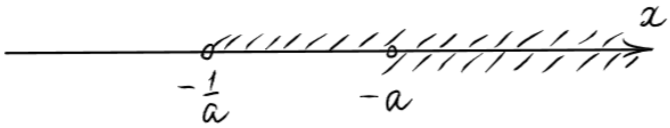
Отже, система має роз'вязок $x \in \left(-a; -\frac{1}{a}\right)$.

4. Нехай $a = 0$, тоді отримаємо систему $\begin{cases} x \in R, \\ x \in (0; +\infty), \end{cases}$ звідки $x \in (0; +\infty)$.

5. Нехай $a \in (0; +\infty)$, тоді отримаємо систему

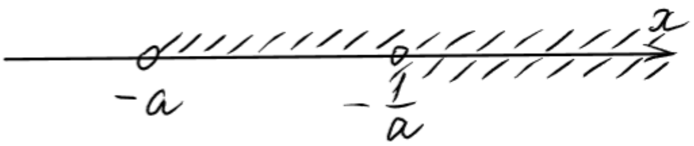
$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{1}{a}; +\infty\right), \\ x \in (-a; +\infty). \end{cases} \tag{**}$$

5.1. Нехай $-\frac{1}{a} < -a$, що можливо при $a \in (-\infty; -1); (0; 1)$. Враховуючи головне обмеження на параметр у цьому пункті ($a \in (0; +\infty)$), отримаємо $a \in (0; 1)$.



При цих значеннях параметра розв'язком системи (**) буде $x \in (-a; +\infty)$.

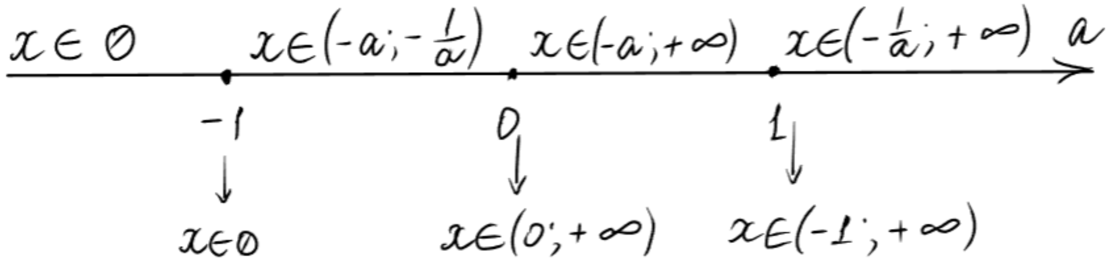
5.2. Нехай $-\frac{1}{a} > -a$, що можливо при $a \in (-1; 0); (1; +\infty)$. Враховуючи головне обмеження на параметр у цьому пункті ($a \in (0; +\infty)$), маємо $a \in (1; +\infty)$.



При цих значеннях параметра розв'язком системи (**) буде $x \in \left(-\frac{1}{a}; +\infty\right)$.

5.3. Нехай $-\frac{1}{a} = -a$, що можливо при $a = \pm 1$. Враховуючи головне обмеження на параметр у цьому пункті ($a \in (0; +\infty)$), маємо $a = 1$. Система (**) матиме вигляд $\begin{cases} x \in (-1; +\infty), \\ x \in (-1; +\infty), \end{cases}$ звідки $x \in (-1; +\infty)$.

6. Зобразимо знайдені розв'язки на прямій параметрів і запишемо відповідь.



Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -1]$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in (-1; 0)$, то $x \in \left(-a; -\frac{1}{a}\right)$;

якщо $a = 0$, то $x \in (0; +\infty)$; якщо $a \in (0; 1)$, то $x \in (-a; +\infty)$; якщо $a = 1$, то $x \in (-1; +\infty)$; якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in \left(-\frac{1}{a}; +\infty\right)$.

4. Ірраціональні рівняння і нерівності з параметром

4.1. Ірраціональні рівняння з параметром

Ірраціональне рівняння зі змінною x *і параметром* a називається рівняння, в якому змінна міститься під знаком кореня. Наприклад, $\sqrt{2x-5a}=a$ ірраціональне рівняння *зі змінною* x *і параметром* a.

Як розв'язувати ірраціональні рівняння з параметром?

Ірраціональні рівняння з параметром розвязують в більшості випадків аналітично. Спочатку слід область визначення рівняння. Крім того, відмітимо, що під час розв'язування ірраціональних рівнянь можуть зявлятися сторонні корені (наприклад, при піднесенні обох частин рівняння до парного степеня). Якщо при розв'язуванні ірраціонального рівняння використовувалися рівняння-наслідки, то перевірка знайдених коренів є обов'язковою (ці корені перевіряють підстановкою у задане рівняння). Зазначимо також, що до розв'язування ірраціональних рівнянь з параметром доцільно використовувати саме рівносильні переходи. Наприклад, рівняння $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$ Рівняння $\sqrt{f(x)}=g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$

Приклад 4.1. Розв'яжіть $\sqrt{4x-x^2}=a+1$ з параметром a.

Розв'язання: дане ірраціональне рівняння має розв'язки лише коли його права частина – невід'ємне число. Дійсно, якщо $a+1\geq 0$, то обидві частини рівняння можна піднести до квадрата: $4x-x^2=(a+1)^2$. Отримали квадратне рівняння

$$x^2-4x-(a+1)^2=0.$$

Розв'яжемо його. Для цього знайдемо дискримінант:

$$D=16-4(a+1)^2=4(-a^2-2a+3).$$

1. $D>0$, якщо $4(-a^2-2a+3)>0, a^2+2a-3<0$, $a\in(-3;1)$.
Врахувавши при цьому умову $a+1\geq 0$, дістанемо $a\in[-1;1)$. Корені рівняння матимуть вигляд

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 2\sqrt{-a^2-2a+3}}{2}=2\pm\sqrt{-a^2-2a+3}.$$

2. $D=0$, якщо $a=-3, a=1$. Врахувавши при цьому умову $a+1\geq 0$, дістанемо $a=1$. Тоді $x_1=x_2=2$.

4.2. Ірраціональні нерівності з параметром

Ірраціональною нерівністю зі змінною x і параметром a називають нерівність, в якій змінна міститься під знаком кореня. Наприклад, $\sqrt{x-5a} < x + a$ ірраціональна нерівність *зі змінною x і параметром a*.

Як розв'язувати ірраціональні нерівності з параметром?

Основний метод розвязування ірраціональних нерівностей з параметрами є зведення початкової нерівності до рівносильної системи раціональних нерівностей або сукупності таких систем. Розглянемо деякі рівносильні переходи.

Вид нерівності	Рівносильний перехід
$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) < g(x); \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) < g^2(x); \\ g(x) > 0; \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0; \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$
$\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)}$	$f(x) = g(x)$

У процесі розвязування ірраціональних нерівностей, які містять корені парного степеня, слід дотримуватися такого алгоритму дій:
1) знайти область визначення для змінної і параметра;
2) забезпечити (наклавши умови), щоб ліва і права частини нерівності, які підносять до парного степеня, були невід'ємними;
3) піднести до парного степеня;
4) розв'язати утворену нерівність;
5) вибрати лише ті розв'язки, які задовольняють область визначення і накладені умови.

Приклад 4.2. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+a} + \sqrt{x} < a$.
Розв'язання: оскільки при виконанні умов $x \geq 0$; $x + a \geq 0$, отримаємо, що $\sqrt{x+a} \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$, звідки $\sqrt{x+a} + \sqrt{x} \geq 0$. Отже, при $a < 0$ нерівність розвязків немає. Розглянемо випадки:
1) $a = 0$, звідки нерівність набуває вигляду $2\sqrt{x} < 0$, $x \in \emptyset$.
2) $a > 0$, $\begin{cases} x \geq 0, \\ x + a \geq 0, \end{cases}$ звідси $x \geq 0$.

Далі, враховуючи, що $a > 0$, $x \geq 0$, маємо $\sqrt{x+a} + \sqrt{x} \leq a$, звідки

$$\sqrt{x+a} < a - \sqrt{x},$$

що рівносильно системі $\begin{cases} a - \sqrt{x} > 0, \\ x + a < \left(a - \sqrt{x}\right)^2, \\ x \geq 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x} < a, \\ \sqrt{x} < \dfrac{a-1}{2}, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

При $a \leq 1$ нерівність $\sqrt{x} < \frac{a-1}{2}$ розвязків не має, і, отже, система також.

Якщо $a > 1$, то $\frac{a-1}{2} < a$ і система рівносильна нерівності $\sqrt{x} < \frac{a-1}{2}$, звідки знаходимо $x \in \left[0; \frac{(a-1)^2}{4}\right)$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 1]$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in \left[0; \frac{(a-1)^2}{4}\right)$.

Приклад 4.3. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{a(3x+4a)} < x + 2a$.
Розв'язання: дана нерівність рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} x + 2a > 0, \\ a(3x+4a) \geq 0, \\ a(3x+4a) < (x+2a)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2a > 0, \\ a(3x+4a) \geq 0, \\ x(x+a) > 0. \end{cases}$$

Розглянемо випадки:
1) $a = 0$, тоді $x > 0$;
2) $a < 0$, тоді розв'язки нерівностей $x > -2a$, і $x \leq -\frac{4}{3}a$ не перетинаються. Тому при $a \in (-\infty; 0)$ нерівність несумісна.

3) $a > 0$, тоді матимемо

$$\begin{cases} x > -2a, \\ x \geq -\frac{4}{3}a, \\ (x+a)x > 0, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{4}{3}a, \\ \left[\begin{array}{l} x < -a, \\ x > 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

А, отже, $x \in \left[-\frac{4a}{3}; -a\right) \cup (0; +\infty)$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0)$, то $x \in \emptyset$; якщо $a = 0$, то $x \in (0; +\infty)$; якщо $a \in (0; +\infty)$, то $x \in \left[-\frac{4a}{3}; -a\right) \cup (0; +\infty)$.

5. Показникові і логарифмічні рівняння і нерівності з *параметром*

5.1. Показникові та логарифмічні рівняння з параметром

Рівняння із змінною x і параметром a будемо називати *показниковим*, якщо змінна входить до показника степеня. Наприклад, $3^{ax+1} = 9$ – показникове рівняння із змінною x і параметром a.

Рівняння із змінною x і параметром a будемо називати *логарифмічним*, якщо змінна входить під знак логарифма або його основи. Наприклад, $log_2(ax^2 - 2ax + 3) = 2$ – логарифмічне рівняння із змінною x і параметром a.

Як розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння з параметром?

Способи розв'язування показникових рівнянь з параметром аналогічні до способів розв'язування показникових рівнянь без параметра: 1) спосіб зведення обох частин рівняння до степеня з однаковою основою; 2) спосіб винесення спільного множника за дужки; 3) введення допоміжного невідомого; 4) спосіб логарифмування; 5) графічний спосіб та інші.

Загального способу розв'язування логарифмічних рівнянь з параметром не існує. Проте, при розв'язанні багатьох логарифмічних рівнянь застосовують таку теорему.

Теорема. Нехай $a > 0, a \neq 0$. Якщо $log_a x_1 = log_a x_2$, то $x_1 = x_2$, і навпаки.

Приклад 5.1. Розв'яжіть рівняння з параметром

$$2^{2x} - (2a + 1)2^x + a^2 + a = 0.$$

Розв'язання: введемо заміну $2^x = t, \quad t > 0$. Отримаємо квадратне рівняння відносно нової змінної t. Розв'яжемо отримане рівняння

$$t^2 - (2a + 1)t + a^2 + a = 0.$$

$D = (2a + 1)^2 - 4(a^2 + a) = 1 > 0$. Отже, квадратне рівняння при будь-яких значеннях параметра матиме два дійсні корені:

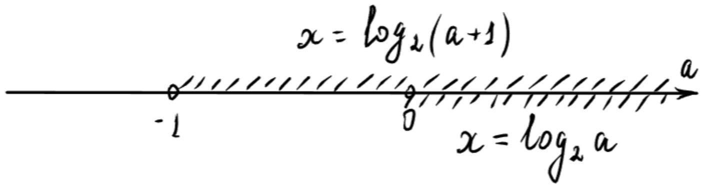
$$t_1 = \frac{2a+1-1}{2} = a, \ t_2 = \frac{2a+1+1}{2} = a + 1.$$

Повернемося до заміни:

Якщо $t_1 > 0$, (тобто коли $a > 0$), то повернемося до заміни $2^x = a$, звідки $x = log_2 a$.

Якщо $t_2 > 0$, (тобто коли $a + 1 > 0$), то повернемося до заміни $2^x = a + 1$, звідки $x = log_2(a + 1)$.

Позначимо отримані розв'язки на прямій параметрів



Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -1]$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in (-1; 0)$, то $x = log_2(a+1)$; якщо $a = 0$, то $x = 0$; якщо $a \in (0; +\infty)$, то $x = log_2(a+1)$, $x = log_2 a$.

Приклад 5.2. Розв'яжіть рівняння

$$log_2(x^2 - 2ax) = log_2(2x - 4a).$$

Розв'язання: дане рівняння рівносильне системі

$\begin{cases} x^2 - 2ax = 2x - 4a, \\ 2x - 4a > 0, \end{cases}$ звідси $\begin{cases} x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0, \\ x > 2a, \end{cases}$ звідки

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 2a, \end{array} \right. \\ x > 2a \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ x > 2a. \end{cases}$

Якщо $a < 1$, то $x = 2$. Якщо $a \geq 1$, то $x \in \emptyset$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 1)$, то $x = 2$; якщо $a \in [1; +\infty)$, то $x \in \emptyset$.

5.2. Показникові та логарифмічні нерівності з параметром

Нерівність із змінною x і параметром a будемо називати *показниковою*, якщо змінна входить до показника степеня. Наприклад, $2^{ax+1} < 9$ – показникова нерівність із змінною x і параметром a.

Нерівність із змінною x і параметром a будемо називати *логарифмічною*, якщо змінна входить під знак логарифма або його основи. Наприклад, $log_2(ax^2 - 2ax + 3) > 4$ – логарифмічна нерівність із змінною x і параметром a.

Як розв'язувати показникові та логарифмічні нерівності з параметром?

Способи розв'язування показникових (логарифмічних) нерівностей з параметром аналогічні до способів розв'язування показникових (логарифмічних) нерівностей без параметра.

При розв'язуванні показникових (логарифмічних) нерівностей з параметром використовують наступні теореми.

Теорема 1. При $a > 1$ нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; при $0 < a < 1$ нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Теорема 2. При $a > 1$ нерівність $log_a f(x) > log_a g(x)$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; при $0 < a < 1$ нерівність $log_a f(x) > log_a g(x)$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Приклад 5.3. Розв'яжіть нерівність

$$log_a(2x^2 + 3x - 1) > log_a(x^3 + 6x - 1),$$

якщо відомо, що її розв'язок містить значення $x = 1$.

Розв'язання: підставимо у нерівність значення $x = 1$. Маємо: $log_a 4 > log_a 6$, звідси випливає, що $a \in (0; 1)$. При таких значеннях основи a вихідна нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x - 1 < x^3 + 6x - 1, \\ 2x^2 + 3x - 1 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2 - 2x + 3) > 0, \\ 2x^2 + 3x - 1 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ 2x^2 + 3x - 1 > 0, \end{cases}$$

$$x \in \left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; \infty\right).$$

Відповідь: $x \in \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \infty\right)$, якщо $a \in (0; 1)$.

Приклад 5.4. Розв'яжіть нерівність

$$(a + 2) \cdot 2^x \leq 2a - 3.$$

Розв'язання: розглянемо випадки

1) $a = -2$, тоді $0 \cdot 2^x \leq -7$, що неможливо.

2) $a > -2$, тоді

$$2^x \leq \frac{2a - 3}{a + 2}.$$

Якщо $\frac{2a-3}{a+2} \leq 0$, тобто $a \in (-2; 1{,}5]$, то $x \in \emptyset$, оскільки $2^x > 0$ при довільних значеннях x. Якщо $\frac{2a-3}{a+2} > 0$ і $a > -2$, тобто $a > 1{,}5$, то $x \leq log_2 \frac{2a-3}{a+2}$;

3) $a < -2$, тоді $2^x \geq \frac{2a-3}{a+2}$.

При $a < -2$, справджується нерівність $\frac{2a-3}{a+2} > 0$. Отже, $x \geq log_2 \frac{2a-3}{a+2}$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -2)$, то $x \in \left[log_2 \frac{2a-3}{a+2}; +\infty\right)$; якщо $a \in [-2; 1{,}5]$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in (1{,}5; +\infty)$, то $x \in \left(-\infty; log_2 \frac{2a-3}{a+2}\right)$.

6. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметром

6.1. Тригонометричні рівняння з параметром

Рівняння зі змінною x і параметром a називають *тригонометричним*, якщо змінна входить під знак тригонометричної функції. Наприклад, $\sin(2x+4)=3a$ – тригонометричне рівняння зі змінною x і параметром a.

Як розв'язувати тригонометричні рівняння з параметром?

Для розв'язування тригонометричних рівнянь із параметрами необхідно знати базові положення тригонометрії, тригонометричні формули, вміти розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння і ті, які до них зводяться.

Приклад 6.1. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sin ax}{sinx}=1$.

Розв'язання: знайдемо ОДЗ рівняння: $sinx\neq 0, x\neq \pi n,\ \ n\in Z$. Розглянемо окремо випадки:

1) $a=1,\ \frac{sinx}{sinx}=1$, звідки $x\in R, x\neq \pi n, n\in Z$.

2) $a=-1,\ \frac{\sin(-x)}{sinx}=1$, звідки $x\in\emptyset$.

3) $a=\pm 1$, тоді $sinax=sinx,\ \ sinax-sinx=0;\ \ 2sin\frac{(a-1)x}{2}cos\frac{(a+1)x}{2}=0$,

що рівносильно сукупності $\left[\begin{array}{l} sin\frac{(a-1)x}{2}=0, \\ cos\frac{(a+1)x}{2}=0. \end{array}\right.$ З першого рівняння сукупності дістанемо $\frac{(a-1)x}{2}=\pi k, x=\frac{2\pi k}{a-1}, k\in Z$. Але враховуючи ОДЗ, запишемо $\frac{2\pi k}{a-1}\neq \pi n$; $k\neq\frac{n(a-1)}{2}$. Якщо $\frac{n(a-1)}{2}$ не є цілим виразом, то сторонні корені відсутні.

Розглянемо друге рівняння системи $cos\frac{(a+1)x}{2}=0$ при $a\neq -1$. Маємо

$\frac{(a+1)x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x=\frac{\pi(1+2k)}{a+1}$. Врахуємо ОДЗ: $\frac{\pi(1+2k)}{a+1}\neq \pi n, k\neq\frac{(a+1)n-1}{2}$.

Сторонні корені існують, якщо хоча б при одному цілому n вираз $\frac{(a+1)n-1}{2}$ є цілим числом.

Відповідь: якщо $a=1$, то $x\in R, x\neq \pi n, n\in Z$; якщо $a\neq\pm 1$, то $x=\frac{2\pi k}{a-1}, k\in Z$, $k\neq\frac{n(a-1)}{2}, n\in Z$; якщо $a=-1$, то $x\in\emptyset$.

Приклад 6.2. Розв'яжіть рівняння $2^{\frac{1}{cos^2x}}\sqrt{a^2-a+\frac{1}{2}}=1$.

Розв'язання: $2^{\frac{1}{cos^2x}} = 2^{1+tg^2x} = 2 \cdot 2^{tg^2x} \geq 2 \cdot 2^0 = 2$,

$$\sqrt{a^2 - a + \frac{1}{2}} = \sqrt{(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} \geq \frac{1}{2},$$

то $2^{\frac{1}{cos^2x}}\sqrt{a^2 - a + \frac{1}{2}} \geq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Отже, рівність можлива лише тоді, коли $\begin{cases} tgx = 0, \\ a = \frac{1}{2}, \end{cases}$ звідси $\begin{cases} x = \pi n, n \in Z. \\ a = \frac{1}{2}, \end{cases}$

Відповідь: якщо $a = \frac{1}{2}$, то $x = \pi n, n \in Z$; якщо $a \neq \frac{1}{2}$, то $x \in \emptyset$.

6.2. Тригонометричні нерівності з параметром

Нерівність зі змінною x і параметром a називають *тригонометричною*, якщо змінна входить під знак тригонометричної функції. Наприклад, $\sin(2x + 4) < 3a$ – тригонометрична нерівність зі змінною x і параметром a.

Як розв'язувати тригонометричні нерівності з параметром?

Для розв'язування тригонометричних нерівностей із параметрами необхідно знати базові положення тригонометрії, тригонометричні формули, вміти розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння і ті, які до них зводяться.

Приклад 6.3. При яких значеннях a розв'язок нерівності

$$2asinx + (2a^2 - a)cosx + 2a^2 - a - 2 > 0$$

містить проміжок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

Розв'язання: виконаємо заміну $tg\frac{x}{2} = t$. Тоді $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$, $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ і нерівність набуде вигляду

$$2a\frac{2t}{1+t^2} + (2a^2 - a)\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2a^2 - a - 2 > 0,$$

звідки після спрощень дістанемо рівносильну нерівність

$$t^2 - 2at - 2a^2 + a + 1 < 0.$$

Якщо $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то $t \in [0; 1]$.

Умову задачі тепер можна сформулювати так: при яких значеннях a нерівність $f(t) < 0$, де $f(t) = t^2 - 2at - 2a^2 + a + 1$, виконується на відрізку $[0; 1]$?

Розв'яжемо систему нерівностей

$\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(1) < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} -2a^2 + a + 1 < 0, \\ 1 - 2a - 2a^2 + a + 1 < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2a^2 - a - 1 > 0, \\ 2a^2 + a - 2 > 0, \end{cases}$

звідки $a \in (-\infty; -\frac{1+\sqrt{17}}{4}) \cup (1; +\infty)$.

Відповідь: $a \in (-\infty; -\frac{1+\sqrt{17}}{4}) \cup (1; +\infty)$.

Приклад 6.4. При яких значеннях a розв’язок нерівності

$$cos2x + 2a\,cosx + 4a - 13 < 0,$$

містить інтервал $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$?

Розв’язання: враховуючи, що $cos\,2x = 2cos^2x - 1$, запишемо нерівність у вигляді $cos^2x + a\,cosx + 2a - 7 < 0$. Після заміни $cosx = t$ дістанемо рівносильну даній задачу: при яких значеннях a нерівність

$$t^2 + at + 2a - 7 < 0$$

виконується на інтервалі $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$? Введемо позначення: $f(t) = t^2 + at + 2a - 7$

і розв’яжемо систему нерівностей

$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \\ f(1) < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + 2a - 7 < 0, \\ 1 + a + 2a - 7 < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 10a - 27 < 0, \\ 3a - 6 < 0, \end{cases}$ звідки $a < 2$.

Відповідь: $a \in (-\infty; 2)$.

Приклад 6.5. При яких значеннях a нерівність

$$sin^5\,x + cos^3x \geq a$$

не має розв’язків?

Розв’язання: для будь-яких дійсних x виконуються нерівності $sin^5\,x \leq sin^2x$, $cos^3\,x \leq cos^2x$, звідки випливає, що

$$sin^5\,x + cos^3\,x \leq sin^2x + cos^2x = 1.$$

Рівність $sin^5\,x + cos^3\,x = 1$ можлива коли

$$\begin{cases} sin^5\,x = sin^2x, \\ cos^3\,x = cos^2x, \end{cases}$$

$\begin{cases} sin^2\,x\,(sin^3x - 1) = 0, \\ cos^2\,x\,(\cos x - 1) = 0, \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{array}\right.$ $n \in Z$.

Отже, при $a > 1$ дана нерівність розв’язків немає, оскільки найбільше значення лівої частини нерівності не перевищує одиниці.

Відповідь: $a \in (1; +\infty)$.

7. Задачі з параметром на ЗНО (2016-2021 роки)

2016 рік

Задача №33, ЗНО 2016 рік (основна сесія)

Розв’язати рівняння для всіх допустимих значень параметра.

$$\frac{\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}-2\sqrt{2a}}{5\cdot 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x}=0.$$

Розв’язання:

Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}-2\sqrt{2a}=0\\ 5\cdot 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x\neq 0.\end{cases}$

Розглянемо рівняння $5\cdot 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x\neq 0.$ Для цього введемо заміну $5^x=t$:

$$5t^2+(1-5^a)t-5^{a-1}\neq 0.$$

$$D=(1-5^a)^2-4\cdot 5\cdot(-5^{a-1})=1+2\cdot 5^a+5^{2a}=(1+5^a)^2>0.$$

$$t_{1,2}\neq\frac{5^a-1\pm(1+5^a)}{10};\quad t_1\neq\frac{2\cdot 5^a}{10}=5^{a-1};\ t_2\neq\frac{-2}{10}=-\frac{1}{5}.$$

Отже, повернувшись до заміни, отримаємо

$5^x\neq 5^{a-1};\ 5^x\neq-\dfrac{1}{5}.$ Звідси відповідно маємо $x\neq a-1;\ x\in R.$

Розглянемо перше рівняння системи

$$\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}-2\sqrt{2a}=0,$$

$$\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}=2\sqrt{2a}. \qquad (*)$$

Очевидно, що при $a<0$ рівняння не має змісту. Піднесемо до другого степеня обидві частини останнього рівняння. Отримаємо рівносильну систему

$$\begin{cases}x^2+(4a-4)x+4a^2=8a;\\ x^2+(4a-4)x+4a^2\geq 0;\\ 2a\geq 0.\end{cases}$$

Розглянемо перше рівняння цієї системи

$$x^2 + (4a - 4)x + 4a^2 - 8a = 0.$$

$$\frac{D}{4} = (2a - 2)^2 - (4a^2 - 8a) = 4a^2 - 8a + 4 - 4a^2 + 8a = 4,$$

$$x_1 = -2a + 4;\ \ x_2 = -2a.$$

Визначимо при яких значеннях параметра отримані корені x_1 та x_2 є коренями рівняння (*). Для цього підставимо кожен корінь в першу нерівність останньої системи. Отримаємо:

1) $x_1 = -2a + 4;\ \ (4 - 2a)^2 + (4a - 4)(4 - 2a) + 4a^2 \geq 0.$

   Звідки

$$16 - 16a + 4a^2 - 8a^2 + 16a + 8a - 16 + 4a^2 \geq 0,$$
$$a \geq 0.$$

2) $x_2 = -2a; 4a^2 + (4a - 4)(-2a) + 4a^2 \geq 0,$

   Звідки

$$4a^2 - 8a^2 + 8a + 4a^2 \geq 0,\ \ \ a \geq 0.$$

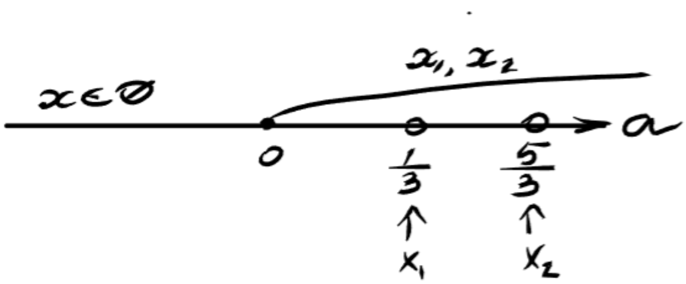
Отже, якщо параметр набуває невід'ємних значень, то обидва корені є коренями рівняння (*).

Врахуємо обмеження $x \neq a - 1$. Отримаємо:

$x_1 = -2a + 4;. \ 4 - 2a \neq a - 1,$ звідки $a \neq \frac{5}{3}.$

$x_2 = -2a;\ -2a \neq a - 1,$ звідки $a \neq \frac{1}{3}.$

Причому, якщо $a = \frac{1}{3},$ то $x_1 = 4 - 2a = \frac{10}{3}$, а якщо $a = \frac{5}{3}$, то $x_2 = -2a = -\frac{10}{3}.$



Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0),$ то $x \in \emptyset$; якщо $a \in \left[0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\frac{2}{3}\right) \cup \left(1\frac{2}{3}; +\infty\right),$

то $x_1 = 4 - 2a;\ \ x_2 = -2a$; якщо $a = \frac{1}{3},$ то $x = \frac{10}{3}$; якщо $a = \frac{5}{3},$ то $x = \frac{-10}{3}.$

Задача №33, ЗНО 2016 рік (додаткова сесія)

Розв'яжіть рівняння залежно від значень параметра

$$\frac{\left(\sqrt{x+2a}-\sqrt{4-x}\right)sin\frac{\pi x}{7}}{|x+6|-|x|+6}=0.$$

Розв'язання:

Запишемо область допустимих значень рівняння:

$$\begin{cases}|x+6|-|x|+6\neq 0;\\ x+2a\geq 0;\\ 4-x\geq 0.\end{cases}$$

Розглянемо перше рівняння системи. Нулі підмодульних виразів (0 і -6) розбивають числову пряму на три проміжки. Розглянемо це рівняння на кожному із проміжків:

1) $x\geq 0,\ x+6-x+6\neq 0,\ 12\neq 0,$
2) $-6\leq x<0,\ x+6+x+6\neq 0,\ x\neq -6,$
3) $x>-6, -x-6+x+6\neq 0, 0\neq 0.$

Звідси випливає, що $x>-6$. Враховуючи це, ОДЗ набуватиме вигляду

$$\begin{cases}x\geq -2a;\\ -6<x\leq 4.\end{cases}$$

Прирівнюючи чисельник до нуля отримаємо два випадки:

1) $sin\frac{\pi x}{7}=0$, звідки $\frac{\pi x}{7}=\pi n, n\in Z,\quad x=7n, n\in Z.$ Враховуючи, що $-6<x\leq 4$, дістанемо $x_1=0.$
2) $\sqrt{x+2a}-\sqrt{4-x}=0$, звідки $\sqrt{x+2a}=\sqrt{4-x},\ x+2a=4-x,$ $x_2=2-a.$

Враховуючи друге обмеження останньої системи, отримаємо

$$-6<2-a\leq 4,\quad \text{звідки } -2\leq a<8.$$

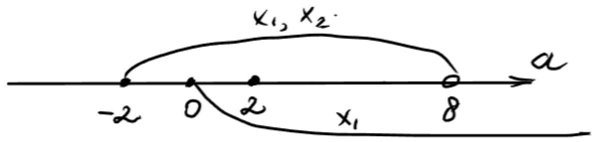
Перевіримо виконання першої нерівності останньої системи

$$x\geq -2a.$$

1) $x_1=0,\ 0\geq -2a,$ звідки $a\geq 0.$
2) $x_2=2-a,\ 2-a\geq -2a,$ звідки $a\geq -2.$

Нанесемо отримані розв'язки на пряму параметрів

Визначимо при яких значеннях параметра корені співпадають:
$2 - a = 0$, звідки $a = 2$.



Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -2)$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in [-2; 0)$, то $x = 2 - a$;
якщо $a \in [0; 2) \cup (2; 8)$, то $x = 2 - a, x = 0$; якщо $a \in \{2\} \cup [8; +\infty)$, то $x = 0$.

2017 рік

Задача №33, ЗНО 2017 рік (основна сесія)

Розв'яжіть рівняння залежно від значень параметра

$$\begin{cases} |x - y| = |x - a|; \\ lg(y - a) = lg(4a^2 + x - x^2). \end{cases}$$

Розв'язання:

Запишемо область допустимих значень системи: $\begin{cases} y - a > 0; \\ 4a^2 + x - x^2 > 0. \end{cases}$

Розкривши модуль, отримаємо $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - y = x - a; \\ x - y = a - x; \end{array}\right. \\ y - a = 4a^2 + x - x^2, \end{cases}$ що рівносильно

сукупності двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = x - a, \\ y - a = 4a^2 + x - x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = a - x, \\ y - a = 4a^2 + x - x^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розглянемо першу систему сукупності

$$\begin{cases} x - y = x - a, \\ y - a = 4a^2 + x - x^2. \end{cases}$$

З першого рівняння отримаємо $y - a = 0$, що суперечить першій умові із області допустимих значень. Тому ця система не має розв'язків.
Розглянемо другу систему сукупності

$$\begin{cases} x - y = a - x, \\ y - a = 4a^2 + x - x^2. \end{cases}$$

З першого рівняння дістанемо $y = 2x - a$. Підставимо значення y в друге рівняння системи

$$2x - a - a - 4a^2 - x + x^2 = 0.$$

$$x^2 + x - 4a^2 - 2a = 0.$$

Розв'яжемо отримане квадратне рівняння

$$D = 1 - 4 \cdot (-4a^2 - 2a) = 1 + 16a^2 + 8a = (4a + 1)^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm (4a + 1)}{2},$$

звідки

$$x_1 = 2a, \quad x_2 = -2a - 1.$$

Підставивши значення x у $y = 2x - a$, дістанемо відповідні значення y.

$$y_1 = 3a, \quad y_2 = -5a - 2.$$

Отже, система матиме два розв'язки

$$(x_1; y_1) = (2a; 3a), \quad (x_2; y_2) = (-2a - 1; -5a - 2).$$

Перевіримо при яких значеннях параметра існуватиме кожен із розв'язків системи. Для цього підставимо в ОДЗ кожен розв'язок. При підстановці $(x_1; y_1)$ отримаємо

$\begin{cases} 3a - a > 0; \\ 4a^2 + 2a - 4a^2 > 0, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} 2a > 0; \\ 2a > 0, \end{cases}$ а, отже, $a > 0$.

Таким чином, при $a > 0$ $(x_1; y_1)$ є розв'язком системи.

При підстановці $(x_2; y_2)$ отримаємо

$\begin{cases} -5a - 2 - a > 0; \\ 4a^2 - 2a - 1 - 4a^2 - 4a - 1 > 0, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} -6a - 2 > 0; \\ -6a - 2 > 0, \end{cases}$ а, отже, $a < -\frac{1}{3}$.

Таким чином, при $a < -\frac{1}{3}$ $(x_2; y_2)$ є розв'язком системи.

Проаналізувавши отримані результати, запишемо відповідь.

Відповідь: система має розв'язок $(-2a - 1; -5a - 2)$, при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$; не має розв'язків при $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$; має розв'язок $(2a; 3a)$ при $a \in (0; +\infty)$.

2017 рік

Задача №33, ЗНО 2017 рік (пробна сесія)

Розв'яжіть рівняння залежно від значень параметра

$$\frac{3x^2 - 6ax - a + 2^{log_2(x-a)}}{|\cos(\pi x) + 1| - 1} = 0.$$

Розв'язання:

Запишемо область допустимих значень рівняння: $\begin{cases} |\cos(\pi x) + 1| - 1 \neq 0; \\ x - a > 0. \end{cases}$

Прирівняємо чисельник рівняння до нуля:

$$3x^2 - 6ax - a + 2^{log_2(x-a)} = 0.$$

Враховуючи основну логарифмічну тотожність, отримаємо

$$3x^2 - 6ax - a + x - a = 0.$$

Погрупувавши доданки, отримаємо квадратне рівняння

$$3x^2 + (1 - 6a)x - 2a = 0.$$

$$D = (1 - 6a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2a) = 1 - 12a + 36a^2 + 24a = 36a^2 + 12a + 1 = \\ = (6a + 1)^2.$$

1. Якщо $D = 0$, тобто $6a + 1 = 0$, звідси $a = -\frac{1}{6}$, тоді $x = \frac{6a-1}{6} = -\frac{1}{3}$. Підставивши значення параметра та відповідний розв'язок в друге обмеження із ОДЗ, отримаємо неправильну нерівність: $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{6}$. Тому при $a = -\frac{1}{6}$ рівняння не має розв'язків.
2. Якщо $D > 0$, то $x_{1,2} = \frac{6a \pm (6a+1)}{2}$, $x_1 = 2a$, $x_2 = -\frac{1}{3}$.
   Розглянемо детальніше перше обмеження із даної системи
   $$|\cos(\pi x) + 1| - 1 \neq 0.$$
   Розкривши модуль, дістанемо
   $$\left[\begin{array}{l} \cos(\pi x) + 1 \neq 1, \\ \cos(\pi x) + 1 \neq -1. \end{array}\right.$$
   Звідки отримаємо
   $$\left[\begin{array}{l} \cos(\pi x) \neq 0, \\ \cos(\pi x) \neq -2. \end{array}\right.$$
   Очевидно, що друга умова виконується завжди.
   Розглянемо рівняння

$$\cos(\pi x) \neq 0.$$

Звідси $\pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. А, отже, $x \neq \frac{1}{2} + n, n \in Z$.

Тоді дане рівняння рівносильне сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2a, \\ x > a, \\ x \neq \dfrac{1}{2} + n, n \in Z. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}, \\ x > a, \\ x \neq \dfrac{1}{2} + n, n \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тоді із першої системи дістанемо

$$\begin{cases} x = 2a, \\ a > 0, \\ x \neq \dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{2}, n \in Z_+ \cup \{0\}. \end{cases}$$

А з другої системи маємо

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}, \\ a < -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$, то $x = -\frac{1}{3}$; якщо $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in (0; +\infty)$, крім $a = \frac{2n+1}{4}, n \in Z_+ \cup \{0\}$, то $x = 2a$; якщо $a = \frac{2n+1}{4}, n \in Z_+ \cup \{0\}$, то $x \in \emptyset$.

2017 рік

Задача №33, ЗНО 2017 рік (додаткова сесія)

Розв'яжіть рівняння залежно від значень параметра

$$\begin{cases} (2x + a)^2 = (2y + a)^2; \\ \sqrt{3ax - 8x - 6y} = x. \end{cases}$$

Розв'язання: із першого рівняння системи дістанемо $|2x + a| = |2y + a|$,

що рівносильно сукупності $\left[\begin{array}{l} 2x + a = 2y + a; \\ 2x + a = -2y - a, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = y; \\ y = -x - a. \end{array}\right.$

Областю допустимих значень є: $x \geq 0$.

Розглянемо друге рівняння системи: $\sqrt{3ax-8x-6y}=x,$ і підставимо $x=y$, звідки

$$3ax-8x-6y=x^2;$$

$$x(x+14-3a)=0,$$

звідси

$$\left[\begin{array}{c} x_1=0, \\ x_2=3a-14, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{c} y_1=0, \\ y_2=3a-14. \end{array}\right.$$

Таким чином, розвязок $(0;0)$ є розв'язком для всіх значень параметра.

Якщо ж $a\geq\frac{14}{3}$, то $(3a-14;\ 3a-14)$ розв'язок системи.

Підставивши $y=-x-a$, в $\sqrt{3ax-8x-6y}=x$, дістанемо

$$\sqrt{3ax-8x-6(-x-a)}=x,$$

$$\sqrt{3ax-8x+6x+6a}=x,$$

$$x^2-(3a-2)x-6a=0.$$

$$D=9a^2-12a+4+24a=(3a+2)^2,$$

$$x_3=\frac{3a-2+3a+2}{2}=3a;\quad y_3=-4a.$$

$$x_4=\frac{3a-2-3a-2}{2}=-2;\text{ - не належить ОДЗ.}$$

Розвязок $(3a;-4a)$ існуватиме, якщо $a\geq 0$.

Відповідь: якщо $a\in(-\infty;0]$, то $(0;0)$; якщо $a\in\left(0;\frac{14}{3}\right]$, то $(3a;-4a)$; $(0;0)$;

якщо $a\in\left(\frac{14}{3};+\infty\right)$, то $(3a;-4a)$; $(0;0)$; $(3a-14;\ 3a-14)$.

2018 рік

Задача №33, ЗНО 2018 рік (основна сесія)

Розв'яжіть рівняння залежно від значень параметра

$$\frac{log_a x}{x^2+(a-4)x+4-2a}\leq 0.$$

Розв'язання:

Запишемо область допустимих значень параметра:

$a > 0, a \neq 1,$ або $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty).$

Запишемо область допустимих значень нерівності:

$$\begin{cases} x > 0; \\ x^2 + (a-4)x + 4 - 2a \neq 0. \end{cases}$$

Розглянемо рівняння $x^2 + (a-4)x + 4 - 2a \neq 0.$ Звідси

$D = (a-4)^2 - 4 \cdot (4-2a) = a^2,$

$$x_1 = \frac{4 - a + a}{2} = 2; \; x_2 = \frac{4 - 2a}{2} = 2 - a.$$

Враховуючи область допустимих значень параметра ($a > 0$), можна переконатися, що $2 - a < 2$.

Будемо розглядати два випадки:

1) Якщо $a < 2,$ тоді $x \in (0; 2-a) \cup (2-a; 2) \cup (2; +\infty),$
2) Якщо $a \geq 2,$ тоді $x \in (0; 2) \cup (2; +\infty).$

Тоді, враховуючи отримане ОДЗ, дана нерівність рівносильна наступній

$$log_a x \cdot (x^2 + (a-4)x + 4 - 2a) \leq 0,$$

звідки

$$log_a x \cdot (x - (2-a))(x-2) \leq 0.$$

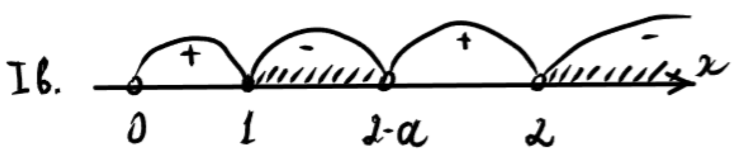
Прирівнявши кожен множник до нуля, отримаємо нулі функції

$$f(x) = log_a x \cdot (x - (2-a))(x-2).$$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2 - a, \qquad x_3 = 2.$$

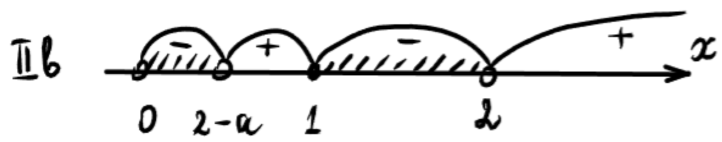
Розглянемо окремо три випадки, які впливають на розміщення цих нулів на числовій прямій.

1 випадок). Якщо $0 < a < 1,$ то $1 < x_2 < 2.$



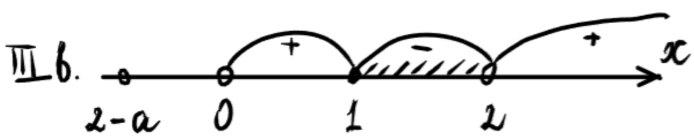
Методом інтервалів встановлюємо, що $x \in [1; 2-a) \cup (2; +\infty),$

2 випадок). Якщо $1 < a < 2,$ то $0 < x_2 < 1.$



$x \in (0; 2-a) \cup [1; 2)$.

3 випадок). Якщо $a \geq 2$, то $x_2 < 0$.



$x \in [1; 2)$.

Відповідь: Якщо $0 < a < 1$, то $x \in [1; 2-a) \cup (2; +\infty)$; якщо $1 < a < 2$, то $x \in (0; 2-a) \cup [1; 2)$; якщо $a \geq 2$, то $x \in [1; 2)$.

Задача №33, ЗНО 2018 рік (додаткова сесія)

Розв'яжіть рівняння залежно від значень параметра

$$\frac{(9x^2 - 36x + 36)(a-4)}{2^x - a} \geq 0.$$

Розв'язання:

Винесемо за дужки 9 у чисельнику і згорнемо формулу квадрата різниці:

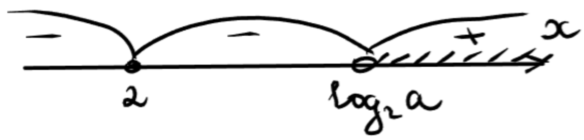
$$\frac{(x-2)^2(a-4)}{2^x - a} \geq 0.$$

Розглянемо випадки:

1) якщо $a - 4 > 0$, то дана нерівність рівносильна наступній $\frac{(x-2)^2}{2^x - a} \geq 0$, що рівносильно $\begin{cases} (x-2)^2(2^x - a) \geq 0; \\ 2^x \neq a, \end{cases}$

Нулями функції $f(x) = (x-2)^2(2^x - a)$ є $x_1 = 2$; $x_2 = log_2 a$.

Розв'яжемо нерівність методом інтервалів

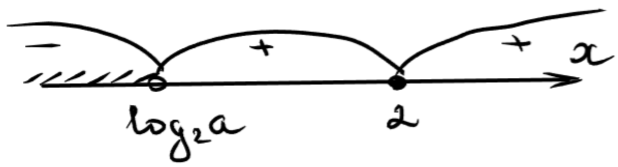


Отримаємо $x \in \{2\} \cup (log_2 a; +\infty)$.

2) якщо $a - 4 = 0$, то дана нерівність рівносильна наступній $\frac{0}{2^x - 4} \geq 0$, звідси $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
3) якщо $a - 4 < 0$, то дана нерівність рівносильна наступній $\frac{(x-2)^2}{2^x - a} \leq 0$, що рівносильно $\begin{cases} (x-2)^2(2^x - a) \leq 0; \\ 2^x \neq a. \end{cases}$

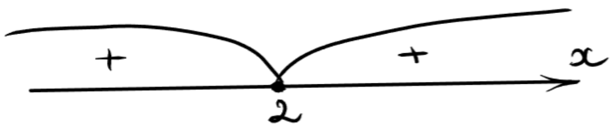
   Розділимо цю умову на два підвипадки:

   3.1) $a \in (0; 4)$, тоді існує $log_2 a$, причому $log_2 a < 2$.



Отримаємо $x \in \{2\} \cup (-\infty; log_2 a)$.

   3.2) $a \in (-\infty; 0]$, тоді не існує $log_2 a$, $2^x - a > 0$.



Отримаємо $x \in \{2\}$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0]$, то $x \in \{2\}$; якщо $a \in (0; 4)$, то $x \in \{2\} \cup (-\infty; log_2 a)$; якщо $a = 4$, то $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; якщо $a \in (4; +\infty)$, то $x \in \{2\} \cup (log_2 a; +\infty)$.

Задача №33, ЗНО 2018 рік (пробна сесія)

Розв'яжіть рівняння залежно від значень параметра

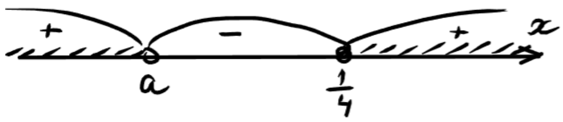
$$\sqrt{\frac{4x - 1}{x - a}} > a.$$

Розв'язання: дана ірраціональна нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a < 0, \\ \dfrac{4x-1}{x-a} \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq 0, \\ \dfrac{4x-1}{x-a} > a^2. \end{cases}\end{array}\right.$$

1. Розглянемо першу систему сукупності:

$$\begin{cases} a < 0, \\ \frac{4x-1}{x-a} \geq 0, \end{cases} \begin{cases} (4x-1)(x-a) \geq 0, \\ x \neq a, \\ a < 0. \end{cases} \begin{cases} (x-\frac{1}{4})(x-a) \geq 0, \\ x \neq a, \\ a < 0. \end{cases}$$



Якщо $a < 0$, то $x \in (-\infty; a) \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

2. Перейдемо до розгляду другої нерівності:

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ \frac{4x-1}{x-a} > a^2. \end{cases} \quad \frac{4x-1}{x-a} - a^2 > 0, \quad \frac{4x-1-a^2+a^3}{x-a} > 0, \quad \frac{(4-a^2)x+a^3-1}{x-a} > 0,$$

що рівносильно

$$\big((4-a^2)x + a^3 - 1\big)(x-a) > 0. \qquad (*)$$

Розглянемо окремо підвипадки:

2.1. $a = 2$, тоді
$(2^3 - 1)(x-2) > 0$, звідки $x > 2$.

Отже, якщо $a = 2$, то $x \in (2; +\infty)$.

2.2. $a \neq 2$.

2.2.1. $a < 2$, тоді нерівність (*) набуває вигляду

$$\left(x - \frac{a^3-1}{a^2-4}\right)(x-a) > 0.$$

Очевидно, що нулями функції $f(x) = \left(x - \frac{a^3-1}{a^2-4}\right)(x - a)$ є

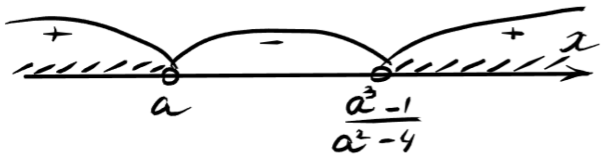
$$x_1 = \frac{a^3-1}{a^2-4}, \quad x_2 = a.$$

З'ясуємо при яких значеннях параметра $x_1 > x_2$. Для цього розв'яжемо нерівність

$$\frac{a^3-1}{a^2-4} > a,$$

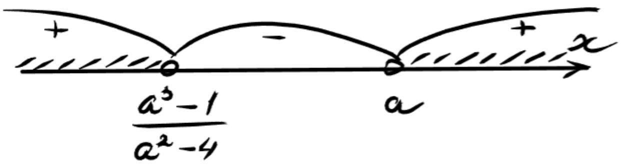
$\frac{a^3-1-a^3+4a}{a^2-4} > 0$, $\frac{4a-1}{a^2-4} > 0$, $4a - 1 < 0$, $a < \frac{1}{4}$.

Отже, якщо $0 \le a < \frac{1}{4}$, то $x_1 > x_2$



Отже, $x \in (-\infty; a) \cup \left(\frac{a^3-1}{a^2-4}; +\infty\right)$.

Якщо ж $\frac{1}{4} \le a < 2$, то $x_2 > x_1$.



Отже, $x \in \left(-\infty; \frac{a^3-1}{a^2-4}\right) \cup (a; +\infty)$.

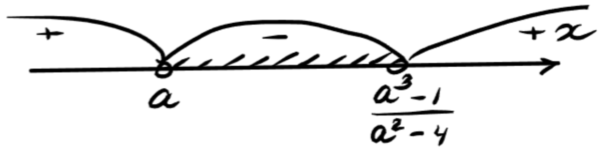
2.2.2. $a > 2$, тоді нерівність (*) набуває вигляду

$$\left(x - \frac{a^3-1}{a^2-4}\right)(x - a) < 0.$$

З'ясуємо при яких значеннях параметра $x_1 > x_2$. Для цього розв'яжемо нерівність

$$\frac{a^3-1}{a^2-4} > a,$$

$\frac{a^3-1-a^3+4a}{a^2-4} > 0,\ \frac{4a-1}{a^2-4} > 0, 4a-1 > 0, a > \frac{1}{4}.$



Отже, якщо $a > 2$, то $x \in \left(a; \frac{a^3-1}{a^2-4}\right)$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0)$, то $x \in (-\infty; a) \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$;

якщо $a \in \left[0; \frac{1}{4}\right)$, то $x \in (-\infty; a) \cup \left(\frac{a^3-1}{a^2-4}; +\infty\right)$;

якщо $x \in [\frac{1}{4}; 2)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{a^3-1}{a^2-4}\right) \cup (a; +\infty)$;

якщо $a = 2$, то $x \in (2; +\infty)$; якщо $a \in (2; +\infty)$, то $x \in \left(a; \frac{a^3-1}{a^2-4}\right)$.

Задача №33, ЗНО 2019 рік (основна сесія)

Задано систему нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} \geq 0; \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2sin^2(\pi a)+\cos(2\pi a)+x} > a, \end{cases}$$

де x – змінна, a – стала.

1. Розв’яжіть першу нерівність цієї системи.
2. Визначте множину розв’язків другої нерівності системи, залежно від значень параметра a.
3. Визначте всі розв’язки системи залежно від значень параметра a.

Розв’язання:

1. $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$; $\begin{cases} (x+1)(x-2) \geq 0, \\ x \neq 2, \end{cases}$ звідки $x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$.
2. Спростимо вираз в показнику другої нерівності

$$2sin^2(\pi a) + \cos(2\pi a) + x = 2sin^2(\pi a) + c\,os^2(\pi a) - sin^2(\pi a) + x =$$

$$= 1 + x.$$

Тоді нерівність набуватиме вигляду

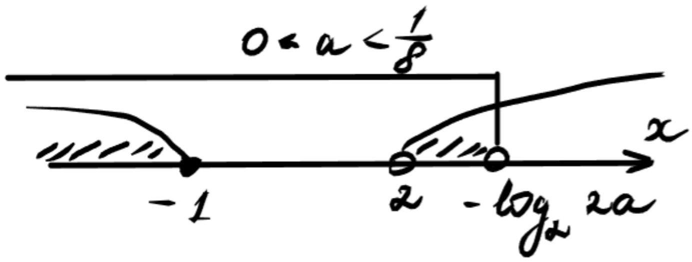
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1+x} > a.$$

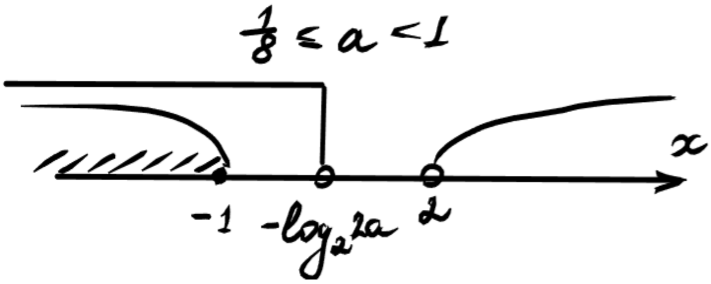
Тоді якщо $a \leq 0$, то $x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$. А якщо $a > 0$, то прологарифмуємо другу нерівність і отримаємо:

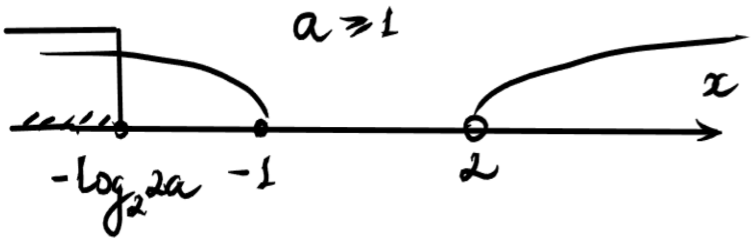
$log_2 2^{-1-x} > log_2 a$; $-1 - x > log_2 a$; $x < -log_2 a - 1$.

3. Для визначення критичних значень параметра, що впливають на подальший розв'язок, розвяжемо два рівняння
   $-log_2 a - 1 = -1$, звідки $a = 1$.
   $-log_2 a - 1 = 2$, звідки $a = \frac{1}{8}$.

Тоді визначимо всі розв'язки системи залежно від значень параметра a, причому розглянемо три проміжки: $a \in \left(0; \frac{1}{8}\right)$, $a \in$[1/8;1), $a \in [1; +\infty)$.







Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0]$, то $x \in (-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$; якщо $a \in \left(0; \frac{1}{8}\right)$, то $x \in (-\infty; -1] \cup (2; -log_2 2a)$; якщо $a \in [\frac{1}{8}; 1)$, то $x \in (-\infty; -1]$; якщо $a \in [1; +\infty)$, то $x \in (-\infty; -log_2 2a)$.

Задача №33, ЗНО 2019 рік (додаткова сесія)

Задано систему нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{3x+6}{x} \le 0; \\ log_{\frac{a}{2}}(x-a+2)^2 \ge 2log_{\frac{a}{2}}(a-1), \end{cases}$$

де x – змінна, a – додатня стала.

1.Розв'яжіть першу нерівність цієї системи.

2. Визначте множину розв'язків другої нерівності системи, залежно від значень параметра a.

3. Визначте всі розв'язки системи залежно від значень параметра a.

Розв'язання:

1. $\frac{3x+6}{x} \le 0;$ $\begin{cases} 3(x+2)x \le 0, \\ x \ne 0, \end{cases}$ звідки $x \in [-2; 0)$.

2. Знайдемо область допустимих значень: $\begin{cases} x \ne a-2, \\ a > 1, \\ a \ne 2. \end{cases}$

Враховуючи ОДЗ, розглянемо логарифмічну нерівність окремо на двох проміжках: $a \in (1; 2)$ та $a \in (2; +\infty)$. Запишемо другу нерівність системи у вигляді

$$log_{\frac{a}{2}}(x-a+2)^2 \ge log_{\frac{a}{2}}(a-1)^2.$$

Тоді, перейшовши до нерівностей в підлогарифмічних виразах, отримаємо

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-a+2)^2 \le (a-1)^2, \\ a \in (1; 2), \end{cases} \\ \begin{cases} (x-a+2)^2 \ge (a-1)^2, \\ a \in (2; +\infty). \end{cases} \end{array}\right.$$

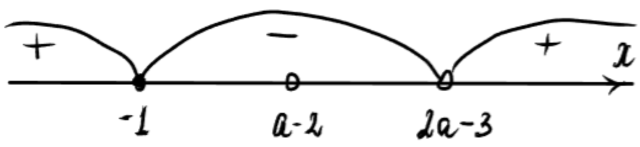
Розглянемо першу нерівність сукупності

$$\begin{cases} (x-a+2)^2 \le (a-1)^2, \\ a \in (1; 2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-a+2-a+1)(x-a+2+a-1) \le 0, \\ a \in (1; 2), \end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-2a+3)(x+1)\le 0,\\ a\in(1;2).\end{cases}$$

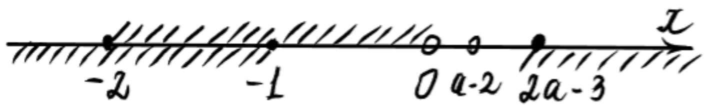
Очевидно, що нулями функції $f(x) = (x-2a+3)(x+1)$ є $x_1 = 2a-3$, $x_2 = -1$. Тоді розв'яжемо нерівності методом інтервалів, беручи до уваги перше обмеження із ОДЗ:



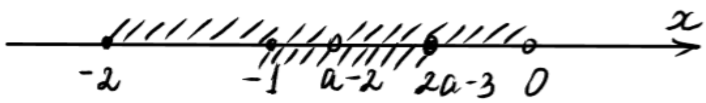
Якщо $a\in(1;2)$, то $x\in[-1;a-2)\cup(a-2;2a-3)$; якщо $a\in(2;+\infty)$, то $x\in(-\infty;-1]\cup[2a-3;+\infty)$.

3. Перейдемо до розгляду заданої системи. Враховуючи розв'язки обох нерівностей, дістанемо

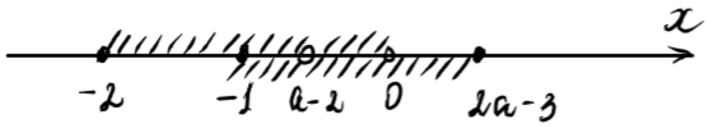
1) якщо $a\in(2;+\infty)$, то $x\in[-2;-1]$.



2) якщо $a\in(1;1{,}5)$, то $x\in[-1;a-2)\cup(a-2;2a-3]$,



3) якщо $a\in[1{,}5;2)$, то $x\in[-1;a-2)\cup(a-2;0)$.



Задача №33, ЗНО 2019 рік (пробна сесія)

Задано систему нерівностей

$$\begin{cases} \pi^2 - x^2 \geq 0; \\ (log_3 a)(2sin^2 x - (2a-1)sinx - a) \geq 0, \end{cases}$$

де x – змінна, a – додатня стала.

1.Розв'яжіть першу нерівність цієї системи.

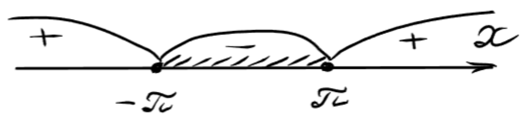
2. Визначте множину розв'язків другої нерівності системи, залежно від значень параметра a.

3. Визначте всі розв'язки системи залежно від значень параметра a.

Розв'язання:

1. Розв'яжемо першу нерівність системи методом інтервалів: $\pi^2 - x^2 \geq 0$, звідки

$(\pi - x)(\pi + x) \geq 0, \quad (x-\pi)(x+\pi) \leq 0, x \in [-\pi; \pi]$.



2. Перейдемо до розгляду другої нерівності системи. Перший множник цієї нерівності $log_3 a$ є числом, що має зміст лише при $a > 0$.

2.1. Нехай $a \in (0; 1)$, то $log_3 a < 0$ і друга нерівність рівносильна нерівності

$$2sin^2 x - (2a-1)sinx - a \leq 0.$$

Виконаємо заміну: $\sin x = t$, тоді отримаємо

$$2t^2 - (2a-1)t - a \leq 0.$$

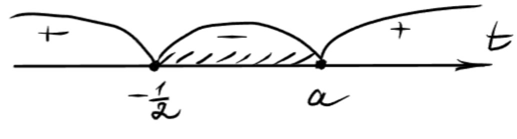
$$D = (2a-1)^2 + 8a = (2a+1)^2,$$

$$t_1 = \frac{2a-1+2a+1}{4} = a, \ t_2 = \frac{2a-1-2a-1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

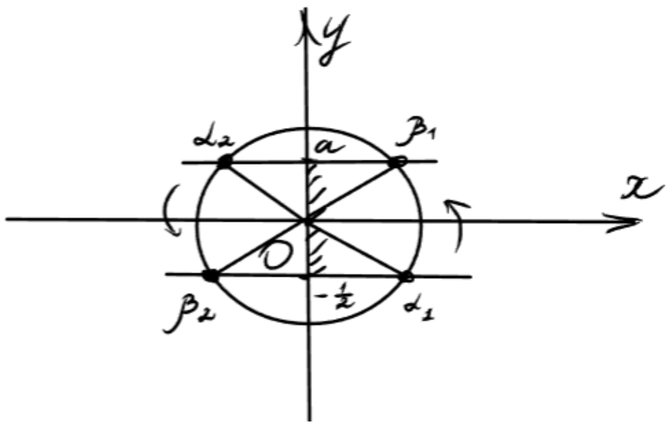
Тоді останню нерівність запишемо у вигляді

$$2(t-a)\left(t + \frac{1}{2}\right) \leq 0,$$

розв'язавши яку методом інтервалів, дістанемо



$t \in [-0{,}5; a]$. Повертаючись до заміни, матимемо $-0{,}5 \leq sinx \leq a$, $a \in (0; 1)$.



Розв'язавши нерівність по колу, отримаємо дві групи розв'язків:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n\right], n \in Z,$$

$$x \in \left[-\pi - \arcsin a + 2\pi n\,; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z.$$

2.2. Нехай $a \in (1; +\infty)$, то $log_3 a > 0$ і друга нерівність рівносильна нерівності

$$2sin^2 x - (2a-1)sinx - a \geq 0,$$

або

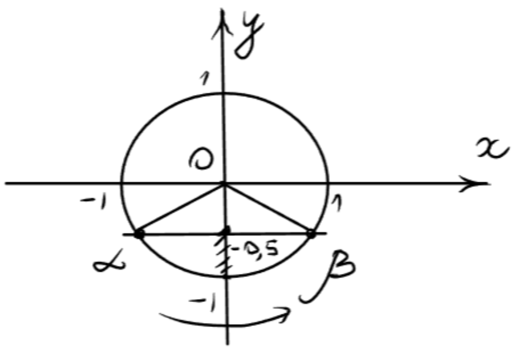
$$2(t-a)\left(t+\frac{1}{2}\right) \geq 0,$$

звідки

$$\left[\begin{array}{c} sinx \leq -0{,}5; \\ sinx \geq a. \end{array}\right.$$

Розглянемо першу нерівність сукупності, оскільки друга нерівність немає розв'язків при вказаних значеннях параметра:

$$sinx \leq -0{,}5,$$



$$x \in \left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z.$$

3. Для виконання останнього пункту завдання слід розглянути сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-0{,}5 \le sinx \le a,\\ x \in [-\pi;\pi],\end{cases}\\ \begin{cases}sinx \le -0{,}5,\\ x \in [-\pi;\pi].\end{cases}\end{array}\right.$$

Із першої системи нерівностей дістанемо: $x \in \left[-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}; arcsina\right] \cup [\pi - arcsina; \pi]$; а із другої відповідно: $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$.

Відповідь: якщо $a \in (0;1)$, то $x \in \left[-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}; arcsina\right] \cup [\pi - arcsina; \pi]$; якщо $a = 1$, то $x \in [-\pi; \pi]$; якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$.

2020 рік

1. Задача №35, ЗНО 2020 рік (основна сесія)

Розв’язати рівняння при всіх допустимих значеннях параметра:

$(5^{2x+1} - 25^x - 20)(\sqrt{ax-6} - \sqrt{a-2x}) = 0.$

Розв’язання:

1. Запишемо ОДЗ рівняння:

$$\begin{cases} ax - 6 \ge 0,\\ a - 2x \ge 0.\end{cases}$$

Як відомо, добуток дорівнює нулю, коли хоча б один із виразів дорівнює нулю, а інший при цьому існує. Прирівняємо перший множник до нуля і розв’яжемо рівняння:

$$5^{2x+1} - 25^x - 20 = 0,$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 5^{2x} - 20 = 0,$$

$$4 \cdot 5^{2x} = 20,$$

$$5^{2x} = 5,$$

$$2x = 1,$$

$x = 0{,}5$ – буде коренем рівняння, якщо воно задовольняє ОДЗ рівняння.
З'ясуємо для яких значень параметра це буде виконуватися:

$$\begin{cases} a \cdot \dfrac{1}{2} - 6 \ge 0, \\ a - 2 \cdot \dfrac{1}{2} \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge 12, \\ a \ge 1. \end{cases} \Rightarrow a \in [12; +\infty).$$

Отже, якщо $a \in [12; +\infty)$, то $x = 0{,}5$ – розв'язок даного рівняння.

2. Прирівняємо другий множник лівої частини даного рівняння до нуля:

$$\sqrt{ax - 6} - \sqrt{a - 2x} = 0,$$

$$\sqrt{ax - 6} = \sqrt{a - 2x},$$

$$ax - 6 = a - 2x, \qquad (*)$$

$$ax + 2x = a + 6,$$

$$(a + 2)x = a + 6,$$

2.1) Якщо $a + 2 \ne 0,$ тоді $x = \dfrac{a+6}{a+2}$,

2.2) Якщо $a + 2 = 0,$ то отримаємо $0 \cdot x = 4,$ звідки $x \in \varnothing$.

Щоб дізнатися значення параметра, при якому число $x = \dfrac{a+6}{a+2}$ є коренем рівняння, слід в ОДЗ замість x підставити $\dfrac{a+6}{a+2}$ і розв'язати нерівність відносно a.

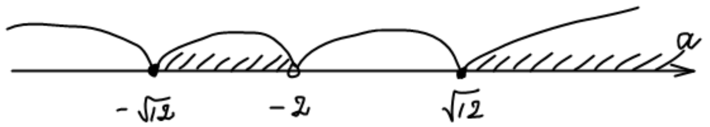
Оскільки має виконуватися (*), то достатньо виконання однієї з двох нерівностей ОДЗ. Виберемо другу:

$$a - 2x \ge 0.$$

Підставивши, отримаємо:

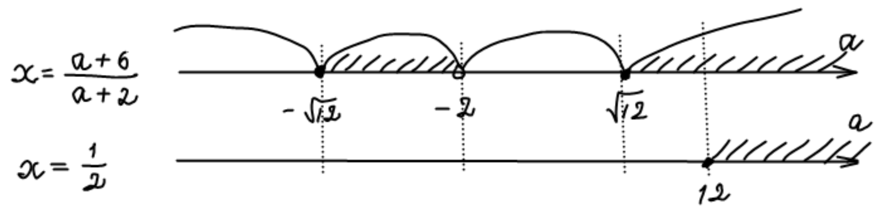
$$a - 2 \cdot \frac{a+6}{a+2} \ge 0, \qquad \frac{a^2 + 2a - 2a - 12}{a+2} \ge 0,$$

$$\frac{a^2 - 12}{a+2} \ge 0 \iff \begin{cases} (a - \sqrt{12})(a + \sqrt{12})(a + 2) \ge 0 \\ a + 2 \ne 0. \end{cases}$$



Розв’язавши нерівність методом інтервалів, отримаємо $a \in [-12;-2) \cup [\sqrt{12};+\infty)$.

Побудуємо лінію параметрів і запишемо відповідь



Відповідь: якщо $a \in (-\infty;-\sqrt{12}) \cup [-2;\sqrt{12})$, то рівняння коренів немає; якщо $a \in [-12;-2) \cup [\sqrt{12};12)$, то $x = \dfrac{a+6}{a+2}$; якщо $a \in [12;+\infty)$, то $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{a+6}{a+2}$ – два корені.

1. Задача №35, ЗНО 2020 рік (пробна сесія)

Розв’язати рівняння

$$\frac{(x-\sqrt{x}-2)(a^2-16)}{2^x-a} = 0.$$

1) Розв’язати рівняння $x-\sqrt{x}-2=0$.

2) Розв’язати рівняння з параметром при всіх допустимих значеннях параметра

Розв’язання:

1) Розв’яжемо рівняння $x-\sqrt{x}-2=0$.

$$\sqrt{x} = x-2, \text{ де } \quad x \ge 2.$$

Піднісши обидві частини рівняння до квадрату, дістанемо

$$x = x^2-4x+4,$$

$$x^2-5x+4=0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 4.$$

$x_1 = 1$ – сторонній корінь.

2) Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases} x \ge 0, \\ 2^x - a \ne 0. \end{cases}$

2.1) Якщо $a^2 - 16 = 0, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -4 \end{array}\right.$.

Якщо $a = 4$, то отримаємо $\frac{0}{2^x - 4} = 0$, звідки $x \in [0;2) \cup (2;+\infty)$.

Якщо $a = -4$, то отримаємо $\frac{0}{2^x + 4} = 0$, звідки $x \in [0;+\infty)$.

2.2) Якщо $a^2 - 16 \ne 0$, то поділимо дане рівняння на цей вираз:

$$\frac{x - \sqrt{x} - 2}{2^x - a} = 0.$$

Підставимо $x = 4$ в це рівняння. Отримаємо $\frac{0}{2^4 - a} = 0$, звідки очевидно, що при $a = 16$ рівняння немає розв'язків.

2.3) Якщо $a \in (-\infty : -4) \cup (-4;4) \cup (4;16) \cup (16;+\infty)$, то $x = 4$ – розв'язок рівняння.

Відповідь: Якщо $a = 4$, то $x \in [0;2) \cup (2;+\infty)$; якщо $a = 16$, то рівняння немає розв'язків; Якщо $a \in (-\infty : -4) \cup (-4;4) \cup (4;16) \cup (16;+\infty)$, то $x = 4$ – розв'язок рівняння.

3. Задача №35, ЗНО 2020 рік (додаткова сесія)

1) Розв'язати рівняння $3^{x+1} + 3^{x+3} - 10 = 0$.

2) Розв'язати рівняння при всіх допустимих значеннях параметра:
$(3^{x+1} + 3^{x+3} - 10)(\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{3a - 6 - x^2}) = 0$.

Розв'язання:

1) $3^{x+1} + 9 \cdot 3^{x+1} - 10 = 0,\ \ 10 \cdot 3^{x+1} = 10,\ \ 3^{x+1} = 1,\ \ x + 1 = 0,\ \ x = -1.$

Запишемо ОДЗ рівняння: $\begin{cases} x^2 + a \ge 0, \\ 3a - 6 - x^2 \ge 0. \end{cases}$

З'ясуємо за яких значень параметра $x=-1$ є коренем рівняння. Для цього підставимо $x=-1$ в останню систему і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} 1+a \ge 0, \\ 3a-6-1 \ge 0, \end{cases} \begin{cases} a \ge -1, \\ a \ge \dfrac{7}{3}, \end{cases} \text{ звідки } a \ge \frac{7}{3}.$$

Якщо $a \ge \frac{7}{3}$, то $x=-1$ – корінь даного рівняння.

2) Прирівняємо до нуля другий множник даного рівняння:

$\sqrt{x^2+a}-\sqrt{3a-6-x^2}=0.$

Звідси, перенісши один із коренів у іншу частину і прирівнявши обидві частини до квадрату, отримаємо

$$x^2+a=3a-6-x^2. \qquad (**)$$

$$x^2=a-3,$$

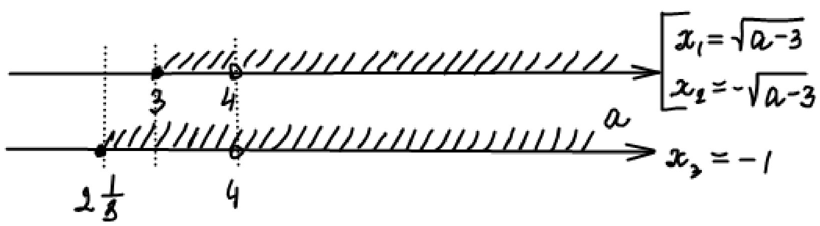
яке матиме розв'язки, коли $a-3 \ge 0$.

Отже, якщо $a \ge 3$, то коренями рівняння є $x_1=\sqrt{a-3}$, $x_2=-\sqrt{a-3}$.

Розглянемо, чи можливі випадки, що корені співпадають.

Якщо $\sqrt{a-3}=-1$, то $a \in \varnothing$. Якщо $-\sqrt{a-3}=-1$, то $a=4$.

Побудуємо лінію параметрів і запишемо відповідь:



Відповідь:

Якщо $a \in \left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$, то $x \in \varnothing$; якщо $a \in \left[\frac{7}{3}; 3\right)$, то $x=-1$; якщо $a=3$, то $x_1=x_2=0, x_3=-1$; якщо $a \in (3;4) \cup (4;+\infty)$, то $x_1=\sqrt{a-3}$; $x_2=-\sqrt{a-3}$; $x_3=-1$; якщо $a=4$, то $x_2=x_3=-1, x_3=1.$

1. Задача №34, ЗНО 2021 рік (основна сесія)

Дано систему

$$\begin{cases} ax^2 + 3ax + 4^{1+\sqrt{y}} = 8; \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1. \end{cases}$$

1) Розв'язати при $a = 0$

2) Розв'язати систему при всіх значеннях a.

Розв'язання:

1) Підставимо у систему значення $a = 0$. Отримаємо:

$$\begin{cases} 4^{1+\sqrt{y}} = 8, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1. \end{cases}$$

звідки з першого рівняння отримаємо $2^{2(1+\sqrt{y})} = 2^3$, а, прирівнявши показники, маємо: $2(1+\sqrt{y}) = 3$, звідки $\sqrt{y} = 0{,}5$, а, отже, $y = 0{,}25$.

Підставивши значення $y = 0{,}25$ у друге рівняння системи, отримаємо

$x + 2 \cdot 4^{0{,}5} = 1$, звідки $x + 2 \cdot 2 = 1$, а, отже, $x = 1 - 4 = -3$.

Отже, розв'язком системи при $a = 0$ є $(-3; 0{,}25)$.

2) Виразимо із другого рівняння системи $4^{\sqrt{y}}$:

$$\begin{cases} ax^2 + 3ax + 4 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 8; \\ 4^{\sqrt{y}} = \dfrac{1-x}{2}. \end{cases}$$

і підставимо у перше рівняння системи, яке набуває вигляду:

$$ax^2 + 3ax + 2 \cdot (1 - x) - 8 = 0.$$

Розкривши дужки та перегрупувавши доданки, отримаємо квадратне рівняння з параметром вигляду:

$$ax^2 + (3a - 2)x - 6 = 0.$$

Дослідимо розв'язність цього рівняння в залежності від значень параметра.

Припустимо, що коефіцієнт при x^2 відмінний від нуля, тобто $a \neq 0$.

В такому випадку рівняння є квадратним і можемо знайти його дискримінант:

$$D=(3a-2)^2-4a(-6)=9a^2-12a+4+24a=9a^2+12a+4=(3a+2)^2.$$

Очевидно, що дискримінант невід'ємний, а, отже, рівняння завжди має корені. Тому знайдемо їх:

$$x_1=\frac{-(3a-2)+3a+2}{2a}=\frac{-3a+2+3a+2}{2a}=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a}.$$

$$x_2=\frac{-(3a-2)-3a-2}{2a}=\frac{-3a+2-3a-2}{2a}=\frac{-6a}{2a}=-3.$$

Підставимо $x_1=\frac{2}{a}$ у друге рівняння системи і дослідимо його розв'язність:

$$4^{\sqrt{y}}=\frac{1-\frac{2}{a}}{2},\quad 4^{\sqrt{y}}=\frac{\frac{a-2}{a}}{2},\ 4^{\sqrt{y}}=\frac{a-2}{2a},\ \text{звідки } \sqrt{y}=log_4\frac{a-2}{2a}.$$

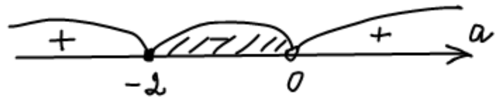
Останнє рівняння розв'язне відносно y, якщо одночасно виконуються дві вимоги:

$$\begin{cases} log_4\dfrac{a-2}{2a}\ge 0,\\ \dfrac{a-2}{2a}>0.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему: $\begin{cases}\dfrac{a-2}{2a}\ge 1,\\ \dfrac{a-2}{2a}>0,\end{cases}$ звідси випливає, що $\dfrac{a-2}{2a}\ge 1$.

$\dfrac{a-2}{2a}-1\ge 0,\ \dfrac{a-2-2a}{2a}\ge 0, \dfrac{-2-a}{2a}\ge 0$, що рівносильно системі $\begin{cases}2(a+2)a\le 0,\\ a\ne 0.\end{cases}$

Розв'яжемо нерівність методом інтервалів



отримаємо $a\in[-2;0)$. А, отже, останнє рівняння розв'язне відносно y:

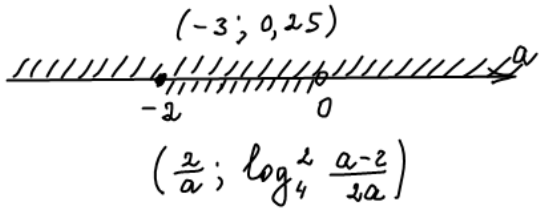
$y_1 = log_4^2 \frac{a-2}{2a}$. Таким чином, якщо $a \in [-2;0)$, то $(x_1; y_1) = \left(\frac{2}{a}; log_4^2 \frac{a-2}{2a}\right)$ є розв'язком системи.

Тепер підставимо $x_2 = -3$ у друге рівняння системи і дослідимо його розв'язність:

$4^{\sqrt{y}} = \frac{1-(-3)}{2}$, $4^{\sqrt{y}} = 2$, $2^{2\sqrt{y}} = 2$, звідки $2\sqrt{y} = 1$, $\sqrt{y} = 0{,}5$, $y = 0{,}25$.

Отже, $(x_2; y_2) = (-3; 0{,}25)$ є розв'язком системи при будь-яких значеннях параметра.

Зобразимо пряму параметрів і нанесемо на неї всі отримані результати:



Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -2) \cup [0; +\infty)$, то $(-3; 0{,}25)$ – розв'язок системи; якщо $a \in [-2; 0)$, то $(-3; 0{,}25)$ і $\left(\frac{2}{a}; log_4^2 \frac{a-2}{2a}\right)$ – розв'язки системи.

2. Задача №34, ЗНО 2021 рік (додаткова сесія)

Дано систему

$$\begin{cases} ax^2 + ax + 3^{2+y^2} = 27; \\ x + 3^{1+y^2} = 8. \end{cases}$$

1) Розв'язати при $a = 0$;

2) Розв'язати систему при всіх значеннях a.

Розв'язання:

1) Підставимо у систему значення $a = 0$. Отримаємо:

$\begin{cases} 3^{2+y^2} = 27; \\ x + 3^{1+y^2} = 8, \end{cases}$ звідки з першого рівняння отримаємо $3^{2+y^2} = 3^3$, а, отже,

$2 + y^2 = 3,\ y = \pm 1.$

Отже, якщо $a = 0$, то $x_1 = -1, y_1 = -1;\quad x_2 = -1, y_2 = 1.$

2) Розглянемо друге рівняння системи $3^{1+y^2} = 8 - x.$ Оцінимо обидві частини цього рівняння:

Оскільки $y^2 + 1 \geq 1,$ то $3^{1+y^2} \geq 3^1.$ Отже, $8 - x \geq 3,$ звідки $x \leq 5$ (обмеження на x).

Проаналізуємо перше рівняння системи:

$ax^2 + ax + 3^{1+(1+y^2)} = 27,$ звідки $ax^2 + ax + 3 \cdot 3^{1+y^2} = 27$.

Підставивши значення виразу 3^{1+y^2}, дістанемо $ax^2 + ax + 3(8 - x) = 27,$ звідки отримаємо квадратне рівняння з параметром

$$ax^2 + (a - 3)x - 3 = 0.$$

Припустимо, що $a \neq 0.$ Тоді знайдемо дискримінант:

$D = (3a - 2)^2 - 4a(-6) = 9a^2 - 12a + 4 + 24a = 9a^2 + 12a + 4 = (3a + 2)^2.$

Очевидно, що дискримінант невід'ємний, а, отже, рівняння завжди має корені. Тому знайдемо їх:

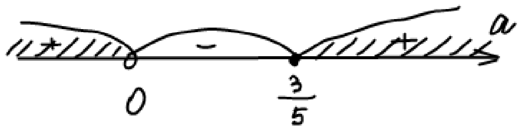
$D = (a - 3)^2 - 4a(-3) = a^2 - 6a + 9 + 12a = a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2.$

Оскільки дискримінант є невід'ємним при всіх значеннях параметра, то знайдемо корені:

$$x_1 = \frac{3 - a + a + 3}{2a} = \frac{6}{2a} = \frac{3}{a},$$

$$x_2 = \frac{3 - a - a - 3}{2a} = \frac{-2a}{2a} = \frac{-6a}{2a} = -1.$$

З'ясуємо при яких значеннях параметра x_1 та x_2 задовольняють нерівність $x \le 5$. Очевидно, що $x_2 = -1 \le 5$ для всіх дійсних значень параметра; $x_1 = \frac{3}{a} \le 5$, звідси $\frac{3-5a}{a} \le 0$, що рівносильно системі $\begin{cases} a\left(a - \frac{3}{5}\right) \ge 0, \\ a \ne 0. \end{cases}$



Якщо $a \in (-\infty;0) \cup [0{,}6;+\infty)$, то $x_1 = \frac{3}{a} \le 5$. Знайдемо відповідний y_1 :

$3^{1+y^2} = 8 - \frac{3}{a};$ $3^{1+y^2} = \frac{8a-3}{a};$ $1 + y^2 = log_3 \frac{8a-3}{a};$ звідки $y^2 = log_3 \frac{8a-3}{a} - 1;$

$y^2 = log_3 \frac{8a-3}{a} - log_3 3;$ $y = \pm\sqrt{log_3 \frac{8a-3}{3a}}.$

Отже, якщо $a \in (-\infty;0) \cup [0{,}6;+\infty)$, то буде 2 пари розв'язків:

$x_1 = \frac{3}{a},$ $y_1 = \sqrt{log_3 \frac{8a-3}{3a}};$ $x_2 = \frac{3}{a},$ $y_2 = -\sqrt{log_3 \frac{8a-3}{3a}}.$

Знайдемо y для $x = -1$, отримаємо $3^{1+y^2} = 9; 1 + y^2 = 2; y^2 = 1; y = \pm 1.$

Отже, розв'язки $(-1;1)$, та $(-1;-1)$ матимуть місце при будь-яких значеннях параметра.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty;0) \cup [0{,}6;+\infty)$, то система має 4 розв'язки

$(-1;1)$, $(-1;-1)$, $\left(\frac{3}{a}; \sqrt{log_3 \frac{8a-3}{3a}}\right)$, $\left(\frac{3}{a}; -\sqrt{log_3 \frac{8a-3}{3a}}\right)$; якщо $a \in [0;0{,}6)$, то система має лише 2 розв'язки $(-1;1)$, $(-1;-1)$.

3. Задача №34, ЗНО 2021 рік (пробна сесія)

Розв'язати для всіх значень параметра

$$\frac{(x-2)(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{log_{0.5}(3-2x)+2}=0.$$

Розв'язання: Розглянемо ОДЗ рівняння

$\begin{cases} log_{0,5}(3-2x)+2\neq 0 \\ 3-2x>0, \end{cases}$, звідки $\begin{cases} log_{0,5}(3-2x)\neq -2 \\ -2x>-3, \end{cases}$, $\begin{cases} 3-2x\neq (0{,}5)^{-2} \\ x<1{,}5, \end{cases}$, $\begin{cases} 3-2x\neq 4 \\ x<1{,}5, \end{cases}$,

$\begin{cases} -2x\neq 1 \\ x<1{,}5, \end{cases}$, $\begin{cases} x\neq -0{,}5 \\ x<1{,}5 \end{cases}$, – множина допустимих значень змінної x :

ОДЗ: $x\in(-\infty;-0{,}5)\cup(-0{,}5;1{,}5)$.

Прирівняємо чисельник отриманого дробу до нуля:

$$(x-2)(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)=0.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ x^2-3(a-1)x+2a^2-3a=0. \end{array}\right.$

З першого рівняння системи маємо $x-2=0$. Проте, очевидно, що корінь $x=2$ не належить ОДЗ.

З другого рівняння системи $x^2-3(a-1)x+2a^2-3a=0$ маємо

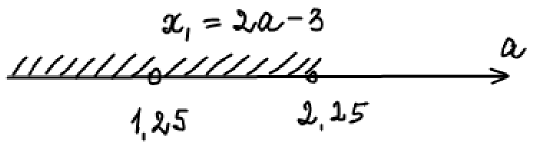
$$D=9(a^2-2a+1)-4(2a^2-3a)=9a^2-18a+9-8a^2+12a=a^2-6a+9=(a-3)^2.$$

$$x_1=\frac{3(a-1)+a-3}{2}=\frac{4a-6}{2}=2a-3;$$

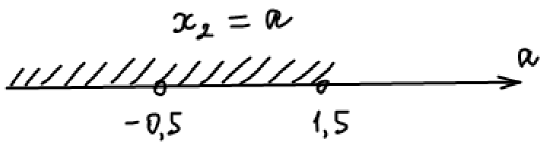
$$x_2=\frac{3(a-1)-a+3}{2}=\frac{4a-6}{2}=a.$$

З'ясуємо при яких значеннях параметра корені x_1 та x_2 належать ОДЗ.

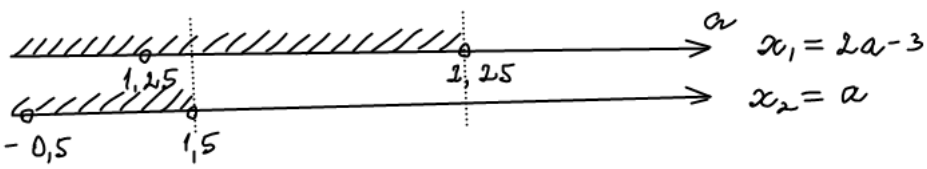
$\begin{cases} 2a-3<1{,}5, \\ 2a-3\neq -0{,}5, \end{cases}$ $\begin{cases} 2a<4{,}5, \\ 2a\neq 2{,}5, \end{cases}$ $\begin{cases} a<2{,}25, \\ a\neq 1{,}25, \end{cases}$



$$\begin{cases} a < 1{,}5, \\ a \neq -0{,}5, \end{cases}$$



Нанесемо отримані розв'язки на пряму параметрів і запишемо відповідь



Відповідь: якщо $a \in (-\infty;-0{,}5;) \cup [-0{,}5;1{,}25) \cup (1{,}25;1{,}5)$, то $x_1 = 2a - 3; \; x_2 = a$ – два корені; якщо $a \in [1{,}5;2{,}25)$,то $x = 2a - 3$ – один корінь; якщо $a \in [2{,}25;+\infty)$, то розв'язків немає; якщо $a = 1{,}25$, то $x = a = 1{,}25;$ якщо $a = -0{,}5$, то $x = 2a - 4 = -4$.

8. Задачі з параметром і GeoGebra

Розглянемо деякі аспекти методики роботи над задачами з параметром, розв'язання яких виконується за допомогою аналітичного методу з ілюстраціями динамічної картини графіка розв'язків в системі GeoGebra. Наведемо декілька прикладів.

Приклад 1. Визначити кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases}(a+3)x+4y=5-3a;\\ 2x+(5+a)y=8.\end{cases}$$

Розв'язання: розв'яжемо задачу аналітичним методом. Помітивши той факт, що у другому рівнянні даної лінійної системи коефіцієнт біля x не залежить від параметра, виразимо із другого рівняння x і підставимо у перше рівняння. Отримаємо:

$$\begin{cases}(a+3)\cdot\dfrac{8-(5+a)y}{2}+4y=5-3a;\\ x=\dfrac{8-(5+a)y}{2}.\end{cases}$$

Виконавши тотожні перетворення в першому рівнянні системи, запишемо її у вигляді:

$$\begin{cases}(a^2+8a+7)y=14(a+1);\\ x=\dfrac{8-(5+a)y}{2}.\end{cases}$$

Розклавши квадратний тричлен на множники, проаналізуємо розв'язність відносно y першого рівняння системи (а, отже, і даної системи):

$(a+1)(a+7)y=14(a+1).$

Очевидно, що при $a\neq-1; a\neq-7,$ останнє рівняння (і дана система) однозначно розв'язна; якщо $a=-1,$ то рівняння набуває вигляду $0\cdot y=0,$ яке має безліч розв'язків; якщо $a=-7,$ то рівняння набуває вигляду $0\cdot y=-8,$ тому рівняння (а, отже, і система) не має розв'язків.

Після розв'язання задачі аналітичним методом доцільно продемонструвати динамічну картину аналізу розв'язності системи за допомогою GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/smkmej6y). При цьому слід наголосити на тому, що кожне рівняння системи при певному значенні параметра геометрично задає пряму. При зміні параметра прямі змінюють своє положення. Якщо $a=-7,$ то отримаємо дві паралельні прямі (див. рис.1), оскільки вони не перетинаються, то задана система не має розв'язків.

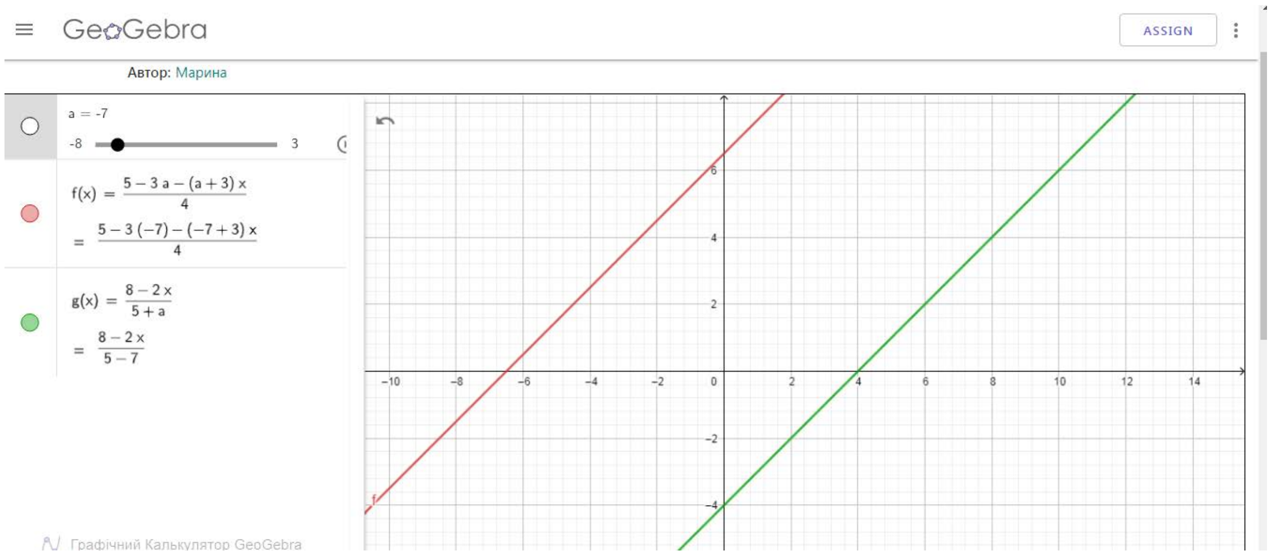


Рис.1

При $a = -1$ прямі збігаються (див. Рис.2), тобто задана система має безліч розв'язків (координати точок прямої).

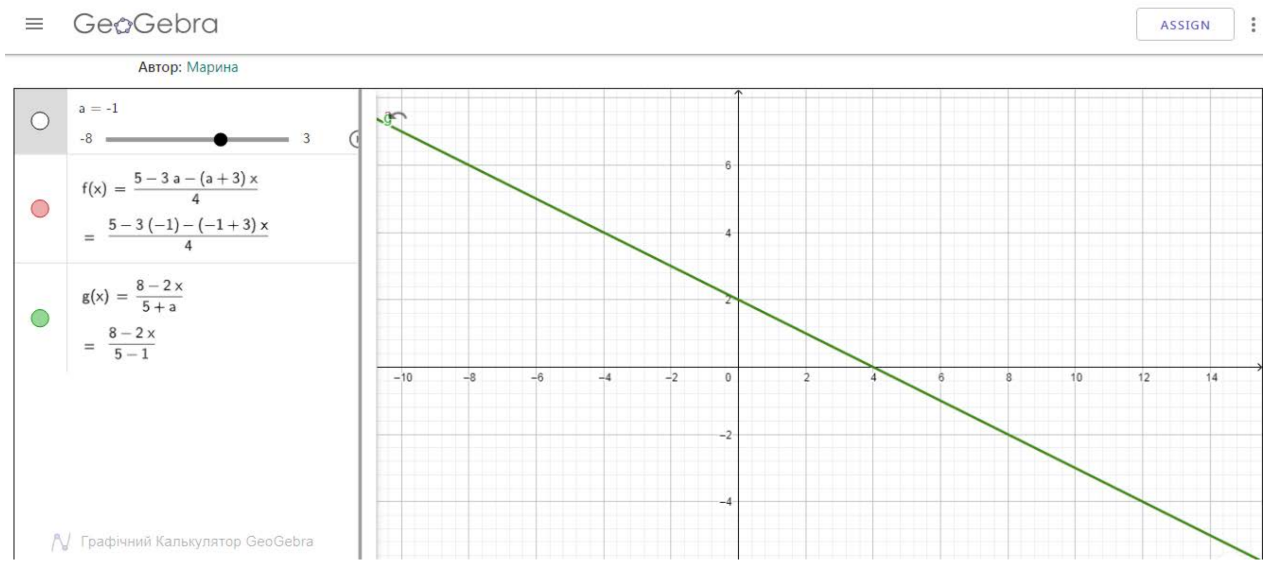


Рис.2

У інших випадках прямі завжди перетинаються (координати точки перетину є розв'язом системи). Див. Рис.3.

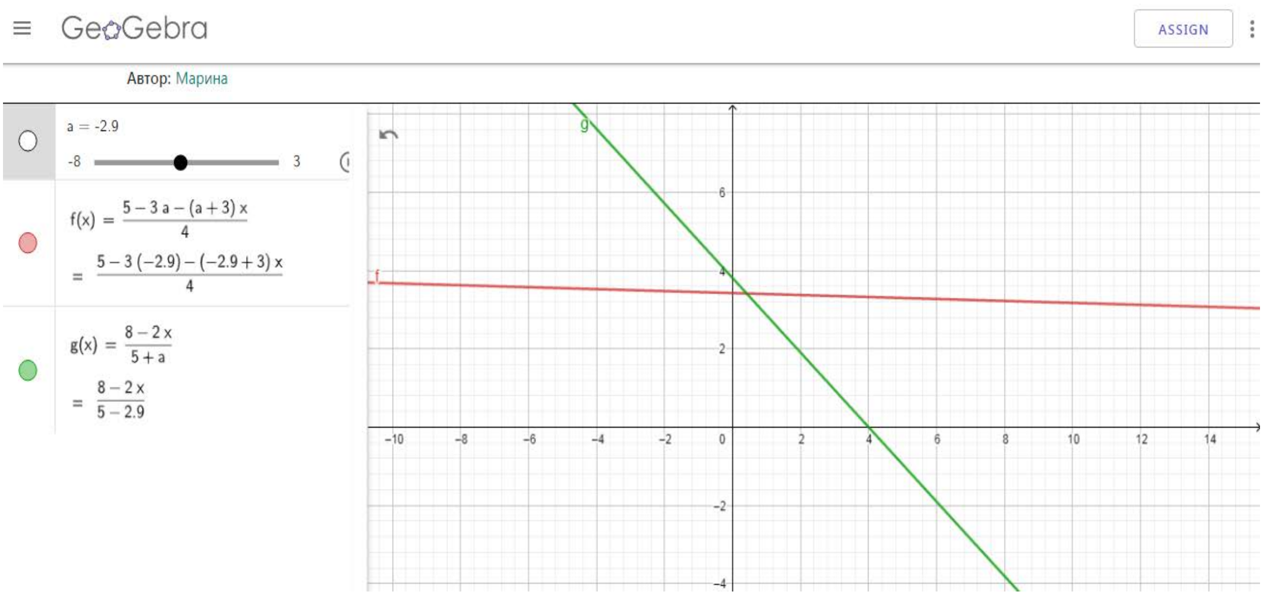
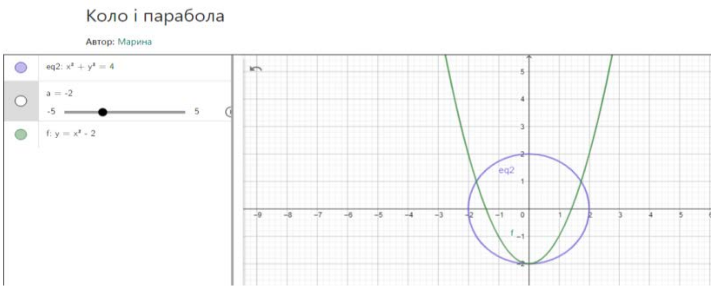


Рис.3

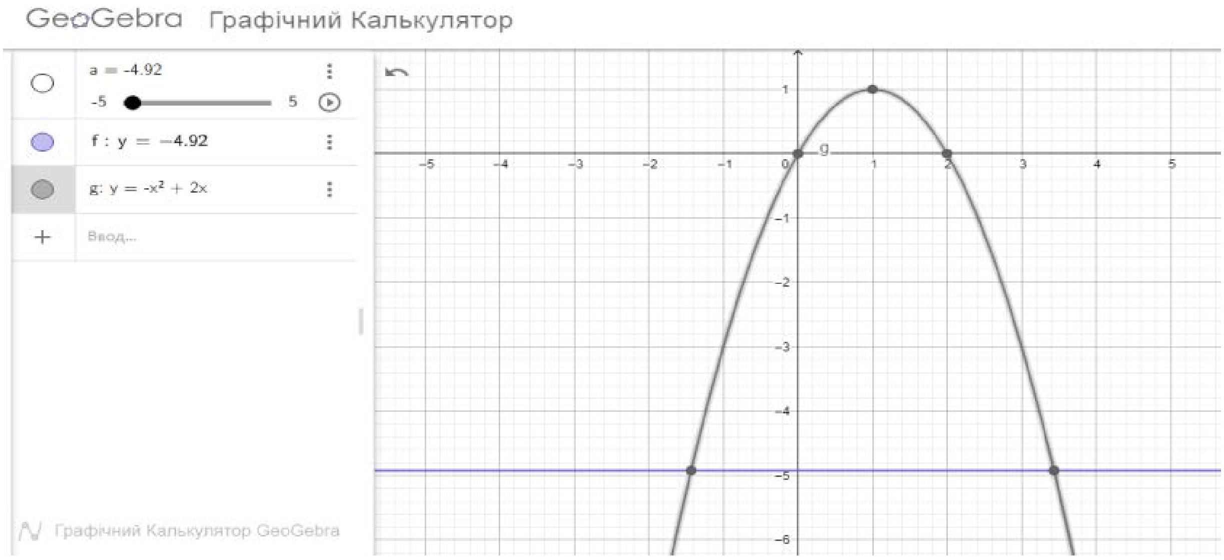
Приклад 2. [***Репета В., Клешня Н., Коробова М., Репета Л.*** (2002), с.15] При якому значенні параметра a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ y = x^2 + a \end{cases}$ має три розв'язки?

Розв'язання: застосуємо графічний метод. Графіком першого рівняння системи є коло, радіуса 2 з центром у початку координат. Графіком функції $y = x^2 + a$ є парабола, вершина якої $(0; a)$ при зміні a рухається вздовж осі Oy . Система буде мати три розв'язки, якщо коло і парабола перетинатимуться у трьох точках. Очевидно, що це буде при $a = -2$. Для більшої переконливості доцільно розглянути динамічну модель (https://www.geogebra.org/graphing/xgkym4fk)



Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^2 - 2x + a = 0$ в залежності від параметра a.

Розв'язання: як і в попередньому випадку застосуємо графічний метод. Запишемо рівняння у вигляді $-x^2 + 2x = a$. Побудуємо графіки двох функцій $y = a$ та $y = -x^2 + 2x$. Виділивши повний квадрат, запишемо квадратичну функцію у вигляді $y = -(x-1)^2 + 1$. Отже, геометрично маємо параболу, вітками вниз, з вершиною у точці $(1; 1)$, та нулями функції $x = 0, x = 2$. З іншого боку, при кожному значенні параметра a отримаємо пряму $y = a$, паралельну осі абсцис. Аналізуючи динамічну модель (https://www.geogebra.org/graphing/xpfxyk4u), отримаємо наступні результати: якщо $a < 1$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$; якщо $a = 1$, то $x_{1,2} = 1$; якщо $a > 1$, то $x \in \emptyset$.



Приклад 4. *При яких значеннях a рівняння*

$$\frac{3}{x-1}-\frac{x}{x-a}+\frac{3}{2}=0$$

має єдиний корінь?

Розв'язання: скористаємось аналітичним методом. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x \neq 1; \\ x \neq a; \\ x^2-(3a-5)x-3a=0. \end{cases}$$

Дослідимо розв'язність рівняння $x^2-(3a-5)x-3a=0$. Обчислимо дискримінант: $D=9(a-1)^2+16$, який є додатнім при всіх значеннях параметра, а, отже, рівняння має два дійсні корені.

Дане дробово-раціональне рівняння має один корінь, якщо один з коренів квадратного рівняння дорівнює 1 або a. Нехай коренем останнього рівняння є 1, а отже, задовольняє його: $1^2-(3a-5)\cdot 1-3a=0$, звідки $a=1$. Тоді $x=-3$ – корінь дробово-раціонального рівняння.

Нехай коренем рівняння є a, а отже, задовольняє його: $a^2-(3a-5)\cdot a-3a=0$, звідки $\left[\begin{aligned} a_1 &= 0; \\ a_2 &= 1. \end{aligned}\right.$

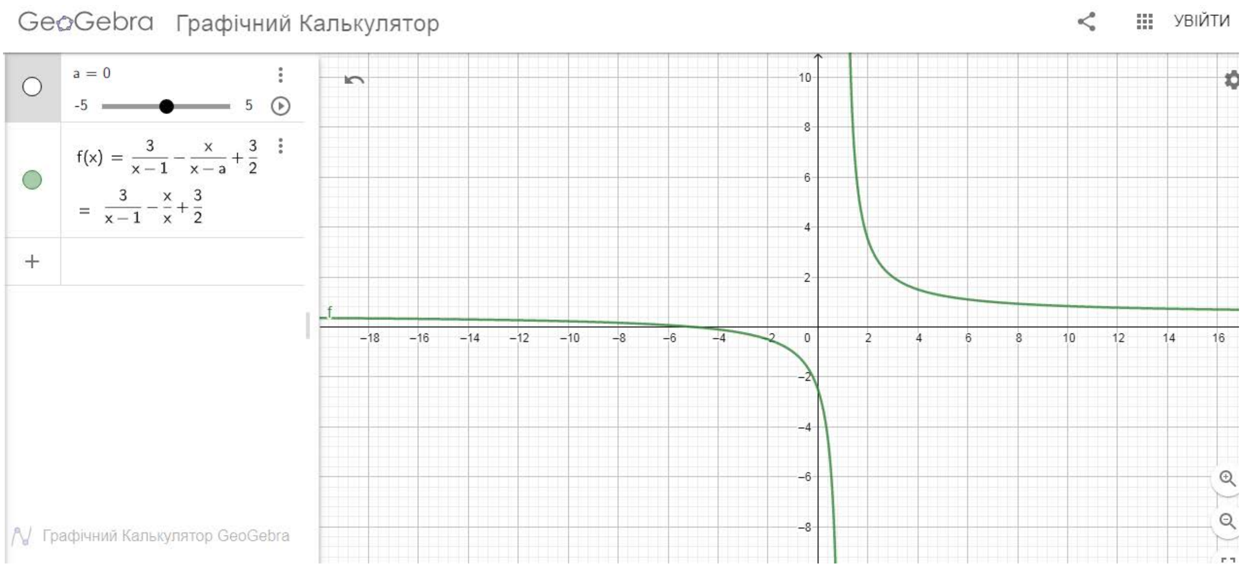
1) Якщо $a=0$, то $x^2+5x=0$, звідки $\left[\begin{aligned} x_1 &= -5; \\ x_2 &= 0, \end{aligned}\right.$ де $x=0$ – сторонній корінь.

2) Якщо $a=1$, то $x^2+2x-3=0$, звідки $\left[\begin{aligned} x_1 &= -3; \\ x_2 &= 1, \end{aligned}\right.$ де $x=1$ – сторонній корінь.

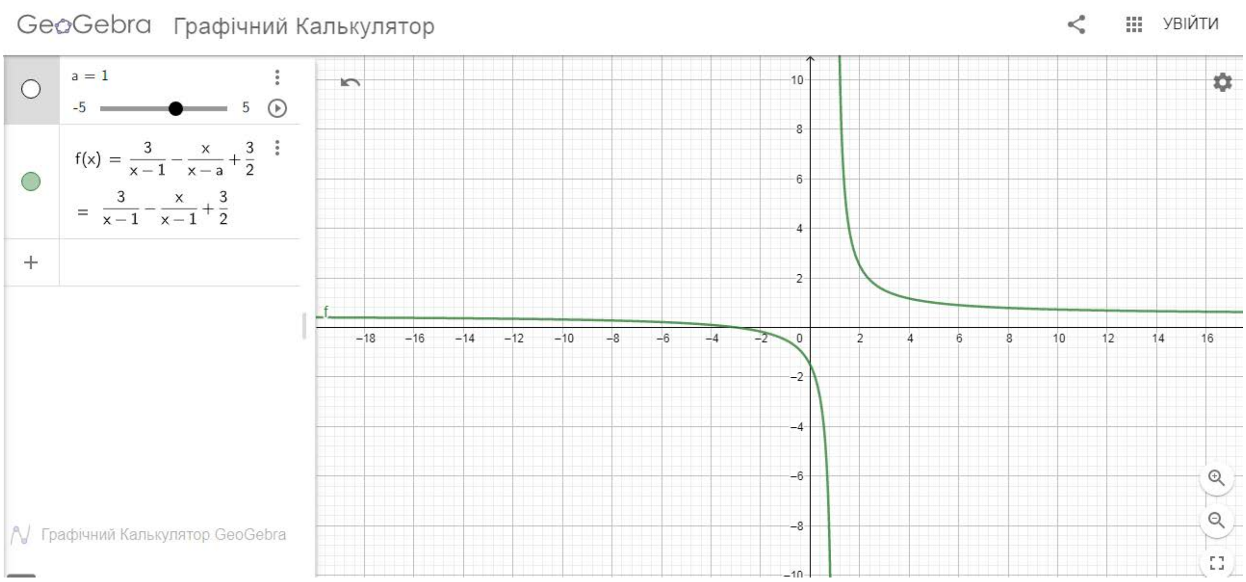
Отже, при $a=0$ та $a=1$ дане рівняння має один корінь.

Динамічну картину розв'язку можна переглянути за посиланням: https://www.geogebra.org/graphing/vxqfd2u5

Зокрема, при $a=0$:

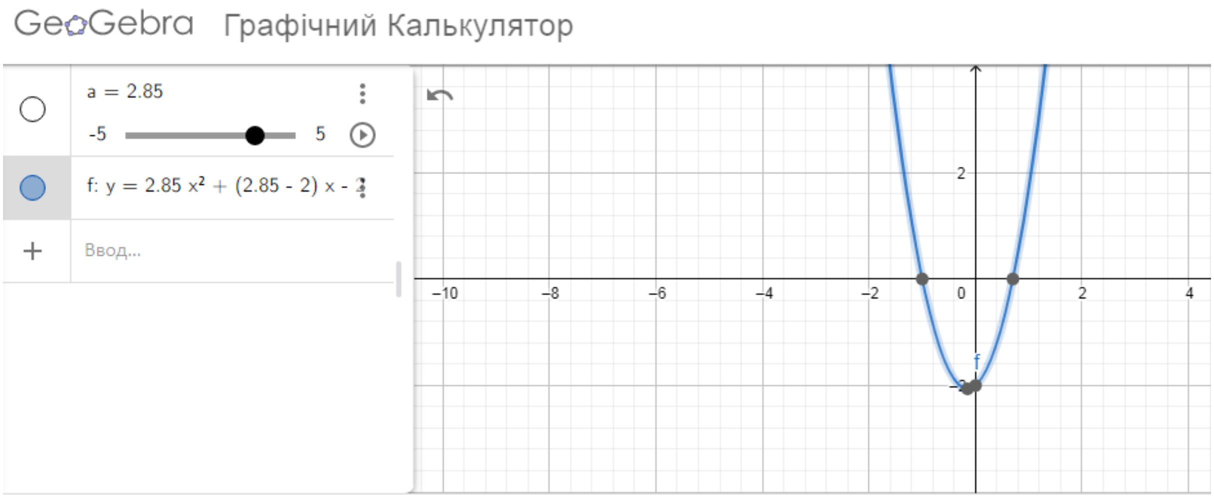


При $a = 1$:



Приклад 5. При яких значеннях параметра а рівняння $ax^2 + (a - 2)x - 2 = 0$ має один корінь?

Розв'язання: квадратне рівняння з параметром має один корінь, якщо коефіцієнт біля x^2 дорівнює нулю або дискримінант рівний нулю. Тобто при $a = 0$ або $a = -2$. Динамічну картину графіка розв'язку можна переглянути за посиланням: https://www.geogebra.org/graphing/snnpqadp.



Слід відмітити, що подібні задачі з параметрами є надзвичайно важливими при формуванні математичної та інформаційної компетентностей. Тому їх доцільно пропонувати на уроках алгебри досить регулярно. Оскільки, незалежно від рівня навчальних досягнень учнів, завжди можна підібрати доступні вправи, які дозволять створити “ситуацію успіху” на уроці, що дасть змогу учню відчути себе у ролі першовідкривача і, таким чином, спонукати до активізації пізнавальної активності, що є надзвичайно важливим завданням в умовах реформи НУШ.

Список використаної літератури

1. Апостолова, Г.В., Ясінський, В.В. (2008) *Перші зустрічі з параметром.* Науково-методичне видання. Київ, “Факт”.

2. Гончаренко Ю.В., Хрузин А.Н. (1996) Системы уравнений с параметрами. Київ, “Кий”.

3. Горнштейн П.І., Полонський В.Б., Якір М.С. (2004) Задачі з параметрами. Тернопіль: підручники і посібники.

4. Крамор, В. С. (2011). *Задачі з параметрами і методи їх розв’язання.* Тернопіль, Навчальна книга -Богдан.

5. Прус, А.В., Швець, В.О. (2018). *Задачі з параметрами в шкільному курсі математики: навч.-метод. посібник.* Житомир: Вид-во ПП «Рута.

6. Репета, В., Клешня, Н., Коробова, М., Репета, Л. (2002). Задачі з параметрами. Розв’язки, рекомендації, приклади: навчальний посібник для старшокласників та абітурієнтів. Тернопіль: підручники і посібники.

7. Ясінський В.В. (1999) Алгебра. Вибрані конкурсні задачі. За ред. акад. Самойленка А.М., Київ, “Вирій”.

Навчальне видання

Віра М.Б.

ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

Навчальний посібник

Підписано до друку	Формат 60x84/16	Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman	Обл.-вид. арк. 2,10	Тираж ел. вид.
Замовлення №	Ум. друк. арк. 3,13	

Ніжинський державний університет
імені Миколи Гоголя
м. Ніжин, вул. Воздвиженська, 3-А
(04631) 7–19–72
E-mail: vidavn_ndu@ukr.net
www.ndu.edu.ua

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
ДК № 2137 від 29.03.05 р.