

**І. В. КАЗАЧКОВ**

# **ТУРБУЛЕНТНІ ДВОФАЗНІ СТРУМЕНІ**

**РІДИН, ЩО НЕ ЗМІШУЮТЬСЯ МІЖ СОБОЮ**



Ніжинський державний університет  
імені Миколи Гоголя  
Королівський технологічний інститут (КТН)

КАЗАЧКОВ Іван Васильович

**Турбулентні двофазні струмені  
рідин, що не змішуються між собою**  
(Математичне моделювання та обчислювальний  
експеримент)

Ніжин - Стокгольм – 2026

УДК 532.529.522.574.695+621.039.588  
К 14

Рекомендовано Вченою радою  
Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя  
(НДУ ім. М. Гоголя)  
Протокол № 8 від 28.01.2026 р.

**Рецензенти:**

*Нестеренко О.В.* – професор, д.т.н.  
*Мельничук О.В.* – професор, д.ф.-м.н.

**Казачков І. В.**

К 14 Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою (математичне та комп'ютерне моделювання перемішування та теплообміну в багатофазних течіях) : монографія. – Ніжин : НДУ ім. М. Гоголя. – 2026. – 202 с.  
ISBN 978-617-527-359-3

Монографія присвячена розробці математичних моделей та чисельних процедур для моделювання особливостей змішування та теплообміну рідин, що не змішуються між собою, у дворідинній турбулентній неоднорідній струминній течії, а також у більш загальному випадку – турбулентних багатофазних струменях та інших течіях. Багато природних і технічних процесів мають справу з турбулентними струменями рідин, що не змішуються між собою, які представляють важливий клас сучасної динаміки багатофазних систем.

Розглянуто диференціальні рівняння для осесиметричної двовимірної стаціонарної течії та інтегральні співвідношення в циліндричній системі координат для струменя рідини, що витікає з сопла в простір, заповнений іншою рідиною, яка не змішується з першою. Змодельовано та проаналізовано параметри турбулентного перемішування у двофазній струминній течії. При чисельному моделюванні виявлено та обговорено явище посилення кінетичної енергії струменя проти енергії, підведеної першою фазою на соплі. Експериментальні дані з водою та нафтою, а також з рідкими металами підтвердили результати чисельного комп'ютерного моделювання. Один із прикладів виконано для моделювання течії високотемпературних розплавів, охолоджуваних водою, при гіпотетичних тяжких аваріях на АЕС. Отримані результати можуть становити інтерес науково-дослідних і прикладних задач, де важливе значення має розрахунок параметрів багатофазного турбулентного перемішування і теплообміну.

УДК 532.529.522.574.695+621.039.588

ISBN 978-617-527-359-3

© Казачков І.В., 2026  
© НДУ ім. М. Гоголя, 2026

## Зміст

Основні умовні позначення.....	6
Вступ .....	7
<b>Розділ 1. Постановка задачі моделювання багатофазної турбулентної течії.....</b>	<b>12</b>
1.1 Багатофазні течії рідин, що не змішуються .....	12
1.2 Введення функції-індикатора для багатофазних потоків .....	13
1.3 Фізика турбулентного двофазного струменя незмішуваних рідин.....	14
1.4 Схематичне зображення турбулентного двофазного струменя .....	15
<b>Розділ 2. Апроксимація профілів швидкості та функція-індикатор .....</b>	<b>17</b>
2.1 Поліноміальні апроксимації для профілів швидкостей фаз .....	17
2.2 Поліноміальні апроксимації для функції-індикатора фаз .....	17
2.3 Особливості кускових наближень для функції-індикатора .....	18
2.4 Реальні профілі для багатофазного потоку .....	19
<b>Розділ 3. Інтегральні співвідношення для початкової та основної частин струменя.....</b>	<b>20</b>
3.1 Початкова частина струминної течії .....	20
3.2 Основна частина струминної течії.....	20
<b>Розділ 4. Перетворення математичної моделі до безрозмірної форми .....</b>	<b>22</b>
4.1 Початкова частина струминної течії .....	22
4.2 Інтегральні параметри вихідної частини.....	22
4.3 Гранична задача для початкової частини струминної течії.....	25
4.4 Перехідна та основна частини струминної течії .....	26
<b>Розділ 5. Розв'язки крайових задач для початкової та основної частини струменя.....</b>	<b>27</b>
5.1 Розв'язок крайової задачі для двофазного струменя на його початковій ділянці .....	27
5.2 Чисельне моделювання початкової частини струменя .....	28
5.2.1 Результати розрахунку початкової частини струменя для $i_0=8.0$ .....	28
5.2.2 Результати розрахунку початкової частини струменя для $i_0=1.0$ .....	44
5.2.3 Розрахунок початкової частини струменя для $i_0=0.8$ та $i_0=1.2$ .....	59
5.2.4 Результати розрахунку початкової частини струменя для $i_0=0,3$ .....	65
5.3 Особливості моделі та граничне значення функції $h(x)$ .....	83
5.3.1 Аналіз граничної задачі та граничних параметрів .....	83
5.3.2 Результати розрахунків для граничних значень параметра $i_0$ .....	88
5.3.3 Результати розрахунку для деяких проміжних значень $i_0$ .....	94
5.3.4 Результати розрахунку для великих граничних значень $i_0$ .....	100

5.4 Чисельне моделювання двофазного струменя в його основній частині .....	113
Розділ 6. Посилення енергії струменя від надходження навколишньої рідини .....	124
6.1 Явище, яке ми вперше зустріли в наших розрахунках .....	124
6.2 Явище в нашому поясненні та з літератури .....	125
Розділ 7. Моделювання турбулентного двофазного струменя в замкненому просторі .....	126
7.1 Особливості розповсюдження струменів у замкненому просторі .....	126
7.2 Підхід до моделювання обмежених струминних течій .....	126
7.3 Граничні умови та припущення .....	127
7.4 Основні безрозмірні рівняння для струменя, обмеженого у початковій частині .....	128
7.5 Основні безрозмірні рівняння для струменя, обмеженого головною частиною .....	128
7.6 Рішення для стаціонарного 2-D аксіально-симетричного двофазного обмеженого струменя .....	129
Розділ 8. Чисельне моделювання турбулентного двофазного обмеженого струменя .....	135
8.1 Результати розрахунку .....	135
8.2 Аналіз результатів .....	136
8.3 Емпіричні константи в чисельному розв'язанні .....	137
8.4 Порівняння комп'ютерного моделювання з експериментальними даними .....	139
Розділ 9. Двофазний струменений проникний басейн та міні-мікро каналні потоки .....	147
9.1 Турбулентний двофазний потік у міні-каналі .....	147
9.2 Стабільність течії в міні-мікро каналі .....	160
9.3 Струминний потік, що проникає в басейн іншої рідини .....	165
9.3.1 Нестійкість тонких струменів, що проникають в басейн іншої рідини .....	165
9.3.2 Довжина проникнення товстих струменів у басейн іншої рідини .....	172
Висновок до монографії .....	179
Список літератури .....	180
Додаток 1. Підхід до моделювання багатофазних потоків як випадкових процесів .....	182
Додаток 2. Платформа FLEX PDE і кілька комп'ютерних програм для розрахунку струменя і двофазного потоку в мініканалі .....	194
Додаток 3. Короткий вступ до комерційних платформ CFD .....	202

## Основні символи

$B_i(t)$  - функція-індикатор для і-ї фази в багатофазному потоці,  $0 \leq B_i(\eta) \leq 1$

$B_1^{(n)}$  - кусково-неперервна функція-індикатор першої фази

$p$ - тиск у потоці,  $\rho$ - густина рідини

$u, v$ - поздовжня та поперечна складові швидкості

$\tau_i$  - турбулентний стрес для і-фази

$r_0$  - радіус сопла

$u_{01}$ - швидкість на соплі

$a$  - ширина потенційного ядра

$b_1$  - внутрішній підшар, що містить зовнішню рідину як дисперсну фазу

$b_2$  - зовнішній підшар, що містить рідину, що виходить із сопла у вигляді дисперсної фази

$\tau_i = \rho_i \kappa_i \delta u_{mi} \partial u_i / \partial y$  - «нова» формула Прандтля для турбулентного напруження у фазі

$\kappa_i$  - коефіцієнт турбулентного перемішування для і-ї фази

$\delta$  - ширина шару змішування

$y = y_0 + \delta$  - загальний переріз потоку (потенційне ядро плюс шар змішування)

$\eta = (y - y_0) / \delta$  - безрозмірна поперечна координата в шарі змішування

$\bar{x} = x / r_0$  - безрозмірна координата вздовж осі течії струменя

$h(x) = \left( \partial^2 B_1 / \partial \eta^2 \right)_{\eta=0}$  - функція, що відповідає за зміну  $B_1$  по  $x$ ,  $h \leq 0$

$y = y^*$  - проміжний переріз у шарі змішування

$y = 0$  - вісь струменя

$\zeta_i, \delta_i$  - безрозмірна довжина струменя та її максимальний радіус (в кінці початкової частини)

$\bar{x} = \frac{x - x_i}{r_0}, \bar{u}_{mi} = \frac{u_{mi}}{u_{0i}}, \bar{u}_i = \frac{u_i}{u_{mi}}, i_0 = n s_0^2, \bar{y}_0 = y_0 / r_0, \bar{\delta} = \delta / r_0, u_{m2} = s_0 u_{m1}$ ,

$\eta = (y - y_0) / \delta, \zeta = \kappa_1 \bar{x}, s_0 = u_{02} / u_{01}, i_0 = n s_0^2, n = \rho_2 / \rho_1, \kappa_{21} = \kappa_2 / \kappa_1$

$\kappa_1, \kappa_2$  - коефіцієнти турбулентного перемішування фаз

$x_i$  - довжина перехідної частини течії струменя

$\delta_i$  - радіус струменя в перехідному перерізі

$h_0$  і  $h_i$  - значення функції  $h$  на початку та в кінці струминної течії відповідно

$B_{mi}$ - функція-індикатор на осі потоку

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$u_{ci}$  - швидкість  $i$ -ї фази в ядрі обмеженого струменя

$x_c$  - початковий переріз утримуючого каналу

$Q$  - Тепловий потік, Вт/м<sup>2</sup>

$t$  - Час, с

$T$  - температура, °К;  $\theta$  - безрозмірна температура;

$u, v, w$  - компоненти вектора швидкості  $\vec{v}$  в декартовій  $x, y, z$  або циліндричній  $r, \varphi, z$  системі координат, м/с

$V$  - Об'єм, м<sup>3</sup>

$\mu$  - Коефіцієнт динамічної в'язкості, Па·с

$q_c$  - витрата теплоносія

$h_{lv}$  - теплота пароутворення

$T_{20}, T_2$  - початкова і поточна температури розплаву відповідно

$M_2$  - маса розплаву в ванні, що охолоджується летючим теплоносієм з форсунок

### **Індекси та математичні символи:**

$O$  - параметри на вході

$m$  - параметри осі течії

$w$  - параметри на стінці каналу

$c$  - навколишнє середовище

\* - параметри потоку в якомусь проміжному перерізі, приклад, середини зони змішування

$s, l$  - параметри твердої та рідкої фаз відповідно

$\Delta$  - різниця параметрів

*Присвячується пам'яті мого першого наставника  
Професора Накорчевського Альфреда Івановича*

## ВСТУП

Багатофазні багатокомпонентні середовища широко представлені в різноманітних природних процесах і сферах діяльності людини. Можна з упевненістю сказати, що з однофазними сумішами ми маємо справу набагато частіше, ніж з однофазними. Тому завдання опису та дослідження таких середовищ є однією з найбільш актуальних і важливих проблем механіки взагалі і механіки суцільних середовищ зокрема. Незважаючи на постійно зростаючий потік публікацій на цю тему та значний прогрес в окремих конкретних багатофазних потоках, механіка гетерогенних середовищ знаходиться, без перебільшення, лише на початку свого справжнього розвитку.

Справа в тому, що гетерогенні середовища характеризуються неймовірною різноманітністю, взаємовпливом і складністю ефектів, що виникають внаслідок нерівномірності. До таких ефектів належать фазові переходи, хімічні реакції, теплообмін, силова взаємодія між фазами, капілярні ефекти, пульсаційний і хаотичний рух фаз, деформація фаз, різноманітні інші процеси: зіткнення, дроблення, коагуляція частинок тощо.

Основною проблемою теоретичного опису і математичного моделювання різних багатофазних і багатокомпонентних течій і теплообміну є побудова замкнених рівнянь руху суміші із заданими або змінними фізико-хімічними властивостями кожної фази і компонента окремо, а також заданою вихідною структурою суміші. Опис реальних гетерогенних сумішей ускладнюється двома основними причинами:

- По-перше, це ускладнює опис процесів в окремих фазах (таких як стисливість, в'язкість, теплопровідність тощо), які також відбуваються в однофазних середовищах.
- По-друге, виникає проблема опису ефектів міжфазної взаємодії (таких як фазові переходи, хімічні реакції, капілярні ефекти, обмін імпульсом та енергією на межі розділу фаз).

Таким чином, кількість явищ, які необхідно відобразити в рівняннях, збільшується в рази. Все це призводить до наступної ситуації: незважаючи на те, що загальні принципи побудови багатофазних моделей були

сформульовані більше 50 років тому, тепер зрозуміло, що немає ніяких надій на отримання універсального рівняння руху для довільного багатофазного середовища, як це можна було зробити для однорідної рідини (рівняння Нав'є-Стокса).

Конкретне поєднання фаз і компонентів у багатофазній багатокомпонентній течії, їх структура, способи їх взаємодії та різноманітного перетворення в кожній конкретній задачі потребує зусиль для отримання специфічних для кожної такої системи модельних рівнянь. Більш того, навіть в рамках однієї чітко сформульованої задачі необхідно виводити різні системи визначальних рівнянь для різних діапазонів значень параметрів. Оцінка різноманітності типів гетерогенних середовищ (суспензій, емульсій, газових суспензій, бульбашкових середовищ, потоків незмішуваних рідин, таких як нафта і вода) наочно показує драматичну складність таких потоків. Крім того, неймовірна різноманітність явищ, що відбуваються в різних багатофазних потоках, вимагає побудови складних локальних моделей у кожному конкретному випадку. Вивчення властивостей неоднорідних, гетерогенних середовищ було зосереджено в кількох світових центрах, кожен з яких мав свою спеціалізацію.

У рамках своєї спеціалізації кожен центр досяг значних успіхів, але через певну інертність спроби вийти за рамки, окреслені його школою, були боязкими й епізодичними. Можна навести такий приклад, з яким автору доводилося стикатися особисто. Наприклад, у світі добре відома брюссельська школа, яка успішно вивчає нелінійну динаміку реакційно-дифузійних процесів у багатокомпонентних середовищах. При всьому розмаїтті явищ, що виникають при хімічних реакціях, дослідники цієї школи тривалий час практично ігнорували вивчення реакційних процесів в умовах тепломасообміну. З іншого боку, пермська гідродинамічна школа, відома в світі своїми дослідженнями в області теплової конвекції.

Незважаючи на різноманіття проблем, що розглядаються, питання конвективної стійкості багатофазних, багатокомпонентних середовищ розглядалися не часто і в дуже спрощеній постановці (бінарна суміш без реакції, реакція з фіксованою концентрацією реагенту, штучно нав'язаний закон Арреніуса тощо). При цьому цілком очевидно, що при, наприклад, екзотермічній реакції відбувається інтенсивне виділення тепла, що призводить до виникнення вільної конвекції. Конвективний рух, у свою чергу, призводить до змішування реагентів і інтенсифікації реакції. Ці два явища нелінійно

взаємодіють одне з одним у динаміці. Така взаємодія, очевидно, може призвести до абсолютно нових перехресних явищ.

Особливий інтерес становлять питання керування нерівноважними процесами в неоднорідних середовищах. Наявність різних за своєю фізичною природою механізмів розвитку збурень робить неоднорідні конвективні потоки чутливими до дії всіх видів зовнішніх і внутрішніх факторів. Вивчення механізмів і характеристик нестійкості в різних ситуаціях цікаве не тільки з точки зору фундаментальних уявлень сучасної гідродинаміки багатофазних середовищ, а й у зв'язку з практично важливою задачею керування стійкістю різних станів, що виникають у цих середовищах.

Існує два основних способи управління: без зворотного зв'язку і зі зворотним зв'язком. Перший спосіб можна назвати «придушенням» небажаного просторово-часового динамічного режиму. Цей метод може включати будь-яку зовнішню дію на систему, яка дає бажаний ефект. Наприклад, параметрична дія на рідину за допомогою коливань може призводити до стабілізації конвективних рухів або до їх динамічного збудження (при певному співвідношенні амплітуди і частоти модуляції силового поля). Другий спосіб, «контроль», більш розумний. Зворотний зв'язок в теорії управління - це процес, в результаті якого функціонування системи впливає на параметри, від яких залежить функціонування цієї системи.

Багато природних і технічних процесів пов'язані з турбулентним перемішуванням і теплопередачею в струменях рідин, що не змішуються між собою, які представляють важливий клас динаміки сучасних багатофазних систем. У цій монографії розглядаються диференціальні рівняння для осесиметричного двовимірного стаціонарного струменя та інтегральні кореляції в циліндричній системі координат для вільного та обмеженого струменя. Змодельовано та проаналізовано параметри турбулентного перемішування у вільному струмені та у двофазній течії в камері.

Алгоритми моделювання та отримані результати можуть становити інтерес для деяких науково-дослідних та прикладних задач, де важливе значення мають розрахунок параметрів багатофазного турбулентного перемішування та теплообміну. Дана робота присвячена розробці математичних моделей і чисельних процедур для моделювання особливостей змішування і теплообміну рідин, що не змішуються між собою, у дворідинному турбулентному неоднорідному струминному потоці, а також у більш загальному випадку - турбулентних багатофазних струменях.

При чисельному моделюванні виявлено та обговорено явище посилення кінетичної енергії струменя проти енергії, підведеної першою фазою на соплі. Експериментальні дані з водою та нафтою, а також з рідкими металами підтвердили результати чисельного комп'ютерного моделювання. Один із прикладів виконано для моделювання течії високотемпературних розплавів, охолоджених водою, при гіпотетичних важких аваріях на АЕС. Отримані результати можуть становити інтерес для ряду задач, де важливе значення має розрахунок параметрів багатофазного турбулентного перемішування і теплообміну.

Метод математичного моделювання та імітації гетерогенних турбулентних струменів рідин, що не змішуються, а також фізичний експериментальний датчик були запропоновані професором Накорчевським [1] у 1970-х роках. Він був далі розроблений для різних проблем і з того часу повідомлявся в багатьох публікаціях, напр. [2-7]:

Виведено аналог рівнянь Нав'є-Стокса в примежово підході та запропоновано алгоритм розв'язання на основі поліноміальних апроксимацій профілів [1].

Основною метою даної роботи є розробка математичної моделі та комп'ютерної програми процесів змішування та теплообміну в дворідинному турбулентному гетерогенному струмені рідин, що не змішуються між собою. Багато природних і технічних процесів (особливо - хіміко-технологічних) мають справу з цією проблемою, наприклад, масляно-водяні турбулентні струмені, де важливо знати розподіл фаз у потоці, а не тільки параметри потоку. Застосування методу може бути корисним у деяких інших важливих інженерних задачах, тому метод розроблено для ширшої галузі, а також підготовлено чисельний підхід та комп'ютерну програму для моделювання.

Розглянуто та проаналізовано диференціальні рівняння для аксіально-симетричної двовимірної стаціонарної течії та інтегральні кореляції в циліндричній системі координат для струменя рідини, що йде з сопла в басейн іншої рідини, яка не змішується з першою. Оригінальний метод заснований на введенні так званої функції-індикатора фаз. Це добре зарекомендувало себе при розв'язанні деяких практичних завдань і успішно порівняно з експериментальними даними. Метою є подальший розвиток та обґрунтування методу та підготовка легкого інструментарію для його практичного застосування.

Результати можуть бути цікаві для фахівців з багатофазних турбулентних струменів, оскільки дозволяють розрахувати важливі характеристики, які неможливо отримати існуючими методами. Також може бути прочитаний курс

лекцій з моделювання таких потоків. Метод був доведений успішним для кількох важливих інженерних проблем протягом кількох десятків років, але в основному всі результати були опубліковані в Україні. Автор був першим, хто працював над реалізацією методу під керівництвом професора Накорчевського, який запросив його після закінчення університету працювати математичним моделювальником і програмістом. Це було зроблено для нього в 1976-1981, оскільки він не мав серйозних знань у математиці та програмуванні. Після цього автор даної монографії працював в іншій галузі гідродинаміки.

У 2016 році професора Накорчевського не стало, і ми подивились на його досягнення у застосуванні методу до різноманітних інженерних задач. За ці роки були опановані різні нові математичні методи і підходи, а також програмні засоби, математичні та інші навички. Крім того, інтенсивний розвиток прикладної математики, інформатики та чисельних методів протягом останніх десятиліть показав, що зараз необхідний подальший розвиток методу на значно вищому рівні, щоб зробити його застосовним для багатьох інших інженерних задач.

## **Розділ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОФАЗНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКУ**

### **1.1 Багатофазні течії рідин, що не змішуються**

Деякі рідини, такі як нафта та вода, не змішуються через те, що вони течуть разом, як багатофазна система. Наприклад, у турбулентному струмені таких двох рідин одна чи інша знаходяться в потоці у вигляді крапель або маленьких крапельок всередині іншої рідини. Тому звичайні методи гідродинаміки в цьому випадку не працюють і не описують цей вид течії. Але в ряді застосувань важливо знати, як фази розподіляються в об'ємі потоку і як вони взаємодіють одна з одною. Без цього, обчислення параметрів потоку є дуже приблизним і може бути навіть абсолютно неправильним.

Вперше ми зіткнулися з такою проблемою, коли розробляли нову струминну сталеплавильну машину в Україні у 1970-1980 роках. Запропоновано новий метод багатофазних струминних течій, який був застосований і виявився успішним. Також був винайдений і розроблений спеціальний двофазний датчик для експериментальних досліджень, щоб вимірювати як параметри потоку, так і кількість кожної з фаз двофазного потоку у кожній точці. Протягом останніх 30 років українська наука фінансувалася на дуже низькому рівні, і цей метод не був розроблений для застосування в ширшій сфері.

В даний час прогрес у всіх напрямках науки і техніки, включаючи мікроелектроніку і інформатику, дає можливість розробити метод для більш легкого і широкого застосування в ряді задач хімічної технології, харчової промисловості, металургії і т.д. Також доступна розробка і запропонування для промислового виробництва спеціальних мікросенсорів для багатофазних потоків. Ми маємо намір розробити метод і комп'ютерні програми для його реалізації, зробити простий інструмент доступним для науковців та інженерів для розрахунку параметрів потоків двох незмішуваних рідин. У довгостроковій перспективі його можна поширити більш ніж на 2 фази.

Результати проекту можуть бути корисними для деяких важливих галузей, які дадуть прибуток. За допомогою цього методу ми розраховували параметри нового струминного процесу виробництва сталі, який був успішно випробуваний, але не реалізований через відсутність матеріалів, що працюють в агресивному високотемпературному середовищі. Якщо такі матеріали зараз доступні завдяки досягненням матеріалознавства та технології, тоді у співпраці з матеріалознавцями будуть розроблені струменеві машини для виробництва сталі.

## 1.2 Введення функції-індикатора для багатофазних потоків

Усі параметри  $a^l(t)$  (густина рідини, швидкість потоку, температура тощо) суміші в турбулентному багатофазному потоці розглядаються відповідно до методу, запропонованого проф. Накорчевським [1], розробленого та описаного в багатьох публікаціях, напр. [2-7]. Аналог рівнянь Нав'є-Стокса в підході примежового шару був отриманий у такому вигляді [1]:

$$\sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial}{\partial x} (y \rho_i B_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y} (y \rho_i B_i v_i) \right] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m \rho_i B_i \left( u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y \sum_{i=1}^m B_i \tau_i \right]_m, \quad (1)$$

де  $a^l(t) = \sum_{i=1}^m B_i(t) a_i^l(t)$ ,  $\sum_{i=1}^m B_i = 1$ . Функція-індикатор  $B_i(t)$  була введена для фаз багатофазного потоку наступним чином:

$$B_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } i - \text{phase occupies the elementary volume } \delta V \\ 0, & \text{if } i - \text{phase is outside the elementary volume } \delta V \end{cases}$$

У стаціонарних рівняннях (1) течії нестисливої рідини, записаних у циліндричній системі координат, є:  $p$ - тиск,  $\rho$ - густина,  $u, v$ - поздовжня і поперечна складові швидкості,  $\tau_i$  - турбулентне напруження для  $i$ -фази. Усі параметри потоку усереднюються на характерному інтервалі за обраним часом. Індекс  $m$  належить значенням на осі потоку (вісь симетрії).

Функцію-індикатор фази в багатофазній течії можна розглядати як математичне сподівання, на відміну від інших багатофазних підходів [8-10], які базуються на введенні об'ємного питомого вмісту фази в багатофазній течії. Тим не менш, використання функції-індикатора дозволяє розрахувати об'ємний питомий вміст фаз, які були введені іншими багатофазними підходами.



## 1.4 Схематичне зображення турбулентного двофазного струменя

Структурна схема процесу перемішування на рис. 2 спрощена: початкова ділянка довжини  $x_i$  з приблизно лінійними межами для конічної поверхні (в циліндричній системі координат) внутрішнього ядра першої фази та зони змішування між внутрішньою та зовнішньою межами струменя. Турбулентна зона містить фрагменти фаз, оскільки рідини, що не змішуються, мають поведінку, як окремі фази, з їхніми міжфазними множинними поверхнями. Перша фаза в потенційному ядрі повністю витрачається в початковій частині зони змішування. Далі йде коротка транзитна зона. Після цього починається основна частина двофазного струменя, причому дві фази добре перемішуються по всьому шару струменя.

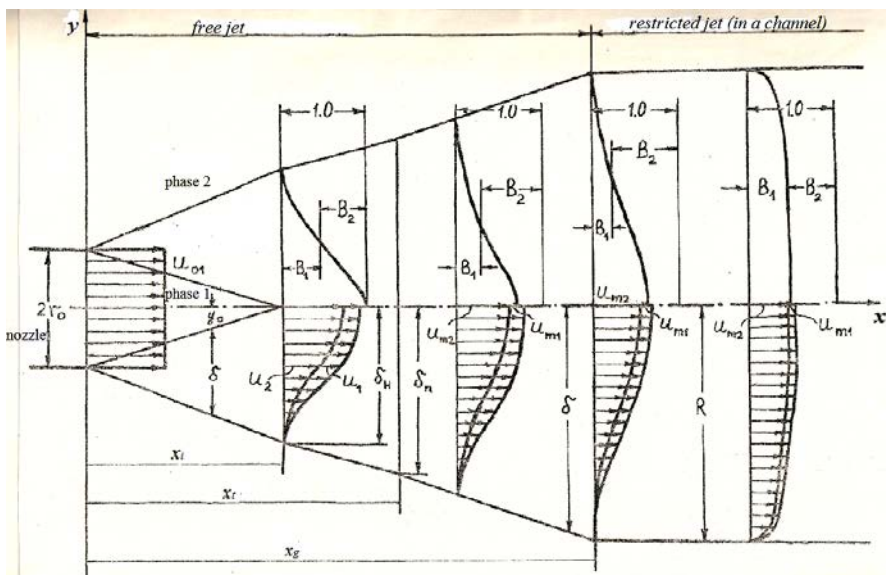


Рис. 2 Схематичне зображення турбулентного струменя з сопла в навколишньому басейні незмішуваної рідини, обмеженому циліндричним каналом на відстані  $x_g$

Крім параметрів фаз, функція-індикатор фази  $B_i(t)$ , яка показує вплив  $i$ -ї фази в кожній точці простору. Зазвичай просторове усереднення рівнянь збереження маси, імпульсу та енергії виконується для опису багатofазних

потоків на основі концепції об'ємного вмісту фази [8-10], яка не так добре підходить для експериментального дослідження руху окремих фаз у суміші. На відміну від цього, підхід [1] з його спеціальною експериментальною технологією та мікродатчиком для вимірювань у двофазних потоках добре підходить для таких потоків. Насправді всі відомі методи багатозфазних потоків добре пов'язані, і параметри, усереднені за часом [1], легко перетворюються на усереднені за простором [8-10].

Зовнішня межа зони змішування визначається нульовою поздовжньою швидкістю другої фази і нульовою поперечною швидкістю першої фази (друга фаза всмоктується з нерухомого оточення в зону змішування). Функція-індикатор першої фази  $B_1(t)$  дорівнює нулю на зовнішній межі розділу, оскільки вона відсутня в навколишньому середовищі.

Подібним чином функція-індикатор  $B_2(t)$  дорівнює нулю на межі потенційного ядра, поверхні розділу першої фази, що витікає з сопла. У першому наближенні нехтують впливом маси, в'язкої та капілярної сил. Враховуючи вищесказане, граничні умови можна записати так [1]:

$$\begin{aligned} y=y_0, \quad u_i= u_{0i}, \quad v_i=0, \quad \tau_i=0, \quad B_1=1, \quad \partial B_1 / \partial \eta = 0 ; \\ y=y_0+\delta, \quad u_i= 0, \quad v_i=0, \quad \tau_i=0, \quad B_1=0. \end{aligned} \quad (2)$$

А залежність функції-індикатора  $B_1$  від поздовжньої координати  $x$  вводиться через другу її похідну на межі струменя  $y=y_0$ :  $\partial^2 B_1 / \partial \eta^2 = h(x)$ .

## Розділ 2. АПРОКСИМАЦІЯ ПРОФІЛІВ ШВИДКОСТІ ТА ФУНКЦІЇ-ІНДИКАТОРА

Турбулентне напруження у фазі визначається «новою» формулою Прандтля  $\tau_i = \rho_i \kappa_i \delta u_{mi} \partial u_i / \partial y$ , де  $\kappa_i$  – коефіцієнт турбулентного перемішування для  $i$ -ї фази,  $\delta$  – ширина шару змішування.

### 2.1 Поліноміальні апроксимації для профілів швидкостей фаз

Виходячи зі структурної схеми розглянутого двофазного струменя, використовуємо поліноміальні наближення для профілів швидкості впоперек шару змішування. Апроксимації отримано за граничними умовами (2) [1, 2]:

$$u_1 / u_{01} = 1 - 4\eta^3 + 3\eta^4, \quad (3)$$

$$u_2 / u_{02} = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4, \quad (4)$$

де  $\eta = (y - y_0) / \delta$  - безрозмірна координата поперек шару струминного змішування.

### 2.2 Поліноміальні апроксимації для функції-індикатора фаз

Апроксимації для функції-індикатора через шар змішування були отримані на основі граничних умов (2) [1, 2] таким чином:

$$B_1 = B_1^{(0)} = 1 - \eta^3 + 0.5\eta^2(1 - \eta)h(x), \quad h \in [-6, 0],$$

$$B_1 = B_1^{(1)} = 1 - 4\eta^3 + 3\eta^4 + 0.5\eta^2(1 - \eta)^2 h(x), \quad h \in [-12, -6], \quad (5)$$

$$B_1 = B_1^{(2)} = 1 - 10\eta^3 + 15\eta^4 - 6\eta^5 + 0.5\eta^2(1 - \eta)^3 h(x), \quad h \in [-20, -12],$$

$$B_1 = B_1^{(3)} = 1 - 20\eta^3 + 45\eta^4 - 36\eta^5 + 10\eta^6 + 0.5\eta^2(1 - \eta)^4 h(x), \quad h \in [-30, -20],$$

$$B_1 = B_1^{(4)} = 1 - 35\eta^3 + 105\eta^4 - 126\eta^5 + 70\eta^6 - 15\eta^7 + 0.5\eta^2(1 - \eta)^5 h(x), \\ h \in [-42, -30],$$

$$B_1^{(5)} = 1 - 56\eta^3 + 210\eta^4 - 336\eta^5 + 280\eta^6 - 120\eta^7 + 21\eta^8 + 0.5\eta^2(1 - \eta)^6 h(x), \\ h \in [-56, -42],$$

$$B_1^{(6)} = 1 - 84\eta^3 + 378\eta^4 - 756\eta^5 + 840\eta^6 - 540\eta^7 + 189\eta^8 - 28\eta^9 + \\ + 0.5\eta^2(1 - \eta)^7 h(x), \quad h \in [-72, -56],$$

де  $h(x) = \left( \partial^2 B_1 / \partial \eta^2 \right)_{\eta=0}$  відповідає за зміну  $B_1$  за координатою  $x$ . Функція  $h(x)$  може варіюватися в діапазоні  $h \leq 0$  через вимоги до її природи: кожна фаза в багатофазному потоці може мати вміст від 0 до 1.

Перше апроксимація  $B_1(\eta)$  в (5) виявляє обмежене застосування в діапазоні  $h \in [-6, 0]$ , а поза цією областю не задовольняє граничним умовам (2) і умові  $0 \leq B_1(\eta) \leq 1, \forall \eta \in [0, 1]$ . Тому всі наступні наближення  $B_1(\eta)$  в (5) були отримані як перехід кусково-неперервної функції-індикатора  $B_1^{(n)}$  до її наступного наближення за умови рівності нулю похідної по  $\eta$  точці  $\eta = 1$  до  $(n+1)$ -го порядку (така умова плавної зміни для функції-індикатора).

### 2.3 Особливості кускових наближень функції-індикатора

Ці функції  $B_1^{(n)}$  мають розриви в точках переходу постійної характеристичної функції  $B_1^{(n)}(\eta, h)$  від одного регіонального наближення до іншого (перша похідна має розрив у цих точках). Перевагою таких наближень є те, що всі функції  $B_1^{(n)}$  плавно переходять з однієї області по  $h(x)$  в наступну, як показано на рис. 3:

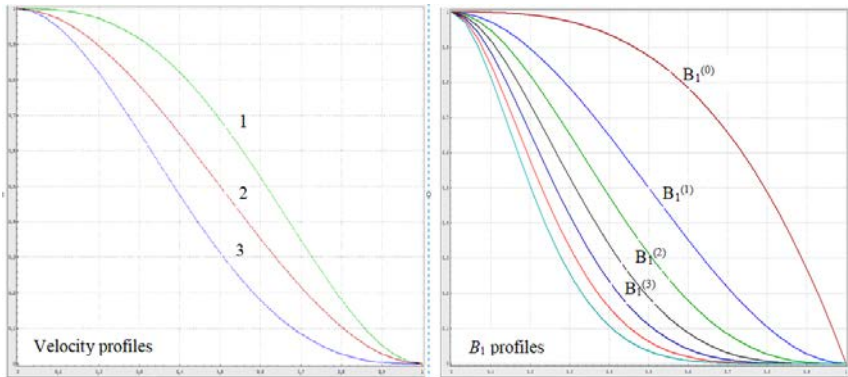


Рис. 3 Профілі швидкості та функції-індикатора  $B_1^{(n)}$  поперек шару:

$$1 - u_1 / u_{01}, 2 - u_1 / u_{m1}, 3 - u_2 / u_{02}$$

де представлені всі поліноміальні апроксимації (3)-(6). Для функції  $u_1$  апроксимація на основній частині струменя має такий вигляд (згідно з рис. 2):

$$u_1 / u_{m1} = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 \quad (6)$$

## 2.4 Реальні профілі для багатофазного потоку

Реальні профілі для багатофазного потоку представлені як добуток відповідного профілю, розглянутого вище, помноженого на його функцію-індикатор. Вони показані на рис. 4 для кількох областей варіації  $h(x)$ :

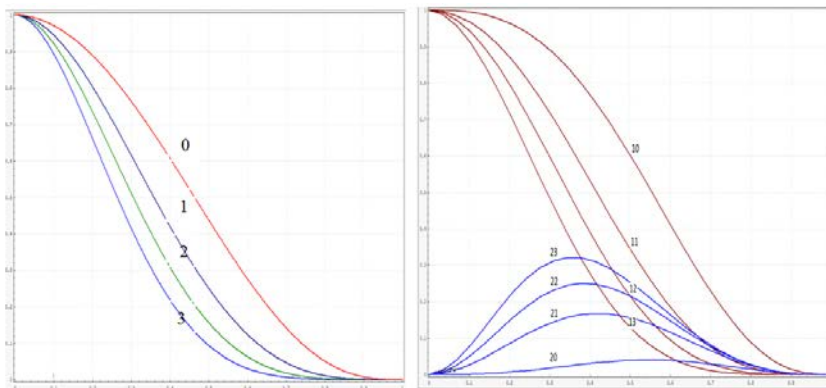


Рис. 4 Реальні профілі швидкостей фаз для кількох значень функції  $h(x)$ : 0, -6, -12, -20 праворуч 10-13:  $B_1 u_1 / u_{01}$ , 20-23:  $B_2 u_2 / u_{02}$ ; зліва 0-3:  $B_1 u_1 / u_{m1}$

Кожна функція  $B_1^{(n)}$  точно збігається з попередньою  $B_1^{(n-1)}$  на межі сполучення, де закінчується  $B_1^{(n-1)}$  і починається  $B_1^{(n)}$ . Фізичний зміст змінних наближень  $B_1^{(n)}$  визначається залежністю розподілу фаз у шарі змішування від співвідношення густин змішуваних фаз: чим вище щільність навколишньої рідини, тим коротше проникнення першої, більш легкої фази, в шар змішування. Недоліком таких наближень є зростання складності функцій  $B_1^{(n)}$  в аналітичних обчисленнях, з якими, тим не менш, легко боротися за допомогою комп'ютерних символьних обчислень. Неможливо отримати загальне наближення для  $B_1(\eta, h)$ , що задовольняє граничні умови (2) у всіх діапазонах за параметром  $i_0$  (через вимогу варіації  $B_1$  від 0 до 1). Поліноміальні наближення для  $u_2$ ,  $B_1$  залишаються незмінними на головній частині струменя.

## Розділ 3. ІНТЕГРАЛЬНІ КОРЕЛЯЦІЇ ДЛЯ ПОЧАТКОВОЇ ТА ОСНОВНОЇ ЧАСТИН СТРУМЕНЯ

### 3.1 Початкова частина струминної течії

На основі (3)-(5) отримано інтегральні кореляції для двофазного турбулентного струменя [1, 2], інтегруючи рівняння збереження маси та імпульсу (1) з граничними умовами (2) для повного перерізу потоку  $y=y_0+\delta$ , а також збереження імпульсу для  $y=y^*$ , відповідно:

$$\begin{aligned}
 u_{01}(r_0^2 - y_0^2) &= 2\delta \int_0^1 B_1 u_1(y_0 + \delta\eta) d\eta, \quad B_1 + B_2 = 1, \\
 \rho_1 u_{01}^2 (r_0^2 - y_0^2) &= 2\delta \int_0^1 (\rho_1 B_1 u_1^2 + \rho_2 B_2 u_2^2)(y_0 + \delta\eta) d\eta, \quad (7) \\
 \rho_1 u_{01} (u_{01} - u_1^*) y_0 y_0' &+ \frac{d}{dx} \delta \int_0^{\eta^*} \sum_{j=1}^2 \rho_j B_j u_j^2 (y_0 + \delta\eta) d\eta - \\
 - \sum_{j=1}^2 u_j^* \frac{d}{dx} \delta \int_0^{\eta^*} \rho_j B_j u_j (y_0 + \delta\eta) d\eta &= (y_0 + \delta\eta^*) \sum_{j=1}^2 \rho_j B_j \kappa_j u_{0j} \frac{\partial u_j^*}{\partial \eta}.
 \end{aligned}$$

Перше рівняння системи (7) полягало в інтегруванні рівняння збереження маси за  $y$ , друге та третє – в інтегруванні збереження імпульсу для повного потоку двофазної суміші для  $y=y_0+\delta$  і  $y=y^*$ , відповідно. Параметри при  $\eta=\eta^* < 1$  позначені зірочкою \*.

### 3.2 Основна частина струминної течії

Інтегральні співвідношення для основної частини струменя такі [1]:

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{\delta} B_1 u_1 y dy &= u_{01} r_0^2, \quad 2 \sum_{j=1}^2 \int_0^{\delta} \rho_j B_j u_j^2 y dy = \rho_1 u_{01}^2 r_0^2, \quad (8) \\
 \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^2 \int_0^{y^*} \rho_j B_j u_j^2 y dy &- \sum_{j=1}^2 u_j^* \frac{d}{dx} \int_0^{y^*} \rho_j B_j u_j y dy = y^* \sum_{j=1}^2 B_j^* \tau_j^*,
 \end{aligned}$$

де перше – рівняння збереження маси для першої фази, друге та третє – рівняння збереження імпульсу для повного та частини поперечного перерізу відповідно за методикою [2]. Інтегральні кореляції для головної частини струменя отримано аналогічно початковій частині. Рівняння імпульсу для

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

повного та для частини перерізу відповідно отримано згідно з [11]. Також використовується рівняння імпульсу на осі струменя ( $y=0$ ):

$$\sum_{j=1}^2 \rho_j B_{mj} u_{mj} \frac{du_{mj}}{dx} = 2 \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{\partial}{\partial y} (B_j \tau_j) \right]_m. \quad (9)$$

Математична модель (7)-(9), що включає звичайні диференціальні рівняння за поздовжньою координатою  $x$ , використовується для аналізу та чисельного моделювання основних особливостей турбулентних стаціонарних двофазних струменів двох незмішуваних рідин. Функціональний індикатор  $B_1$  показує, наскільки велика присутність першої фази у вибраній точці зони змішування, яку можна прямо порівняти з експериментальними даними двофазного датчика [1]. Тому розв'язок задачі може дати обидва параметри потоку разом із їх приналежністю до певної фази.

## Розділ 4. ПЕРЕТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДО БЕЗРОЗМІРНОГО ВИДУ

### 4.1 Початкова частина струминної течії

Масив рівнянь (7) для початкової частини струменя перетворюється до наступного безрозмірного вигляду з масштабами  $r_0$ ,  $\delta$ ,  $u_{0i}$  для поздовжньої та поперечної координат і швидкості, відповідно:

$$y_0^2 + 2\delta \sum_{j=1}^2 y_0^{2-j} \delta^{j-1} a_j = 1, \quad y_0^2 + 2\delta \sum_{j=1}^2 y_0^{2-j} \delta^{j-1} (a_{j+2} + i_0 b_{j+2}) = 1,$$

$$(1 - u_1^*) y_0 \frac{dy_0}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta} \delta \sum_{j=1}^2 y_0^{2-j} \delta^{j-1} (a_{j+2}^* + i_0 b_{j+2}^*) -$$

$$-\frac{d}{d\zeta} \delta \sum_{j=1}^2 y_0^{2-j} \delta^{j-1} (a_{j+1}^* + i_0 b_{j+1}^*) = (y_0 + \delta \eta^*) \sum_{j=1}^2 B_j^* \left( \frac{\partial u_j}{\partial \eta} \right)^* (i_0 \kappa_{21})^{j-1}.$$

Тут значення, позначені зірочками, прийняті за  $\eta = \eta^*$ . Зазвичай це прийнято  $\eta^* = 0.5$ . Інші позначення такі:

$$\bar{y}_0 = y_0 / r_0, \quad \bar{\delta} = \delta / r_0, \quad \eta = (y - y_0) / \delta, \quad \bar{x} = x / r_0, \quad \zeta = \kappa_1 \bar{x},$$

$$s_0 = u_{02} / u_{01}, \quad i_0 = n s_0^2, \quad n = \rho_2 / \rho_1, \quad \kappa_{21} = \kappa_2 / \kappa_1, \quad a_i = a_{i1} + a_{i2} h,$$

$$a_i = \int_0^1 B_1 \bar{u}_1 \eta^{j-1} d\eta, \quad b_i = \int_0^1 B_2 \bar{u}_2 \eta^{j-1} d\eta \quad (i=1, 2); \quad a_i = \int_0^1 B_1 \bar{u}_1^2 \eta^{j-1} d\eta,$$

$$b_i = b_{i1} + b_{i2} h, \quad b_i = \int_0^1 B_2 \bar{u}_2^2 \eta^{j-1} d\eta \quad (i=3, 4); \quad j=1, 2. \quad (11)$$

### 4.2 Інтегральні параметри початкової частини

Розрахункові значення інтегральних параметрів у (11) виконано в діапазоні зміни функції  $h(x)$  згідно з апроксимацією профілів швидкості (3), (4) та функції-індикатора фази  $B_1$  (5). Як показано нижче, здебільшого область параметра  $h(x)$  охоплена в (5) для досить широкого співвідношення густини змішуваних рідких фаз. Коефіцієнти  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  відповідно до (11), (3)-(5) представлені в табл. 1 і табл. 2. Інтегральна кореляція для частини шару змішування в системі (10) розглядалася при  $\eta = 0.5$ . Відповідні коефіцієнти  $a_{ij}^*$ ,  $b_{ij}^*$  для цієї середньої ділянки шару змішування наведені в таблицях 3, 4:

Таблиця 1 – Інтегральні параметри  $a_{ij}$  моделі для різних областей функції-індикатора  $B_1$

Значення $a_{ij}$ для $h$ :	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{41}$	$a_{42}$
$h \in [0, -6]$	0.5464	0.0208	0.1667	0.0101	0.4604	0.0139	0.1198	0.0059
$[-6, -12]$	0.4857	0.0107	0.1333	0.0046	0.4250	0.0080	0.1027	0.0030
$[-12, -20]$	0.4310	0.0062	0.1065	0.0023	0.3884	0.0049	0.0866	0.0017
$[-20, -30]$	0.3844	0.0038	0.0859	0.0013	0.3542	0.0032	0.0728	0.0010
$[-30, -42]$	0.3455	0.0025	0.0703	0.00078	0.3237	0.0022	0.0614	0.00064
$[-42, -56]$	0.3128	0.0017	0.0583	0.00049	0.2969	0.0016	0.0522	0.00042
$[-56, -72]$	0.2853	0.0013	0.0490	0.00032	0.2734	0.0012	0.0447	0.00028

Таблиця 2 – Інтегральні параметри  $b_{ij}$  моделі для різних областей функції-індикатора  $B_1$

Значення $b_{ij}$ для $h$ :	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{41}$	$b_{42}$
$[0, -6]$	0.0179	-0.0101	0.0095	-0.0042	0.0054	-0.0048	0.0023	-0.0016
$[-6, -12]$	0.0429	-0.0060	0.0214	-0.0022	0.0149	-0.0032	0.0059	-0.00097
$[-12, -20]$	0.0690	-0.0038	0.0327	-0.0012	0.0625	-0.0023	0.0098	-0.00062
$[-20, -30]$	0.0939	-0.0025	0.0424	-0.00076	0.0390	-0.0016	0.0141	-0.00042
$[-30, -42]$	0.1167	-0.0018	0.0506	-0.00049	0.0515	-0.0012	0.0180	-0.00029
$[-42, -56]$	0.1371	-0.0013	0.0573	-0.00032	0.0637	-0.00092	0.0215	-0.00021
$[-56, -72]$	0.1552	-0.00096	0.0629	-0.00022	0.0752	-0.00072	0.0246	-0.00015

Таблиця 3 – Інтегральні параметри  $a_{ij}^*$  моделі для різних областей функції-індикатора  $B_1$

Значення $a_{ij}^*$ для $h$ :	$a_{11}^*$	$a_{12}^*$	$a_{21}^*$	$a_{22}^*$	$a_{31}^*$	$a_{32}^*$	$a_{41}^*$	$a_{42}^*$
$h \in [0, -6]$	0.4436	0.0110	0.1029	0.0038	0.4103	0.0094	0.0902	0.0032
$[-6, -12]$	0.4206	0.0071	0.0941	0.0024	0.3912	0.0062	0.0831	0.0020
$[-12, -20]$	0.3920	0.0062	0.0836	0.0015	0.3673	0.0042	0.0745	0.0012
$[-20, -30]$	0.3619	0.0033	0.0730	0.00097	0.3416	0.0029	0.0657	0.00084
$[-30, -42]$	0.3327	0.0023	0.0631	0.00064	0.3164	0.0021	0.0574	0.00056
$[-42, -56]$	0.3069	0.0016	0.0548	0.00043	0.2936	0.0015	0.0503	0.00039
$[-56, -72]$	0.2814	0.0012	0.0468	0.00030	0.2711	0.0011	0.0434	0.00027

Таблиця 4 – Інтегральні параметри  $b_{ij}^*$  моделі для різних областей функції-індикатора  $B_1$

Значення $b_{ij}^*$ для $h$ :	$b_{11}^*$	$b_{12}^*$	$b_{21}^*$	$b_{22}^*$	$b_{31}^*$	$b_{32}^*$	$b_{41}^*$	$b_{42}^*$
$h \in [0, -6]$	0.0075	-0.0142	0.0028	-0.0047	0.0039	-0.0085	0.0014	-0.0025
$[-6, -12]$	0.0214	-0.0048	0.0079	-0.0015	0.0114	-0.0030	0.0039	-0.00083
$[-12, -20]$	0.0392	-0.0033	0.0141	-0.00096	0.0214	-0.0022	0.0071	-0.00057
$[-20, -30]$	0.0585	-0.0023	0.0206	-0.00064	0.0328	-0.0016	0.0106	-0.00039
$[-30, -42]$	0.0777	-0.0017	0.0267	-0.00044	0.0446	-0.0012	0.0140	-0.00028
$[-42, -56]$	0.0954	-0.0012	0.0320	-0.00030	0.0560	-0.00091	0.0172	-0.00020
$[-56, -72]$	0.1130	-0.00094	0.0372	-0.00022	0.0675	-0.00071	0.0202	-0.00015

Крім вищесказаного, для безрозмірних параметрів ми зберігаємо ті ж позначення, що і для розмірних. Тільки тут в (11) це зазначено для уточнення безрозмірних позначень.

### 4.3 Крайова задача для початкової частини струминної течії

Коефіцієнт ковзання  $s_0$  має бути постійним. Граничні умови (2) для системи (10) перетворюються як

$$\zeta=0, \quad y_0=1, \quad \delta=0; \quad \zeta=\zeta_i, \quad y_0=0, \quad \delta=\delta_i; \quad (12)$$

де  $\zeta_i, \delta_i$  – безрозмірна довжина струменя та її максимальний радіус (у кінці початкової частини).

Характеристики  $y_0(\zeta), \delta(\zeta), h(\zeta)$  обчислюються з (10), (12). Тоді всі інші отримують за вказаних значень основних параметрів:  $i_0, \kappa_1, \kappa_2$ . Перший параметр є трохи невизначеним через труднощі з оцінкою ковзання фаз, тоді як інші два відомі з експериментальних досліджень для конкретних умов.

Основною проблемою перевірки математичної моделі на експериментальні дані є правильна оцінка коефіцієнтів турбулентного перемішування  $\kappa_1, \kappa_2$  у кожному конкретному випадку. Але перевагою моделі є можливість через функції  $B_1, B_2$  мати всі характеристики потоку разом з їх приналежністю до певної фази. Розподіл поперечних швидкостей, міжфазних взаємодій, коефіцієнтів об'ємної  $q$  і масової ежекції  $g$ , а також кінетичної енергії  $e_i$  для фаз у потоці обчислюються наступним чином [1]:

$$\begin{aligned} \frac{B_1 v_1}{\kappa_1 u_{01}} &= B_1 u_1 \frac{d}{d\zeta} (y_0 + \delta\eta) - \frac{1}{y_0 + \delta\eta} \frac{d}{d\zeta} (0.5 y_0^2 + a_1 y_0 \delta + a_2 \delta^2), \\ \frac{B_2 v_2}{\kappa_1 u_{02}} &= B_2 u_2 \frac{d}{d\zeta} (y_0 + \delta\eta) - \frac{1}{y_0 + \delta\eta} \frac{d}{d\zeta} (b_1 y_0 \delta + b_2 \delta^2), \quad (13) \\ R_{21} &= -\frac{1}{(y_0 + \delta\eta)\delta} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \left\{ \frac{d}{d\zeta} (0.5 y_0^2 + a_1 y_0 \delta + a_2 \delta^2) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (y_0 + \delta\eta) B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] \right\}, \\ q &= 2s_0 \delta (b_1 y_0 + b_2 \delta), \quad e_1 = y_0^2 + 2 \int_0^1 B_1 \bar{u}_1^3 (y_0 + \delta\eta) \delta d\eta, \\ e_2 &= 2i_0 s_0 \int_0^1 B_2 \bar{u}_2^3 (y_0 + \delta\eta) \delta d\eta. \end{aligned}$$

#### 4.4 Перехідна та основна частини струминної течії

Для короткої перехідної частини струменя не розроблена обґрунтована схема, тому вона тут не розглядається. Основна частина розглядається після короткої перехідної частини. Метод добре розроблений і підтверджений експериментальними даними [1, 2]. Наступним є безрозмірний масив рівнянь (8), (9) для основної частини

$$2B_{m1}u_{m1}\delta^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_{1j} h^{j-1} = 1,$$

$$2B_{m1}u_{m1}\delta^2 \sum_{j=1}^2 (\alpha_{2j} + i_0\beta_{2j}) h^{j-1} + i_0\beta_{20} = 1, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} u_{m1}^2 \delta^2 \left[ B_{m1} \sum_{j=1}^2 (\alpha_{2j}^* + i_0\beta_{2j}^*) h^{j-1} + i_0\beta_{20}^* \right] - u_{m1} \frac{d}{d\zeta} (u_{m1}\delta^2) \left[ B_{m1} \sum_{j=1}^2 (\alpha_{1j}^* u_1^* + i_0\beta_{1j}^* u_2^*) h^{j-1} + i_0\beta_{10}^* \right] = \\ = \eta^* \delta u_{m1}^2 \left[ (1 - i_0\kappa_{21}) B_{m1} \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial u_j}{\partial \eta} \right)^* \gamma_j^* h^{j-1} + i_0\kappa_{21} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right)^* \right]. \end{aligned}$$

Тут маємо:

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x - x_t}{r_0}, \quad \bar{u}_{mi} = \frac{u_{mi}}{u_{0i}}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{u_{mi}}, \quad i_0 = n\delta_0^2, \quad \bar{B}_2 = \frac{B_2}{B_{m1}}, \quad \bar{B}_1 = \frac{B_1}{B_{m1}} = \gamma_1 + \gamma_2 h, \\ \int_0^1 \bar{B}_1 \bar{u}_1^i \eta d\eta = \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} h^{j-1}, \quad \int_0^1 \bar{B}_2 \bar{u}_2^i \eta d\eta = \frac{\beta_{i0}}{B_{m1}} + \beta_{i1} + \beta_{i2} h \quad (i=1, 2). \quad (15) \end{aligned}$$

Як і раніше, ми використовуємо ці позначення для безрозмірних значень лише тут і зберігаємо попередні позначення для безрозмірних параметрів, як і для розмірних у всіх інших рівняннях. Зірка \* означає значення  $\eta = \eta^* < 1$ ,  $x_t$  - довжина перехідної частини потоку струменя. Прийнято  $u_{m2} = s_0 u_{m1}$  ( $s_0 = \text{const}$ ), що означає, що ковзання фаз зберігається так само, як і для початкової частини струменя.

Граничні умови для масиву рівнянь (14) задаються у формі

$$\zeta=0, \quad u_{m1}=1, \quad B_{m1}=1, \quad \delta=\delta_t; \quad (16)$$

$$\zeta=\infty, \quad u_{m1}=0, \quad B_{m1}=0, \quad \delta=\infty; \quad (17)$$

$\delta_t$  – радіус струменя в перерізі перехідного процесу. Розв’язок крайової задачі (14), (16), (17) дає функції  $u_{m1}(\zeta)$ ,  $B_{m1}(\zeta)$ ,  $\delta(\zeta)$  і  $h(\zeta)$  для заявлених значень  $i_0$ ,  $\kappa_{21}$ . Тоді отримують усі параметри двофазного потоку: турбулентні напруження, масову витрату, траєкторії руху фаз у шарі змішування.

## Розділ 5. РОЗВ'ЯЗКИ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЧАТКОВОЇ ТА ГОЛОВНОЇ ЧАСТИНИ СТРУМЕНЯ

### 5.1 Розв'язок крайової задачі для двофазного струменя на його початковій ділянці

Розв'язок крайової задачі (10), (12) дозволяє отримати параметри для початкової частини струменя за вказаними значеннями  $i_0, \kappa_{21}$ . Обчислювальні експерименти виявили основні особливості течії. Наведено розподіли швидкостей для фаз ( $u_1, u_2$ ) та функції-індикатори фаз ( $B_1, B_2$ ), а також значення параметрів на поперечному перерізі сопла. Система (10) містить два алгебраїчних і одне диференціальне рівняння. З масиву алгебраїчних рівнянь отримують функції  $y_0(h), \delta(h)$ . Потім диференціальне рівняння виражається у стандартній формі  $dh/d\zeta = F(h(\zeta), i_0, \kappa_{21})$  для числового розв'язку. Масив рівнянь (10) загалом можна розв'язати чисельно, але спосіб, який ми застосували, є більш повним для розуміння основних характеристик системи, з якомога більшою кількістю аналітичних виразів, що показують явні функції.

Область зміни функції  $h(\zeta)$  визначається підстановкою граничних умов у функціях  $y_0(h), \delta(h)$ , так що отримуємо наступне:

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2a_1 \frac{a_3 + i_0 b_3 - a_1}{a_2 - i_0 b_4 - a_4} + 2a_2 \left( \frac{a_3 + i_0 b_3 - a_1}{a_2 - i_0 b_4 - a_4} \right)^2}}, \quad \delta = y_0 \frac{a_3 + i_0 b_3 - a_1}{a_2 - i_0 b_4 - a_4}; \quad (18)$$

$$h_0 = h(0) = \frac{a_{11} - a_{31} - i_0 b_{31}}{a_{32} - a_{12} + i_0 b_{32}}, \quad h_i = h(\zeta_i) = \frac{a_{21} - a_{41} - i_0 b_{41}}{a_{42} - a_{22} + i_0 b_{42}}. \quad (19)$$

Граничні значення  $h_0$  і  $h_i$  в (19) обчислюються з рівнянь  $a_3 + i_0 b_3 - a_1 = 0$ ,  $a_2 - i_0 b_4 - a_4 = 0$ , що відповідають початковій і кінцевій частині початкової частини струменя. Тут відповідно до граничних умов (12) для функцій  $y_0(\zeta)$  і  $\delta(\zeta)$  має бути  $y_0(0) = 1$ ,  $\delta(0) = 0$ , і  $y_0(\zeta_i) = 0$ ,  $\delta(\zeta_i) = \delta_i$ , для будь-яких значень параметрів, включаючи параметр  $i_0$ . Перше задовольняється при

$$A = \frac{a_3 + i_0 b_3 - a_1}{a_2 - i_0 b_4 - a_4} = 0, \Rightarrow a_3 + i_0 b_3 - a_1 = 0,$$

звідки впливає перша кореляція (19). Інша гранична умова (в кінці початкової частини струменя) вимагає  $y_0(\zeta_i) = 0$ ,  $A = \infty$ , що дає  $a_2 - i_0 b_4 - a_4 = 0$ :

$$\delta_i = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{\sqrt{1 + 2a_1 A + 2a_2 A^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a_2}} = \frac{1}{\sqrt{2(a_{21} + a_{22}h_i)}}.$$

## 5.2 Чисельне моделювання початкової частини струменя

5.2.1 Результати розрахунку по початковій частині струменя, для параметра  $i_0=8.0$  (ежектована фаза значно щільніша за рідину з сопла):

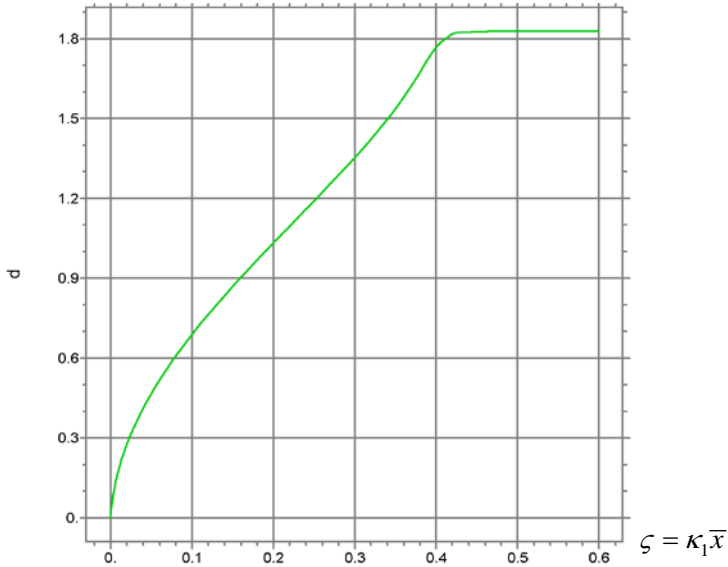


Рис. 5а Зона змішування  $\delta$  на початковій ділянці по осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  
 $i_0=8.0, \kappa_{21}=0$

Тут  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,4$  на рис., далі це нереально, тому що початкова частина струменя закінчена:  $y_0 = 0, \delta = \delta_i$ . Тоді для  $i_0=8.0, \kappa_{21}=0.01$  (коефіцієнт турбулентного перемішування в ежекційній фазі становить 0,01 порівняно з першою фазою, з сопла) чисельний розрахунок наведено на рис. 6, де  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,44$ , далі дані нереальні, оскільки початкова частина струменя закінчена:  $y_0 = 0, \delta = \delta_i$ .

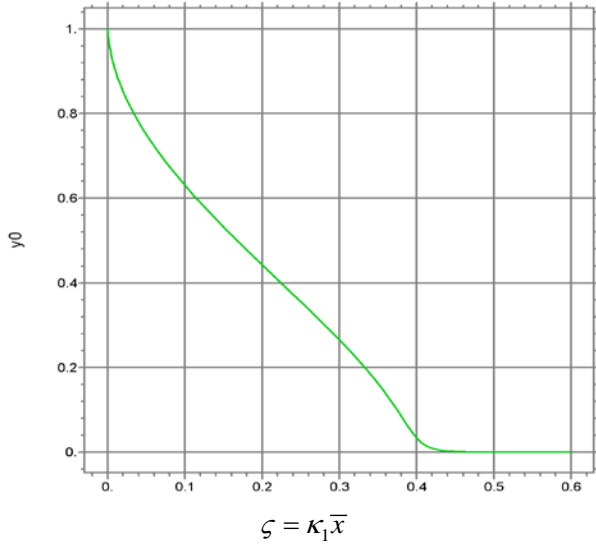


Рис. 5б Ширина потенційного ядра  $y_0$  на початковій частині по осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0$   
 $\kappa_{21}=0$  означає, що коефіцієнт турбулентного перемішування відсутній (наприклад, ежекційна фаза не змішується через свою щільність, пасивна фаза).

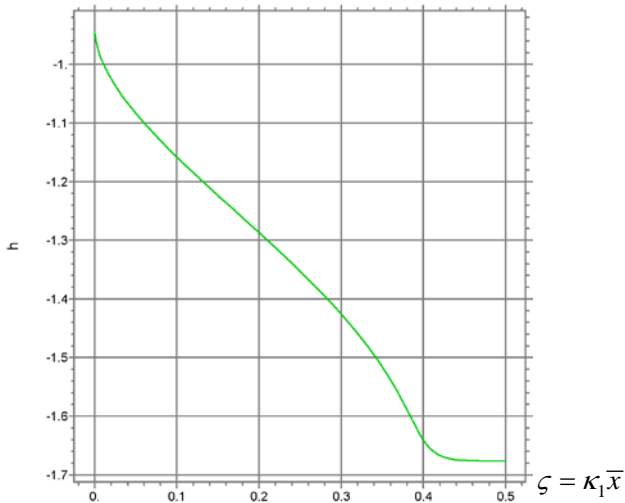


Рис. 5с Зміна функції  $h(\zeta)$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0$

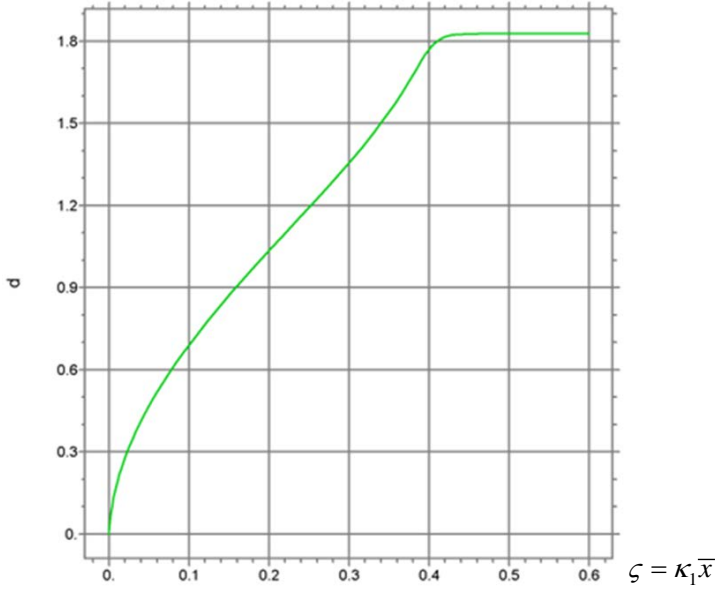


Рис. 6а Зона змішування струменя  $\delta$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  
 $\kappa_{21}=0.01$

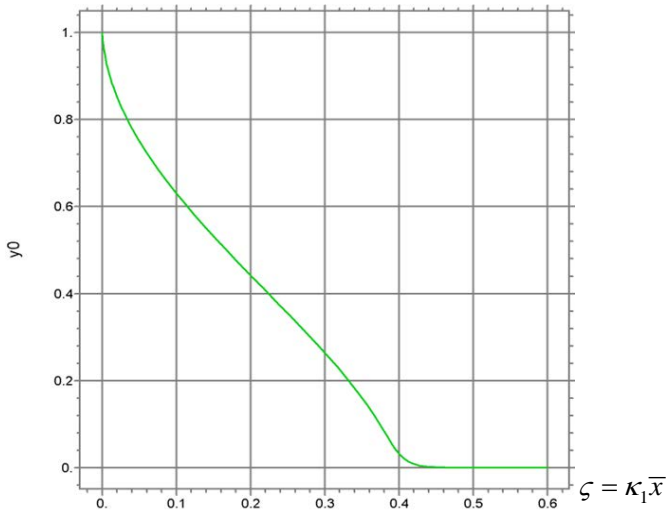


Рис. 6б Ширина потенційного ядра  $y_0$  на початковій частині по осі:  $i_0=8.0$ ,  
 $\kappa_{21}=0.01$

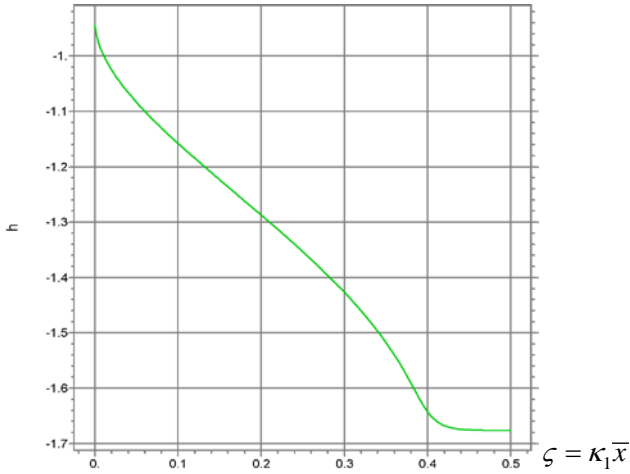


Рис. 6с Зміна функції  $h(\zeta)$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{2l}=0.01$

Якщо коефіцієнт турбулентного перемішування для води в 100 разів перевищує коефіцієнт ламінарного, напр.  $\kappa_1=0.1$ , тоді  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0.4$  означає  $\bar{x} = 4$ , так що початкова частина струменя становить лише 4 радіуси струменя за  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{2l}=0.05$ , як показано на рис. 7.

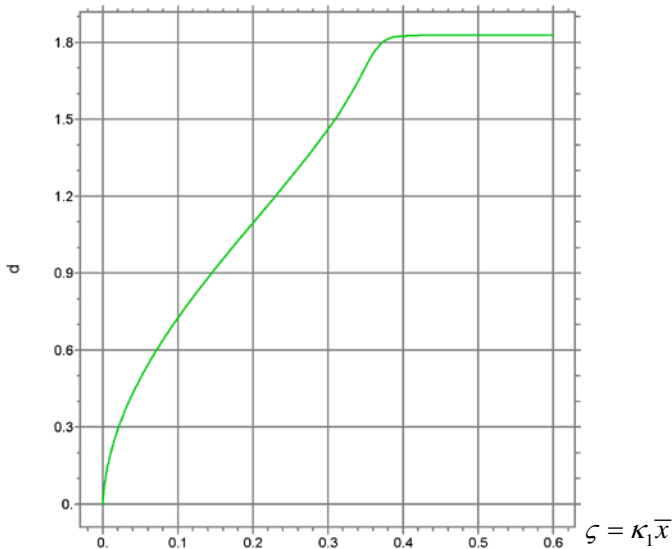


Рис. 7а Зона змішування струменя  $\delta$  на початковій ділянці по осі:  $\kappa_{21}=0.05$

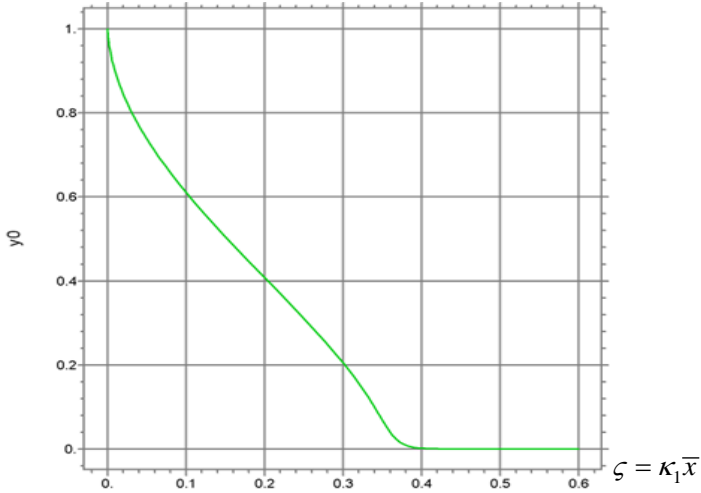


Рис. 7б Ширина потенційного ядра  $y_0$  по осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.05$

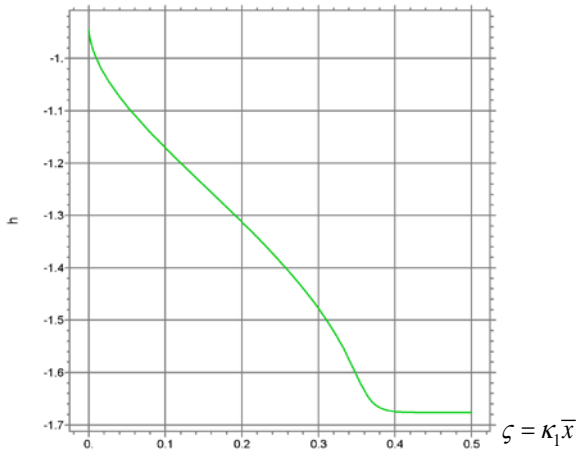


Рис. 7с Діапазон зміни  $h(\zeta)$  вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.05$

Подібним чином, випадок  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$  наведено на рис. 8, де  $\zeta=0.36$  є кінцевою точкою, згодом вона не є реальною, оскільки початкова частина струменя закінчена:  $y_0=0$ . Якщо коефіцієнт турбулентного перемішування

води в 100 разів перевищує ламінарний,  $\kappa_{21}=0.1$ , то  $\bar{x} = 3.6$  означає, що початкова частина струменя становить 3,6 радіуса струменя за  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$ .

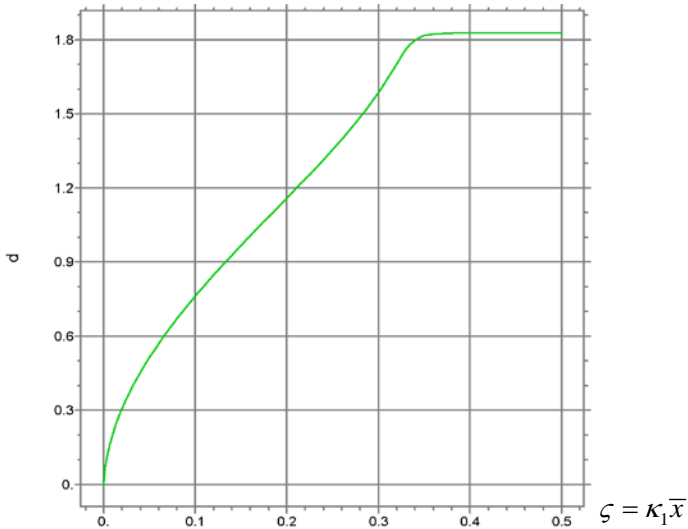


Рис. 8а Зона змішування струменя  $\delta$  вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

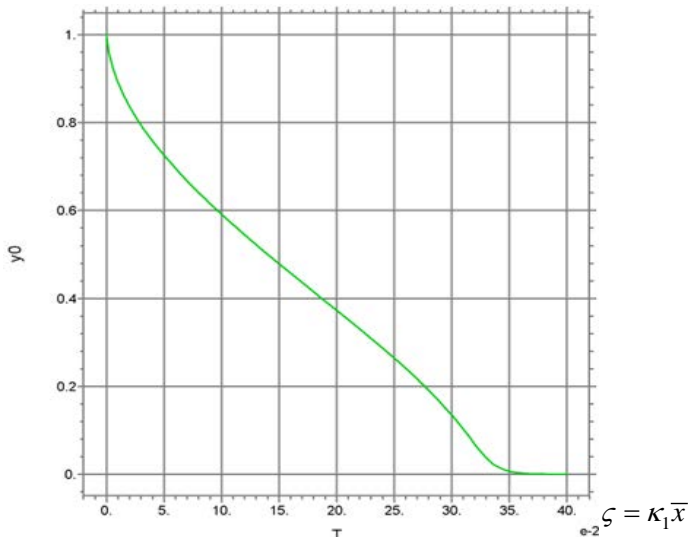


Рис. 8б Ширина потенційного ядра  $y_0$  по осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

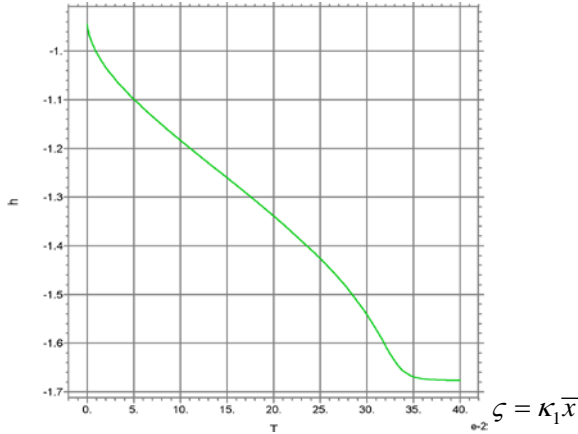


Рис. 8с Зміна функції  $h(\zeta)$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

Тепер для  $\kappa_{21}=0.2$  результати наведено на рис. 9, після  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,32$  це не реально:  $y_0 = 0$ ,  $\delta = \delta_i$ . Якщо коефіцієнт турбулентного перемішування для води в 100 разів вищий порівняно з ламінарним потоком,  $\kappa_1=0.1$ , тоді  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,32$ ,  $\bar{x} = 3,2$ , означає що початкова частина струменя становить лише 3,2 радіуса струменя на  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.2$ .

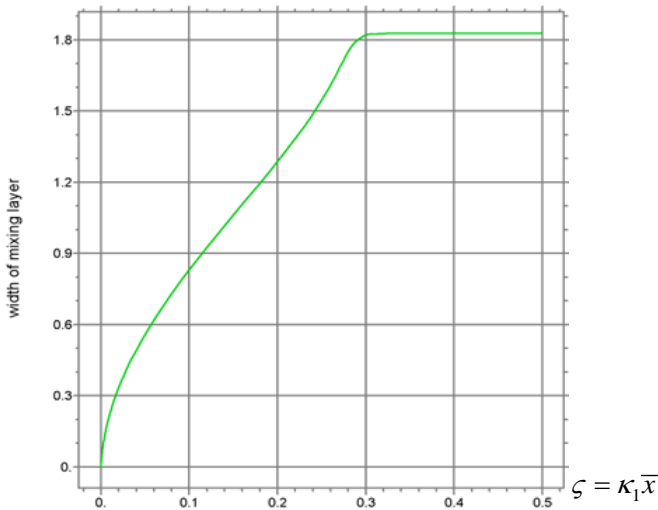


Рис. 9а Зона змішування струменя  $\delta$  на початковій ділянці:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

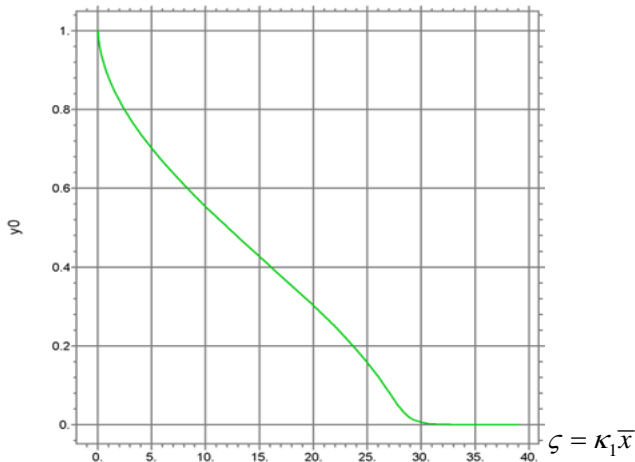


Рис. 9б Ширина потенційного ядра  $y_0$  на початковій частині:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

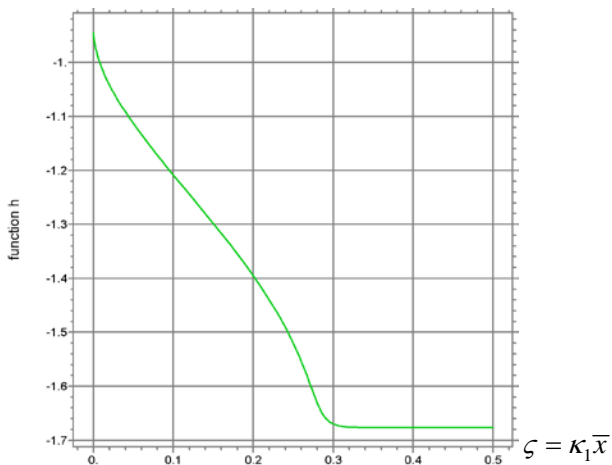


Рис. 9с Діапазон зміни функції  $h(\zeta)$  вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

Тоді на рис. 10 представлені результати комп'ютерного моделювання для  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.3$  (зі збільшенням коефіцієнта турбулентного перемішування початкова частина вкорочується),  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0.28$  на рис. 10. Якщо коефіцієнт турбулентного перемішування води в 100 разів більший за ламінарний,  $\kappa_1=0.1$ , то  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0.28$ , так що початкова частина струменя становить лише 2,8 радіуса струменя на  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.3$ .

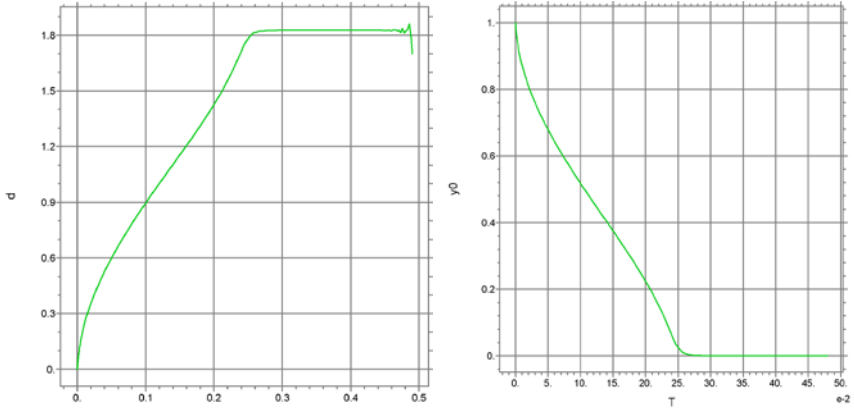


Рис. 10а Зона змішування струменя  $\delta$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.3$

Рис. 10б Ширина потенційного ядра  $y_0$  струменя вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.3$

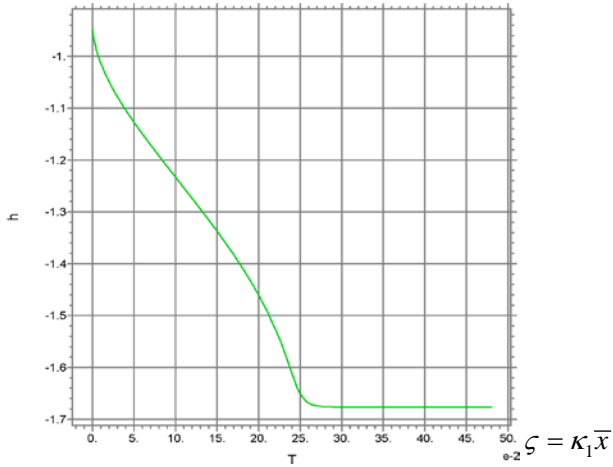


Рис. 10с Діапазон зміни функції  $h(\zeta)$  вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.3$

Тепер результати для  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.5$ ,  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0.22$  наведено на рис. 11:

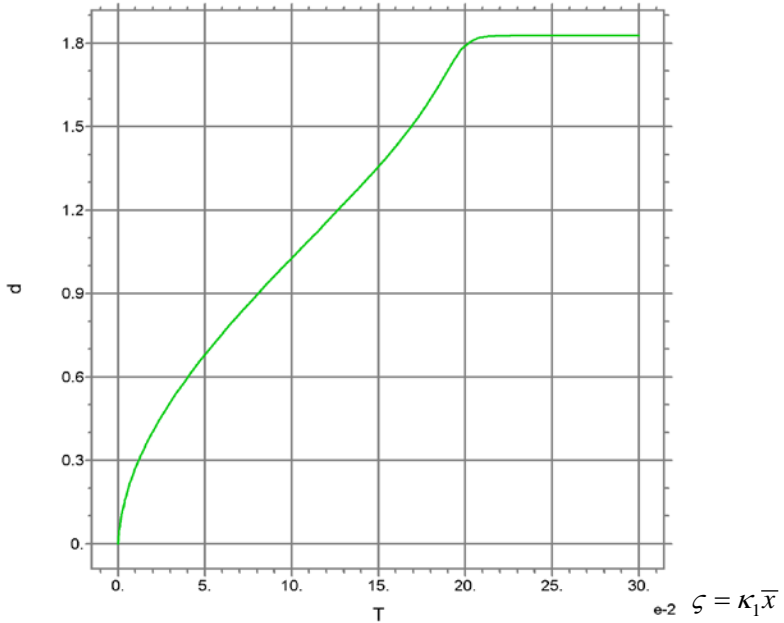


Рис. 11а Зона змішування струменя  $\delta$  на початковій ділянці вздовж осі:  
 $i_0=8.0, \kappa_{21}=0.5$

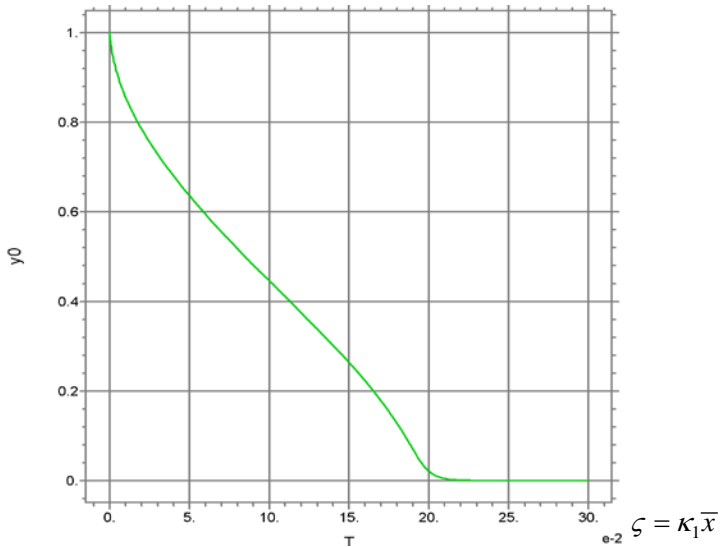


Рис. 11б Ширина потенційного ядра  $y_0$  струменя вздовж осі:  $i_0=8.0, \kappa_{21}=0.5$

Якщо коефіцієнт турбулентного перемішування води в 100 разів перевищує ламінарний,  $\kappa_1=0.1$ , то  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0.22$  означає  $\bar{x} = 2.2$ , так що початкова частина струменя становить лише 2,2 радіуса струменя при  $\kappa_{21}=0.5$ .

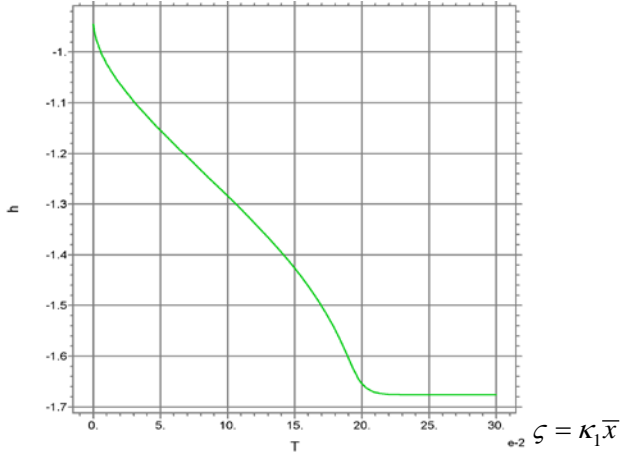


Рис. 11с Діапазон зміни функції  $h(\zeta)$  на початковій частині:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=0.5$

Тоді  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$ ,  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0.14$  наведено на рис. 12:

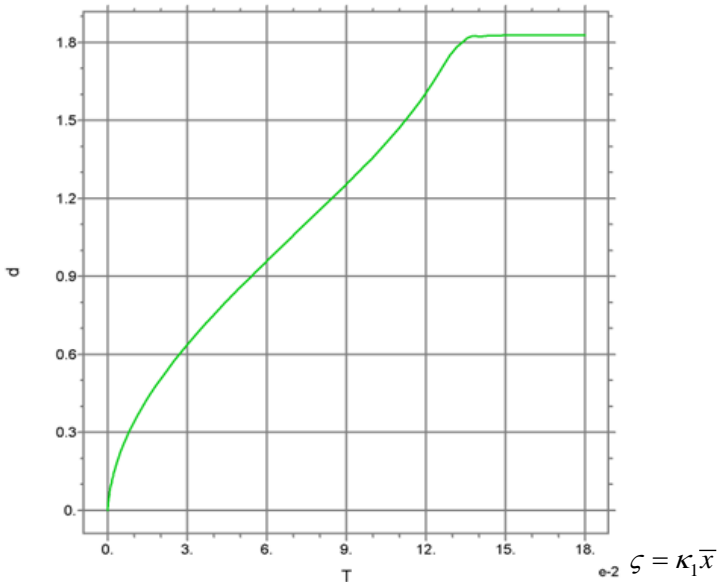


Рис. 12а Зона змішування  $\delta$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

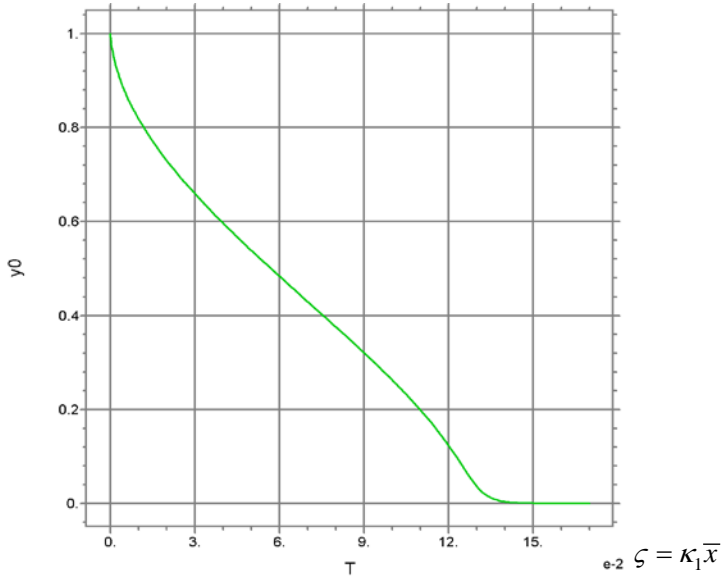


Рис. 12б Ширина потенційного ядра  $y_0$  на початковій частині по осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

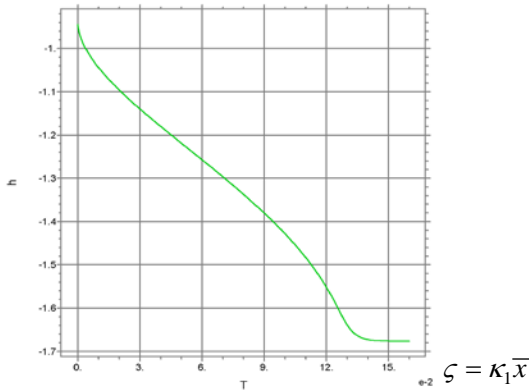


Рис. 12с Діапазон зміни  $h(\zeta)$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

Для цього високого відношення щільності введеної рідини до тієї, що виходить із сопла ( $i_0=8.0$ ), є дані, представлені на рис. 13-15 для  $\kappa_{21}=2.0, 3.0$  і  $5.0$ , відповідно (зі збільшенням коефіцієнта турбулентного змішування

початкова частина струменя скорочується),  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,088$  на рис. 13, потім це не реально, оскільки початкова частина струменя закінчено,  $y_0 = 0, \delta = \delta_i$ . Якщо коефіцієнт турбулентного перемішування води в 100 разів перевищує ламінарний,  $\kappa_1 = 0.1$ , то  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,088$  означає  $\bar{x} = 0.88$ , початкова частина струменя становить лише 0,88 радіуса струменя при  $i_0 = 8.0, \kappa_{21} = 2.0$ .

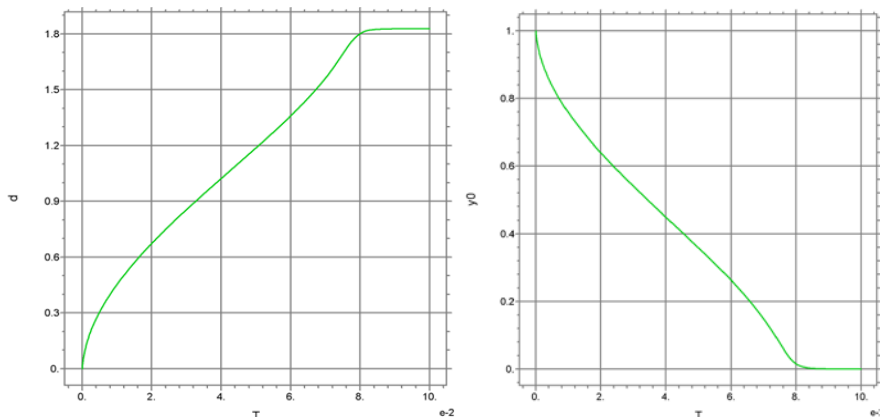


Рис. 13а Зона змішування струменя  $\delta$  на початковій ділянці:  $i_0 = 8.0, \kappa_{21} = 2.0$

Рис. 13б Ширина потенційного ядра  $y_0$  по осі:  $i_0 = 8.0, \kappa_{21} = 2.0$

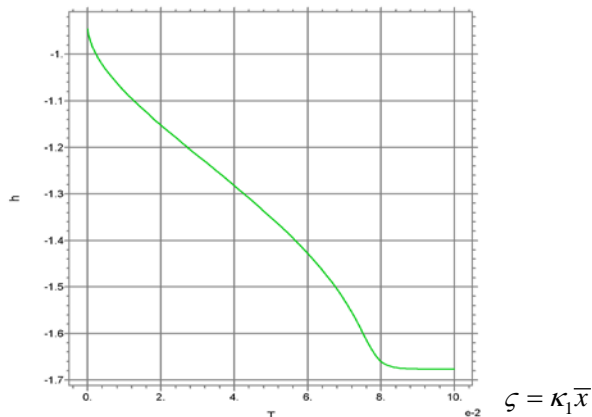


Рис. 13с Діапазон зміни функції  $h(\zeta)$  на початковій частині:  $i_0 = 8.0, \kappa_{21} = 2.0$

Для  $i_0 = 8.0, \kappa_{21} = 3.0$ , на рисунках 14  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,064$ . Якщо коефіцієнт турбулентного перемішування дорівнює  $\kappa_1 = 0.1$ , то  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,064$  означає

$\bar{x} = 0.64$ , що початкова частина струменя становить лише 0,64 радіуса струменя. Ймовірно, при великому значенні  $i_0$  коефіцієнт турбулентного перемішування другої фази не може бути вищим, ніж для першої фази.

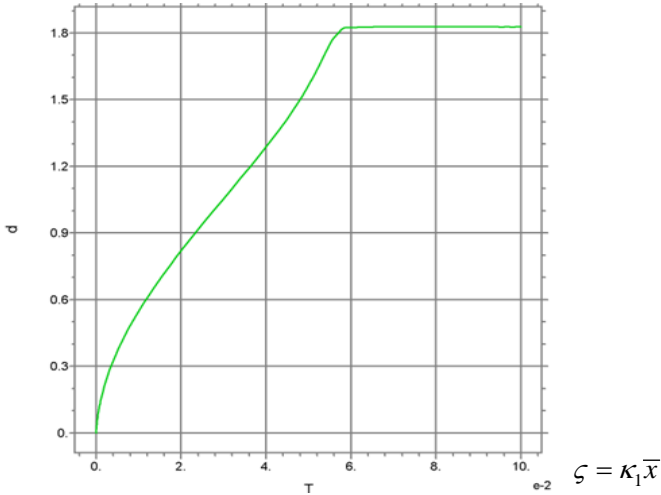


Рис. 14а Зона змішування струменя  $\delta$  вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=3.0$

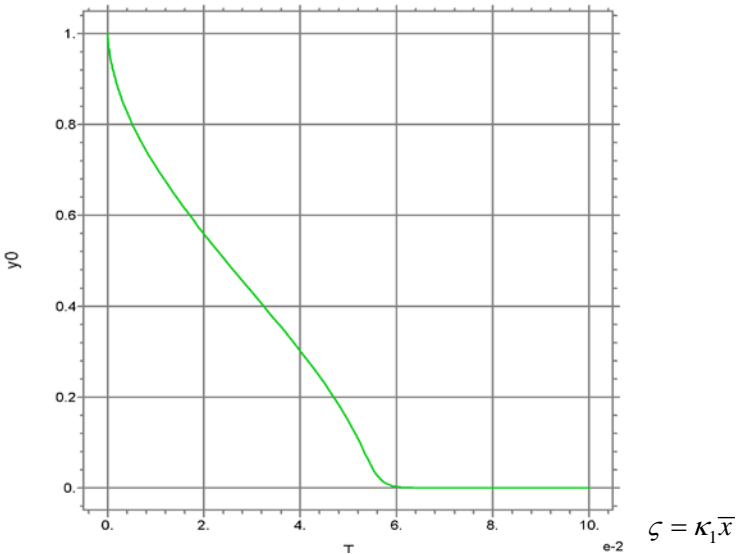


Рис. 14б Ширина потенційного ядра  $y_0$  по осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=3.0$

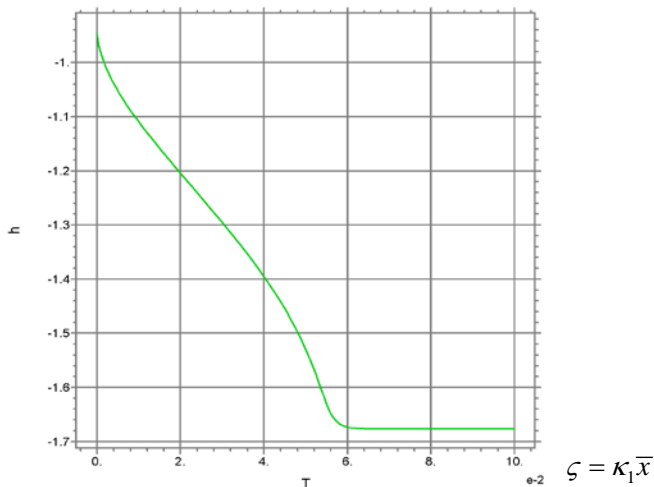


Рис. 14с Діапазон зміни функції  $h(\zeta)$  на початковій частині:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=3.0$

Для  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=5.0$ ,  $\zeta = \kappa_1 \bar{x} = 0.04$  ( $y_0 = 0$ ,  $\delta = \delta_i$ ) представлено на рис. 15.

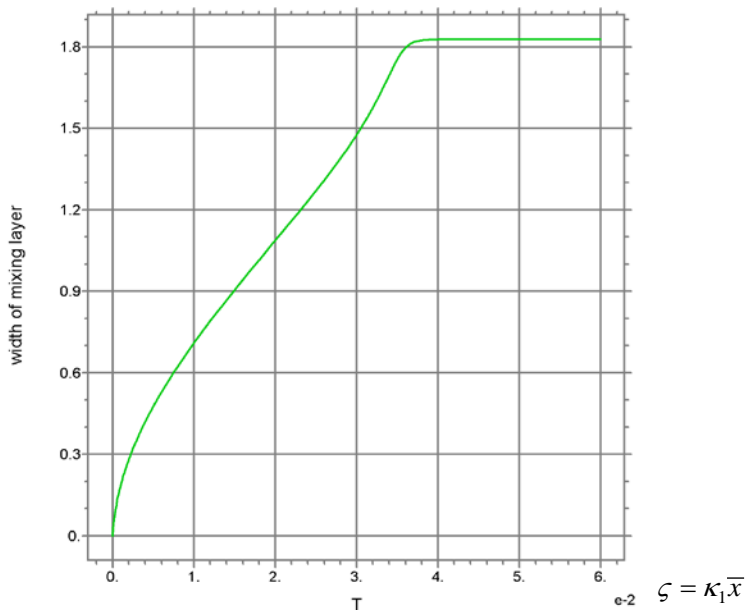


Рис. 15а Зона змішування струменя  $\delta$  вздовж осі:  $i_0=8.0$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

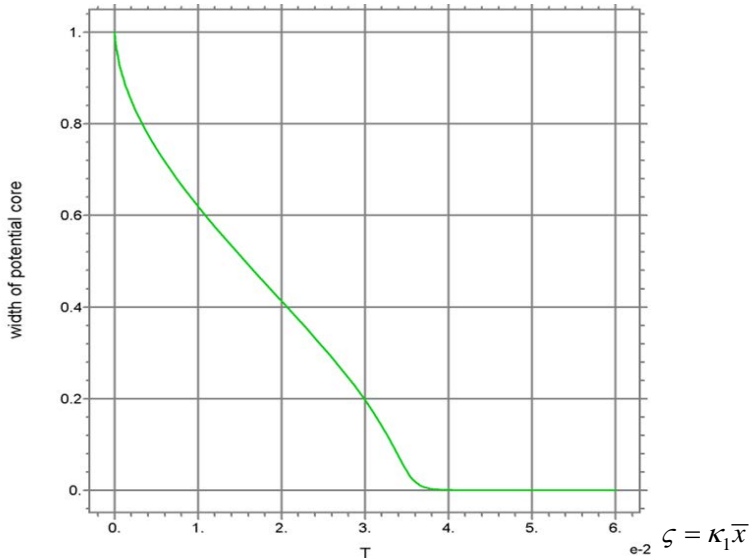


Рис. 15б Ширина потенційного ядра  $y_0$  на початковій ділянці вздовж осі:  
 $i_0=8.0, \kappa_{21}=5.0$

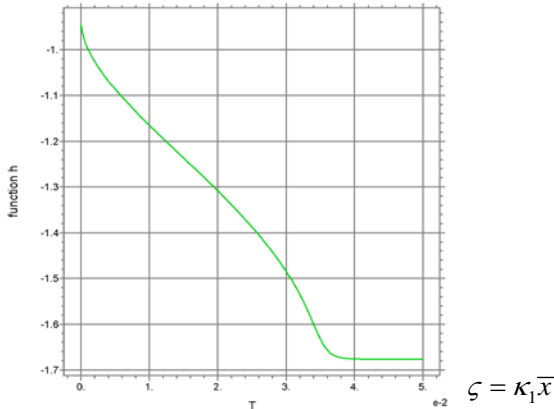


Рис. 15с Зміна функції  $h(\zeta)$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=8.0, \kappa_{21}=5.0$

Якщо коефіцієнт турбулентного перемішування  $\kappa_1=0.1$ , то  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,04$  означає  $\bar{x} = 0.4$ , так що початкова частина струменя становить лише 0,4 радіуса струменя при  $i_0=8.0, \kappa_{21}=5$ . Але з високим коефіцієнтом густини,

ймовірно, більш важка рідина, що вводиться, повинна мати нижчий коефіцієнт змішування, тому ці результати лише для розуміння впливу різних параметрів.

### 5.2.2 Результати розрахунку початкової частини струменя при $i_0=1.0$

А тепер наведемо аналогічні дані для  $i_0=1.0$  (приблизно однакові густини змішуваних рідин),  $\kappa_{21}=0$ , де приблизно  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 2.8$ , на рис. 16:

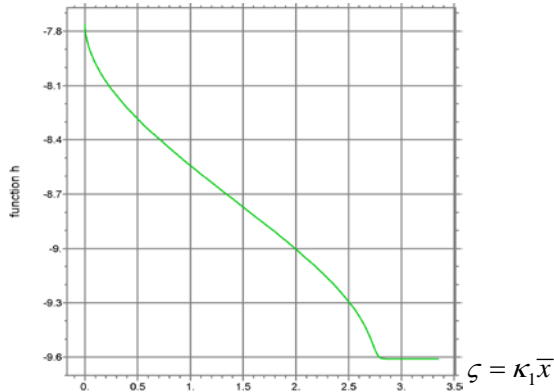


Рис. 16с Діапазон зміни функції  $h(\zeta)$  вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.0$

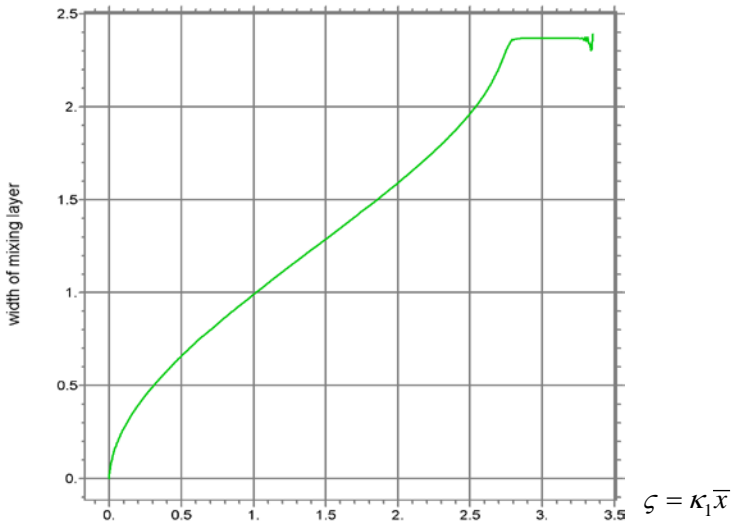


Рис. 16а Зона змішування  $\delta$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.0$

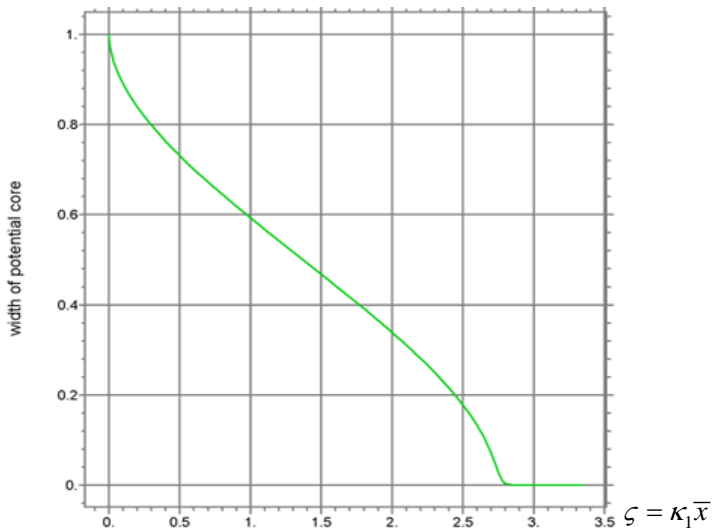


Рис. 16b Ширина потенційного ядра  $y_0$  по осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.0$

А для параметра  $i_0=1$ , досліджено вплив коефіцієнтів турбулентного перемішування на розв'язок в діапазоні  $\kappa_{21}=1.0, 2.0, 3.0, 5.0$ .

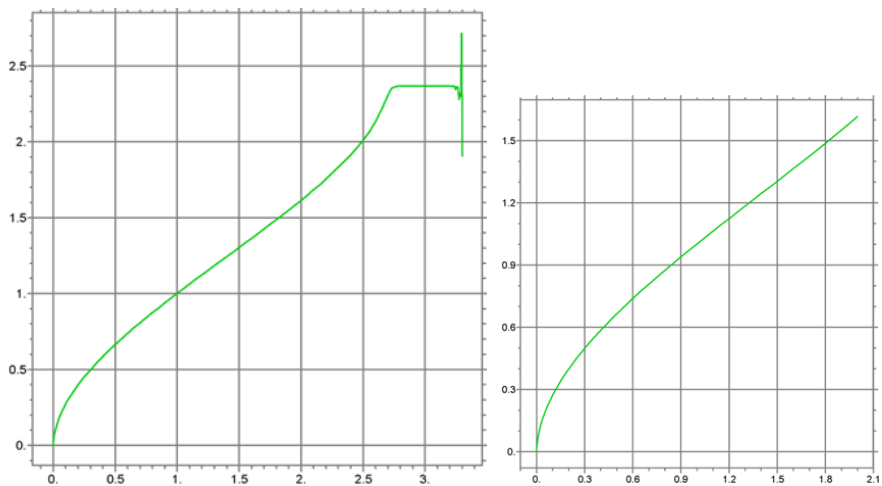


Рис. 17а Зона змішування струменя  $\delta$  по осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.01$

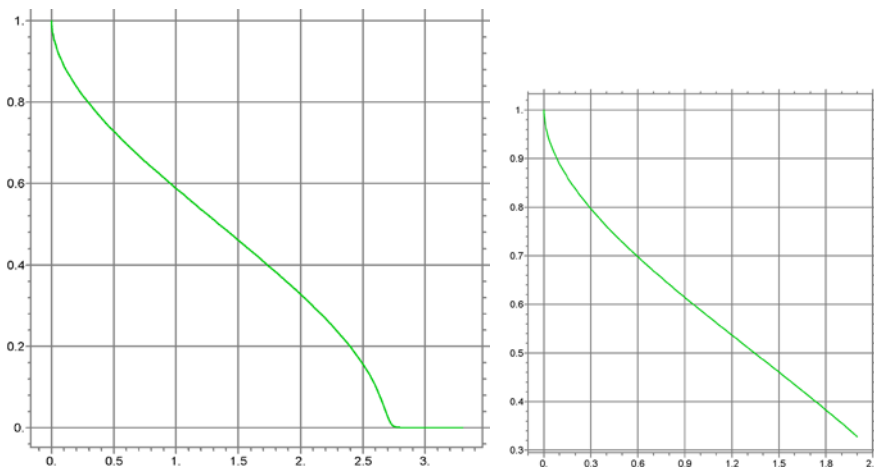


Рис. 17b Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.01$

На рис. 17 ми представили дані розрахунків у двох різних масштабах для чіткого уявлення щодо особливостей кривих. Якщо коефіцієнт турбулентного перемішування  $\kappa_1=0.1$ ,  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 2.8$ , то  $\bar{x} = 28 = 2,8$  означає, що початкова частина струменя дорівнює 28 радіусам сопла. Для  $\kappa_{21}=0,01$  це дає майже ті самі дані:  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 2,75$ , показані на рис. 17.

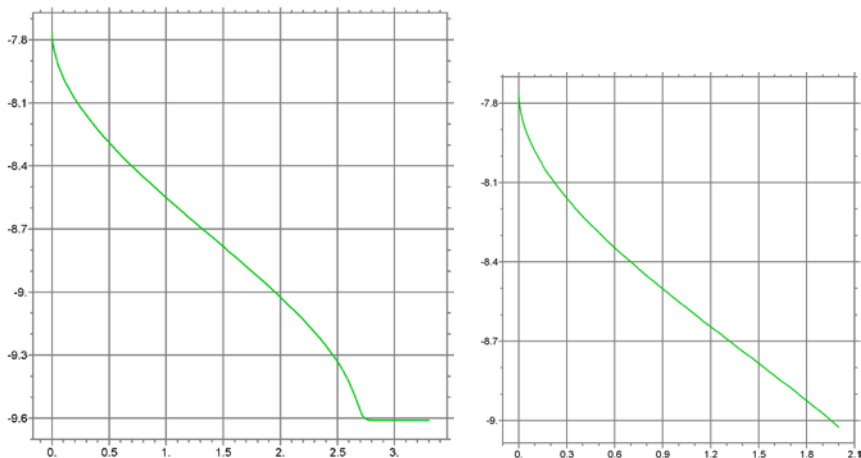


Рис. 17с Зміна функції  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.01$

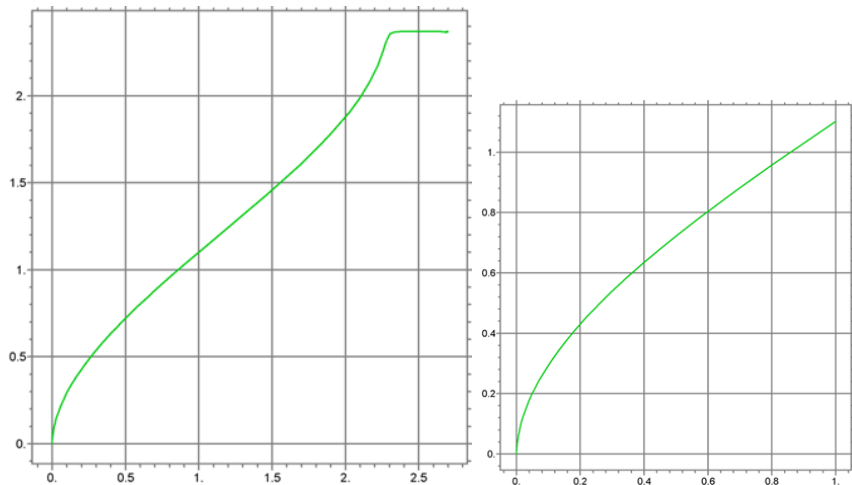


Рис. 18а Зона змішування  $\delta$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

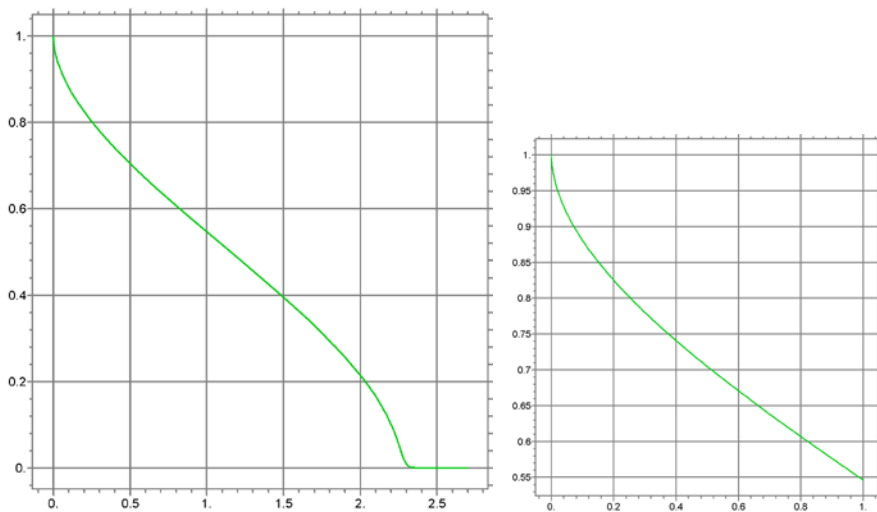


Рис. 18б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

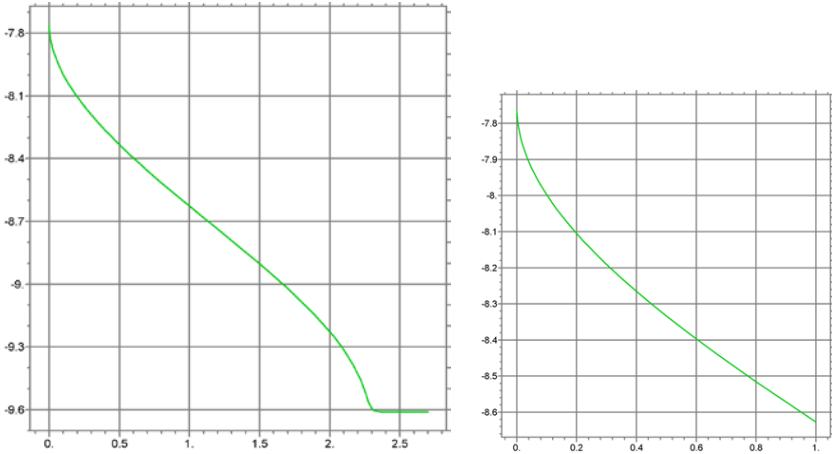


Рис. 18с Зміна функції  $h(\xi)$  уздовж осі ( $\xi = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

Якщо коефіцієнт турбулентного перемішування становить  $\kappa_1=0.1$  (наприклад, для води в ламінарному потоці він становить приблизно  $\kappa_1=10^{-3}$ ), то  $\xi_i = \kappa_1 \bar{x} = 2,75$  означає  $\bar{x} = 27,5$ , початкова частина струменя перевищує 27,5 радіусів сопла. Аналогічні дані для  $i_0=1$ ,  $\kappa_{21}=0.1$ ,  $\xi_i = \kappa_1 \bar{x} = 2,35$  представлені на рис. 18, звідки для коефіцієнта турбулентного змішування  $\kappa_1=0.1$  випливає, що  $\xi_i = \kappa_1 \bar{x} = 2,35$  означає, що початкова частина струменя знаходиться на відстані 23,5 радіуса сопла. Подібні дані для  $i_0=1.0$  представлені на рис. 19 для  $\kappa_{21}=0.2$ , де  $\xi_i = \kappa_1 \bar{x} = 2,0$ ,  $\bar{x} = 20$ , початкова частина струменя знаходиться понад 20 радіусів сопла. На рис. 19 наведено результати розрахунків із суттєво різною точністю: для найменших було запропоновано обмеження похибки  $10^{-3}$ , тоді як праворуч було  $10^{-9}$ .

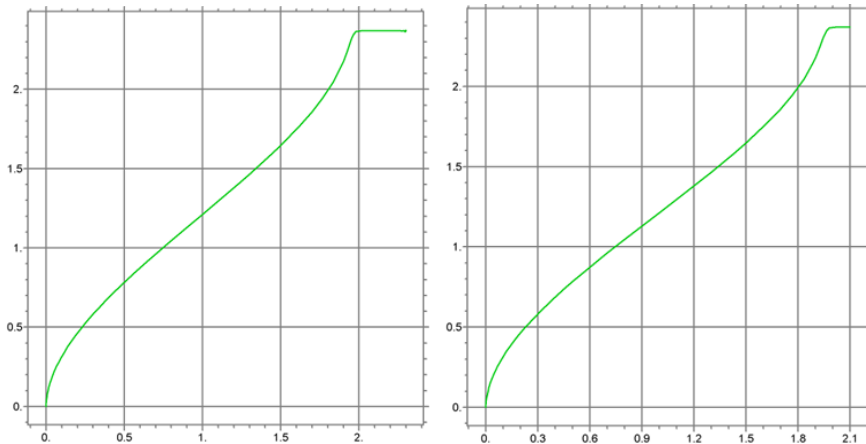


Рис. 19а Зона змішування струменя  $\delta$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

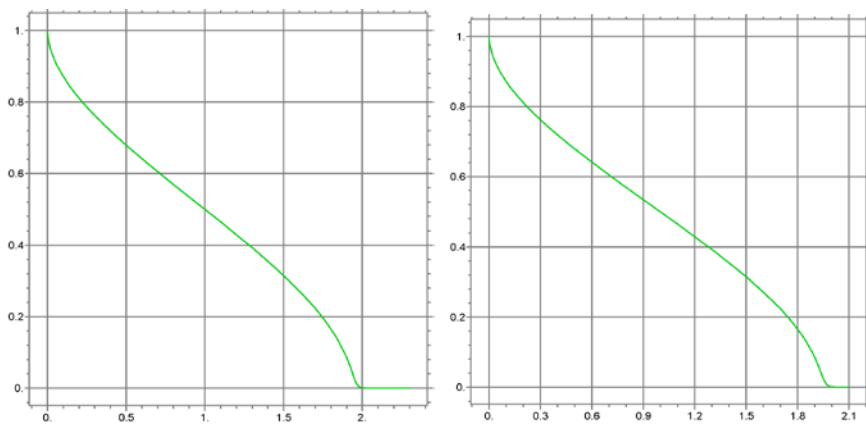


Рис. 19б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

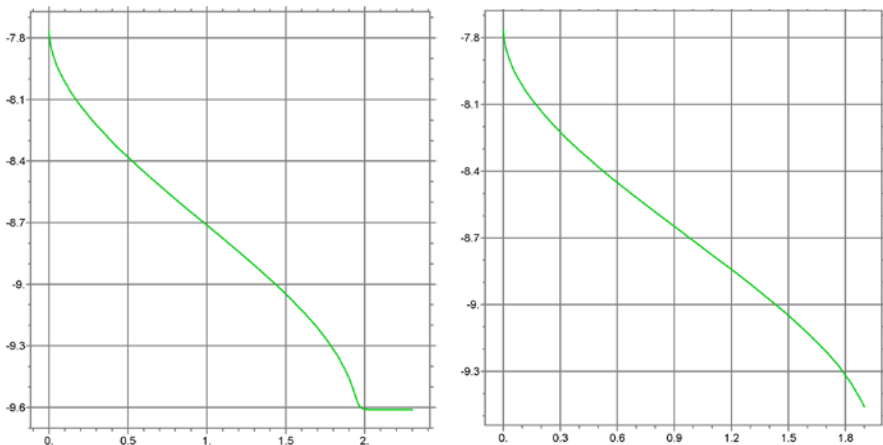


Рис. 19с Діапазон зміни  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

Обидва результати майже однакові, і, більше того, час обчислення схожий. Як показано на рис. 18, 19, перша  $y_0(\zeta)$  є спадною, як гіперболічна функція, але вона є майже лінійною за позовжньою координатою вздовж осі струменя. Ширина шару змішування  $\delta(\zeta)$  також майже лінійна після деякого нелінійного початку і в кінці початкової частини струменя. Така ж поведінка має функція  $h(\zeta)$ , яка знаходиться в області визначення для  $i_0=1.0$ .

І далі наведемо аналогічні дані для  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.5$ , де  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 1,4$  виявлено на рис. 20. Для коефіцієнта турбулентного перемішування  $\kappa_1=0.1$  він дає  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 1,4$ , таким чином,  $\bar{x} = 14$ , так що початкова частина струменя становить 14 радіусів сопла.

Також аналогічні дані для  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.7$  представлені на рис. 21, де  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 1,15$  на  $\kappa_1=0.1$  призводить до  $\bar{x} = 11.5$ , так що початкова частина струменя знаходиться на відстані більше 11,5 радіусів сопла. Параметр для  $i_0=1.0$  означає, що дві фази мають однакову щільність, якщо немає ковзання фаз, оскільки параметр для  $i_0$  містить ковзання фаз як множник у квадраті. Таким чином, навіть порівняно невелике ковзання, напр.  $s_0=0.9$  призводить до множника, що дорівнює 0,81, що є досить суттєвим, оскільки  $i_0=1.0$ ,  $s_0=0.9$  призводить приблизно до  $\rho_2/\rho_1=1.23$ .

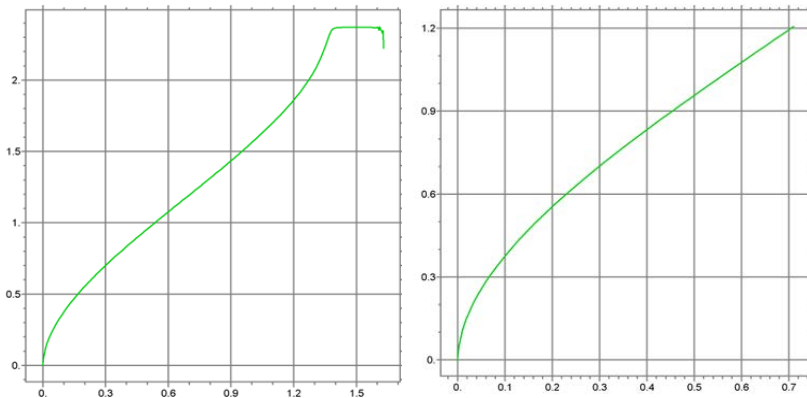


Рис. 20а Зона змішування  $\delta$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.5$

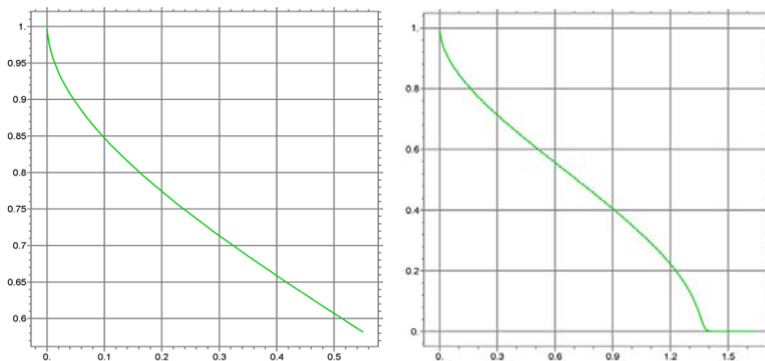


Рис. 20б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.5$

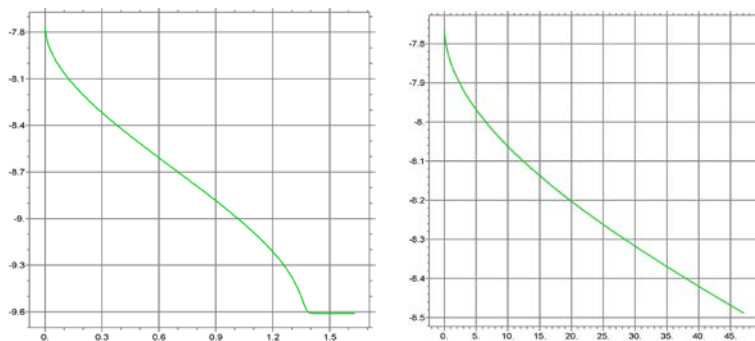


Рис. 20с Діапазон зміни  $h(\zeta)$  уздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.5$

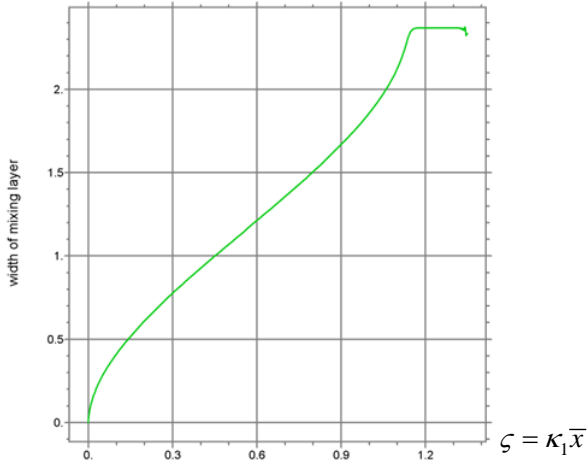


Рис. 21а Зона змішування  $\delta$  вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.7$

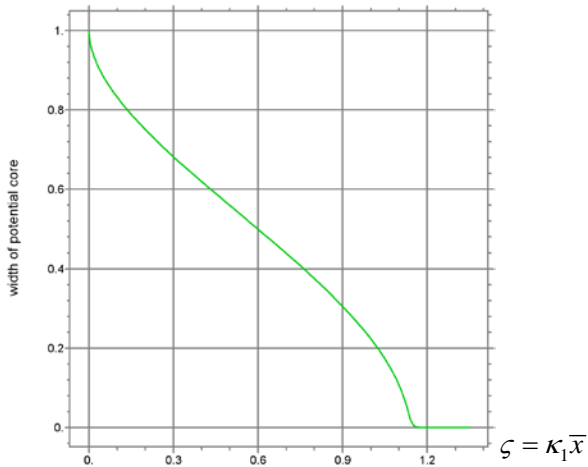


Рис. 21б Потенційне ядро струменя  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.7$

Для  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.8$ , як видно з рис. 22, ми маємо приблизно  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 1,1$ . За значенням коефіцієнта турбулентного перемішування  $\kappa_1=0.1$ , виходить  $\bar{x} = 11$ , що означає, що початкова частина струменя дорівнює приблизно 11 радіусам сопла. А для  $\kappa_{21}=0.9$ , це  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 1,0$  (рис. 23). Якщо  $\kappa_1=0.1$ , то  $\bar{x} = 10$ , так що початкова частина струменя становить 10 радіусів сопла.

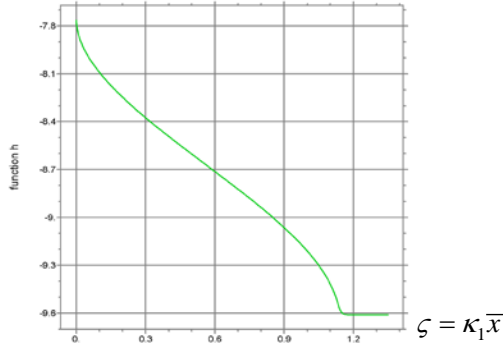


Рис. 21с Зміна функції  $h(\zeta)$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.7$

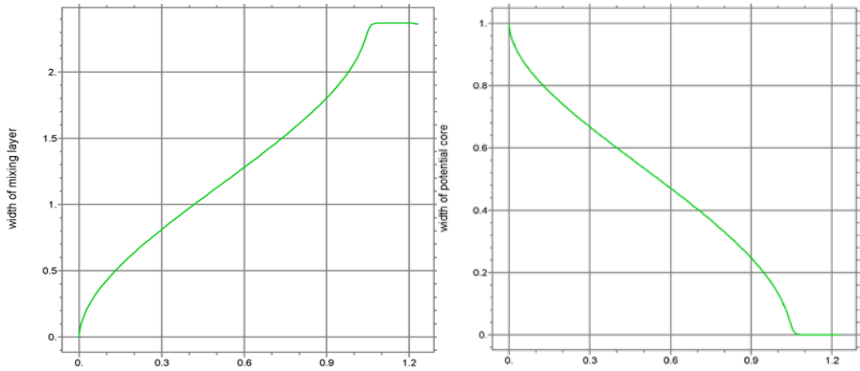


Рис. 22а Зона змішування струменя  $\delta$  вздовж осі ( $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.8$

Рис. 22б Потенційне ядро струменя  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.8$

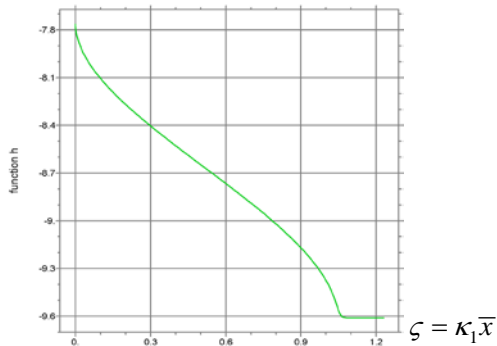


Рис. 22с Зміна функції  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.8$

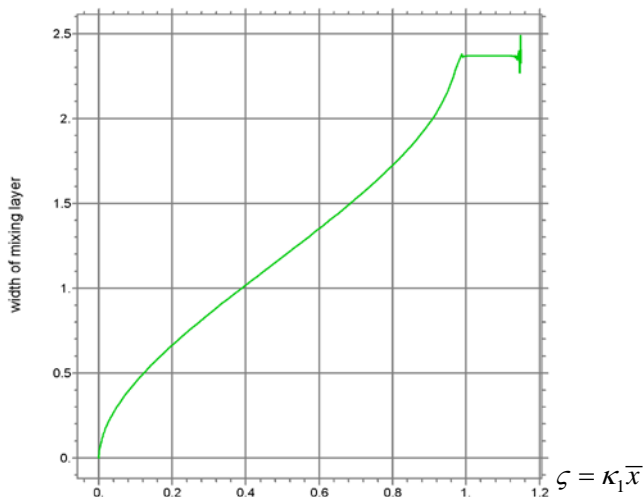


Рис. 23а Зона змішування  $\delta$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.9$

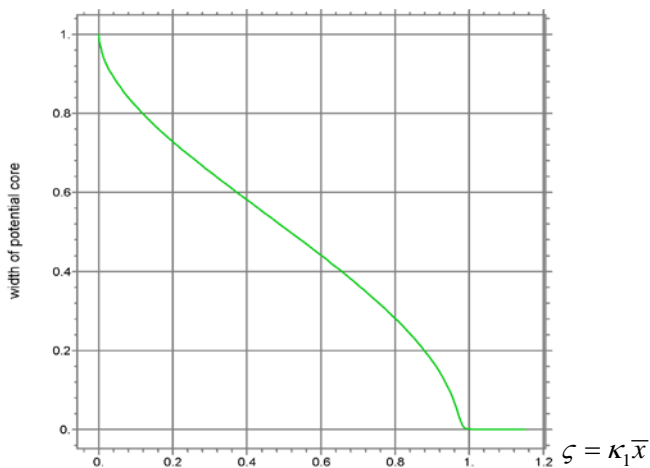


Рис. 23б Потенційне ядро струменя  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.9$

Наприклад, для  $\kappa_{21}=1.0$  було приблизно отримано  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,92$ , як показано на рис. 24. Якщо коефіцієнт турбулентного змішування для води в 100 разів вищий за ламінарний (наприклад, для води в ламінарному потоці це приблизно  $\kappa_1=10^{-3}$ ),  $\kappa_1=0.1$ , тоді  $\bar{x} = 9.2$  означає, що початкова частина струменя становить 9,2 радіуси сопла.

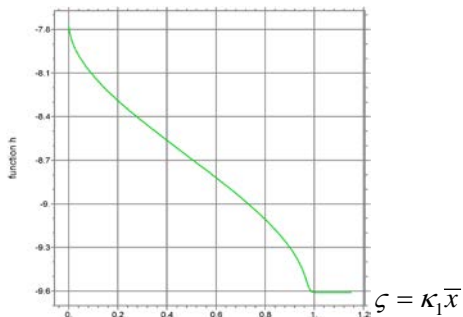


Рис. 23с Зміна функції  $h(\zeta)$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.9$

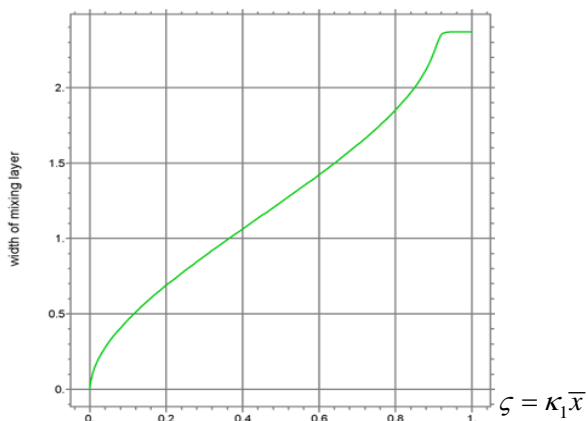


Рис. 24а Зона змішування струменя  $\delta$  вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

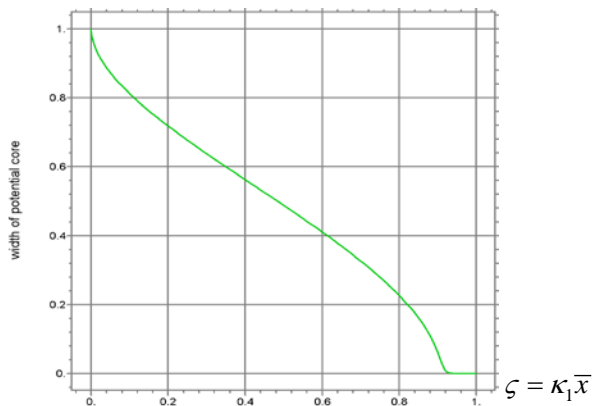


Рис. 24б Потенційне ядро струменя  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

Для  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=2.0$  результати наведено на рис. 25, де приблизно  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,6$ . Якщо  $\kappa_1=0,1$ , то  $\bar{x} = 6$  означає, що початкова частина струменя становить 6 радіусів сопла.

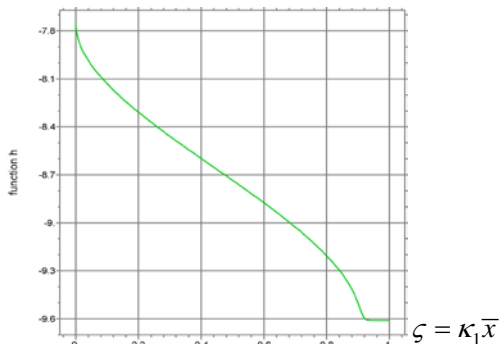


Рис. 24с Зміна функції  $h(\zeta)$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

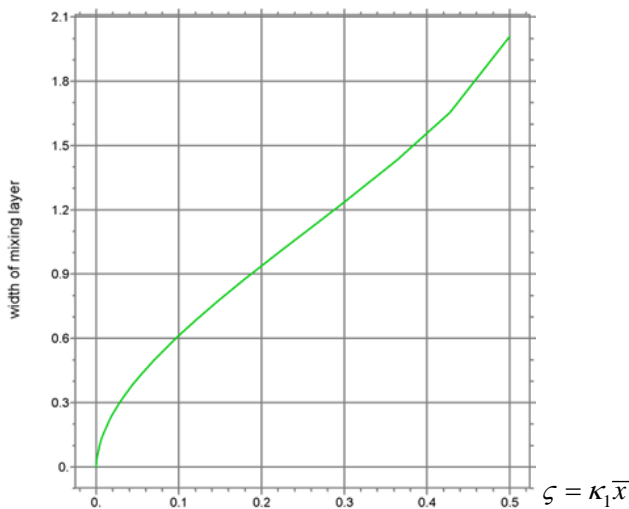


Рис. 25а Зона змішування струменя  $\delta$  вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=2.0$

Аналогічно, для  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=3.0$  і  $\kappa_{21}=5.0$  результати моделювання наведені на рис. 26 і 27, відповідно, звідки приблизно видно, що  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,40$  і  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0,25$ , відповідно. За  $\kappa_1=0,1$  впливає, що  $\bar{x} = 4.0$  і  $\bar{x} = 2.5$ ,

відповідно. Таким чином, у цих випадках початкова частина струменя становить близько 4 і 2,5 радіусів сопла. Характер функцій такий же, але масштаб залежить від  $\kappa_{21}$ . Усі функції є лінійними в головній частині, але нелінійними на початку та в кінці інтервалу на початковій частині струменя.

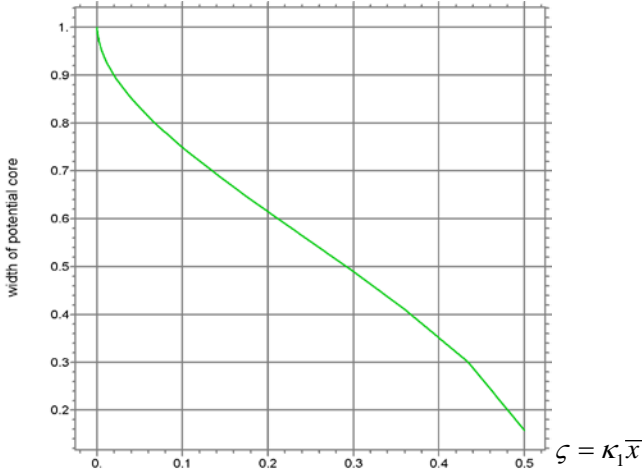


Рис. 25b Потенційне ядро струменя  $y_0$  на початковій частині вздовж осі:  
 $i_0=1.0, \kappa_{21}=2.0$

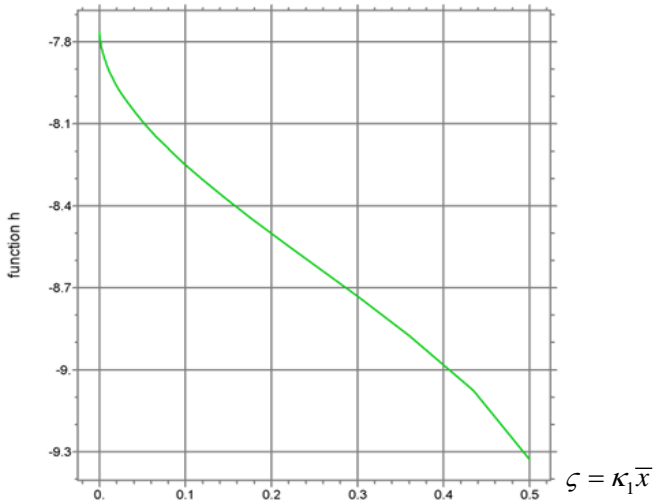


Рис. 25с Зміна функції  $h(\zeta)$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=1.0, \kappa_{21}=2.0$

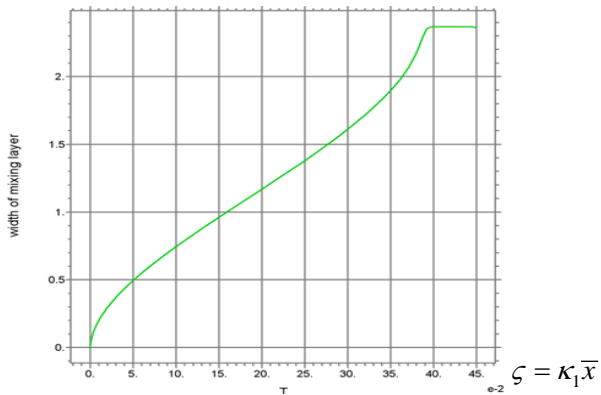


Рис. 26а Зона змішування струменя  $\delta$  на початковій ділянці:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=3.0$

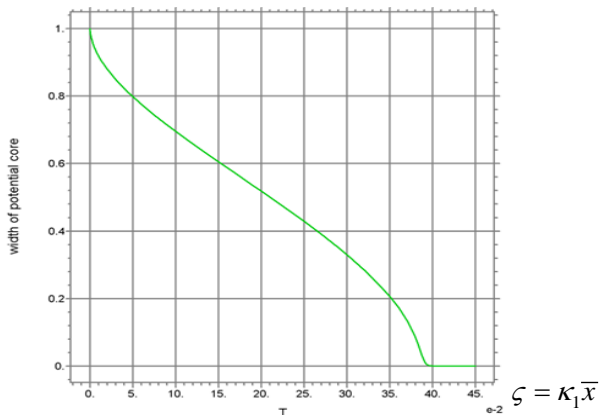


Рис. 26б Потенційне ядро струменя  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=3.0$

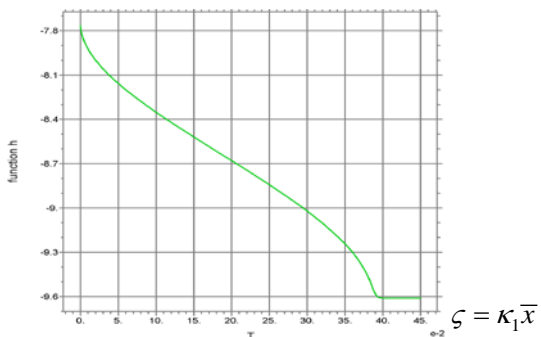


Рис. 26с Зміна  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=3.0$

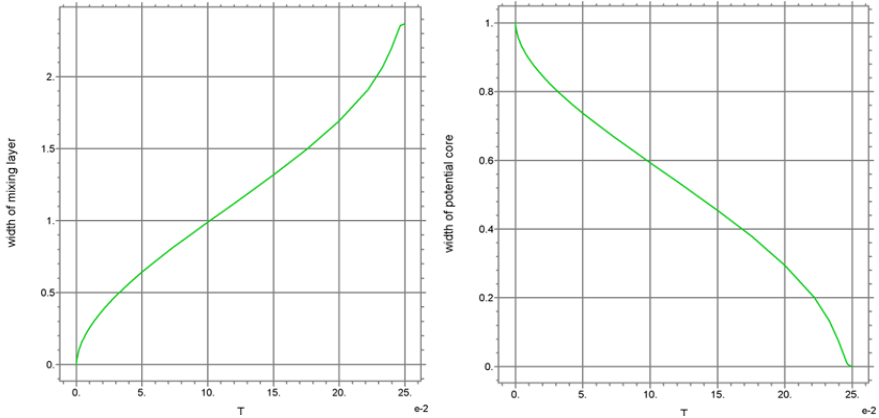


Рис. 27а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

Рис. 27б Потенційне ядро струменя  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

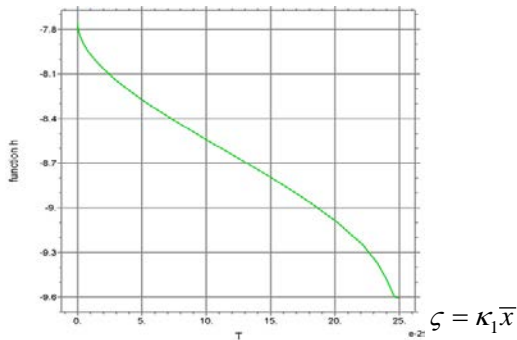


Рис. 27с Зміна функції  $h(\zeta)$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=1.0$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

Ми виконали комп'ютерне моделювання для широкого діапазону параметра  $i_0$ , який є добутком відношення густини на ковзання фаз змішування, і відношення коефіцієнтів турбулентного змішування  $\kappa_{21}$ . Маючи такі дані, можна використовувати експериментальні дані, для оцінки реального значення  $\kappa_{21}$ .

### 5.2.3 Результати розрахунку початкової частини струменя, $i_0=0.8$ ; 1.2

Для  $i_0=0.80$  комп'ютерне моделювання проводилося за трьома різними значеннями параметра  $\kappa_{21}=0.5, 1.0$  і  $5.0$ . Зі збільшенням коефіцієнта турбулентного перемішування рідини, що вводиться, початкова частина

струменя, як і раніше, скорочується. Наприклад, результати на рис. 28 для  $\kappa_{21}=0.5$  показують  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 1.55$ , далі не реально, оскільки початкова частина струменя закінчена:  $y_0 = 0, \delta = \delta_i$ . Якщо коефіцієнт турбулентного перемішування першої фази дорівнює  $\kappa_1=0.1$ , то  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 1.55$  означає, що початкова частина струменя  $\bar{x} = 15.5$  становить всього 15.5 радіуса струменя при  $i_0=0.8, \kappa_{21}=0.5$  (праворуч – фрагмент у більшому масштабі):

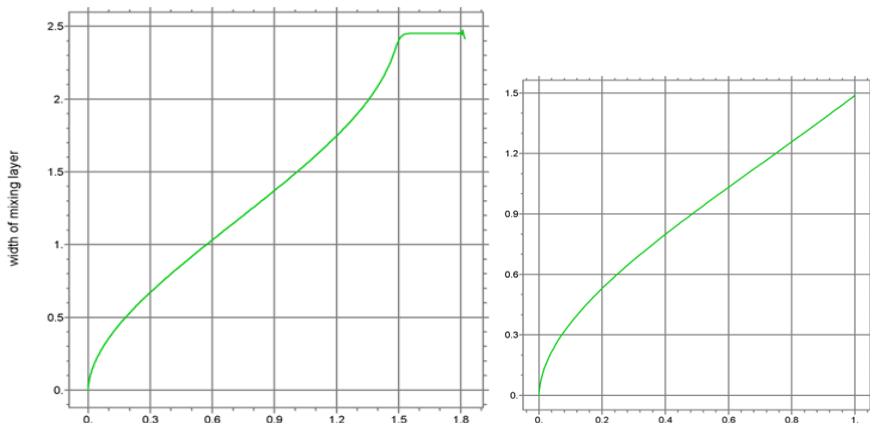


Рис. 28а Зона змішування  $\delta$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.8, \kappa_{21}=0.5$

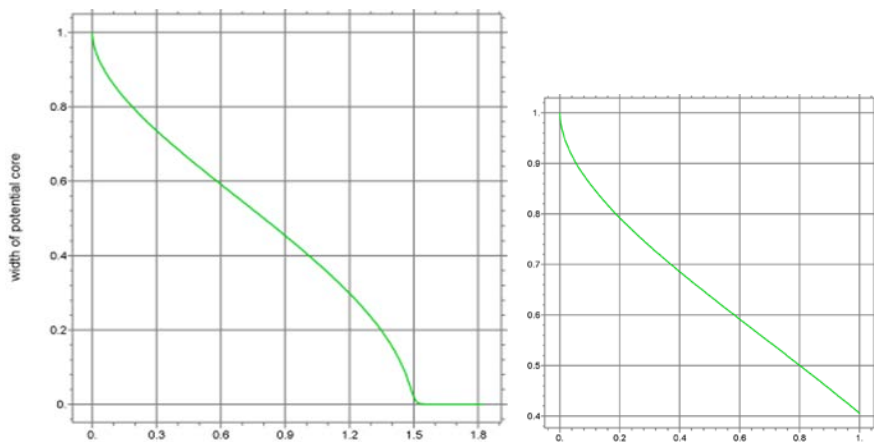


Рис. 28б Потенційне ядро струменя  $y_0$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.8, \kappa_{21}=0.5$

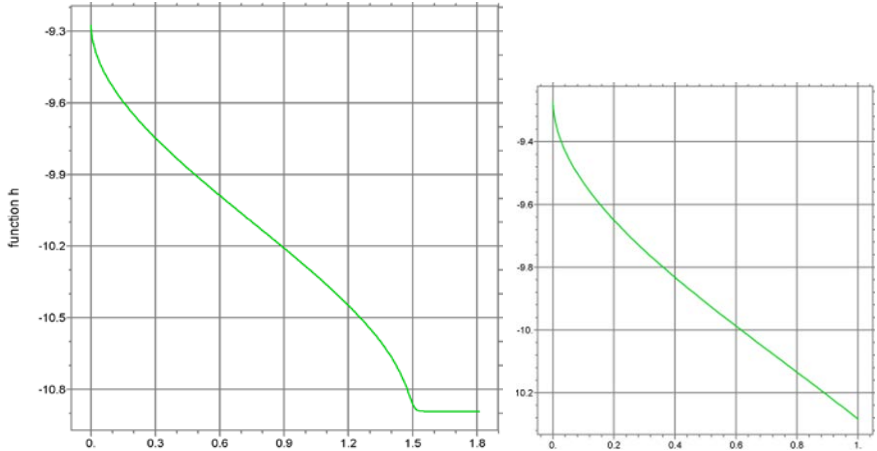


Рис. 28с Зміна функції  $h(\zeta)$  уздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.8, \kappa_{21}=0.5$

Результати для  $i_0=0.80, \kappa_{21}=1.0$  і  $5.0$  представлені на рис. 29, 30. Дані  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 1.0$  і  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0.26$ , відповідно. Для  $i_0=1.2, \kappa_{21}=1.0$  отримано  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 0.86$ :  $y_0 = 0, \delta = \delta_i$  (рис. 31). Якщо коефіцієнт турбулентного перемішування для першої фази  $\kappa_1=0.1$ , то  $\bar{x} = 8.6$  (початкова частина струменя становить близько 8,6 радіусів сопла).

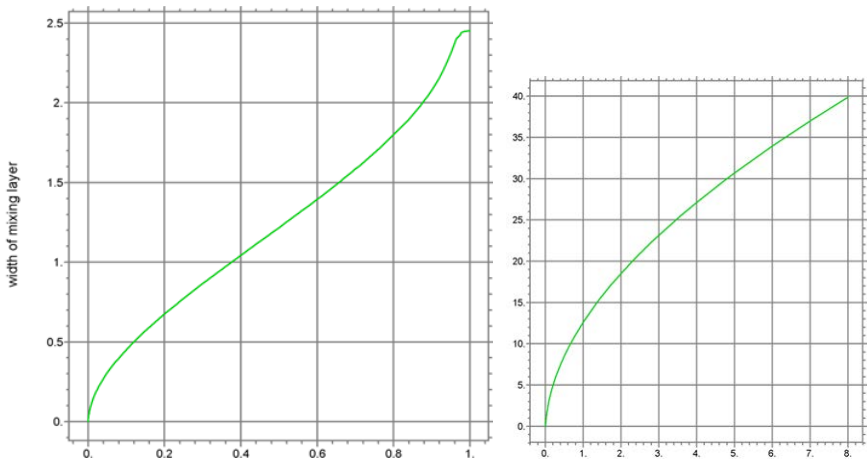


Рис. 29а Зона змішування  $\delta$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.8, \kappa_{21}=1.0$

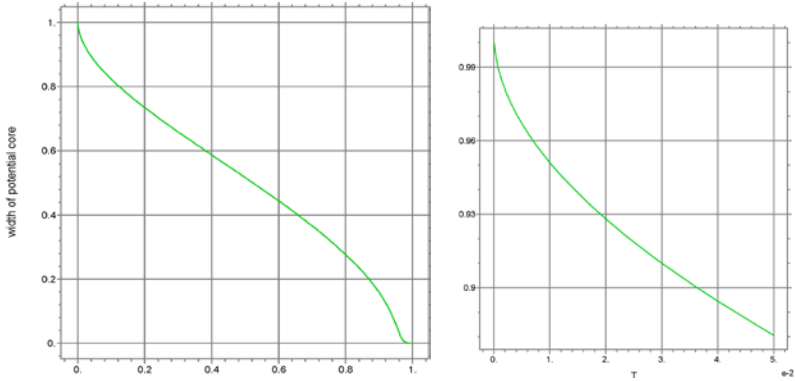


Рис. 29b Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі ( $\xi = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.8, \kappa_{21}=1.0$

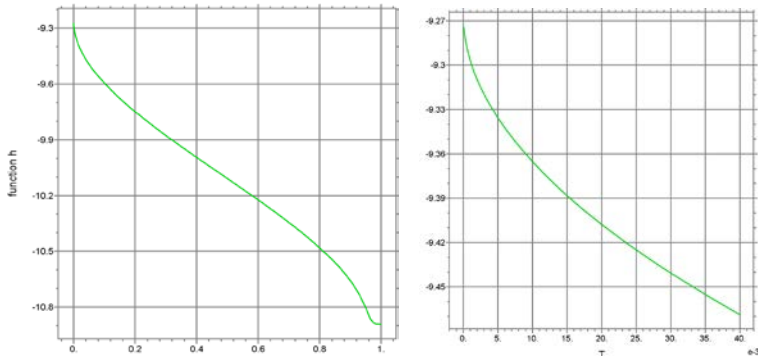


Рис. 29c Зміна функції  $h(\zeta)$  уздовж осі ( $\xi = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.8, \kappa_{21}=1.0$

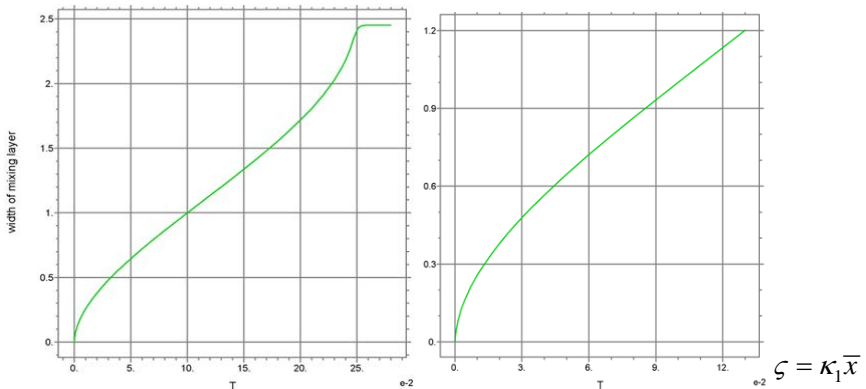


Рис. 30а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=0.8, \kappa_{21}=5.0$

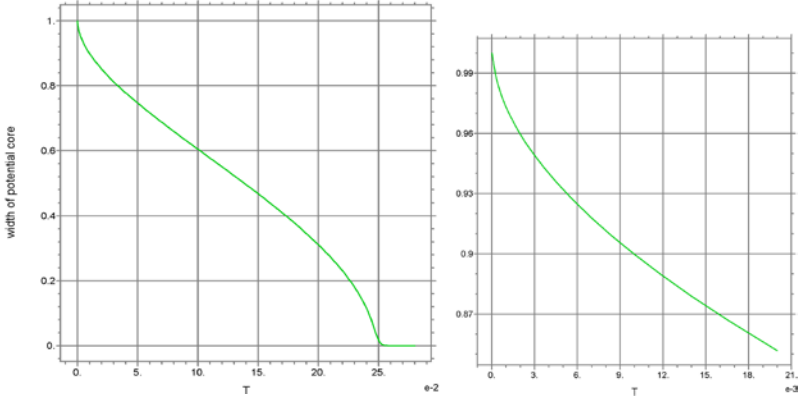


Рис. 30b Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.8$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

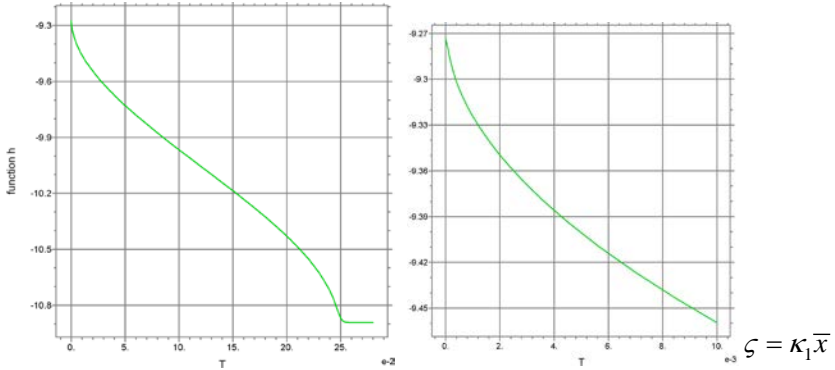


Рис. 30с Діапазон зміни функції  $h(\zeta)$  вздовж осі:  $i_0=0.8$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

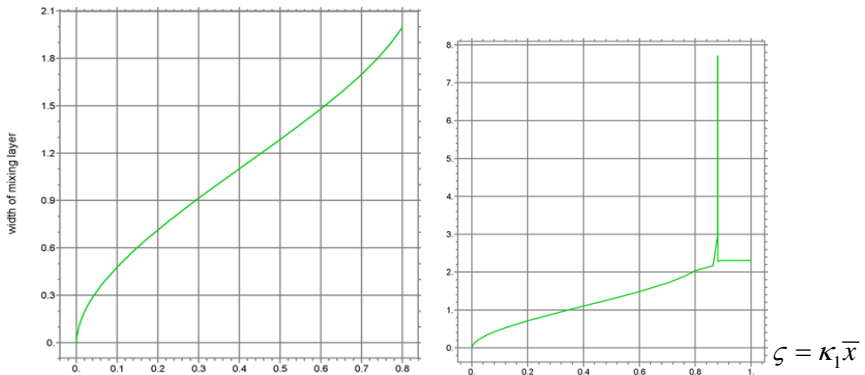


Рис. 31а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=1.2$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

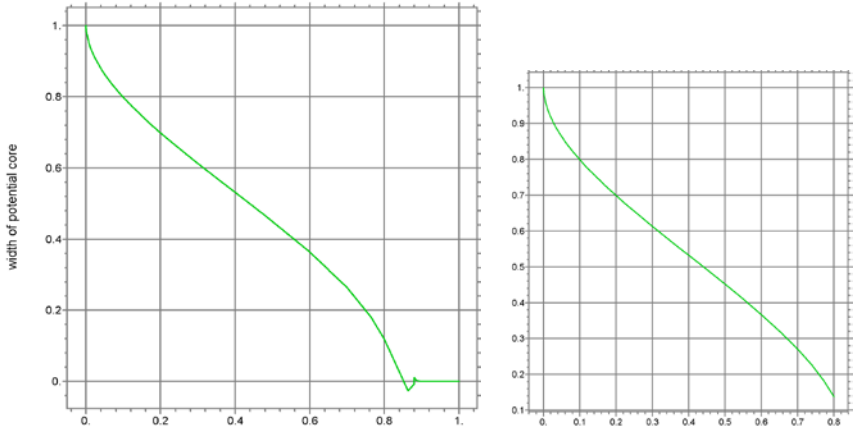


Рис. 31b Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=1.2$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

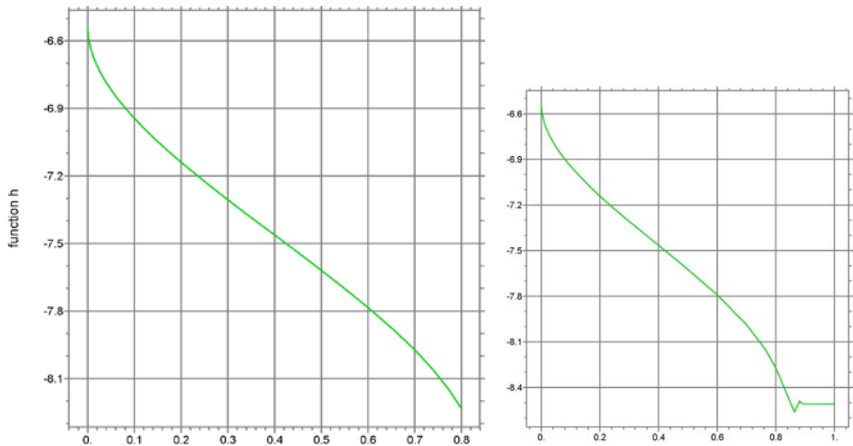


Рис. 31с Зміна функції  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=1.2$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

Як видно з рис. 31а, б, тут виявлено залежність від точності при комп'ютерному моделюванні та доступні ситуації, коли нестабільність чисельної схеми дає деякі стрибки параметрів наприкінці початкової частини струменя, але цього можна уникнути за допомогою відповідного вибору точності розрахунку, параметрів програми тощо. Ліворуч показано плавні результати розрахунку, але трохи перед кінцем він зупиняється, тоді як праворуч це варіант, коли такі ж дані отримують і після закінчення початкової частини течії струменя, тільки тоді виникає сильне коливання.

### 5.2.4 Результати розрахунку початкової частини струменя, для $i_0=0.3$

Для малої щільності навколишньої нерухомої рідини та низького рівня коефіцієнта турбулентного змішування, комп'ютерне моделювання показало, що в таких випадках може відбуватися дуже невелике всмоктування рідини басейну, так що зона змішування може бути вузькою або майже відсутньою за деяких обставин. Нижче наведено результати моделювання для  $i_0=0.3$ . Наприклад, випадок  $\kappa_{21}=0$  - для малого коефіцієнта густини та нульового коефіцієнта турбулентного перемішування навколишньої рідини - початкова частина струменя подовжується. На рис. 32 приблизно  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 70$  майже асимптотичне значення, згодом воно не змінюється, оскільки початкова частина струменя не закінчена.

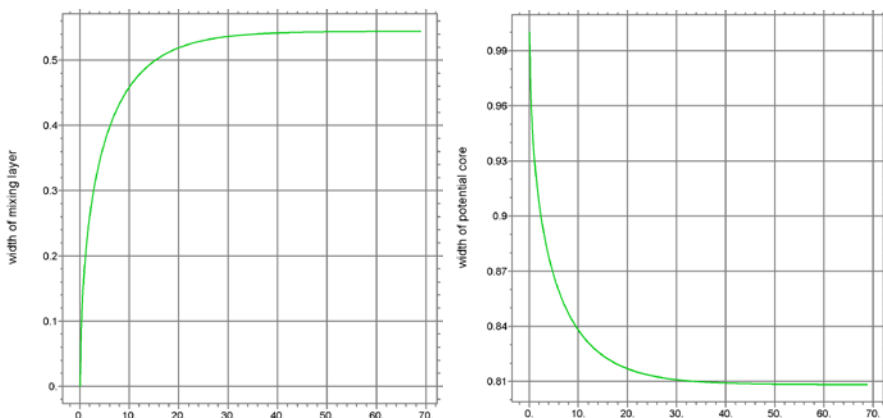


Рис. 32а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0$

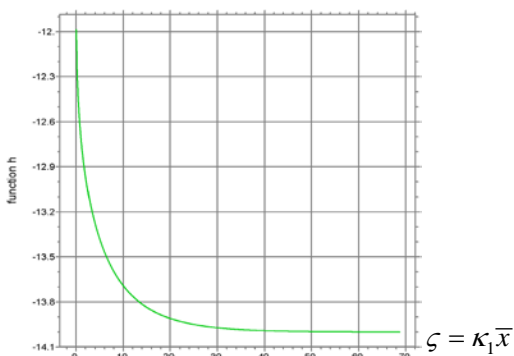


Рис. 32б Зміна функції  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0$

На досить великій відстані, близько 70, зниження потенційного ядра лише до 0.8 і збільшення зони змішування лише до 0.55. Більше того, ядро стабілізується на постійному рівні приблизно на  $\zeta = \kappa_1 \bar{x} = 40$ . При  $\kappa_{21}=0.01$  і  $\kappa_{21}=0.1$  результати подібні до показаних на рис. 33 і 34, тільки зі збільшенням коефіцієнта  $\kappa_{21}$  зона змішування стає ширшою, а частина стабілізації - довшою.

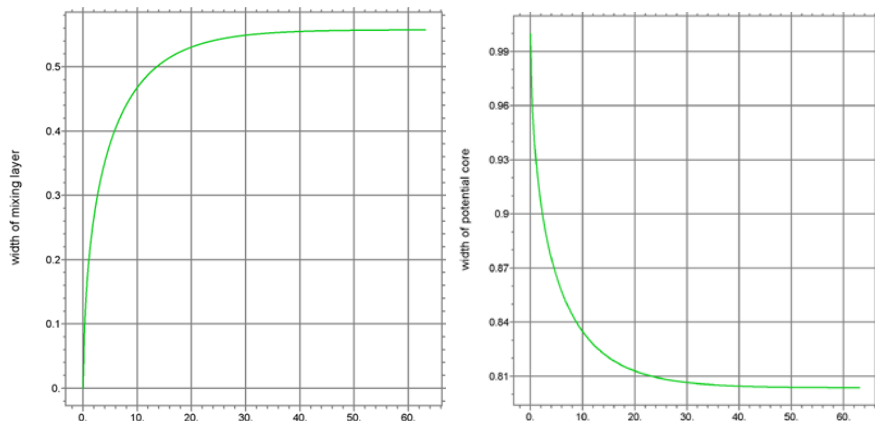


Рис. 33а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0.01$

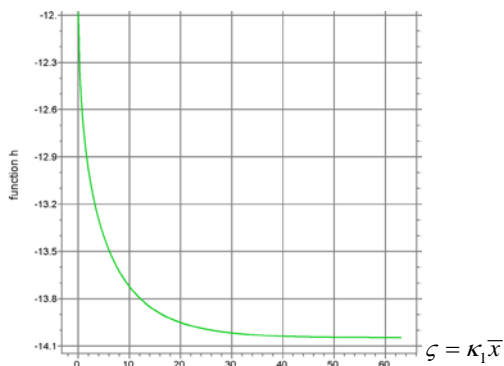


Рис. 33б Зміна функції  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0.01$

Подібні властивості для  $i_0=0.3$  були виявлені в детальному чисельному моделюванні шляхом зміни значень  $\kappa_{21}$  від  $\kappa_{21}=0.2$  до  $\kappa_{21}=1.0$ . Таким чином, струмінь більш щільної рідини впорскує лише невелику кількість навколишньої легшої рідини, за винятком випадку дуже інтенсивного

коефіцієнта турбулентного перемішування в навколишній рідині, який, здається, не є реальним випадком або дуже специфічним.

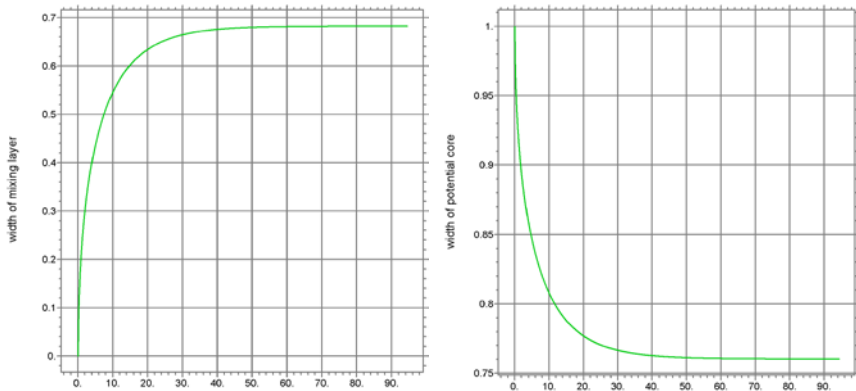


Рис. 34а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

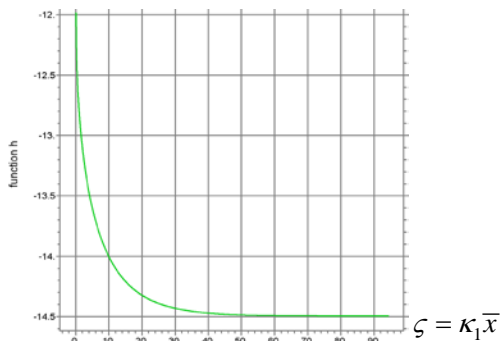


Рис. 34б Зміна функції  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

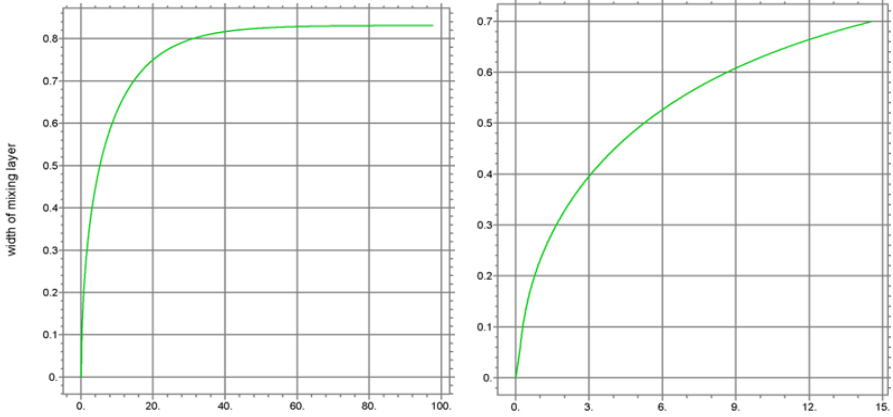


Рис. 35а Зона змішування  $\delta$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

Для  $i_0=0.3$  в діапазоні зміни  $\kappa_{21}=0.2-1.0$  результати розрахунків наведені на рис. 35-39, напр. при  $\kappa_{21}=0.5$  це  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 120$  майже асимптотичне значення, далі не змінюється, оскільки початкова частина струменя не закінчена.

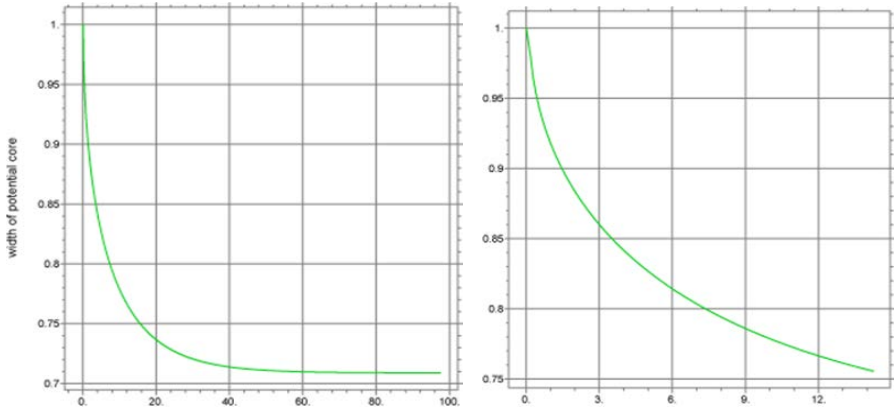


Рис. 35б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

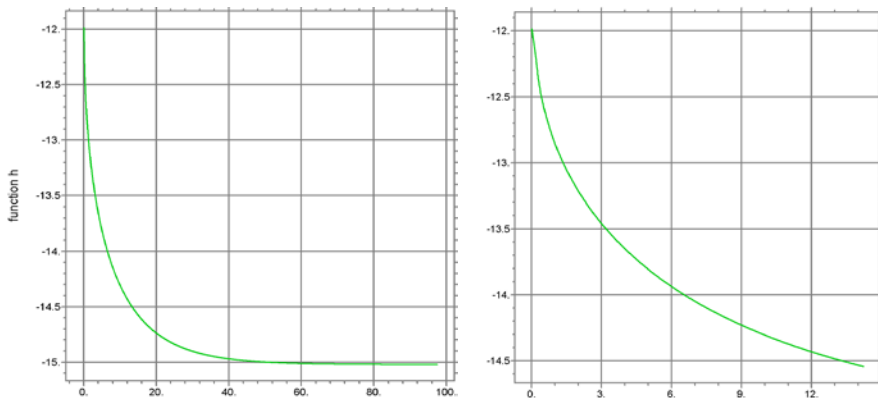


Рис. 35с Зміна функції  $h(\xi)$  уздовж осі:  $i_0=0.3, \kappa_{21}=0.2$

При  $i_0=0.3$ , як чітко видно з рис. 35, потенційне ядро різко падає до свого асимптотичного значення приблизно 0,71, а шар змішування так само зростає до 0,83, так що для щільної рідини з сопла не відбувається інтенсивного змішування, як для приблизно однакових густин фаз або для щільнішої рідини в басейні. Як показано на рис. 37а, 37б для  $i_0=0.3, \kappa_{21}=0.7$ , довжина початкової частини струменя нескінченна, шар змішування зростає до 1.8, що є асимптотичне значення приблизно від  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 100$ . А потенційне ядро зменшується лише до значення близько 0.38, далі воно не змінюється, оскільки початкова частина струменя не закінчена.

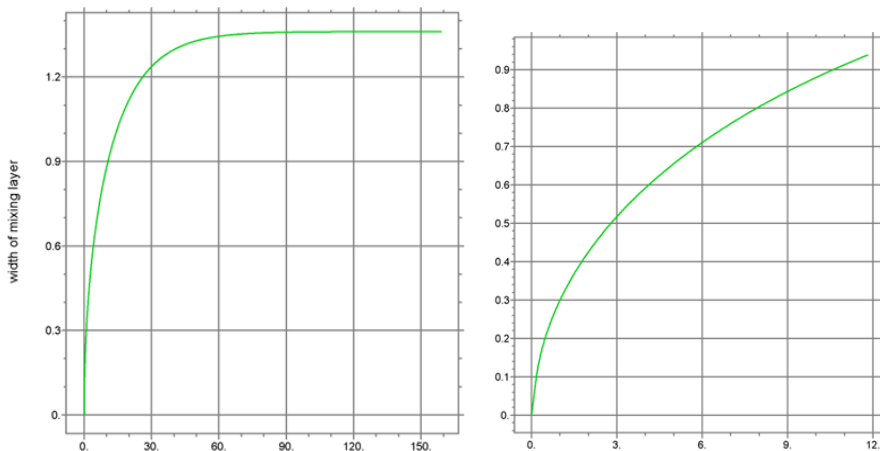


Рис. 36а Зона змішування  $\delta$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.3, \kappa_{21}=0.5$

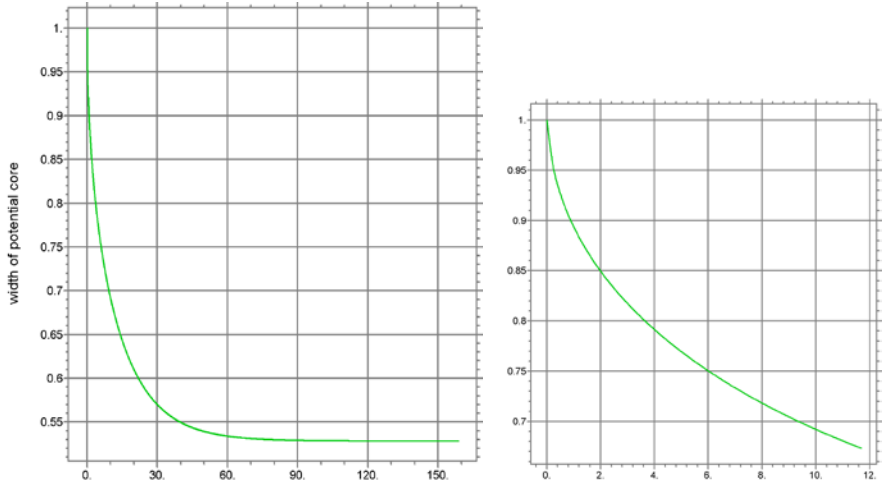


Рис. 36б Потенційне ядро  $y_0$  струменя вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0.5$

Діапазон зміни функції  $h(\zeta)$  суворо контролюється, оскільки в кожній області по  $h(\zeta)$  існує своя апроксимація функції-індикатора  $V_1$ . Подібні дані для  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0.9$ , представлені на рис. 38, демонструють асимптотичні значення:  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 90$ ;  $y_0 = 0.2$ ,  $\delta = \delta_i = 2.35$ .

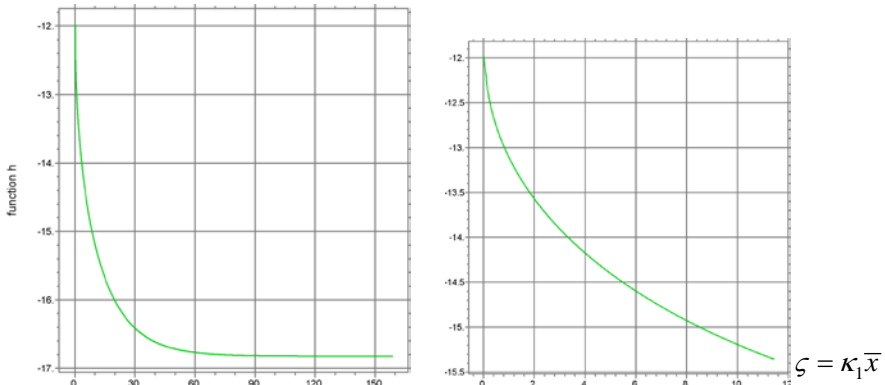


Рис. 36с Зміна функції  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0.5$

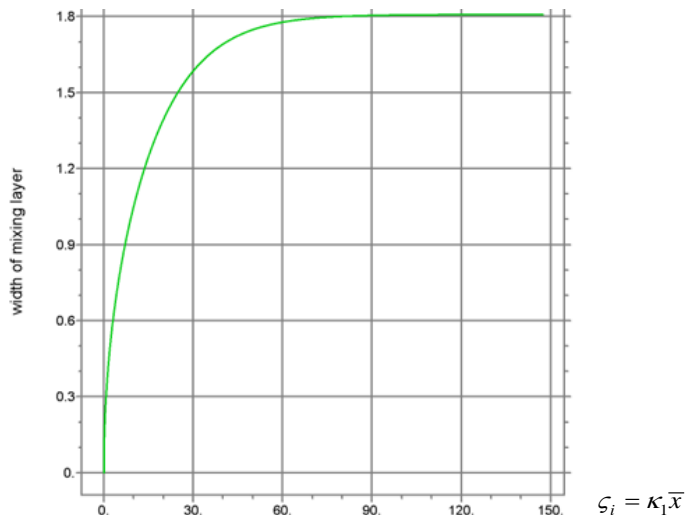


Рис. 37а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині струменя вздовж осі:  
 $i_0=0.3, \kappa_{21}=0.7$

А для  $\kappa_{21}=1,0$  – асимптотичні значення такі:  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 70$ ,  
 $y_0 = 0.08, \delta = \delta_i = 2.7$  (рис. 39).

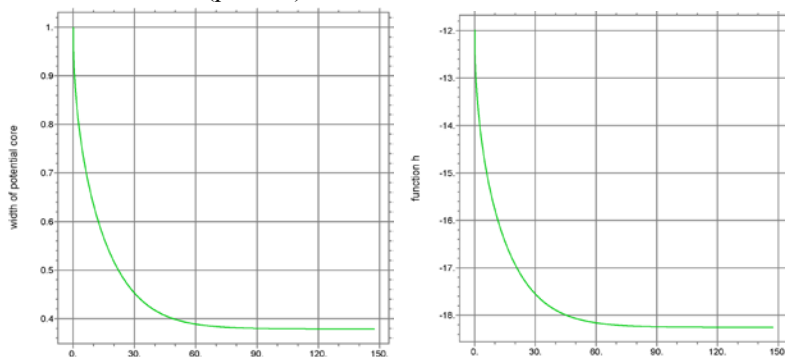


Рис. 37b Потенціальне ядро  $y_0$  і функція  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3, \kappa_{21}=0.7$

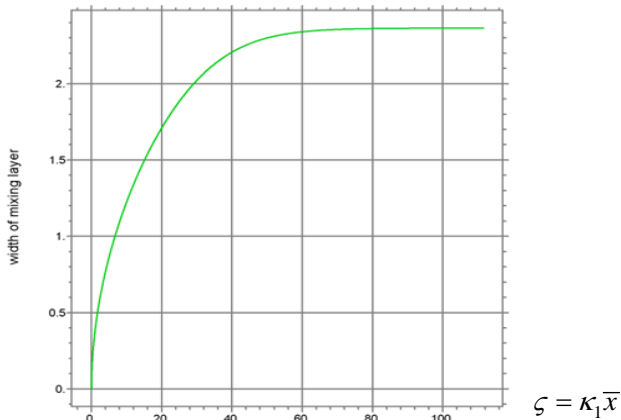


Рис. 38а Зона змішування  $\delta$  вздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0.9$

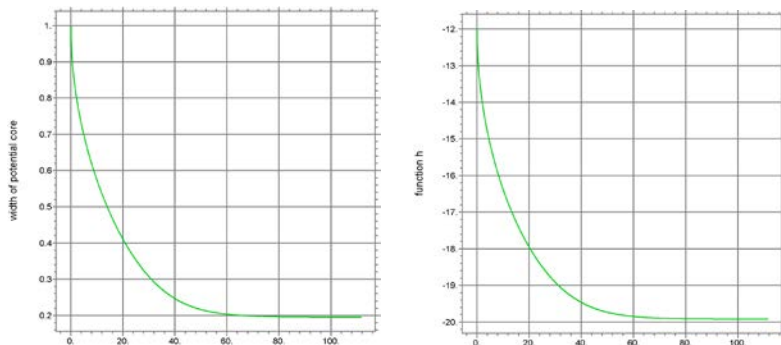


Рис. 38б Потенціальне ядро  $y_0$  і функція  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=0.9$

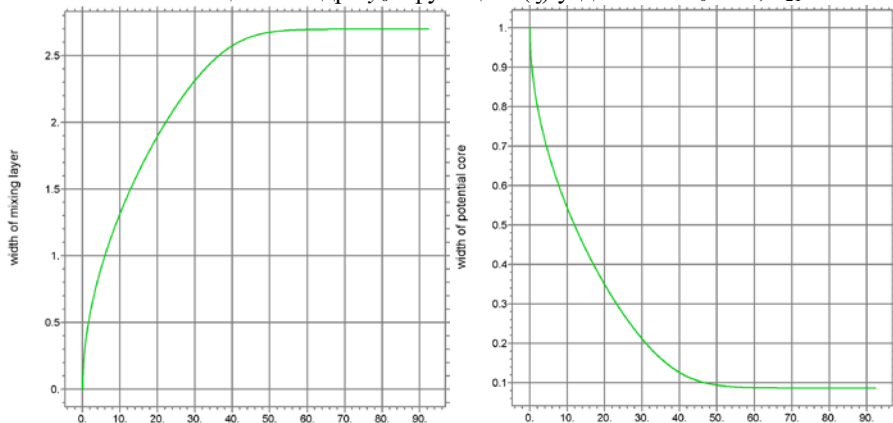


Рис. 39а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

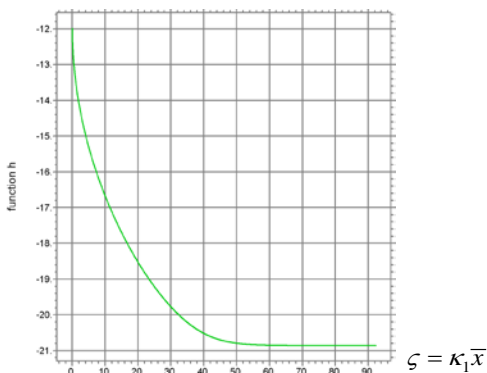


Рис. 39б Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині струменя:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

А для діапазону великої варіації параметра  $\kappa_{21}=2-15$  результати розрахунків представлені на рис. 40-49. Точність обчислення різна для різних значень параметрів, наприклад, для цього випадку в основному вимагається, щоб обмежена помилка в комп'ютерній програмі була нижче  $10^{-12}$ , але рішення отримано за малий час обчислення.

Для цих параметрів чисельне рішення диференціальних рівнянь вимагає дуже малої граничної похибки, приблизно  $10^{-15}$ . Варіація параметрів дає той самий запит на дуже високу точність розрахунку на відміну від наведеного вище випадку з кінцевою початковою частиною потоку струменя. Рішення для великих значень параметра  $\kappa_{21}=2-15$  на  $i_0=0.3$ , представлені на рис. 40-49, показують кінцеву початкову частину струминного потоку, але ці великі коефіцієнти турбулентного змішування другої фази здаються нереальними. Тим не менш, комп'ютерне моделювання виявило властивості системи в діапазоні змінних параметрів.

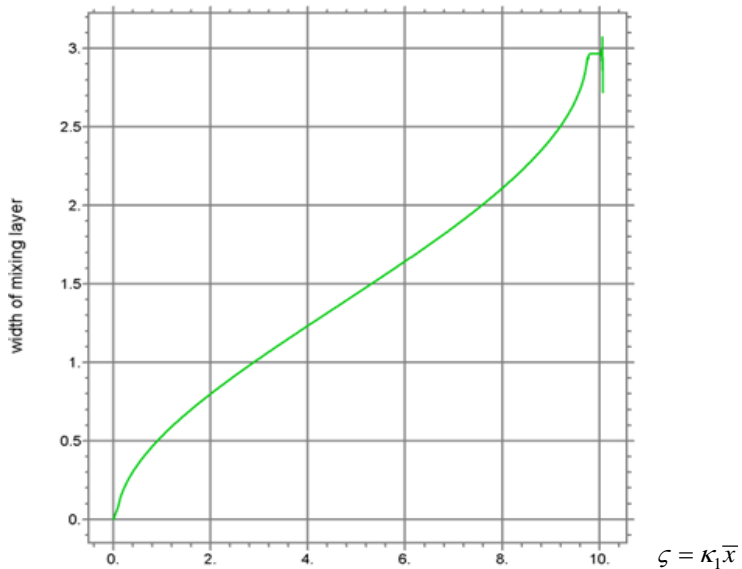


Рис. 40а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині по осі:  $i_0=0.3, \kappa_{21}=2.0$

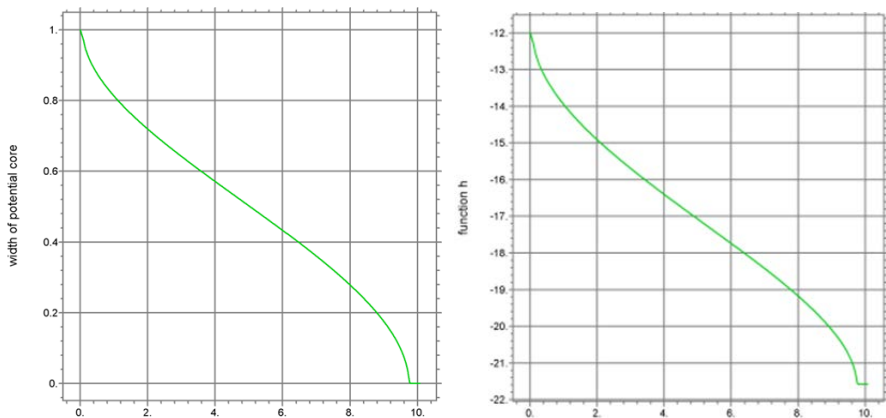


Рис. 40b Потенціальне ядро  $y_0$  і функція  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3, \kappa_{21}=2.0$

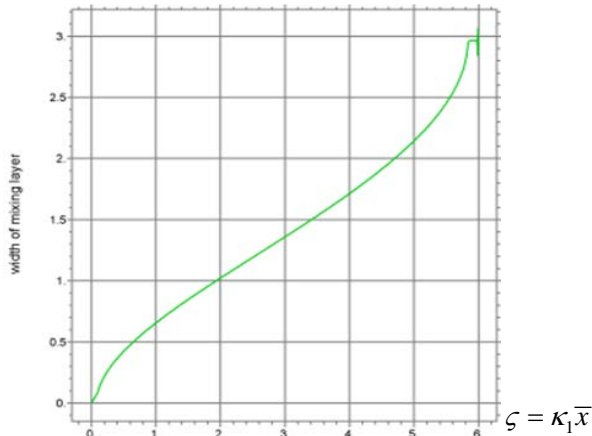


Рис. 41а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=3.0$

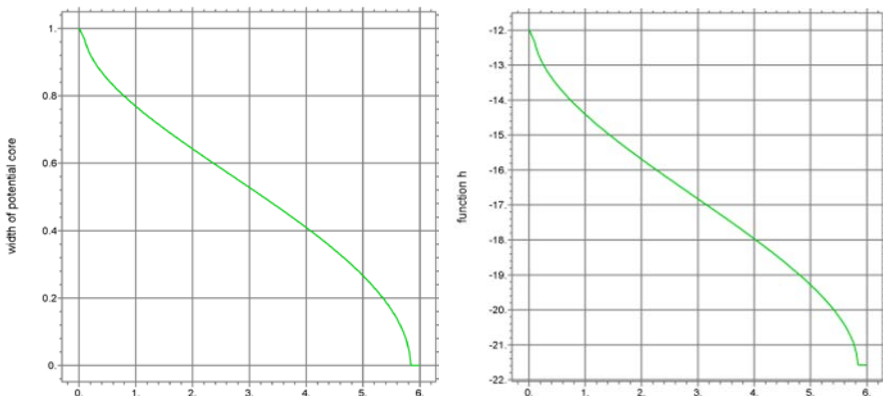


Рис. 41b Потенціальне ядро  $y_0$  і функція  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=3.0$

При  $i_0=0.30$ ,  $\kappa_{21}=2.0$  було отримано  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 9.8$ , що показано на рис. 40, далі розрахунок не є реальним, оскільки початкова частина струменя закінчена,  $y_0 = 0, \delta = \delta_i$ . Наприклад, якщо коефіцієнт турбулентного перемішування для води як першої фази становить  $\kappa_1=0.1$  (скажімо, приблизно в 100 разів більше, ніж ламінарний), то  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 9.8$  означає  $\bar{x} = 98$ , що початкова частина струменя становить приблизно 98 радіусів струменя. І гранична похибка відрізняється для кінцевих струменів, досить мала порівняно з вищезазначеним нескінченним струменем, більш ніж на 10

порядків на десять менше, до  $10^{-3}$ . Для  $i_0=0.30$ ,  $\kappa_{21}=3.0$ , отримуємо  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 5.8$ ,  $y_0 = 0, \delta = \delta_i = 2.95$  (рис. 41). При  $\kappa_{21}=5.0$  дані наведені на рис. 42:  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 3.25$ ,  $y_0 = 0, \delta = \delta_i = 2.95$ . Для  $i_0=0.30$ ,  $\kappa_{21}=7.0$  дані наведені на рис. 43:  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 2.25$ ,  $y_0 = 0, \delta = \delta_i = 3.0$ .

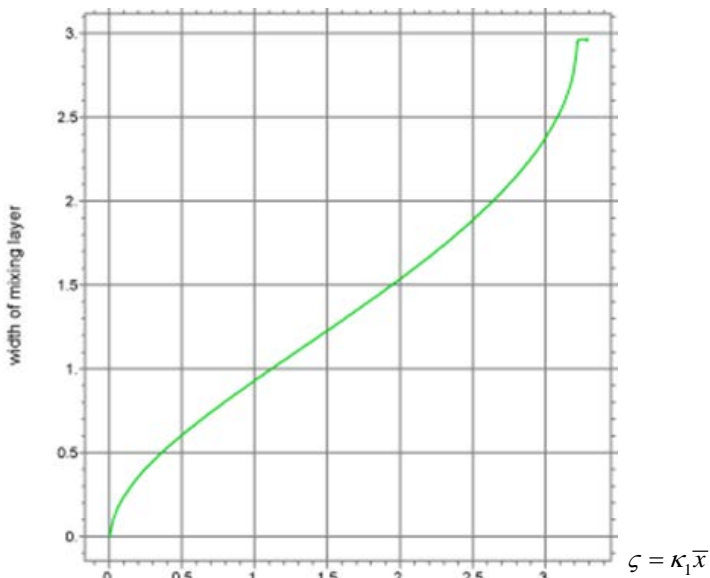


Рис. 42а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

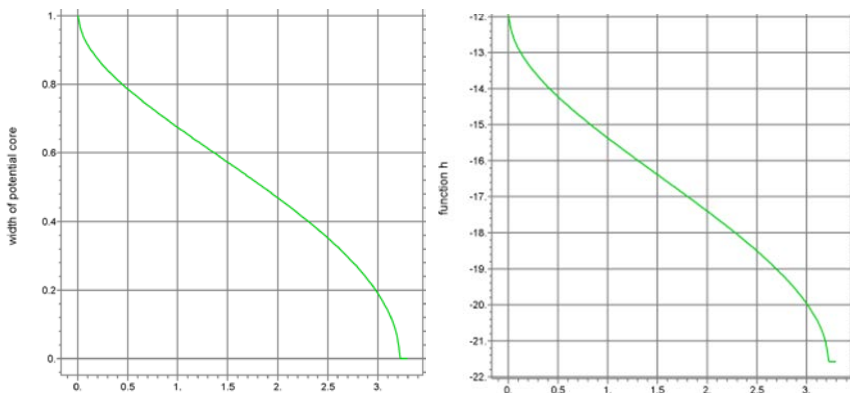


Рис. 42b Потенціальне ядро  $y_0$  і функція  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

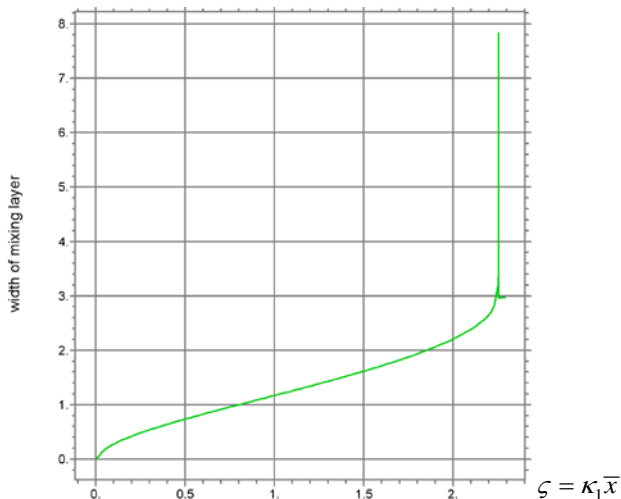


Рис. 43а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=7.0$

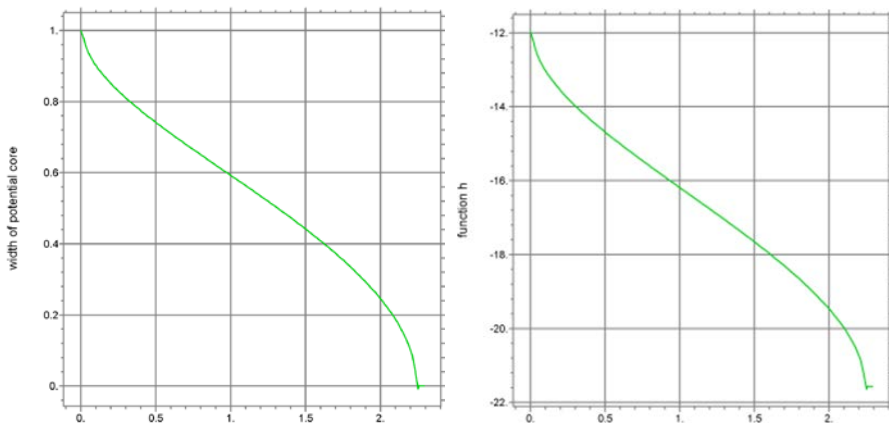


Рис. 43b Потенціальне ядро  $y_0$  і функція  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=7.0$

А для  $\kappa_{21}=8.0$  – на рис. 44:  $\varsigma_i = \kappa_1 \bar{x} = 2.0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\delta = \delta_i = 2.95$ . Також, аналогічно для  $\kappa_{21}=9.0$ , це  $\varsigma_i = \kappa_1 \bar{x} = 1.75$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\delta = \delta_i = 2.95$  (рис. 45). Результати рішення для  $i_0=0.30$ ,  $\kappa_{21}=10.0-15.0$  представлені нижче на рис. 46-49. Для  $\kappa_{21}=10.0$  було отримано  $\varsigma_i = \kappa_1 \bar{x} = 1.55$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\delta = \delta_i = 2.95$  (рис. 46). А для  $\kappa_{21}=11.0$  -  $\varsigma_i = \kappa_1 \bar{x} = 1.4$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\delta = \delta_i$  (рис. 47). Параметри  $\kappa_{21}=12.0$  та  $\kappa_{21}=15.0$  дають

$\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 1.28$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\delta = \delta_i = 2.95$  (рис. 48) та  $\zeta_i = \kappa_1 \bar{x} = 1.02$ , відповідно (рис. 49).

Таким чином, у другому випадку скорочується лише довжина початкової частини, але шар змішування майже такий же, як і та сама функція  $h(\zeta)$ .

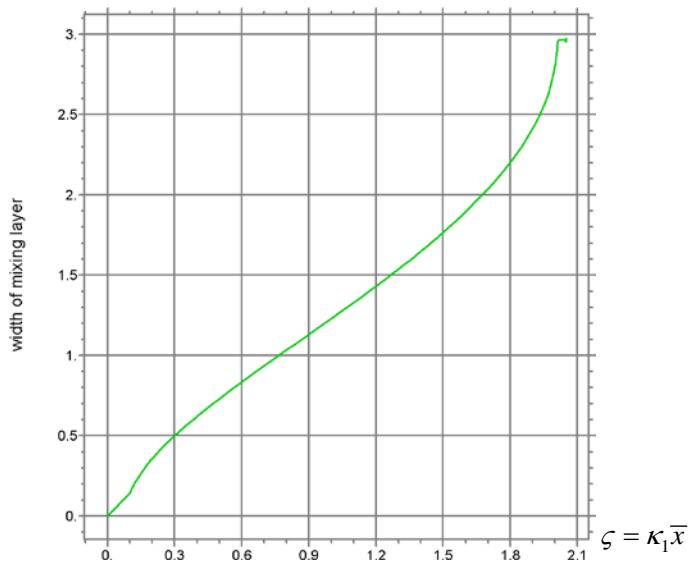


Рис. 44а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=8.0$

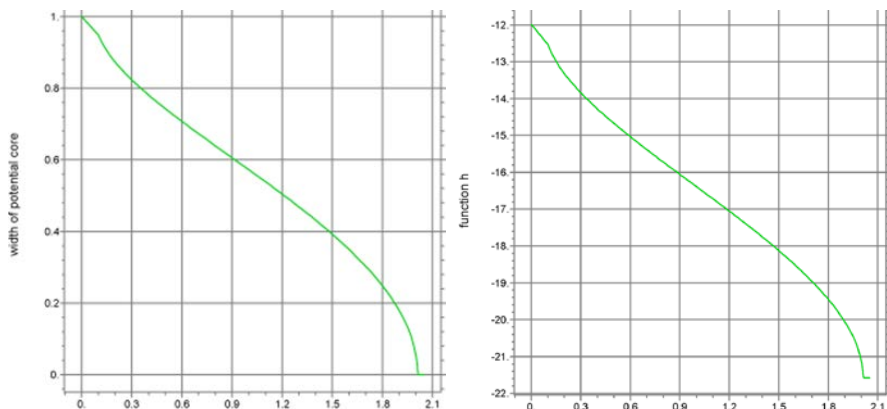


Рис. 44б Потенціальне ядро  $y_0$  і функція  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=8.0$

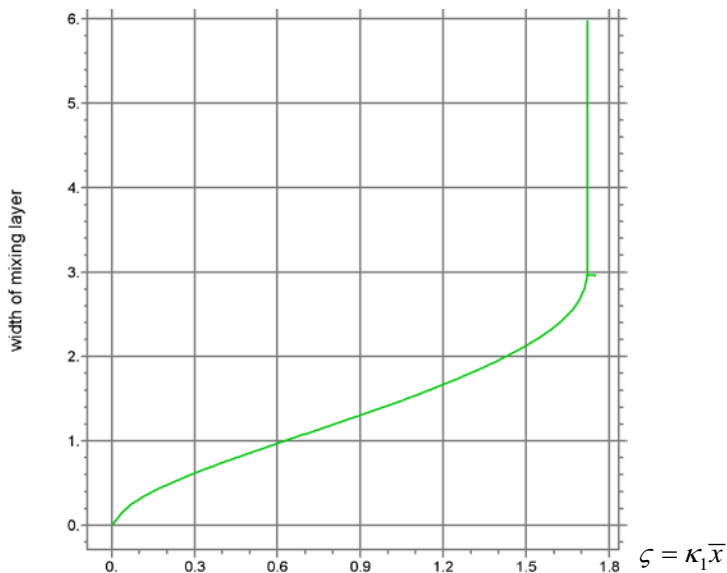


Рис. 45а Зона змішування  $\delta$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=9.0$

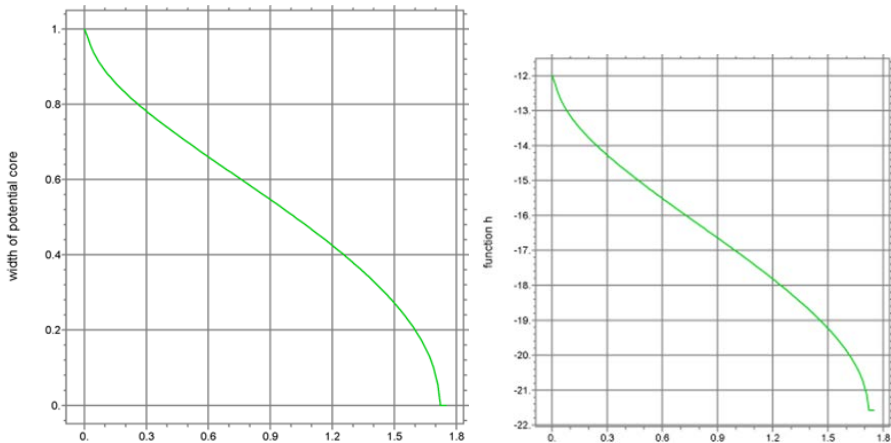


Рис. 45б Потенціальне ядро  $y_0$  і функція  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=9.0$

Незважаючи на те, що функція  $h(\zeta)$  на початковій ділянці струминної течії за деякими параметрами трохи виходить за межі діапазону (переходить у наступну область), на щастя, результати все ще адекватні.

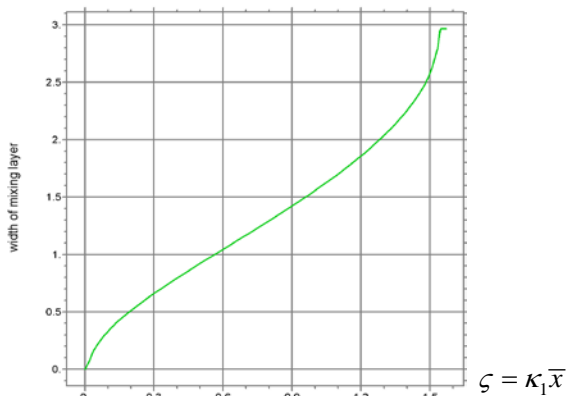


Рис. 46а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=10.0$

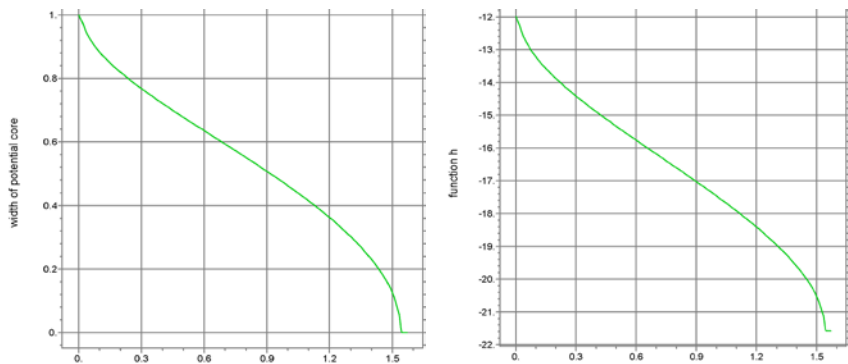


Рис. 46б Потенціальне ядро  $y_0$  і функція  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=10.0$

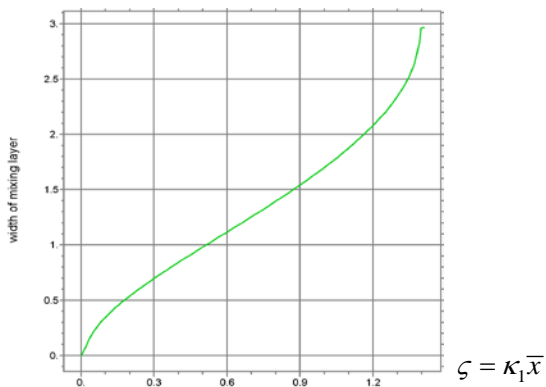


Рис. 47а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=11.0$

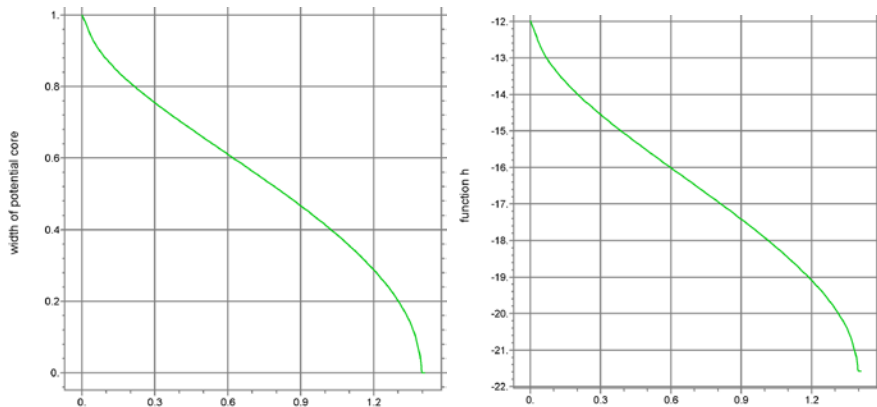


Рис. 47б Потенціальне ядро  $y_0$  і функція  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=11.0$

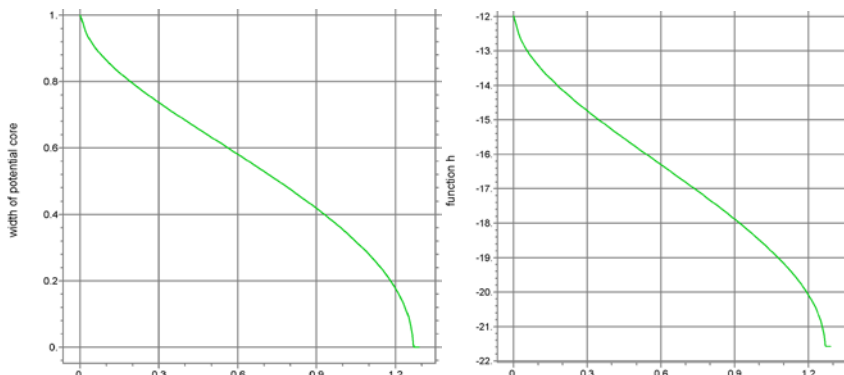
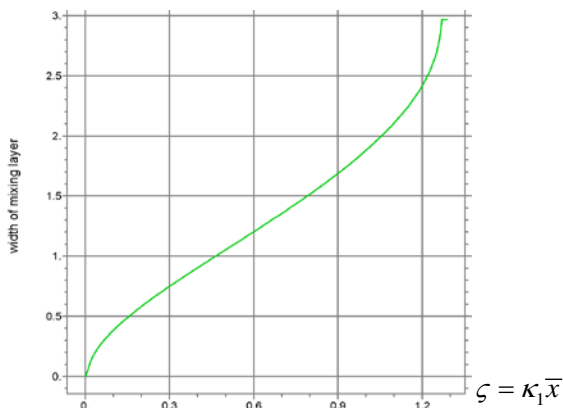


Рис. 48 Зона змішування, потенційне ядро та  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=12.0$

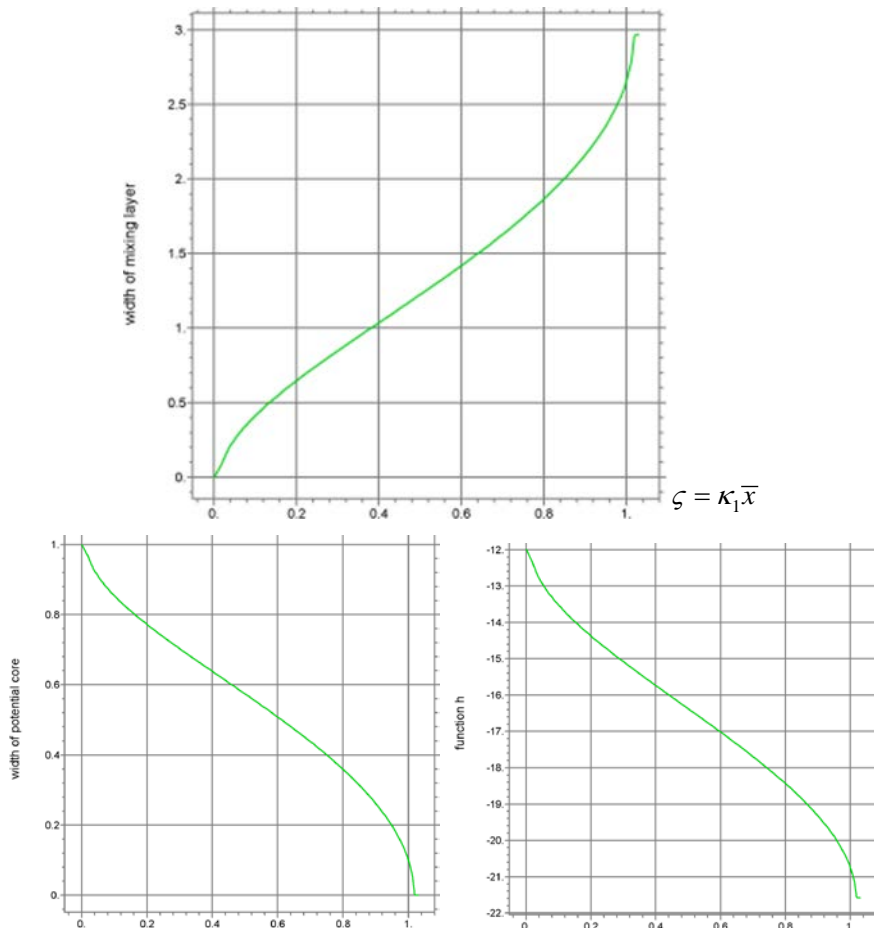


Рис. 49 Зона змішування, потенційне ядро та  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=0.3$ ,  $\kappa_{21}=15.0$

Результати комп'ютерного моделювання, представлені вище в широкому діапазоні доступних змінних параметрів, дозволяють практично застосовувати в різних конкретних випадках, вибираючи правильні константи шляхом порівняння обчислювальних даних з експериментальними результатами.

## 5.3 Особливості моделі та граничне значення функції $h(x)$

### 5.3.1 Аналіз крайової задачі та граничних параметрів

Функція  $y_0(h)$  має дійсні значення за будь-якими параметрами, тому значення під квадратним коренем у (18) має бути завжди додатним. Тому для параметрів наближень, доступних для використання тут, впливає наступна вимога:  $1 + 2a_1A + 2a_2A^2 > 0$ , що задовольняє будь-яке  $A$  ( $A > 0$ ) у діапазонах  $A > A_2 < 0$ ,  $A < A_1 < 0$ , які дають:  $A_2 = (\sqrt{D_a} - a_1)/(2a_2)$ ,  $A_1 = -(\sqrt{D_a} + a_1)/(2a_2)$ , де  $D_a < a_1$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ . Оскільки  $D_a = a_1^2 - 2a_2$ , з умови  $D_a \geq 0$  випливає  $a_1^2 \geq 2a_2$ , або

$$\left( \int_0^1 B_1 \bar{u}_1 d\eta \right)^2 \geq 2 \int_0^1 B_1 \bar{u}_1 \eta d\eta. \quad (20)$$

У наших наближеннях ці значення,  $a_1$  і  $2a_2$ , дуже близькі, тому  $A_2 \approx A_1 \approx -a_1/(2a_2)$  є критичною точкою, де рішення несправедливе.

З урахуванням (11) з нерівності (20) випливає така вимога до функції  $h$ :  $a_{12}^2 h^2 + 2(a_{11}a_{12} - a_{22})h + a_{11}^2 - 2a_{21} \geq 0$ , яка строго виконується, оскільки  $a_{12}^2 > 0$  і рівняння  $a_{12}^2 h^2 + 2(a_{11}a_{12} - a_{22})h + a_{11}^2 - 2a_{21} = 0$  не має дійсних коренів:

$$h_{1,2} = \frac{a_{22} - a_{11}a_{12} \pm \sqrt{D_h}}{a_{12}^2},$$

оскільки за нашими наближеннями дискримінант  $D_h = a_{22}(a_{22} - 2a_{11}a_{12}) < 0$ , як показано нижче з розрахунків відповідно до даних, представлених у таблиці 1:

$$D_h = -1.3 \cdot 10^{-4}, \quad D_h = -2.7 \cdot 10^{-5}, \quad D_h = -7 \cdot 10^{-6}, \quad D_h = -2 \cdot 10^{-6}, \quad D_h = -7 \cdot 10^{-7}.$$

Перші два значення  $D_h$  малі, а решта нижче точності, прийнятої при обчисленні даних у таблиці 1. Тому ми можемо покласти  $D_h \approx 0$  для розрахунку наближені значення функції  $h$  по всіх областях апроксимації  $B_1$ , де розв'язок не існує через  $1 + 2a_1A + 2a_2A^2 = 0$ :  $h = h_{1,2} = (a_{22} - a_{11}a_{12})/a_{12}^2$ . Це показує недосяжні апроксимації профілів, які не задовольняють умову (20).

Функції  $h_0(i_0)$ ,  $h_i(i_0)$  у (19) мають розриви в точках переходу постійної функції  $B_1^{(n)}(\eta, h)$  від одного регіонального наближення до іншого (перша

похідна має розрив у цих точках). Неможливо отримати загальну апроксимацію для  $B_I(\eta, h)$ , що задовольняє граничні умови у всіх діапазонах  $i_0$  (через зміну  $B_I$  між 0 і 1). Розрахунки не виявили суттєвої різниці в кінцевих результатах чисельного розв'язування в точках перетворення функцій  $B_I(\eta, h)$ .

$h_0(i_0), h_i(i_0)$

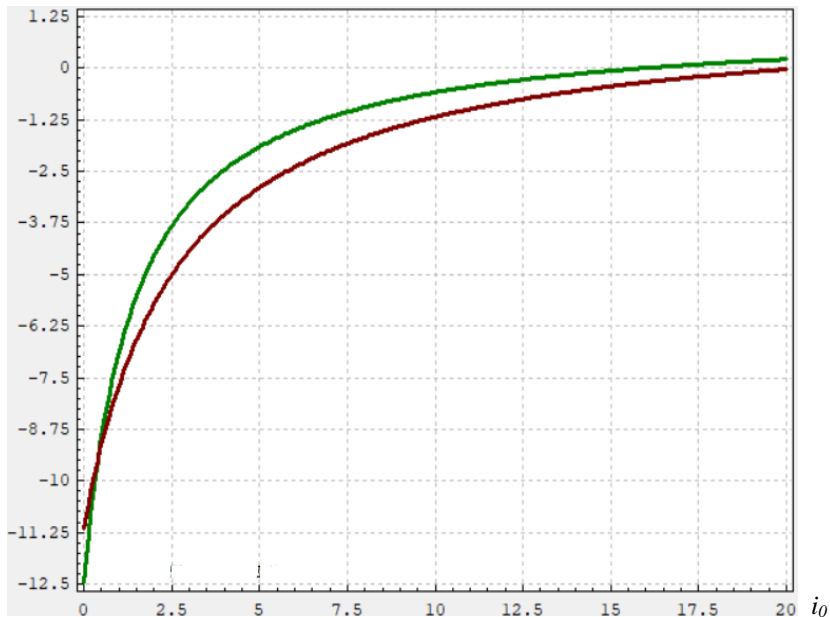


Рис. 50 Варіація функцій  $h_0(i_0), h_i(i_0)$  для функції-індикатора  $B_1^{(0)}$

Для першої області функції-індикатора  $B_1^{(0)}$  маємо  $h \in [-6, 0]$ ,  $h_0 = 0$ ,  $i_0 \approx 15.9$ ,  $h_i = 0$ ,  $i_0 \approx 20.4$ ;  $h_0$  показано на рис. 50,  $h_i$  - знизу, робоча область на  $h_0$  і  $h_i$  відповідно:  $i_0 \in [1.3; 15.9]$  і  $i_0 \in [1.8; 20.4]$ . Таким чином, спільна область:  $i_0 \in [1.8; 15.9]$ - для змішування рідин, коли густіша оточує. Оскільки  $i_0 = n s_0^2$ , ця область підходить майже для всіх випадків із рівними густинами рідин, що змішуються ( $n=1$ ), оскільки є ковзання фаз  $s_0^2$  і навіть відносно невелике ковзання  $s_0 = 0.8$  призводить до  $s_0^2 = 0.64$ ,  $\rho_2 / \rho_1 = 1.8 / 0.64 = 2.8$ ,  $\rho_2 / \rho_1 = 15.9 / 0.64 = 24.8$ , так що приблизно  $\rho_2 / \rho_1 \in [2; 20]$  має бути, де останнє граничне значення співвідношення густини відповідає змішуванню пари та рідини або щось подібне.

Для другої функції-індикатора  $B_1^{(1)}$ : (рис. 51):

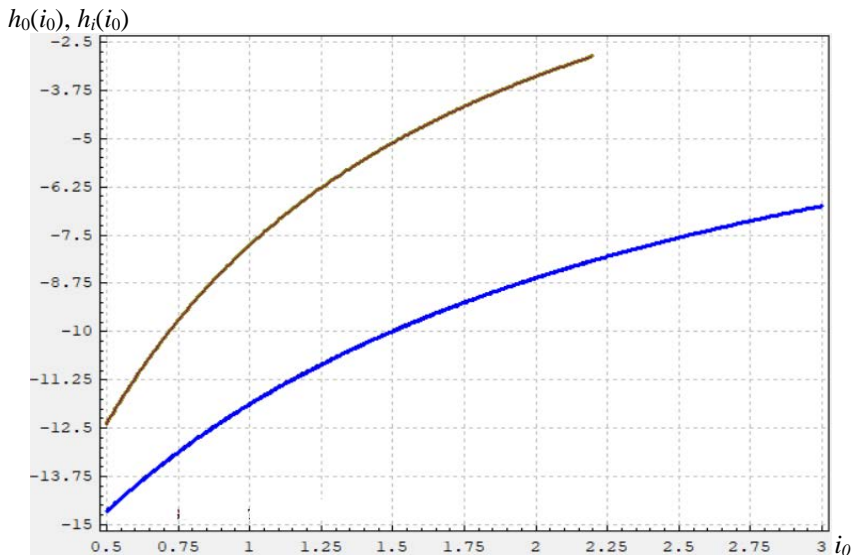


Рис. 51 Варіація функцій  $h_0(i_0)$ ,  $h_i(i_0)$  для функції-індикатора  $B_1^{(1)}$

$h \in [-12, -6]$ ,  $h_0$  зверху,  $h_i$  знизу  $h_0=0$ ,  $i_0 \approx 4.07$ ,  $h_i=0$ ,  $i_0 \approx 5.2$ ; робоча область  $h \in [-12, -6]$  відповідає  $h_0$  та  $h_i$ , відповідно для:  $i_0 \in [0.5; 1.25]$  and  $i_0 \in [0.84; 3.5]$ . Таким чином, загальною робочою областю є  $i_0 \in [0.84; 1.25]$ , яка є вужчою за попередню, але, ймовірно, найбільш корисною на практиці, це може бути щось на зразок  $\rho_2/\rho_1 \in [1; 1.5]$ .

Для третьої області функції-індикатора  $B_1^{(2)}$  ми маємо  $h \in [-20, -12]$ ,  $h_0$  вгору,  $h_i$  вниз на рис. 52,  $h_0=0$ ,  $i_0 \approx 0.68$ ,  $h_i=0$ ,  $i_0 \approx 2.03$ ;  $h_0$  вгору,  $h_i$  вниз, робоча область  $h \in [-20, -12]$  відповідає по  $h_0$  і  $h_i$  відповідно для:  $i_0 \in [0.16; 0.3]$  і  $i_0 \in [0.35; 0.63]$ . Таким чином, спільної робочої області за параметром  $i_0$  для початку і кінця початкової частини струменя тут не існує, крім приблизно одного значення  $i_0=0.3$ , яке можна вважати однаковим, оскільки  $i_0=0.3$  and  $i_0=0.35$  є приблизно однаковими значеннями внаслідок прогресування ковзання фаз під час їх перемішування в струмені.

Для четвертої області функції-індикатора  $B_1^{(3)}$  маємо  $h \in [-30, -20]$ , функції  $h_0(i_0)$ ,  $h_i(i_0)$  представлені на рис. 53, де  $h_0$  – зверху,  $h_i$  – знизу,  $h_0=0$ ,  $i_0 \approx 0.77$ ,

$h_i=0$ ,  $i_0 \approx 0.93$ ; робоча область  $h \in [-30, -20]$  дорівнює по  $h_0$  і  $h_i$ , відповідно, для:  $i_0 \in [0.14; 0.26]$  і  $i_0 \in [0.16; 0.33]$ .

$h_0(i_0), h_i(i_0)$

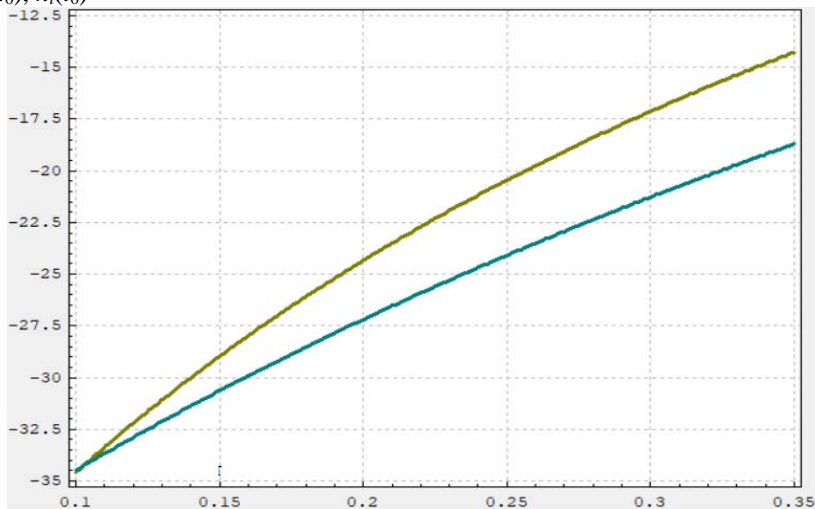


Рис. 52 Варіація функцій  $h_0(i_0), h_i(i_0)$  для функції-індикатора  $B_1^{(2)}$

$h_0(i_0), h_i(i_0)$

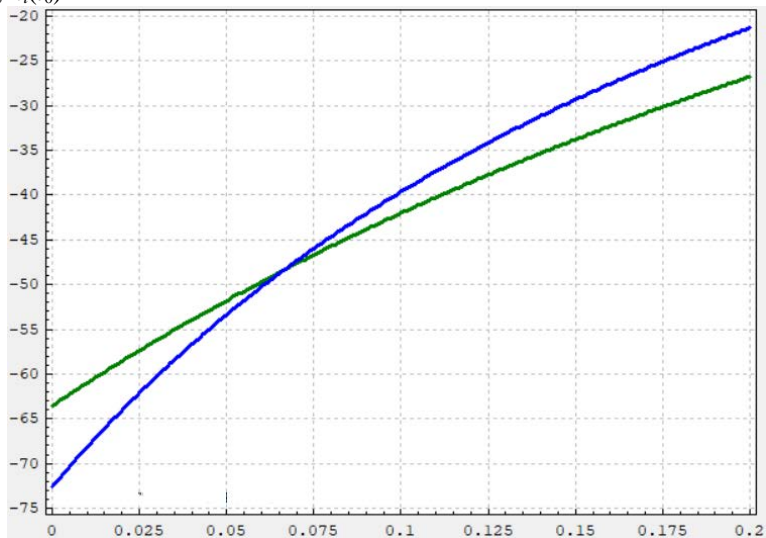


Рис. 53 Варіація функцій  $h_0(i_0), h_i(i_0)$  для функції-індикатора  $B_1^{(3)}$

Таким чином, загальна робоча область за параметром  $i_0$  для початку і для кінця початкової частини струменя становить  $i_0 \in [0.16; 0.26]$ , досить вузька для малого коефіцієнта густини  $\rho_2/\rho_1$ .

І тоді для наступної функції-індикатора  $B_1^{(4)}$  ми маємо  $h \in [-42, -30]$ ,  $h_0$  зверху,  $h_i$  – знизу,  $h_0 = 0$ ,  $i_0 \approx 0.42$ ,  $h_i = 0$ ,  $i_0 \approx 0.49$ ; робоча область  $h \in [-42, -30]$  дорівнює по  $h_0$  і  $h_i$ , відповідно:  $i_0 \in [0.09; 0.15]$  and  $i_0 \in [0.1; 0.17]$ . Таким чином, загальна робоча область за параметром  $i_0$  для початку та кінця початкової частини струменя  $i_0 \in [0.1; 0.17]$  дуже вузька, для дуже малого співвідношення густини  $\rho_2/\rho_1$ , як розтікання струменя гарячої рідини в камері насиченої пари або струменя ртуті у водному басейні.

Підстановка  $h_i(i_0)$  до (18) дає кореляції для радіусу струміння на кінці початкової частини,  $\delta_i(i_0)$ . Вирази (18) визначають функції  $y_0(h)$ ,  $\delta(h)$  в діапазоні  $h \in [h_0, h_i]$ , які є монотонними та близькими до лінійних по  $i_0$ , вище 5 і швидко спадає по  $i_0$  нижче 1. Диференціальне рівняння із системи (10) розв'язується чисельно з урахуванням розв'язку (18). Це рівняння написано для частини зони змішування, ми використовуємо його для половини шару змішування:  $\eta = \eta^* = 0.5$ . Наступний масив диференціальних рівнянь для функцій  $y_0(\zeta)$ ,  $h(\zeta)$  записується наступним чином:

$$\frac{dh}{d\zeta} = -\frac{1}{y_0^3 D_2} \cdot \frac{dy_0}{d\zeta}, \quad (21)$$

$$\frac{dy_0}{d\zeta} = y_0^2 D_2 \left(1 + A\eta^*\right) \frac{B_1^* (\partial u_1 / \partial \eta)^* + i_0 \kappa_{21} B_2^* (\partial u_2 / \partial \eta)^*}{(1 - u_1^* + 2D_1) y_0^2 D_2 - dD_1 / dh}$$

Система рівнянь (21) була розв'язана чисельно з початковою умовою (12), (19), де вираз  $h_0 = h(0)$  є початковою умовою для (21), тоді як (18) і  $h_i = h(\zeta_i)$  використовуються для контролю числового розв'язку. Ось такі параметри:

$$(\partial u_2 / \partial \eta)^* = (\partial u_1 / \partial \eta)^* = -1.5, \quad \partial u_1 / \partial \eta = 12\eta^2 (\eta - 1),$$

$$\partial u_2 / \partial \eta = -12\eta (\eta - 1)^2, \quad u_1^* = 11/16, \quad u_2^* = 5/16,$$

$$D_1 = A \left[ a_3^* + i_0 b_3^* - a_1^* u_1^* - i_0 b_1^* u_2^* + A (a_4^* + i_0 b_4^* - a_2^* u_1^* - i_0 b_2^* u_2^*) \right],$$

$$\frac{dA}{dh} = \frac{a_{32} + i_0 b_{32} - a_{12}}{a_2 - i_0 b_4 - a_4} - A \frac{a_{22} - i_0 b_{42} - a_{42}}{a_2 - i_0 b_4 - a_4}, \quad B_1^* = B_1(\eta^*),$$

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$D_2 = a_{22}A^2 + A \left( a_{12} + 2a_2 \frac{dA}{dh} \right) + a_1 \frac{dA}{dh}, \quad A = \frac{a_3 + i_0 b_3 - a_1}{a_2 - i_0 b_4 - a_4},$$

$$\frac{dD_1}{dh} = \frac{dA}{dh} \left( a_3^* + i_0 b_3^* - a_1^* u_1^* - i_0 b_1^* u_2^* \right) + A \left( a_{32}^* + i_0 b_{32}^* - a_{12}^* u_1^* - i_0 b_{12}^* u_2^* \right) +$$

$$+ 2A \frac{dA}{dh} \left( a_4^* + i_0 b_4^* - a_2^* u_1^* - i_0 b_2^* u_2^* \right) + A^2 \left( a_{42}^* + i_0 b_{42}^* - a_{22}^* u_1^* - i_0 b_{22}^* u_2^* \right).$$

### 5.3.2 Результати розрахунку для малих граничних значень $i_0$

Комп'ютерне моделювання турбулентного двофазного струменя навіть для найменшого відношення густини було доведено успішним до  $i_0=0.1$ . Для великих значень коефіцієнта щільності ми досягли успіху до  $i_0=20$ .

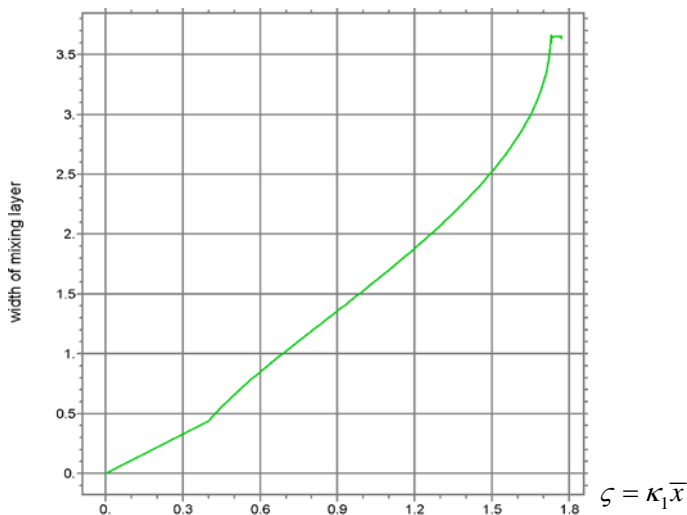


Рис. 54а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині по осі:  $i_0=0.1$ ,  $\kappa_{21}=10.0$

Щоб розширити діапазон варіацій параметра  $i_0$ , потрібно докласти ще трохи зусиль, оскільки розрахунок стає складнішим через використання апроксимацій для функції-індикатора. Оскільки  $i_0 = ns_0^2$ ,  $s_0 = u_{02}/u_{01}$ ,  $n = \rho_2/\rho_1$ , великі значення параметра  $i_0$  можуть відповідати дуже високому відношенню густини  $s_0^2 \ll 1$ .

Крім представлених вище чисельних рішень для широкого діапазону параметрів  $i_0$  і  $\kappa_{21}$ , ми також отримали рішення для двох граничних випадків  $i_0$ ,

наведених нижче на рис. 54-55. Наприклад, на рис. 54 представлено випадок  $i_0=0.1$ ,  $\kappa_{21}=10.0$ . А рис. 55 показує результати для  $i_0=0.2$ ,  $\kappa_{21}=10.0$ . Інші значення  $\kappa_{21}$  нижче цього рівня не дозволяли отримати рішення навіть за дуже малими середньоквадратичними помилками (ймовірно, через вихід із досяжного діапазону параметрів у розробленій математичній моделі), так що такі дані можна вважати такими, що відповідають цим значенням параметра  $i_0$ . Помилка RMS була нижче  $10^{-4}$ .

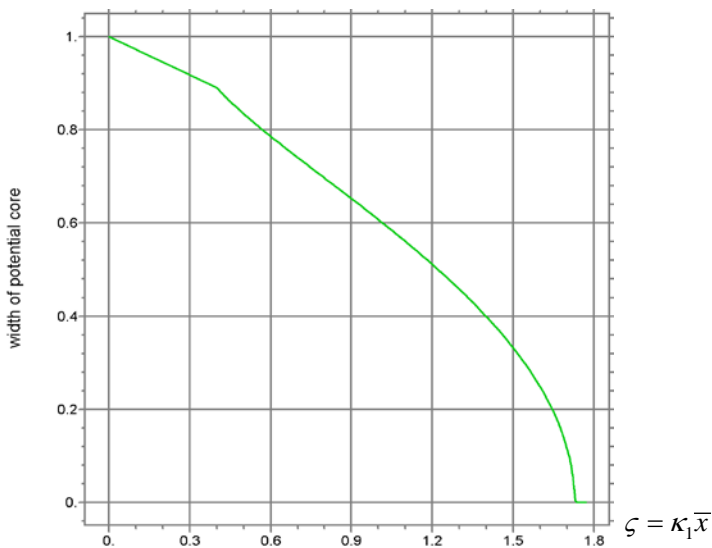


Рис. 54b Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=0.1$ ,  $\kappa_{21}=10.0$

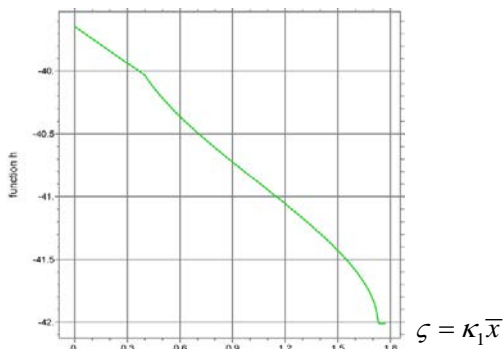


Рис. 54c Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=0.1$ ,  $\kappa_{21}=10.0$

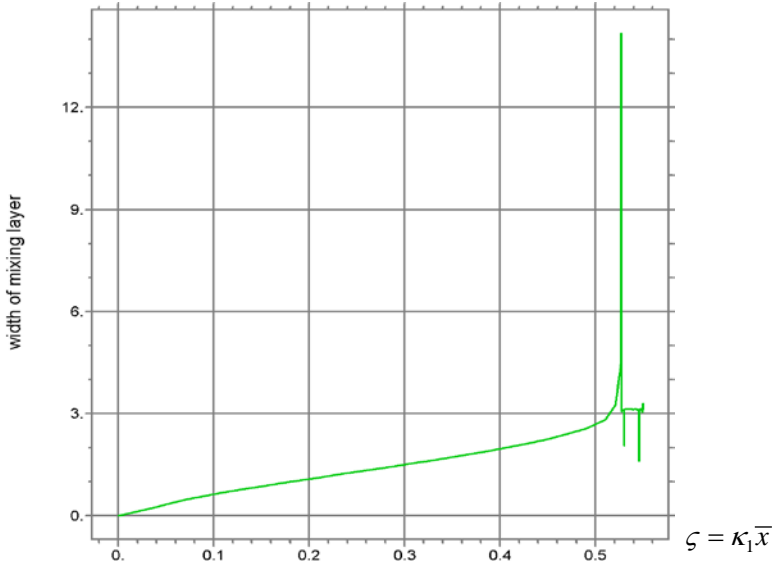


Рис. 55а Зона змішування  $\delta$  на початковій ділянці по осі:  $i_0=0.2$ ,  $\kappa_{21}=10.0$

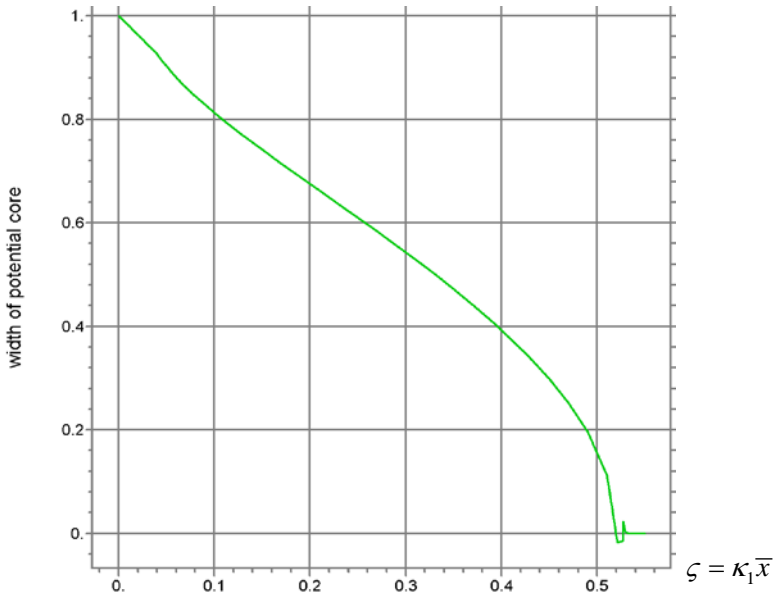


Рис. 55b Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=0.2$ ,  $\kappa_{21}=10.0$

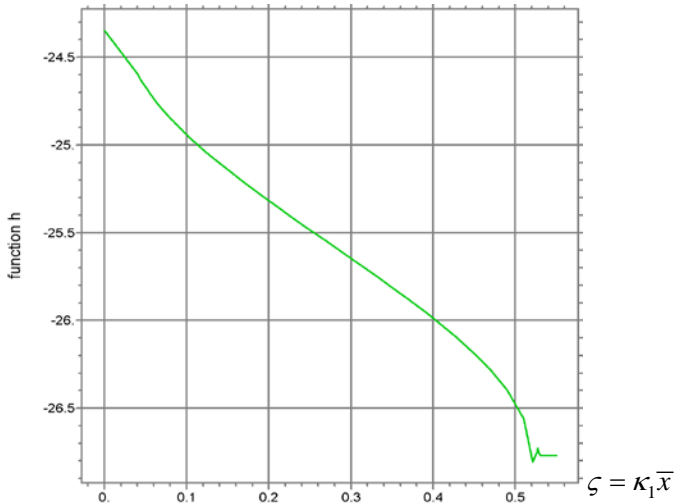


Рис. 55с Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині струменя:  $i_0=0.2, \kappa_{2l}=10.0$

### 5.3.3 Результати розрахунку для значень $i_0= 2, 5, 10, 12$

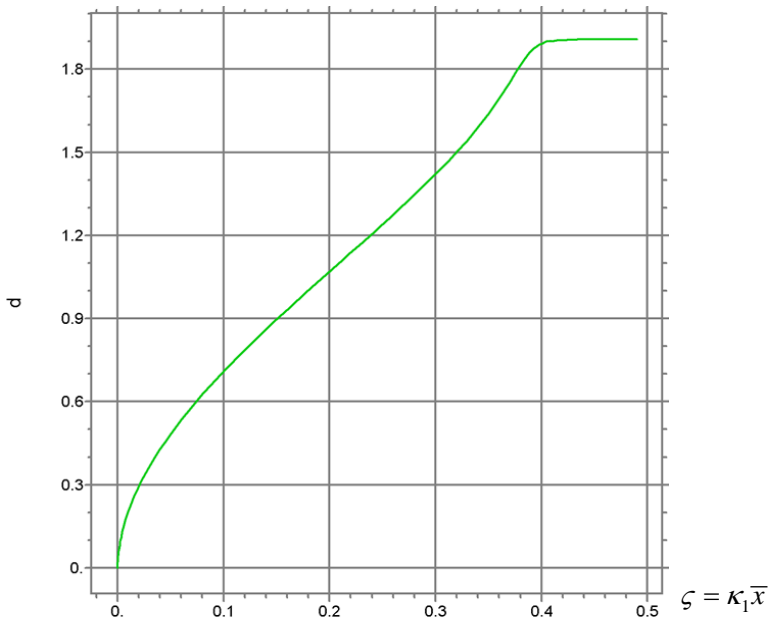


Рис. 56а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині:  $i_0=2.0, \kappa_{2l}=0.3$

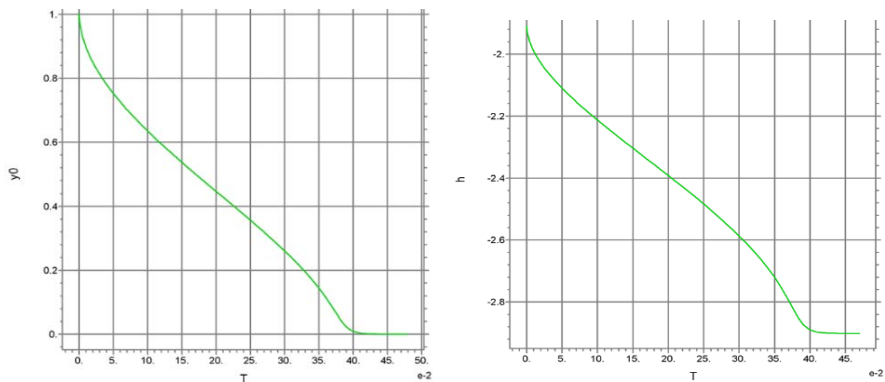


Рис. 56б Потенціальне ядро  $y_0$  і функція  $h(\zeta)$  уздовж осі:  $i_0=2.0$ ,  $\kappa_{21}=0.3$

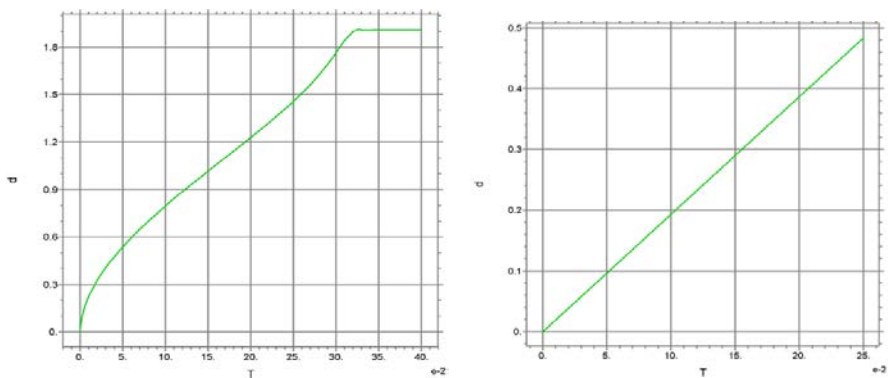


Рис. 57а Зона змішування  $\delta$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=2.0$ ,  $\kappa_{21}=0.5$

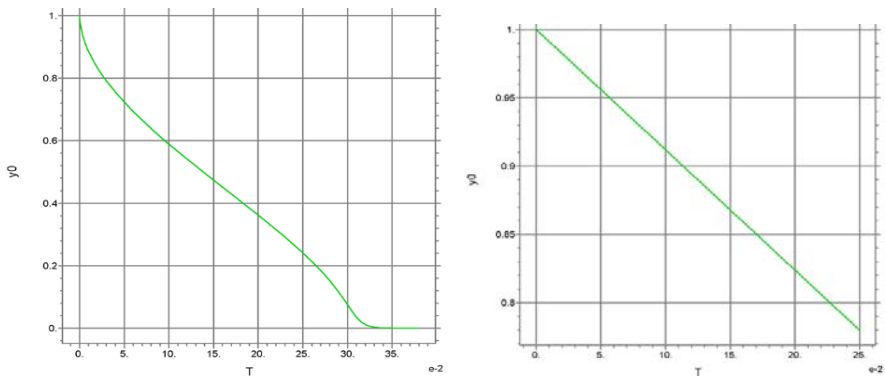


Рис. 57б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=2.0$ ,  $\kappa_{21}=0.5$

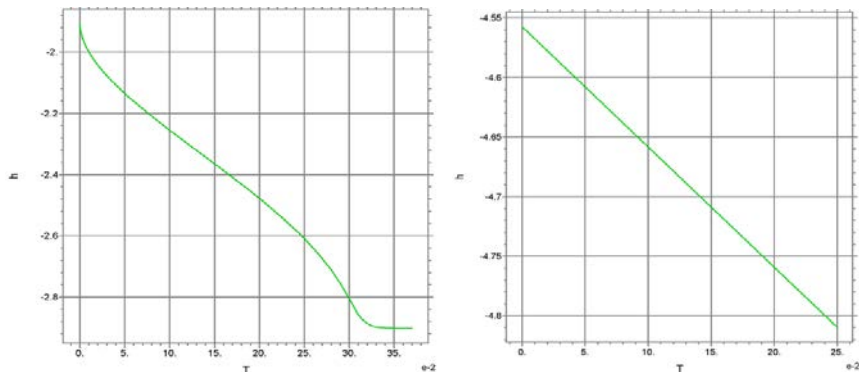


Рис. 57с Функція  $h(\zeta)$  на вздовж осі ( $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ):  $i_0=2.0, \kappa_{21}=0.5$

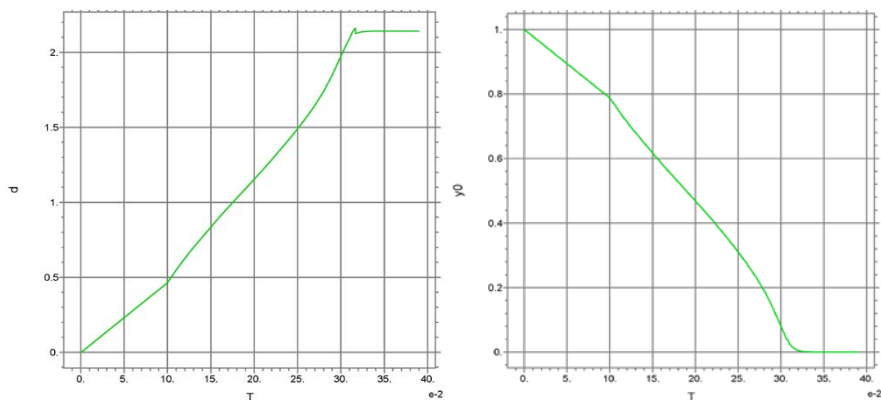


Рис. 58а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро вздовж осі:  $i_0=2.0, \kappa_{21}=2.0$

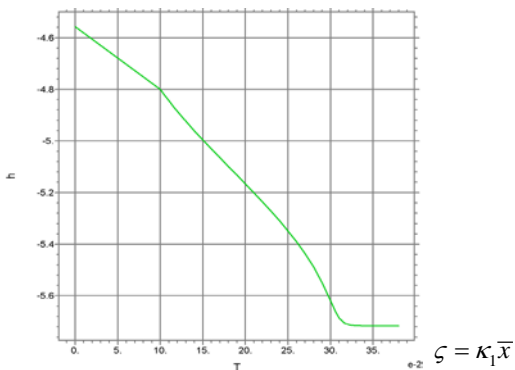


Рис. 58b Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=2.0, \kappa_{21}=2.0$

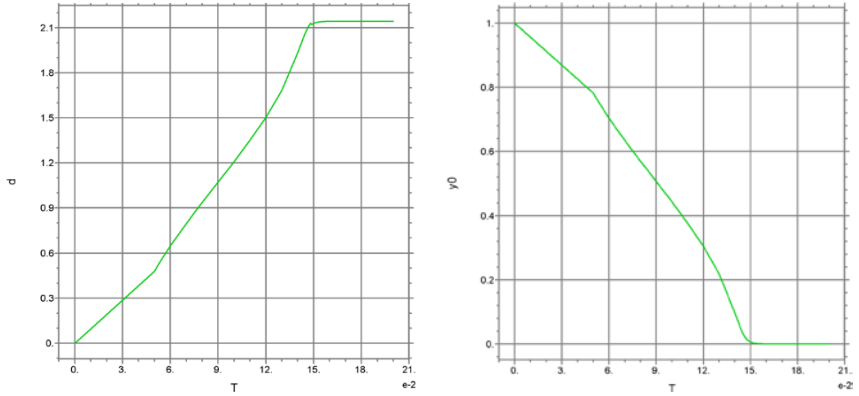


Рис. 59а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро вздовж осі:  $i_0=2.0$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

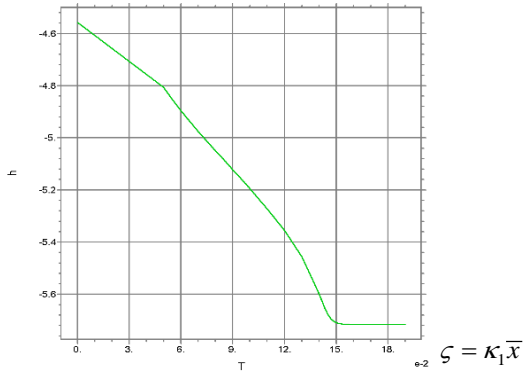


Рис. 59б Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=2.0$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

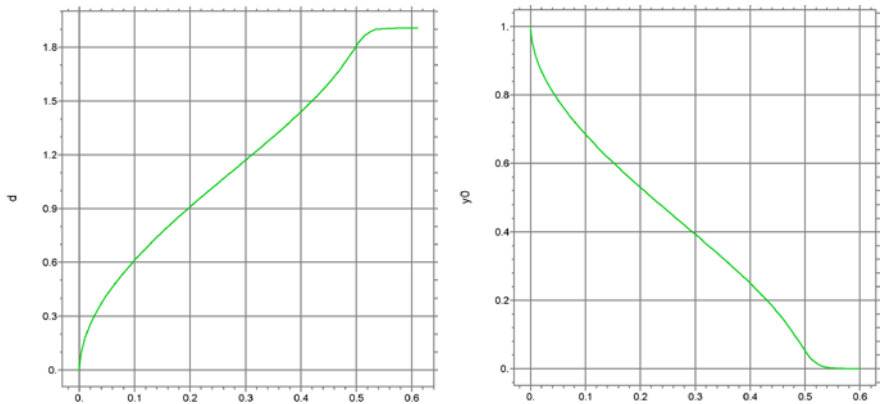


Рис. 60а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро вздовж осі:  $i_0=5.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

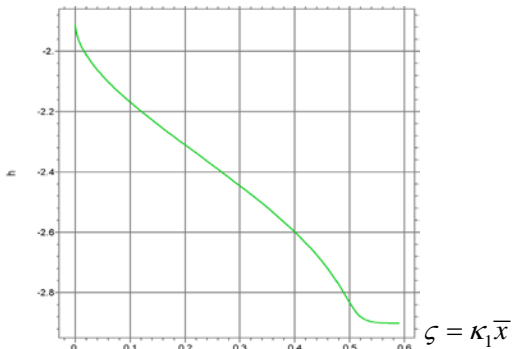


Рис. 60b Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=5.0, \kappa_{21}=0.1$

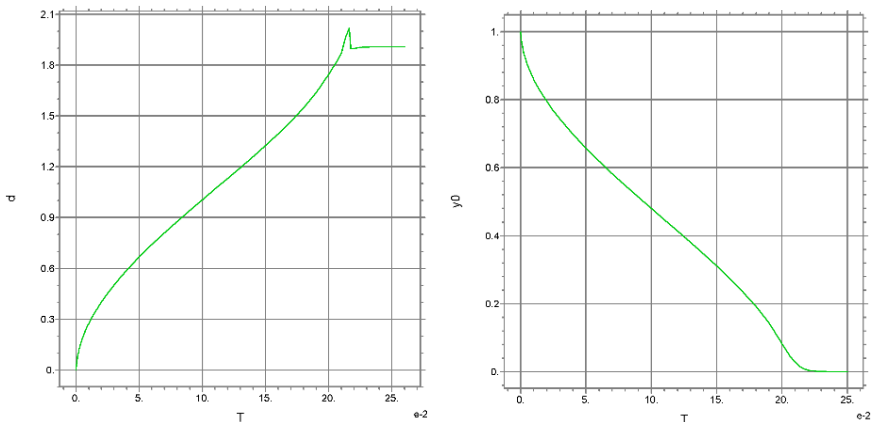


Рис. 61a Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро вздовж осі:  $i_0=5.0, \kappa_{21}=1.0$

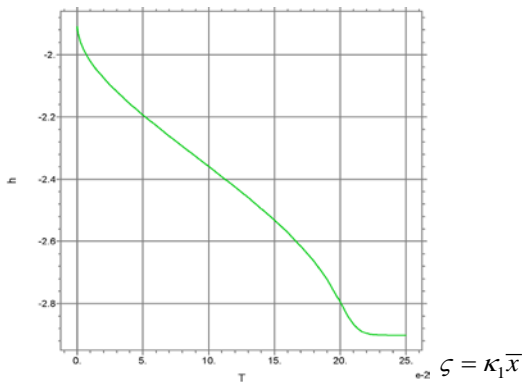


Рис. 61b Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=5.0, \kappa_{21}=1.0$

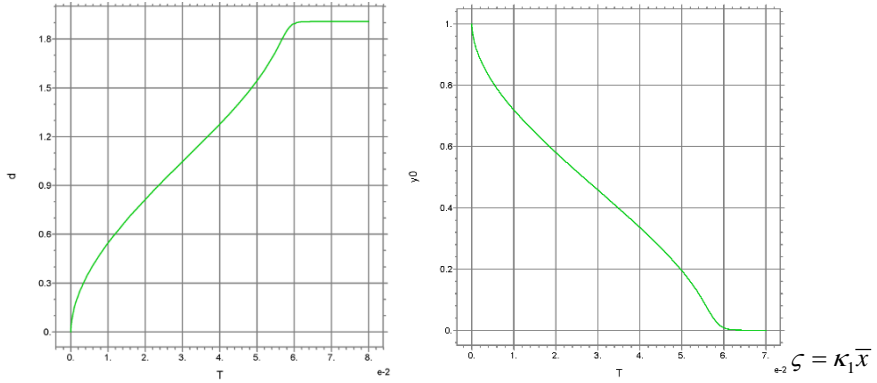


Рис. 62а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро вздовж осі:  $i_0=5.0, \kappa_{21}=5.0$

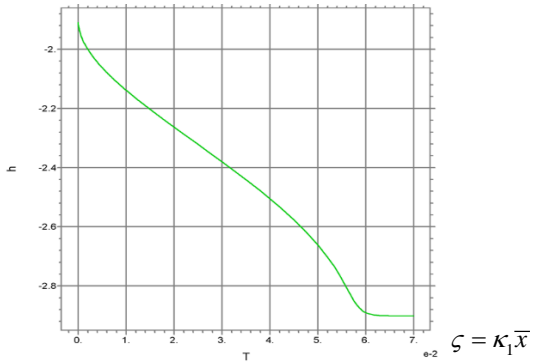


Рис. 62b Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=5.0, \kappa_{21}=5.0$

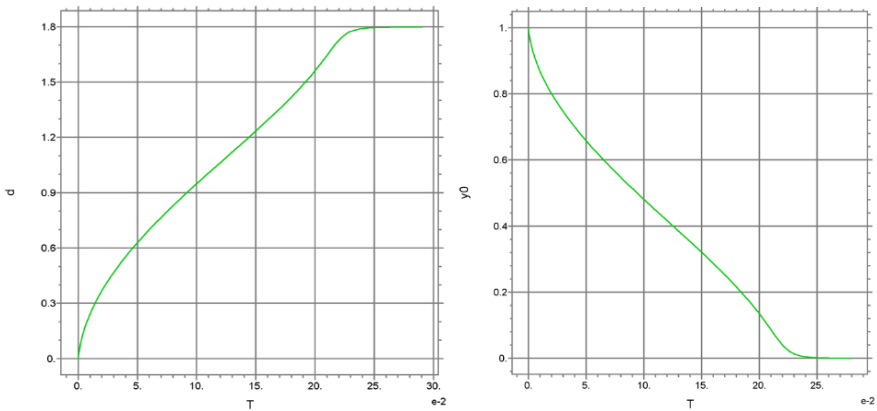


Рис. 63а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро вздовж осі:  $i_0=10.0, \kappa_{21}=0.2$

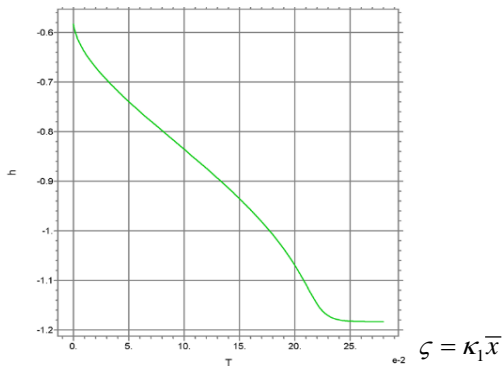


Рис. 63б Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=10.0, \kappa_{21}=0.2$

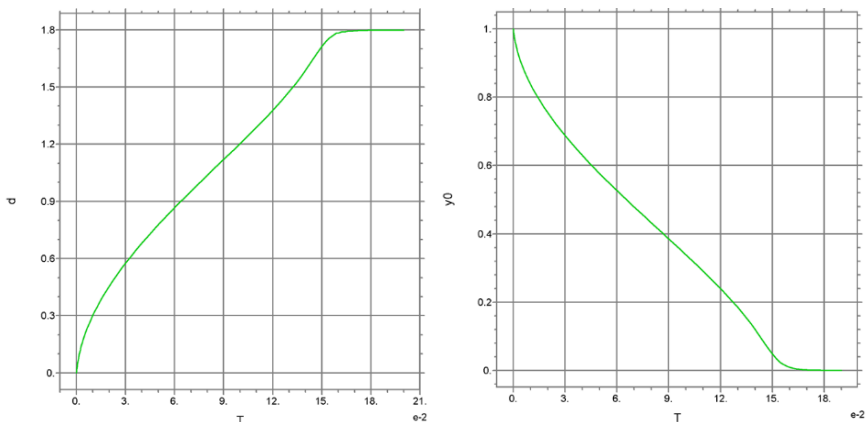


Рис. 64а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро вздовж осі:  $i_0=10.0, \kappa_{21}=0.5$

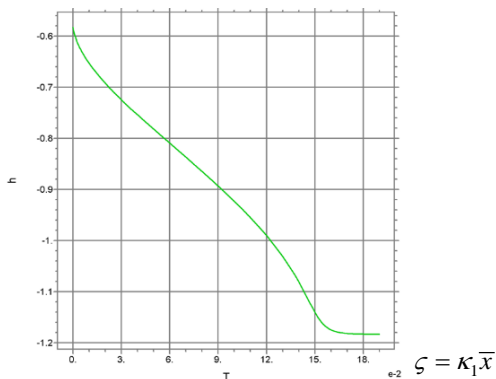


Рис. 64б Функція  $h(\zeta)$  на початковій ділянці вздовж осі:  $i_0=10.0, \kappa_{21}=0.5$

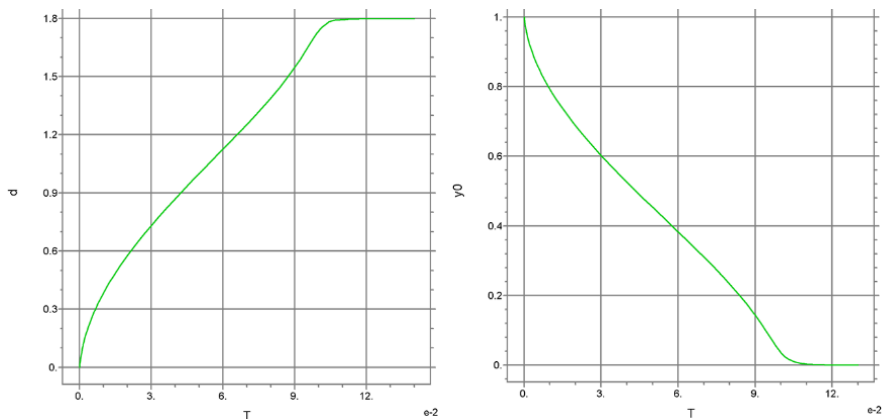


Рис. 65а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро вздовж осі:  $i_0=10.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

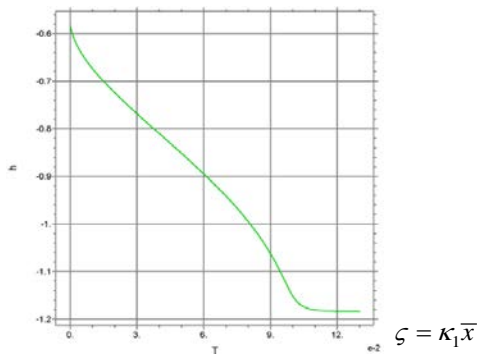


Рис. 65б Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=10.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

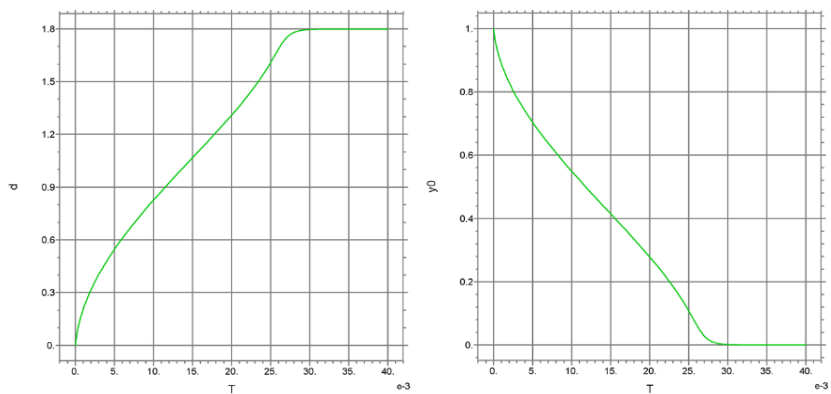


Рис. 66а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро вздовж осі:  $i_0=10.0$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

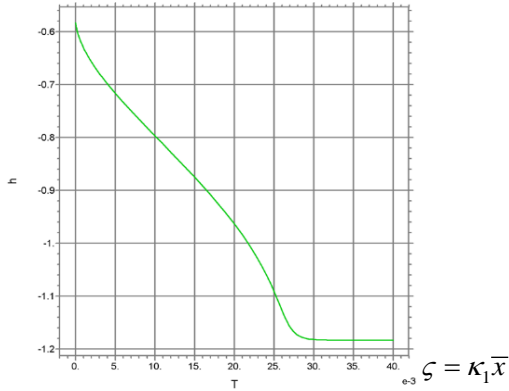


Рис. 66б Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=10.0$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

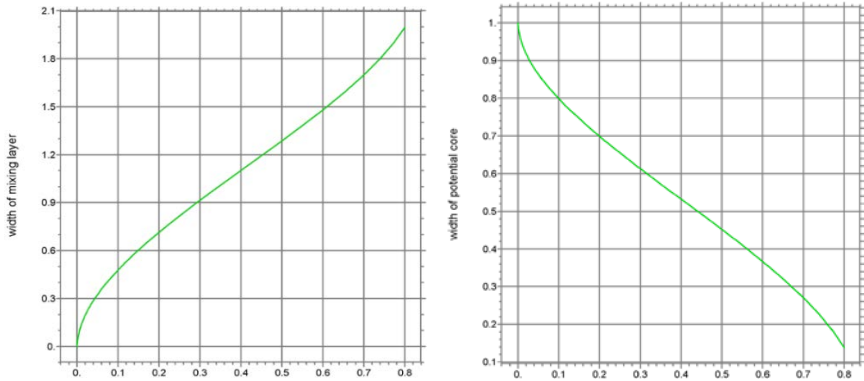


Рис. 67а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро вздовж осі:  $i_0=12.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

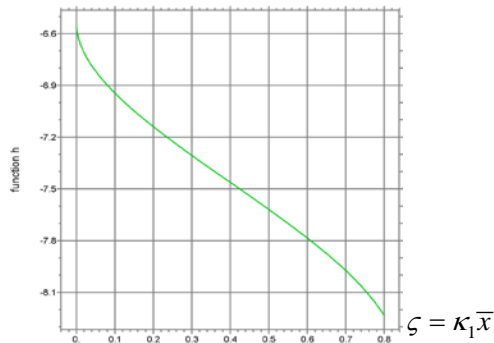


Рис. 67б Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині струменя:  $i_0=12.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

### 5.3.4 Результати розрахунку для великих граничних значень параметра $i_0$

Також зроблено рішення для кількох великих значень коефіцієнта щільності: параметр  $i_0=16$  (RMS помилка= $3 \cdot 10^{-14}$ ) на рис. 68-73 та  $i_0=20$  (RMS= $5 \cdot 10^{-13}$ ), представлено на рис. 74-79 нижче для широкого діапазону  $\kappa_{2l}$ .

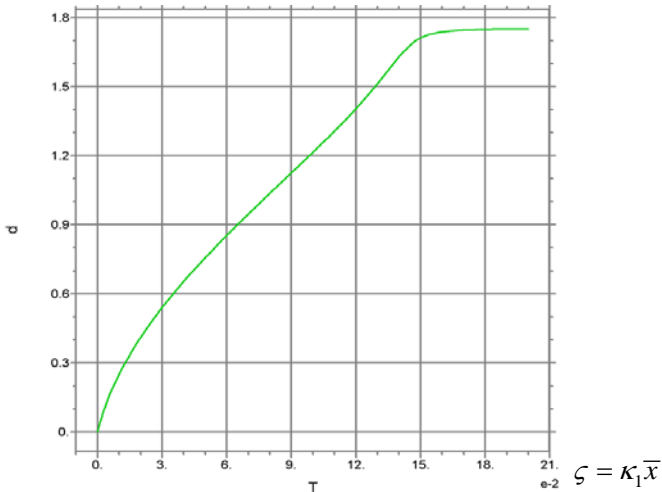


Рис. 68а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{2l}=0.1$

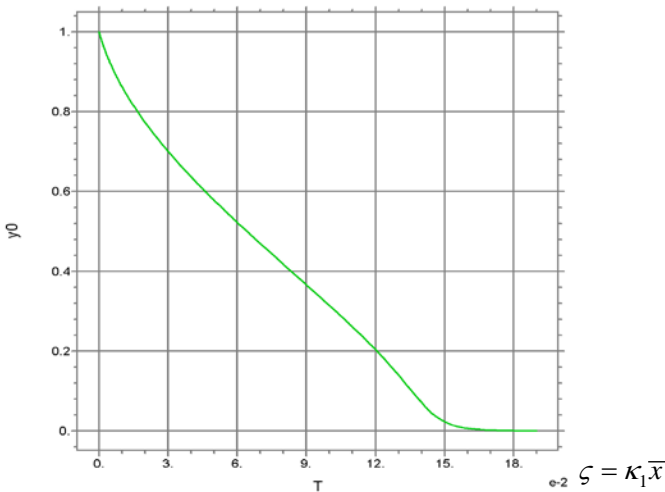


Рис. 68б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{2l}=0.1$

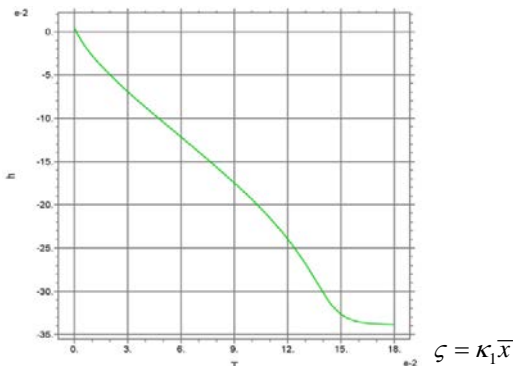


Рис. 68с Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

Середньоквадратичні помилки були від  $10^{-15}$  до  $10^{-6}$ . Примітно, що в деяких випадках це було завдання на знаходження правильного рівня кроку за часом і граничної похибки, а також значення параметра  $\kappa_{21}$ , що дозволило отримати чисельний розв’язок. Але в інших параметрах це було не так просто, як у випадках, наведених вище, для  $i_0=0,3$ ,  $1,0$  і  $8,0$ , де рішення було легко отримано в будь-якому діапазоні параметра  $\kappa_{21}$ . Наприклад, розв’язок, представлений на рис. 57, був отриманий за різними умовами (початкові часові кроки, граничні похибки тощо): за деякої комбінації таких умов розв’язок отримано лише на короткому інтервалі (праворуч на рис. 57), а за специфічних умов – для всієї області (ліворуч на рис. 57). При цьому загалом ми досліджували широкі області за параметрами, отже, це дозволяє реалізувати наші результати для практичної оцінки можливих параметрів турбулентних двофазних потоків.

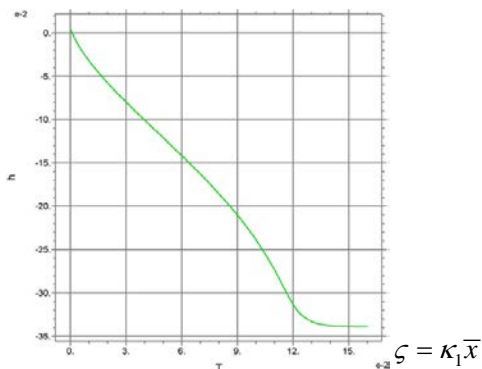


Рис. 69с Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

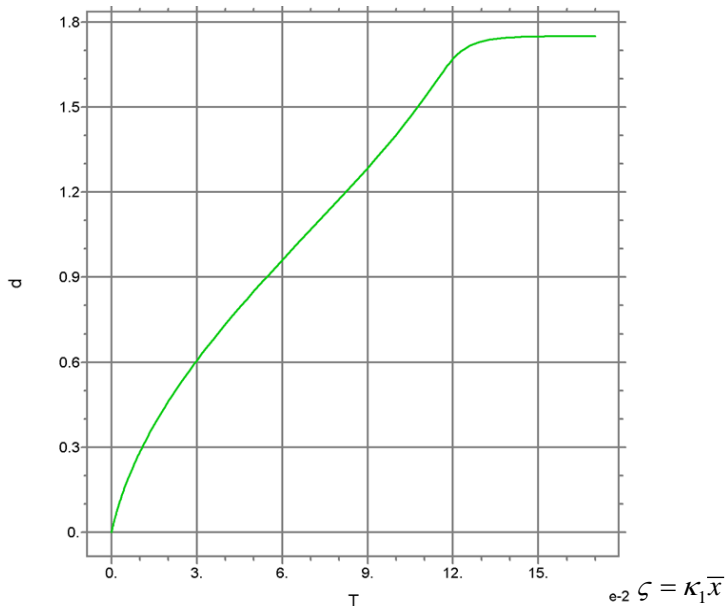


Рис. 69а Зона змішування  $\delta$  вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

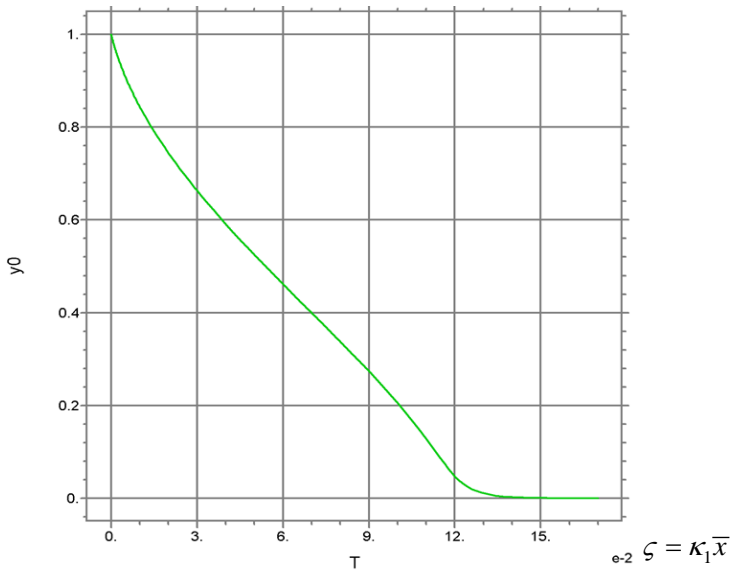


Рис. 69б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

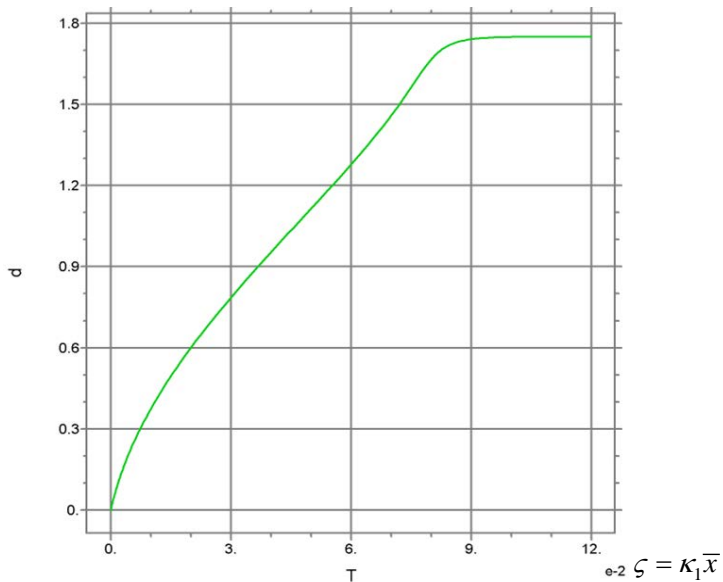


Рис. 70а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{2l}=0.5$

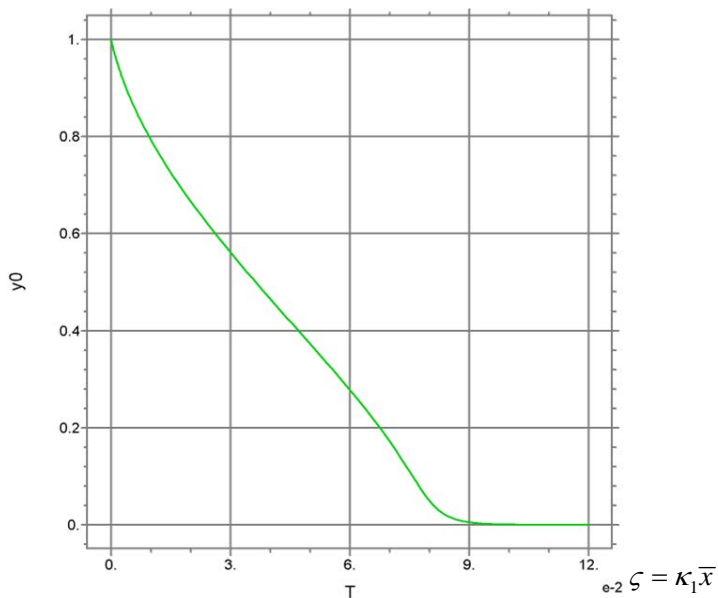


Рис. 70б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{2l}=0.5$

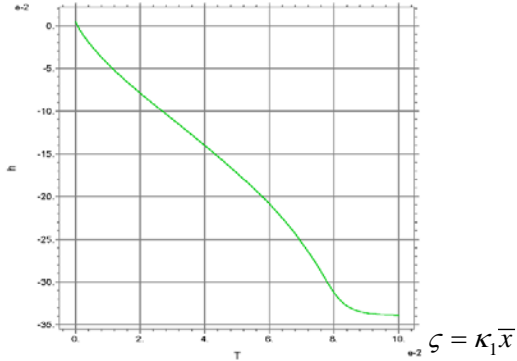


Рис. 70с Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{21}=0.5$

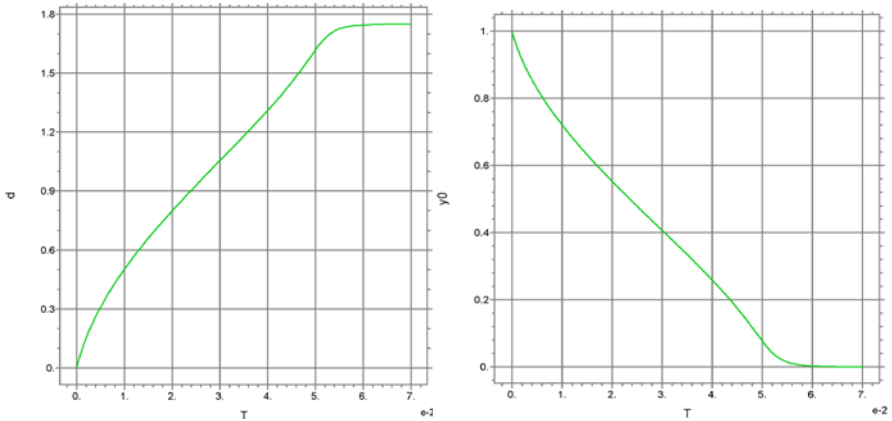


Рис. 71а, б Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

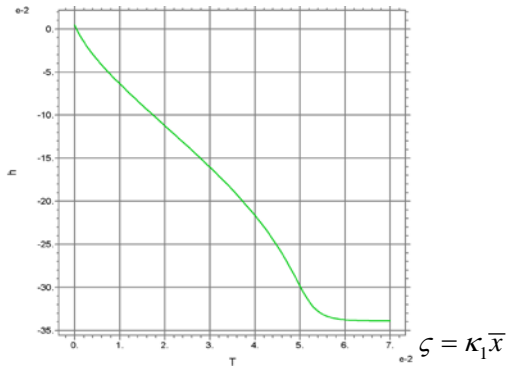


Рис. 71с Функція  $h(\zeta)$  вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

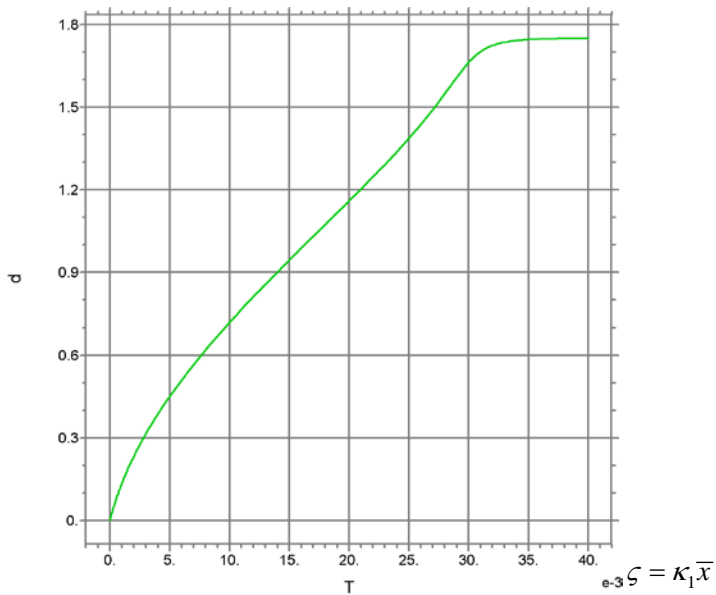


Рис. 72а Зона змішування  $\delta$  вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{21}=2.0$

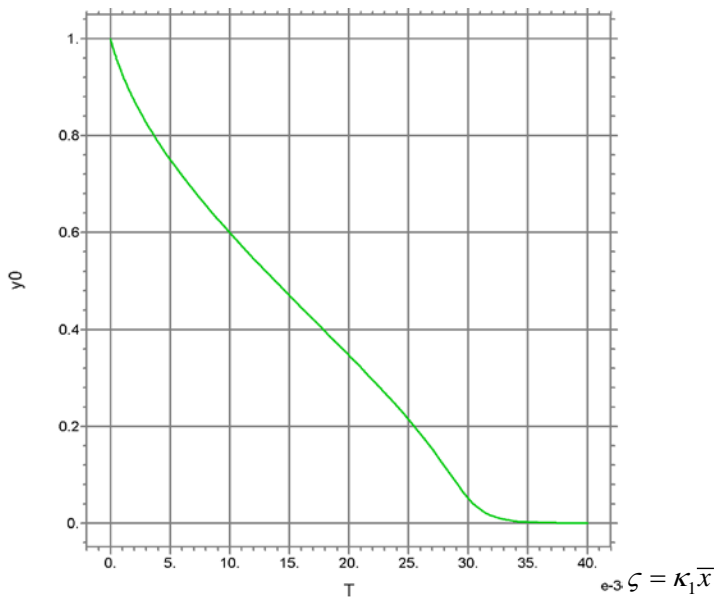


Рис. 72б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{21}=2.0$

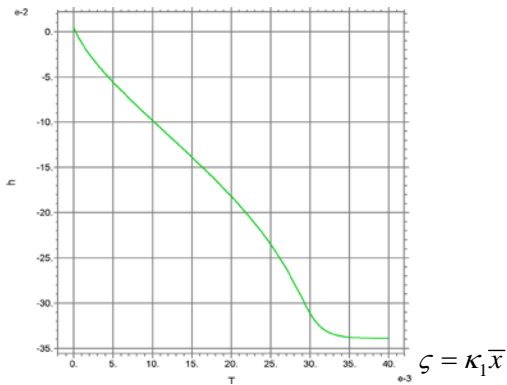


Рис. 72с Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{2l}=2.0$

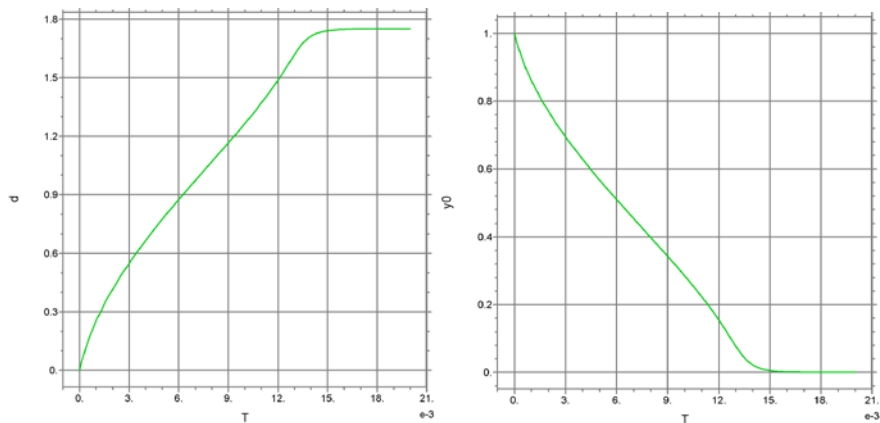


Рис. 73а, б Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{2l}=5.0$

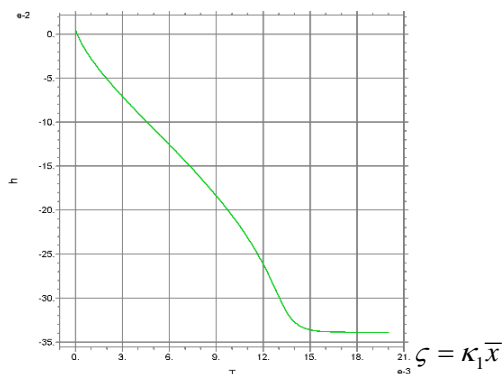


Рис. 73с Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=16.0$ ,  $\kappa_{2l}=5.0$

За  $i_0=20$  рішення, показане на рис. 74-79, строго кажучи, невірне через додатні значення функції  $h(\zeta)$ , яка має бути від'ємною за своєю природою, в основній області, за винятком невеликої частини в кінці початкової частини струменя. Але  $h(\zeta)$  змінюється близько до нуля (від  $-0,005$  до  $0,2$ ). Тому отримані результати можна розглядати належним чином.

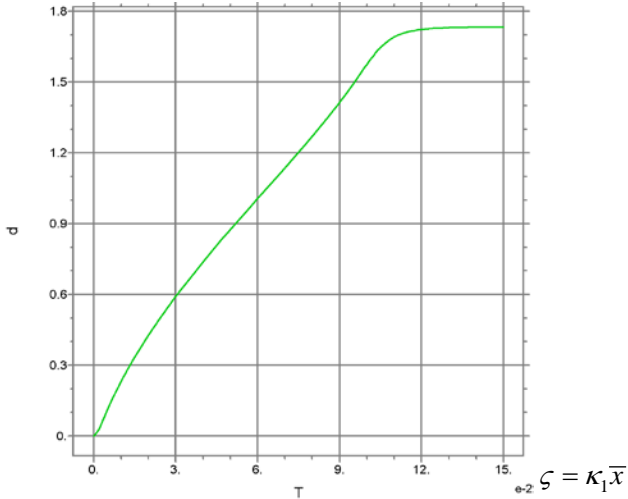


Рис. 74а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

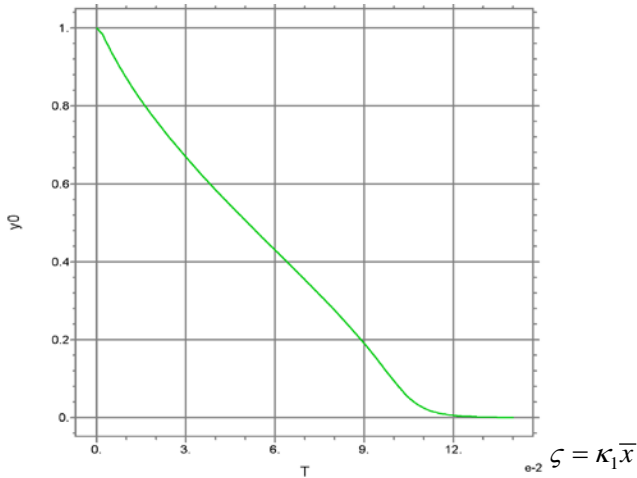


Рис. 74б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

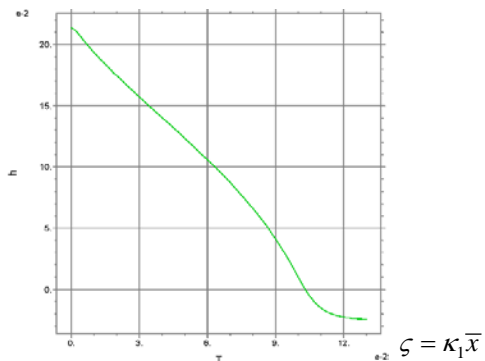


Рис. 74с Функція  $h(\zeta)$  вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=0.1$

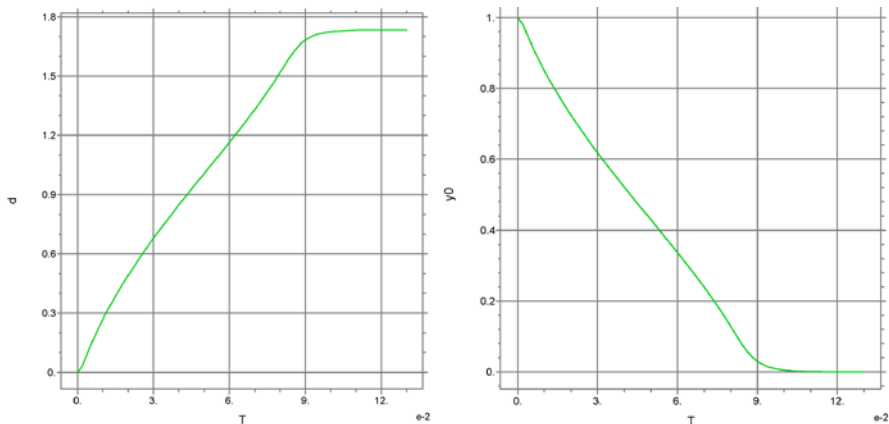


Рис. 75а Зона змішування  $\delta$  і потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

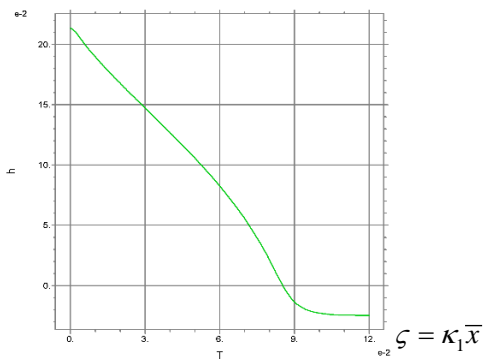


Рис. 75с Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=0.2$

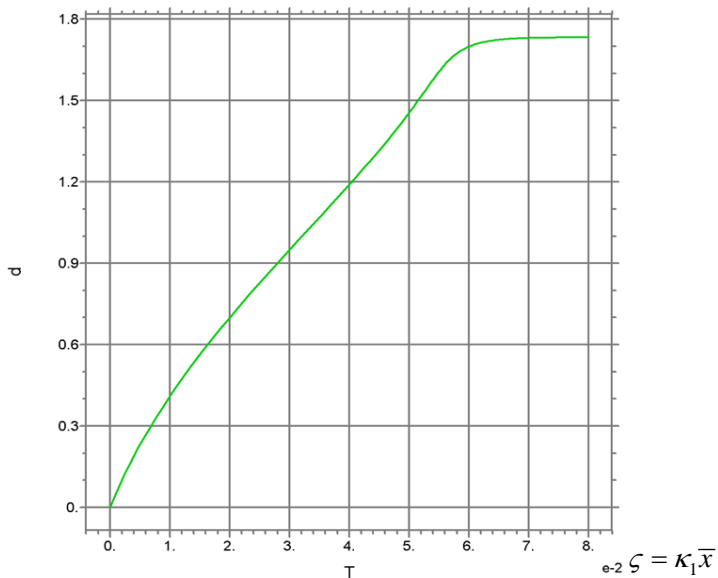


Рис. 76а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=0.5$

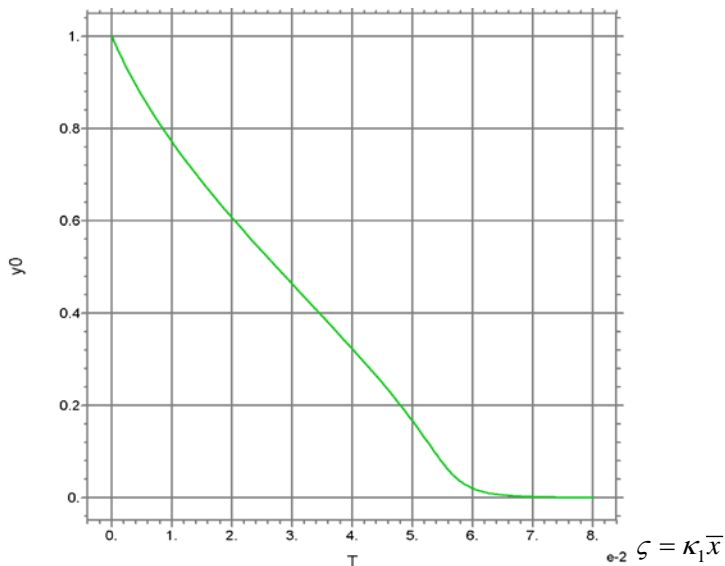


Рис. 76б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=0.5$

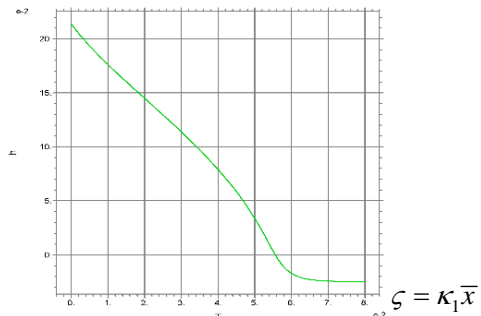


Рис. 76с Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині струменя по осі:  $i_0=20.0, \kappa_{21}=0.5$

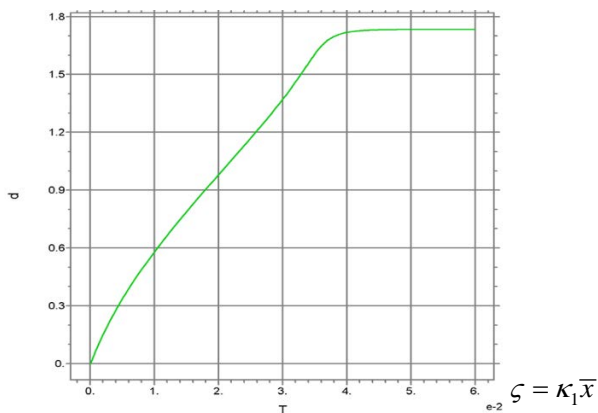


Рис. 77а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=20.0, \kappa_{21}=1.0$

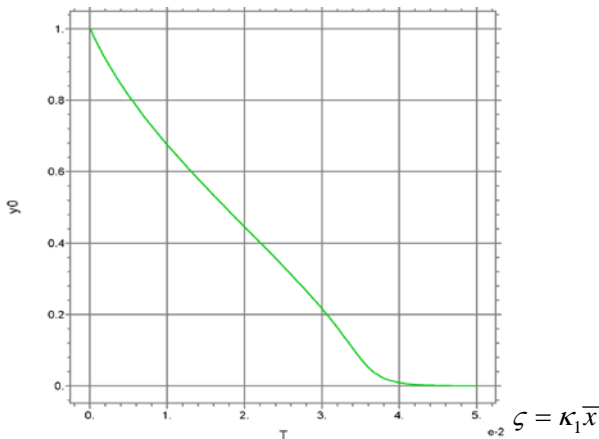


Рис. 77б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=20.0, \kappa_{21}=1.0$

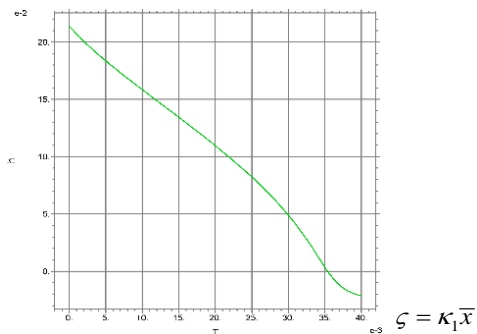


Рис. 77с Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=1.0$

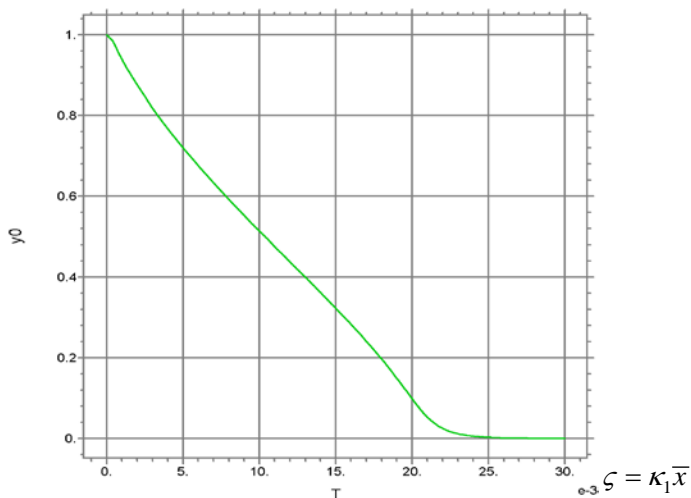


Рис. 78б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=2.0$

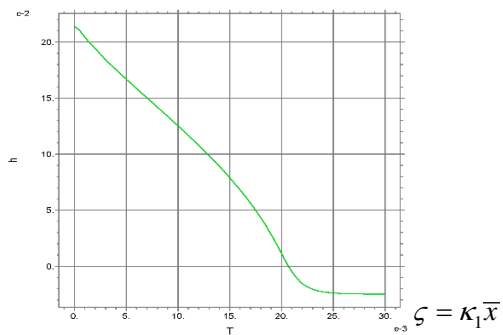


Рис. 78с Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=2.0$

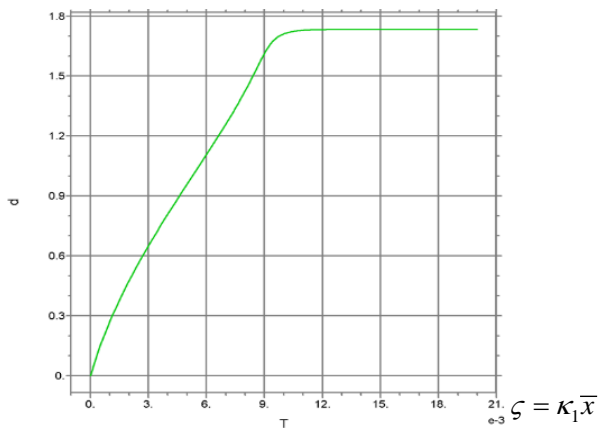


Рис. 79а Зона змішування  $\delta$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

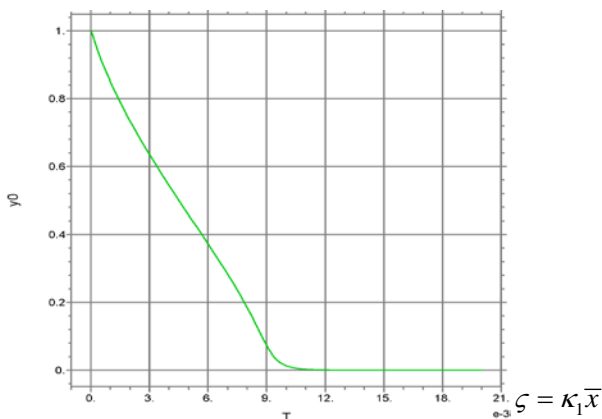


Рис. 79б Потенційне ядро  $y_0$  вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

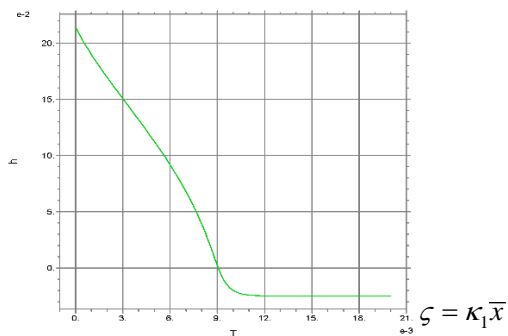


Рис. 79с Функція  $h(\zeta)$  на початковій частині вздовж осі:  $i_0=20.0$ ,  $\kappa_{21}=5.0$

Таким чином, отримано математичну модель та проведено комп'ютерне моделювання для широкого діапазону параметрів турбулентних двофазних струменів, які можуть бути використані для чисельного моделювання та розрахунку характеристик різноманітних режимів течії. Порівняння з результатами експериментальних досліджень у кожному випадку дозволяє визначити значення коефіцієнтів турбулентного перемішування. Після цього модель є готовою для будь-яких інших розрахунків подібних потоків.

## 5.4 Чисельне моделювання основної частини двофазного струменя

З перших двох рівнянь (14) для головної частини струменя з граничними умовами (16) виходить

$$h = \frac{\alpha_{11} - (\alpha_{21} + i_0 \beta_{21}) u_{m1} - 2i_0 \alpha_{11} \beta_{20} u_{m1}^2 \delta^2}{-\alpha_{12} + (\alpha_{22} + i_0 \beta_{21}) u_{m1} + 2i_0 \alpha_{12} \beta_{20} u_{m1}^2 \delta^2},$$

$$B_{m1} = \frac{2i_0}{Z} \alpha_{12} \beta_{20} + \frac{\alpha_{22} + i_0 \beta_{22}}{Z u_{m1} \delta^2} - \frac{\alpha_{12}}{Z u_{m1}^2 \delta^2}, \quad (22)$$

Умова  $\zeta = \infty$ ,  $B_{m1} = 0$  призводить до наступного:  $\zeta = \infty$ ,  $u_{m1} \delta^2 = \infty$ ,  $u_{m1} \delta = const$ , звідки випливає:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{12}}{Z} (2i_0 \beta_{20} - \frac{1}{u_{m1}^2 \delta^2}) = 0,$$

і з урахуванням  $\alpha_{12} \neq 0$  це дає

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} u_{m1}^2 \delta^2 = \frac{1}{2i_0 \beta_{20}} \approx \begin{cases} 33, & i_0 = 0.3 \\ 10, & i_0 = 1.0 \\ 1.2, & i_0 = 8.0 \end{cases}, \quad h_\infty = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} h \approx \begin{cases} -70, & i_0 = 0.3 \\ -31, & i_0 = 1.0 \\ -18, & i_0 = 8.0 \end{cases}.$$

Значення  $h_\infty$  знаходиться за межами області зміни функції  $h$ , визначеної  $h = h_t$  (початок основної частини). Тому функція  $B_1$  неперервна для кожного значення  $i_0$  (її перша похідна кусково неперервна). Функція  $B_1$  змінює свою апроксимацію відповідно до області  $h$ . Після простого перетворення вихідний масив рівнянь дає систему двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з відповідними граничними умовами:

$$\frac{du_{m1}}{d\zeta} = 2 \frac{u_{m1}}{\delta} \frac{(u_1^*)_0 B_{m1} + i_0 \kappa_{21} (1 - B_{m1}) (u_2^*)_0}{B_{m1} + i_0 (1 - B_{m1})}, \quad (23)$$

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\frac{d\delta}{d\zeta} = \frac{1}{D_1 u_{m1}^2 \delta} \left[ \left( M_1 + u_{m1} \delta^2 M_2 + \frac{M_3}{u_{m1}} \right) f_1 + 0.75 \left( \frac{N_3}{\delta} + \frac{N_2 u_{m1}}{\delta} + N_1 u_{m1}^2 \delta \right) \right];$$

$$\zeta = 0, \quad u_{m1} = 1, \quad \delta = \delta_i. \quad (24)$$

Тут:

$$M_2 = \frac{2i_0}{Z} \beta_{20} \left\{ 2 \left[ \alpha_{12} (\alpha_{21}^* + i_0 \beta_{21}^*) - (\alpha_{22}^* + i_0 \beta_{22}^*) \alpha_{11} \right] + \left[ \alpha_{11} (\alpha_{12}^* u_1^* + i_0 \beta_{12}^* u_2^*) - \alpha_{12} (\alpha_{11}^* u_1^* + i_0 \beta_{12}^* u_2^*) \right] \right\} +$$

$$+ i_0 (2\beta_{20}^* - \beta_{10}^* u_2^*), \quad f = \frac{du_{m1}}{d\zeta},$$

$$M_1 = \frac{1}{Z} \left[ (\alpha_{21}^* + i_0 \beta_{21}^*) (\alpha_{22} + i_0 \beta_{22}) - (\alpha_{22}^* + i_0 \beta_{22}^*) (\alpha_{21} + i_0 \beta_{21}) \right],$$

$$M_3 = \frac{1}{Z} \left[ \alpha_{11} (\alpha_{12}^* u_1^* + i_0 \beta_{12}^* u_2^*) - \alpha_{12} (\alpha_{11}^* u_1^* + i_0 \beta_{11}^* u_2^*) \right],$$

$$D_1 = \frac{4i_0}{Z} \beta_{20} \left[ \alpha_{11} (\alpha_{22}^* + i_0 \beta_{22}^*) - \alpha_{12} (\alpha_{21}^* + i_0 \beta_{21}^*) - \alpha_{11} (\alpha_{12}^* u_1^* + i_0 \beta_{12}^* u_2^*) + \alpha_{12} (\alpha_{11}^* u_1^* + i_0 \beta_{11}^* u_2^*) \right] +$$

$$+ 2i_0 (\beta_{10}^* u_2^* - \beta_{20}^*), \quad N_3 = \frac{1}{Z} (\alpha_{12} \gamma_1 - \alpha_{11} \gamma_2) (i_0 \kappa_{21} - 1),$$

$$N_1 = \frac{2i_0}{Z} \beta_{20} (\alpha_{12} \gamma_1 - \alpha_{11} \gamma_2) i_0 \kappa_{21} \left[ 1 - \frac{2i_0}{Z} \beta_{20} (\alpha_{12} \gamma_1 - \alpha_{11} \gamma_2) \right],$$

$$N_2 = \frac{1}{Z} \left\{ i_0 \kappa_{21} \left[ \gamma_2 (\alpha_{12} + i_0 \beta_{21}) - \gamma_1 (\alpha_{22} + i_0 \beta_{22}) \right] + \gamma_1 (\alpha_{22} + i_0 \beta_{22}) - \gamma_2 (\alpha_{21} + i_0 \beta_{21}) \right\}.$$

Крайову задачу (23), (24) розв'язували чисельно з контролем величини  $h$  та автоматичним перетворенням апроксимації  $B_l$ . Функції  $u_{ml}(\zeta)$ ,  $B_{ml}(\zeta)$ ,  $\delta(\zeta)=0$ , і  $h(\zeta)$  розраховано для діапазону параметрів  $i_0$ ,  $\kappa_{21}$ . Контрольними параметрами були обрані:  $B_{ml} < 1$ ,  $u_{ml} < 1$ ,  $dB_{ml}/d\zeta < 0$ ,  $d\delta/d\zeta > 0$ . Аналіз моделювання показав, що рішення (24) було правильним лише для обмеженого співвідношення коефіцієнтів турбулентного змішування  $\kappa_{21}$  (специфічного для кожного значення  $i_0$ ).

Цікавою особливістю є те, що співвідношення коефіцієнтів турбулентного змішування фаз не може бути довільним, що здається фізично обґрунтованим. Для середнього значення  $\kappa_{21}^{av}$  та діапазону варіацій  $\Delta \kappa_{21}$  отримано наступні апроксимації:  $\kappa_{21}^{av} = 0.2 / i_0$ ,  $\Delta \kappa_{21} = \pm 0.02 i_0$ . Чим вища щільність ежектованої рідини, тим нижчий її коефіцієнт змішування порівняно з першою рідиною. Але можливий інтервал співвідношення може зростати зі збільшенням коефіцієнта щільності. Це тому, що важка рідина втрачає здатність до інтенсивного змішування з

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

іншою рідиною. Параметри основної частини струменя:  $\beta_{10}=0.1$ ,  $\beta_{20}=11/210$ ,  $\beta_{10}^*=0.0734375$ ,  $\beta_{20}^*=0.047772$ . Інші  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  та  $\alpha_{ji}^*, \beta_{ji}^*$  наведені в таблиці 5:

Таблиця 5 – Інтегральні параметри  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \alpha_{ji}^*, \beta_{ji}^*$  для різних областей функції-індикатора  $B_1$

$\alpha_{ij}, \beta_{ij}$ для $h$ :	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{21}$	$\alpha_{22}$	$-\beta_{11}$	$-\beta_{12}$	$-\beta_{21}$	$-\beta_{22}$
$h \in [0, -6]$	9/70	7.143e -3	61/770	3.301e -3	19/210	4.1(6)e -3	43/858	1.573e -3
$[-6, -12]$	89/840	3.373e -3	65/924	1.822e -3	11/140	2.183e- 3	698/15015	9.685e -4
$[-12, -20]$	73/840	1.786e -3	527/858 0	1.078e -3	311/462 0	1.245e- 3	212/5005	6.244e -4
$[-20, -30]$	221/308 0	1.028e -3	267/500 5	6.743e -4	19/330	0.(75)e -3	1531/4004 0	4.183e -4
$\alpha_{ji}^*, \beta_{ji}^*$ для $h$ :	$\alpha_{11}^*$	$\alpha_{12}^*$	$\alpha_{21}^*$	$\alpha_{22}^*$	$-\beta_{11}^*$	$-\beta_{12}^*$	$-\beta_{21}^*$	$-\beta_{22}^*$
$h \in [0, -6]$	0.08674 7	3.083e -3	0.06578 2	2.090e -3	0.07062 9	2.328e- 3	0.046421	1.257e -3
$[-6, -12]$	0.07983 2	1.931e -3	0.06130	1.342e -3	0.06555 5	1.482e- 3	0.04389	8.349e -4
$[-12, -20]$	0.07148	1.235e -3	0.05576	8.81e- 4	0.05934	9.64 e- 4	0.04067	5.668e -4
$[-20, -30]$	0.06293	8.070e -4	0.04996	5.909e -4	0.05288	6.412e- 4	0.03720	3.931e -4

Виявлено цікаву особливість щодо впливу параметрів  $i_0, \kappa_{21}$  на розв'язок задачі. Радіус струменя і швидкості фаз на осі практично не залежать від  $\kappa_{21}$ , що повністю визначається величиною  $i_0$ , тоді як функції  $B_{m1}$  і  $h$  строго залежать від  $\kappa_{21}$ . Таким чином, турбулентне перемішування найбільше впливає на внутрішню структуру потоку, розподіл фаз, а швидкості залежать від співвідношення густин фаз (внутрішня структура на це мало впливає). Розподіл швидкостей, у свою чергу, визначає радіус зони змішування, оскільки він змінюється зі зменшенням швидкості відповідно до рівнянь збереження маси та імпульсу.

Через відсутність перевіреної методики розрахунку перехідної частини, основну частину струменя було запропоновано дослідити наступним чином,

незалежно від обмежень  $\kappa_{21}$ . Оскільки дві функції,  $B_{m1}$  і  $h$  визначають функцію  $B_I$ , а вплив  $B_{m1}$  сильніший, ніж  $h$ , можна припустити  $h=h_i=\text{const}$  для основної частини, так що  $B_{m1}$  виправляє можливу неточність. Це припущення є переви-значеним, отже, була зроблена можливість для розрахунку тієї самої характе-ристики двічі, незалежно. Виберемо радіус зони змішування  $\delta$ . Контролюючи співвідношення  $\delta_1$  і  $\delta_2$ , отримане в результаті розв'язання двох незалежних рівнянь, ми могли прийняти рішення про справдження припущення, або про неточність моделі. Тоді рівняння (23) отримують вигляд:

$$B_{m1} = \beta_{20} \frac{u_{m1} i_0}{(\alpha_{11} + \alpha_{12} h_i) - [(\alpha_{21} + i_0 \beta_{21}) + (\alpha_{22} + i_0 \beta_{22}) h_i] u_{m1}},$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2 B_{m1} u_{m1} (\alpha_{11} + \alpha_{12} h_i)}}. \quad (25)$$

Система рівнянь (23), (25) з граничними умовами (24) було розв'язано наступним чином. З (25) і першого рівняння (23)  $u_{m1}$ ,  $B_{m1}$  і  $\delta=\delta_1$  були отримані як функції поздовжньої координати  $\zeta$  і параметрів  $i_0$ ,  $\kappa_{21}$ . Інший радіус турбулентної зони  $\delta=\delta_2$  був отриманий з другого рівняння (23) за  $\eta=\eta^*=0.5$ . Це було перше рішення проблеми, отримане в 1980 році напіваналітичним мето-дом, який менш точний, ніж сучасний метод, представлений вище на рис. 5-79. Швидкість, функція-індикатор і радіус зони турбулентного перемішування на головній частині струменя наведені на рис. 80.

У наступних розрахунках за радіус струменя було прийнято значення  $\delta=\delta_1$ . Деякі з комп'ютерних симуляцій і програм FORTRAN за описаною тут методологією, вперше виконані нами, були представлені в [7-11]. Потім метод був розвинений професором Накорчевським зі співробітниками [12, 13].

Рівняння (17) після підстановки розрахованих функцій  $y_0(h)$ ,  $\delta(h)$  розв'язували наступним чином. Функцію  $FM=1/F$  обчислювали в діапазоні пара-метрів:  $i_0 \in [0.2; 16]$ ,  $\kappa_{21} \in [0; 5]$ ,  $h \in [-20; 0]$ . Її апроксимація була знайдена як  $FM=A_1 + A_2 h + A_3 h^2$ , де  $A_i(i_0, \kappa_{21})$  - обчислена функція з точністю понад 0,2%. Максимальна сумарна похибка обчислення після інтегрування (17), оцінена нерівністю Коші-Буняковського, задовольняла умову  $D_{\max} < D_{\max}(Dh)_{\max}$ .

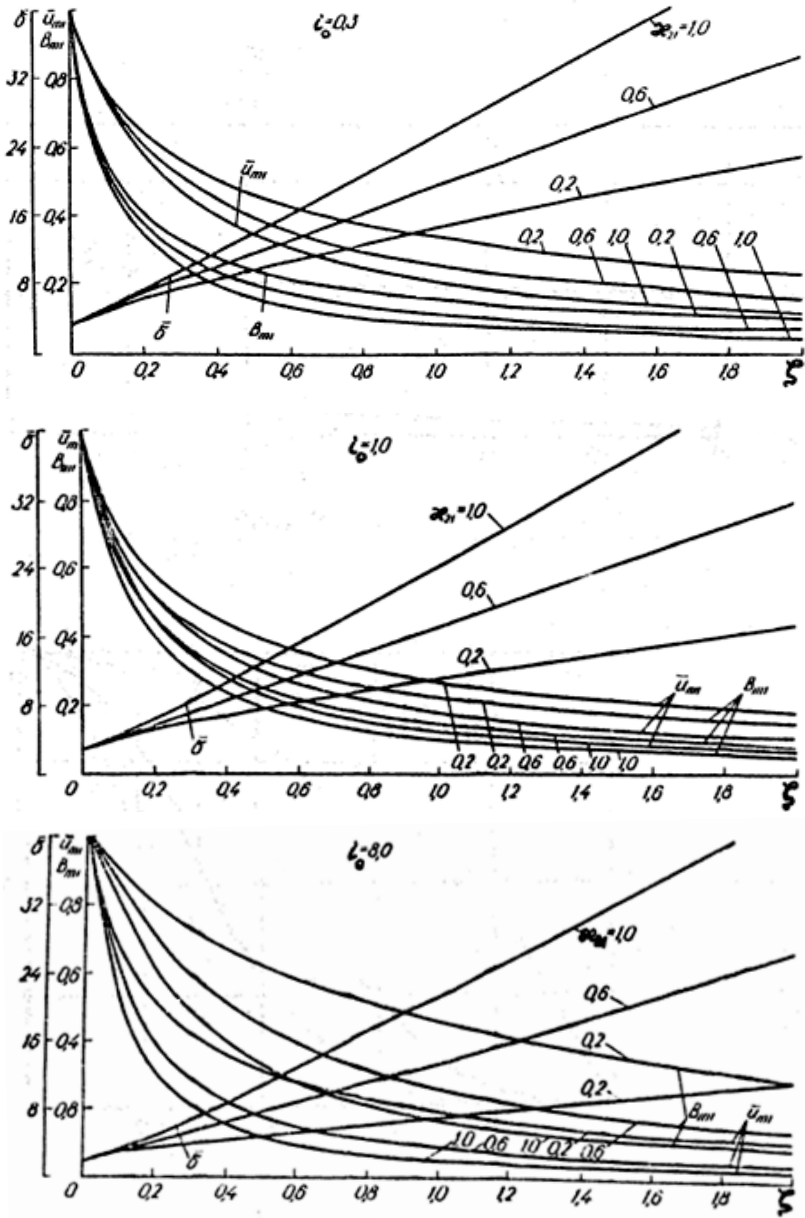


Рис. 80 Осьова швидкість, функція-індикатор і радіус струменя вздовж осі

Оцінка показала  $(Dh)_{\max} < 4$  і  $D_{\max} < 0,8\%$ , що прийнятно для інтегральних методів у турбулентних струменях і примежових шарах. Розв'язок рівняння (17) з урахуванням наведених вище результатів є

$$\zeta = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3, \quad (26)$$

де  $A_0 = -A_1 h_0 - A_2 h_0^2 - A_3 h_0^3$ ,  $A_i = A_i' / i$ ,  $i=1,2,3$ . Отже,  $\zeta_i = A_0 + A_1 h_i + A_2 h_i^2 + A_3 h_i^3$ .

Функції  $A_i(i_0, \kappa_{21})$ ,  $\zeta_i(i_0, \kappa_{21})$ ,  $i=1,2,3$ , для 3 різних значень  $i_0$  представлені на рис. 81-83. Кореляція (26) дозволяє обчислити  $y_0(h)$ ,  $\delta(h)$  і поточний радіус струменя  $r = y_0(h) + \delta(h)$ , зображеного на рис. 82 (1-  $\kappa_{21}=0.2$ , 2-  $\kappa_{21}=1$ , 3-  $\kappa_{21}=5.0$ ).

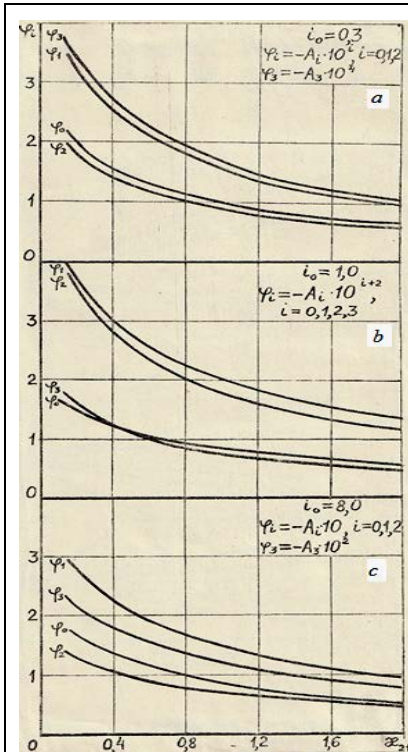


Рис. 81 Залежність функцій  $A_i(i_0, \kappa_{21})$  від  $\kappa_{21}$  для 3 значень  $i_0$

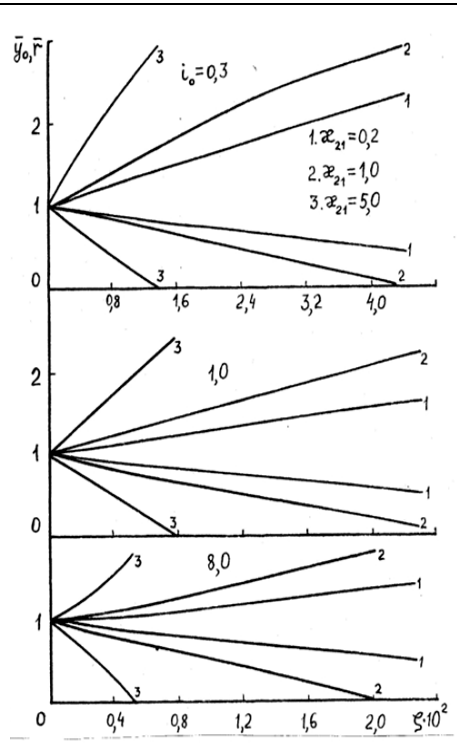


Рис. 82 Радіус потенційного ядра і зони змішування струменя

Інші параметри початкової частини струминної течії наведені на рис. 84-87:

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\rho_1 \kappa_1 u_{01}^2} = 12\eta(\eta-1) \left[ \eta B_1 + i_0 \kappa_{21} (1-\eta) B_2 \right],$$

$$\frac{B_i v_i}{u_{0i}}, \quad \frac{v}{u_{01}} = \frac{B_1 v_1}{u_{01}} + s_0 \frac{B_2 v_2}{u_{02}}, \quad \left\langle \overline{\rho u^2} \right\rangle = \frac{\langle \rho u^2 \rangle}{\rho_1 u_{01}^2} = B_1 \bar{u}_1^2 + i_0 B_2 \bar{u}_2^2.$$

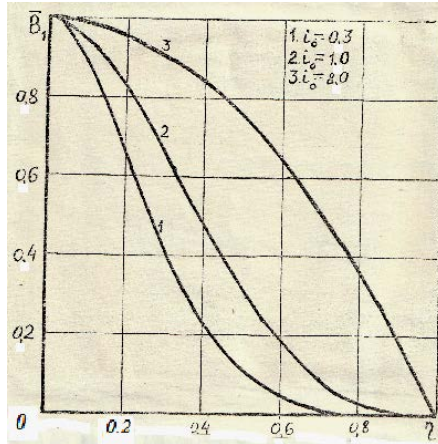


Рис. 83 Функція-індикатор першої фази по шару

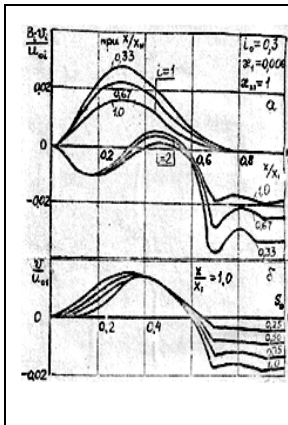


Рис. 84  $v_1, v_2, v$  у 3 перерізах для  $i_0=0.3$

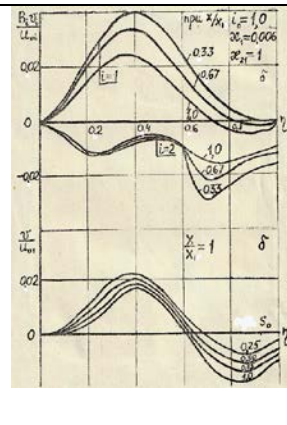


Рис. 85  $v_1, v_2, v$  у 3 перерізах для  $i_0=1.0$

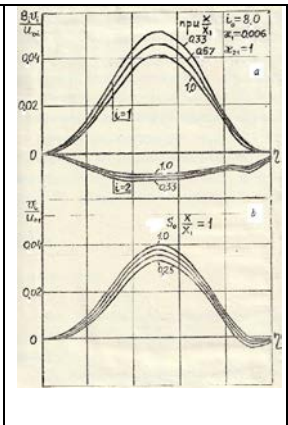


Рис. 86  $v_1, v_2, v$  у 3 перерізах для  $i_0=8.0$

Тут: турбулентний зсув у струміні, швидкості за фазами, повна швидкість двофазної суміші та кінетична енергія двофазної суміші відповідно.

Розрахунок показав, що довжина початкової частини струменя строго залежить від співвідношення коефіцієнтів турбулентного перемішування  $k_{21}$ : чим вище турбулентне перемішування у другій фазі (з навколишнього середовища), тим довша початкова частина струменя. Сильне змішування в першій фазі фізично означає, що воно зберігає параметри першої фази протягом тривалого часу. При сильному коефіцієнті змішування введеної фази початкова частина струменя є короткою незалежно від співвідношення густин фаз у широкому діапазоні від  $i_0=0.3$  до  $i_0=8$ . Якщо коефіцієнти змішування у фазах одного порядку або коефіцієнт у введеної рідині менший, ніж у рідині з сопла, початкова частина струменя має протяжність до 5-10 разів більше радіуса сопла. І чим щільніша перша рідина, тим довша початкова частина струменя. Параметри турбулентного двофазного струменя, отримані аналітичні та чисельні рішення, порівнювали з експериментальними даними для рідин, що не змішуються з водою (див. рис. 88).

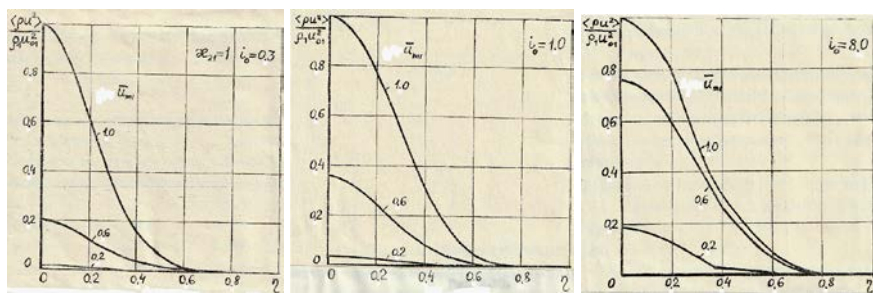


Рис. 87 Турбулентна пульсація енергії впоперек шару

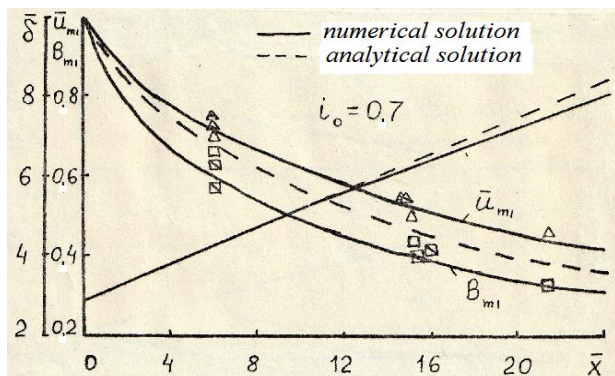


Рис. 88 Розрахункові параметри та експеримент для потоку вода-газ

На початковій частині струменя виявлені такі особливості. Збільшення щільності всмоктуваної рідини призводить до скорочення довжини початкової частини струменя. Профілі наближені до автотельних. Максимальне значення турбулентного напруження в потоці зі збільшенням щільності всмоктуваної рідини зміщується до зовнішньої межі шару змішування. Профілі  $B_1$ ,  $B_1 \bar{u}_1$ ,  $\langle \rho u^2 \rangle$  стають повнішими, а  $B_2 \bar{u}_2$  - виснажливим.

Поперечна швидкість першої фази здебільшого спрямована до зовнішньої межі шару змішування, а друга фаза рухається в протилежному напрямку, до осі струменя. Найбільш чітко ця тенденція проявляється при великих значеннях  $i_0$ . Траєкторії руху фаз у шарі змішування на рис. 89 показують, що перша рідина зберігає тенденцію руху паралельно осі струменя при всіх співвідношеннях щільності, а друга фаза всмоктується в шар змішування інтенсивніше зі збільшенням її щільності.

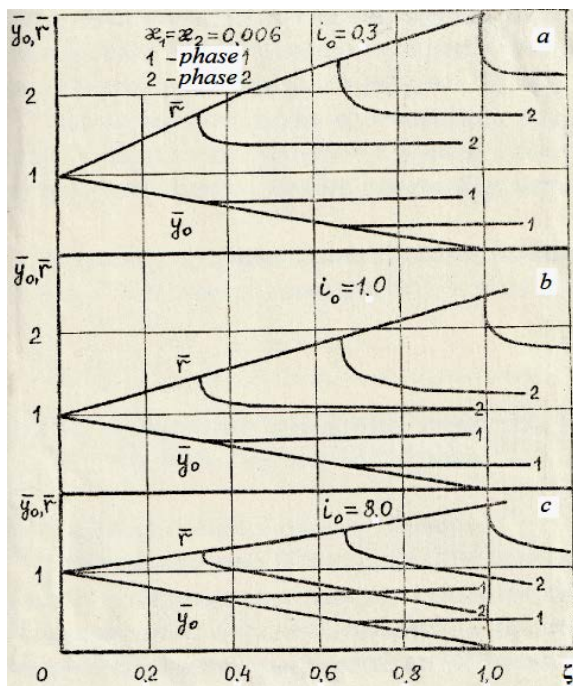


Рис. 89 Лінії струму в турбулентному двофазному струмені

Для експериментального дослідження струменів води в басейні з гасом [1] був розроблений спеціальний двофазний мікродатчик. Вимірювались параметри потоку разом з їх приналежністю до фази.

Справжнє інтенсивне перемішування проявляється високим коефіцієнтом щільності ( $i_0 = nS_0^2 = 8$ ), але оскільки цей параметр  $i_0$  містить суттєвий вплив ковзання фаз  $S_0 = u_{02} / u_{01}$ , яке спадає зі збільшенням коефіцієнта щільності, то  $i_0=8$  може відповідати коефіцієнту щільності навіть вище 8. Початкова і основна частини струменя повинні бути пов'язані. Для цього довжину перехідної частини струменя визначали інтерполяцією зовнішньої межі струменя від початкової до основної частини. Це наближення було:  $\delta = 1 + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2$ , де зі значення  $\zeta$  було обчислено відомі  $\kappa_1$ ,  $\delta_i$ . Значення  $\kappa_1$  брали рівним відповідному значенню на початковій ділянці. Коефіцієнти:

$$i_0=0.3, \alpha_1=56, \alpha_2=-290; i_0=1.0, \alpha_1=57.5, \alpha_2=-250; i_0=8.0, \alpha_1=29, \alpha_2=600.$$

Цікаву особливість виявлено при впливі на розчин параметрів  $i_0$ ,  $\kappa_{21}$ . Радіус струменя і швидкості фаз на осі практично не залежать від  $\kappa_{21}$ , що повністю визначається величиною  $i_0$ , тоді як функції  $B_{m1}$  і  $h$  строго залежать від  $\kappa_{21}$ . Таким чином, турбулентне перемішування впливає в основному на внутрішню структуру потоку, розподіл фаз і швидкості залежать від співвідношення щільності фаз (внутрішня структура на це мало впливає). Розподіл швидкостей, у свою чергу, визначає радіус зони змішування, оскільки він змінюється зі зменшенням швидкості відповідно до рівнянь збереження маси та імпульсу. Зі збільшенням  $\kappa_{21}$  розширення струменя посилюється. Турбулентна напруга максимальна приблизно на відстані 1/3 шару змішування.

Поперечна швидкість першої фази  $B_1 v_1$  істотно нижче поперечної швидкості другої фази  $B_2 v_2$ , яка визначає поперечний потік в шарі змішування. Незалежно від значення  $i_0$  швидкість другої фази спрямована до осі і досягає максимуму приблизно на 0.5, зменшуючись із зростанням щільності рідини басейну. Отримані результати порівнювали з експериментальними даними кількох дослідників [1, 11, 14, 15]. Відповідність гарна для наступних констант:

$$i_0=0.3, \kappa_{21}=0.6; i_0=1, \kappa_{21}=0.4; i_0=8.0, \kappa_{21}=0.2.$$

Порівняння для  $i_0=0.7$  (вода-гас) [1] було найкращим при  $\kappa_{21}=0.46$ . Лінії струму на рис. 89 представлені відносно довжини початкової частини ( $\zeta/\zeta_i$ ), тому вже враховано вкорочення початкової частини струменя зі збільшенням щільності рідини, що всмоктується. Оскільки  $\delta(\zeta, i_0)$  близькі до лінійних функцій, було

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

використано наближення  $\delta(\zeta, i_0) = c_1 + c_2 \zeta$ . Для  $\kappa_{21} = 0.5$  перше рівняння системи (23) спрощується і розв'язується аналітично:

$$du_{m1} / d\zeta = -12u_{m1} / (c_1 + c_2 \zeta),$$

що є тим точнішим, чим ближче  $\kappa_{21}$  до 0.5. Із вищевикладеного це відповідає  $i_0 < 1$ . Розв'язок з урахуванням (24) та  $\zeta = \infty$ ,  $u_{m1} \delta = \text{const}$ ,  $u_{m1} \delta^2 = \infty$ , має вигляд

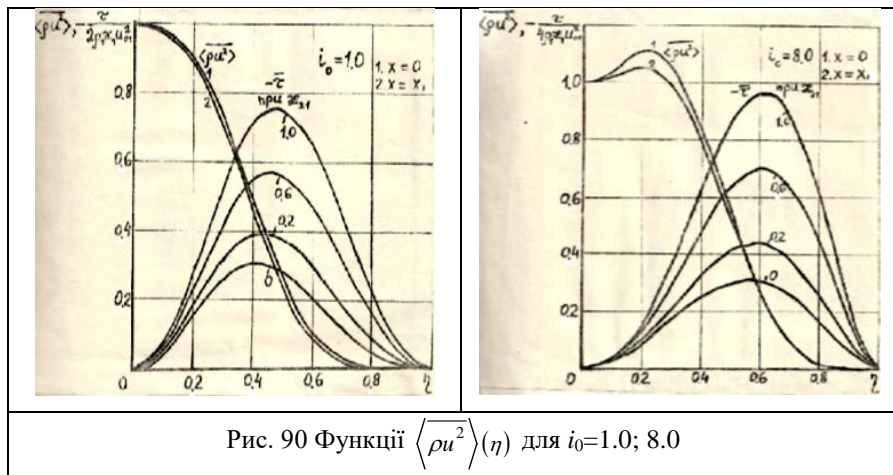
$$u_{m1} = \delta_i / (\delta_i + 12\zeta), \quad \delta = \delta_i + 12\zeta. \quad (27)$$

Отримані результати можуть бути використані в інженерних розрахунках та оцінках, напр. кореляція (27) для радіуса шару змішування та швидкості на осі, а також функція-індикатор фаз.

## Розділ 6. ПІДСИЛЕННЯ ЕНЕРГІЇ СТРУМЕНЯ ВІД НАДХОДЖЕННЯ НАВКОЛИШНЬОЇ РІДИНИ

### 6.1 Явище посилення енергії струменя в розрахунках

Явище було вперше виявлено нами наприкінці 1970-х років [1, 2]. Це було виявлено лише для високої щільності навколишньої рідини,  $i_0 \gg 1$ , напр.  $i_0=8.0$ , як показано на рис. 90 для кінетичної енергії двофазного струменя для 3 значень  $i_0=0.3; 1.0; 8.0$ . Це явище посилення кінетичної енергії струменя  $\langle \overline{\rho u^2} \rangle(\eta)$  проти вхідної енергії першої фази на її виході з сопла ми не змогли підтвердити експериментально через серйозні перешкоди у вимірюванні. Крім того, це було в межах звичайного діапазону похибок в експериментах з турбулентним потоком. Тому ми лише кілька разів ретельно довели це теоретично, щоб переконатися в розрахунках. Пізніше ми зустріли кілька повідомлень у літературі, головним чином про потоки газу в ракетних двигунах [16, 17].



## 6.2 Явище в нашому поясненні та з літератури

Причини цього ефекту та джерело додаткової енергії розглядав Котоусов С.Л. [16], який вказав ряд доступних механізмів, наприклад, вирішив, що прискорення струменя зумовлене не лише тиском на вході, а й зменшенням потенціальної енергії поточного середовища шляхом зниження його абсолютного тиску до рівня технічного вакууму. З цього випливає, що досліджуваний Котоусовим ефект може не тільки пояснити механізм дії різних гідродинамічних конструкцій (Шаубергера, Клема та ін.), але і сам по собі має велике практичне значення. Так, очевидно, прості моделі турбулентних струменів, подібні використаній нами, в деяких аспектах далекі від реальності, хоча в цілому вони добре відповідають експериментальним даним.

Внаслідок вкиду другої фази на соплі поблизу нього відбувається деяке зниження тиску, що викликає додаткову кількість вкиду другої фази, яка бере участь у змішуванні. Як видно на рис. 90, для  $i_0=8.0$  приблизно 5% загальної енергії струменя додається до вхідної енергії струменя, що виходить із сопла. В кінці початкової частини струменя відповідне значення становить близько 2,5%, що майже вдвічі менше, ніж на поперечному перерізі сопла. Що стосується високого коефіцієнта щільності ( $i_0=8.0$ ), то це пояснюється великою енергією невеликої додаткової кількості другої фази через її високу щільність (більш щільна рідина має більшу енергію при тій самій швидкості).

## Розділ 7. МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВОФАЗНОГО СТРУМУ В ОБМЕЖЕНОМУ ПРОСТОРИ

### 7.1 Особливості розповсюдження струменів у замкненому просторі

Вільний струмінь може бути обмежений у своїй початковій або основній частині, як це робиться в кількох струменевих пристроях для різних теплогідрравлічних застосувань, залежно від фізичної ситуації. Перша модель показана на рис. 91:

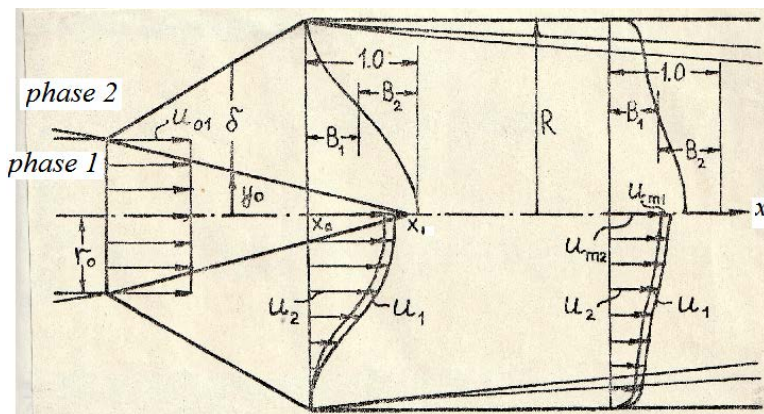


Рис. 91 Турбулентний двофазний струмінь, обмежений початковою частиною. Цей потік описується системою рівнянь (1). У потенційному ядрі виконується рівняння Бернуллі

$$p + 0.5\rho_1 u_{c1}^2 = p_0 + 0.5\rho_1 u_{01}^2, \quad (28)$$

де  $u_{ci}$  - швидкість  $i$ -ї фази в ядрі струменя,  $x_c$  - початковий переріз утримуючого каналу,  $p_0$  - тиск у вільному струмені. З (28) випливає

$$u_{c1} = u_{01} \sqrt{1 - \bar{p}}, \quad \bar{p} = 2(p - p_0) / (\rho_1 u_{01}^2). \quad (29)$$

### 7.2 Підхід до моделювання обмежених струминних течій

Використовуючи поперечні швидкості фаз з перших двох рівнянь (1), з урахуванням нульових поперечних швидкостей на осі через симетрію потоку та на стінці каналу через непроникність, можна отримати

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{01} r_0^2 &= \rho_1 u_{c1} y_0^2 + 2 \int_{y_0}^R \rho_1 B_1 u_1 (y_0 + y) dy, \\ \int_{y_{0c}}^{R_c} \rho_2 B_{2c} u_{2c} (y_{0c} + y) dy &= \int_{y_0}^R \rho_2 B_2 u_2 (y_0 + y) dy, \quad (30) \\ 0.5 \frac{d}{dx} (\rho_1 u_{c1}^2 y_0^2) + \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^2 \int_{y_0}^R \rho_i B_i u_i^2 (y_0 + y) dy &= R \sum_{i=1}^2 B_{wi} \tau_{wi} - 0.5 R^2 \frac{dp}{dx}, \\ 0.5 \frac{d}{dx} [\rho_1 u_{c1} (u_{c1} - u_1^*) y_0^2] + \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^2 \int_{y_0}^{y_i^*} \rho_i B_i u_i^2 (y_0 + y) dy - \sum_{i=1}^2 u_i^* \frac{d}{dx} \int_{y_0}^{y_i^*} \rho_i B_i u_i (y_0 + y) dy &= \\ &= (y_0 + y^*) \sum_{i=1}^2 B_i^* \tau_i^* - 0.5 (y_0 + y^*)^2 \frac{dp}{dx}, \end{aligned}$$

де  $R(x)$  – радіус утримуючого каналу, що дорівнює радіусу вільного струменя в перерізі  $x=x_c$ . Индекси  $c$  та  $w$  належать  $x=x_c$  та стінці камери відповідно. Зірка позначає значення при  $y=y^* < \delta$ , напр.  $y^*=0.5\delta$ . Третя інтегральна кореляція в (30) отримана з урахуванням наступних двох рівнянь, отриманих з перших двох рівнянь (30):

$$\frac{d}{dx} \int_{y_0}^R \rho_1 B_1 u_1 (y_0 + y) dy = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \rho_1 u_{c1} y_0^2, \quad \frac{d}{dx} \int_{y_0}^R \rho_2 B_2 u_2 (y_0 + y) dy = 0. \quad (31)$$

Рівняння (30) містять два рівняння збереження маси для першої та другої фази і інтегральні рівняння імпульсу – за повним перерізом та за його частиною. Таким чином, два алгебраїчних і два звичайних диференціальних рівняння представляють модель обмеженого двофазного струменя для  $x \geq x_c$ , де  $x \geq x_i$ ,  $y_0=0$ , а функція-індикатор першої фази непостійна на осі:  $B_{m1}=B_{m1}(x)$ .

### 7.3 Граничні умови та припущення

Рівняння (30) задовольняють наступні граничні умови

$$x = x_c, \quad y_0 = y_{0c}, \quad p=p_0, \quad u_i = u_{ic}, \quad B_I = B_{Ic}. \quad (32)$$

Подібно до вільного струменя приймається припущення про кореляцію:

$$u_{2c}/u_{1c} = u_{m2}/u_{m1} = s_0 = \text{const}. \quad (33)$$

## 7.4 Основні безрозмірні рівняння для струменя, обмеженого в початковій частині

При зроблених вище припущеннях система (30) зводиться до наступної безрозмірної форми:

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-\bar{p}} \left[ \bar{y}_0^2 + 2\bar{\delta} \int_0^1 B_1 \bar{u}_1 (\bar{y}_0 + \bar{\delta}\eta) d\eta \right] = 1, \quad (34) \\ & \sqrt{1-\bar{p}} \int_0^1 (1-B_1) \bar{u}_2 (\bar{y}_0 + \bar{\delta}\eta) \bar{\delta} d\eta = \int_0^1 (1-B_{1c}) \bar{u}_{2c} (\bar{y}_{0c} + \bar{\delta}_c \eta) \bar{\delta}_c d\eta, \\ & 0.5 \frac{d}{d\bar{x}} \bar{y}_0^2 (1-\bar{p}) + \frac{d}{d\bar{x}} \sum_{i=1}^2 i_0^{i-1} (1-\bar{p}) \int_0^1 B_i \bar{u}_i^2 (\bar{y}_0 + \bar{\delta}\eta) \bar{\delta} d\eta = -\frac{\bar{R}^2}{4} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} + \bar{R} \sum_{i=1}^2 B_i \bar{\tau}_i, \\ & 0.5(1-\bar{u}_1^*) \frac{d}{d\bar{x}} \bar{y}_0^2 (1-\bar{p}) + \frac{d}{d\bar{x}} \sum_{i=1}^2 i_0^{i-1} (1-\bar{p}) \int_0^{\eta^*} B_i \bar{u}_i^2 (\bar{y}_0 + \bar{\delta}\eta) \bar{\delta} d\eta + \\ & -\sqrt{1-\bar{p}} \sum_{i=1}^2 i_0^{i-1} \bar{u}_i^* \frac{d}{d\bar{x}} \sqrt{1-\bar{p}} \int_0^{\eta^*} B_i \bar{u}_i (\bar{y}_0 + \bar{\delta}\eta) \bar{\delta} d\eta = -0.25(\bar{y}_0 + \bar{\delta}\eta^*)^2 \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} + (\bar{y}_0 + \bar{\delta}\eta^*) \sum_{i=1}^2 B_i \bar{\tau}_i^*. \end{aligned}$$

де:  $\bar{\delta} = \frac{\delta}{r_0}$ ,  $\eta = \frac{y-y_0}{\delta}$ ,  $\bar{x} = \frac{x-x_c}{r_0}$ ,  $\bar{y}_0 = \frac{y_0}{r_0}$ ,  $\bar{R} = \frac{R}{r_0}$ ,  $n = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ ,  $\bar{u}_i = \frac{u_i}{u_{ci} S^{i-1}}$ ,  $\bar{\tau}_i = \frac{\tau_i}{\rho_1 u_{01}^2}$ ,

$i_0 = n S_0^2$ . При  $x > x_i$ ,  $u_i = \bar{u}_i u_{mi}$ . Граничними умовами є:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{u}_i = \bar{u}_{ic}, \quad B_i = B_{ic}, \quad \bar{y}_0 = \bar{y}_{0c}, \quad \bar{\delta} = \bar{\delta}_c, \quad \bar{p} = 0. \quad (35)$$

У початковій обмеженій частині струменя,  $x \in (x_c, x_i)$ , додається також

$$\eta = 0, \quad \bar{u}_i = 1, \quad B_{m1} = 1. \quad (36)$$

## 7.5 Основні безрозмірні рівняння для струменя, обмеженого головною частиною

Після закінчення потенційного ядра (або у разі обмеження струменя в його початковій частині),  $x > x_i$ , закономірності розтікання струменя описуються системою змішаних алгебро-диференціальних рівнянь:

$$\frac{d}{d\bar{x}} (1-\bar{p}) \bar{R}^2 \sum_{i=1}^2 i_0^{i-1} \int_0^{\eta^*} B_i \bar{u}_i^2 \eta d\eta - \sqrt{1-\bar{p}} \sum_{i=1}^2 i_0^{i-1} \bar{u}_i^* \frac{d}{d\bar{x}} \bar{R}^2 \sqrt{1-\bar{p}} \int_0^{\eta^*} B_i \bar{u}_i \eta d\eta =$$

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\begin{aligned}
 &= \bar{R}\eta^* \sum_{i=1}^2 B_i^* \bar{\tau}_i^* - \frac{1}{4} \bar{R}^2 (\eta^*)^2 \frac{d\bar{p}}{dx}, \quad 2\bar{R}^2 \sqrt{1-\bar{p}} \int_0^1 B_i \bar{u}_i \eta d\eta = 1, \quad \bar{\delta} = \bar{R}, \quad \bar{y}_0 = 0, \\
 &\frac{d}{dx} (1-\bar{p}) \bar{R}^2 \sum_{i=1}^2 i_0^{i-1} \int_0^1 B_i \bar{u}_i^2 \eta d\eta = \bar{R} \sum_{i=1}^2 B_{wi} \bar{\tau}_{wi} - \frac{\bar{R}^2}{4} \frac{d\bar{p}}{dx}, \quad (37) \\
 &\bar{R}^2 \sqrt{1-\bar{p}} \int_0^1 (1-B_1) \bar{u}_2 \eta d\eta = \int_0^1 (1-B_{1c}) \bar{u}_{2c} (\bar{y}_{0c} + \bar{\delta}_c \eta) \bar{\delta}_c d\eta.
 \end{aligned}$$

Якщо струмінь обмежено основною частиною, рівняння виводяться подібним чином у розмірній формі:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{R(x)} B_i u_i y dy &= \int_0^{R_c} B_{ic} u_{ic} y dy, \quad (i=1,2), \quad \sum_{i=1}^2 \rho_i B_{mi} \frac{du_{mi}}{dx} = 2 \left( \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^2 B_i \tau_i \right)_m - \frac{dp}{dx}, \\
 \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^2 \int_0^{y^*(x)} \rho_i B_i u_i^2 y dy - \sum_{i=1}^2 u_i^* \frac{d}{dx} \int_0^{y^*(x)} \rho_i B_i u_i y dy &= y^* \sum_{i=1}^2 B_i^* \tau_i^* - 0.5 (y^*)^2 \frac{dp}{dx}, \\
 \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^2 \int_0^{R(x)} \rho_i B_i u_i^2 y dy &= -0.5 R^2(x) \frac{dp}{dx} + R(x) \sum_{i=1}^2 B_{wi} \tau_{wi}. \quad (38)
 \end{aligned}$$

## 7.6 Рішення для двовимірного аксіально-симетричного двофазного обмеженого струменя

Подальше дослідження стаціонарних двовимірних аксіально-симетричних неоднорідних двофазних турбулентних струменів в обмеженій області доцільно провести на деяких спрощених моделях для виявлення основних особливостей таких течій. Основна проблема багатофазного потоку полягає в замкненості системи рівнянь. Для коефіцієнта турбулентного перемішування, як і у вільних турбулентних струменях, використовуємо «нову формулу Прандтля». Особливість обмеженого струменя - поява прилежого шару біля стінки каналу [18], що суттєво ускладнює структуру течії. Якщо передбачити характер струминного потоку всередині каналу до стінки, то обидві фази ковзають по стінці. Тоді структурна схема вважається подібною до запропонованої для однорідного струменя [18], а  $\eta^*$  вибирається таким, що відповідає розвиненій струминній течії. Тож профілі параметрів будуть

$$u_i = (u_{mi} - u_{wi}) \bar{u}_{ic} + u_{wi}, \quad (i=1,2),$$

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$B_1 = (B_{m1} - B_{w1}) \bar{B}_1 + B_{w1}, \quad B_2 = 1 - B_1, \quad (39)$$

де  $\bar{u}_{1c}$ ,  $\bar{u}_{2c}$ ,  $\bar{B}_1$  визначаються за розглянутим методом двофазного потоку.

Модель дозволяє розглянути взаємодію двофазного турбулентного струменя з утримуючим каналом. Основними параметрами є:  $u_{m1}(x)$ ,  $u_{w1}(x)$ ,  $B_{m1}(x)$ ,  $B_{w1}(x)$ ,  $p(x)$  і  $R(x)$ , один з яких можна назвати оптимальним у бажаний спосіб. Наприклад, для градування плавного каналу стабілізації, у разі утримання струменя в основній його частині, в (38) ставиться  $dp/dx=0$ . Потім відповідно до поставленої задачі визначаються функції  $u_{m1}(x)$ ,  $u_{w1}(x)$ ,  $B_{m1}(x)$ ,  $B_{w1}(x)$  і  $R(x)$ . Для повної стабілізації потоку, коли  $u_{m1} = u_{w1} = u_{1\infty}$ ,  $B_{m1} = B_{w1} = B_{1\infty}$ , отримана математична модель дає:

$$\bar{R}^2 \bar{B}_{1\infty} \bar{u}_{1\infty} = 2 \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{1c} \eta d\eta, \quad (40)$$

$$\bar{R}^2 \bar{B}_{1\infty} \bar{u}_{1\infty} = 2 \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{2c} \eta d\eta + 1 / B_{m1c} \left( \bar{R}^2 \bar{u}_{1\infty} - 2 \int_0^1 \bar{u}_{2c} \eta d\eta \right), \quad (i=1,2),$$

$$d\bar{p} / dx = -B_{m1c} \left[ \bar{B}_{1\infty} (1 - i_0) + i_0 / B_{m1c} \right] d\bar{u}_{1\infty}^2 / dx.$$

З (28) випливає, що  $\bar{R}^2 \bar{u}_{1\infty}$  визначається незалежно від  $\bar{R}$ ,  $\bar{B}_{1\infty}$ :

$$C_0 = \bar{R}^2 \bar{u}_{1\infty} = 2 \left[ B_{m1c} \left( \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{1c} \eta d\eta - \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{2c} \eta d\eta \right) + \int_0^1 \bar{u}_{2c} \eta d\eta \right]. \quad (41)$$

А співвідношення тиску з формою утримуючої камери наступне

$$\bar{p} + B_{m1c} \left[ \bar{B}_{1\infty} (1 - i_0) + i_0 / B_{m1c} \right] C_0^2 / \bar{R}^4 = const, \quad (42)$$

де  $R = \bar{R} R_c$ ,  $u_{1\infty} = \bar{u}_{1\infty} u_{m1c}$ ,  $\infty$  індекс означає значення для повністю стабілізованого потоку, і  $\tau_{wi} = 0$  згідно з прийнятою схемою.

Якщо потік турбулентного двофазного струменя обмежений у своїй початковій частині, зі спрощенням  $h = h_c = const$ , він описується наступними рівняннями. Для початкової частини струменя ( $B_{m1} = 1$ ,  $u_{mi} = u_{c1} s_0^{i-1}$ ):

$$2\sqrt{1-\bar{p}} (\bar{R} - \bar{y}_0) \int_0^1 \left[ (1 - B_{w1}) \bar{B}_{1c} + B_{w1} \right] \left[ (1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c} + \bar{u}_{w1} \right] \left[ (\bar{R} - \bar{y}_0) \eta + \bar{y}_0 \right] d\eta = 1 - \bar{y}_0^2 \sqrt{1-\bar{p}},$$

$$\sqrt{1-\bar{p}} (\bar{R} - \bar{y}_0) \int_0^1 \left[ (1 - B_{w1}) + (B_{w1} - 1) \bar{B}_{1c} \right] \left[ (1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c} + \bar{u}_{w1} \right] \left[ (\bar{R} - \bar{y}_0) \eta + \bar{y}_0 \right] d\eta =$$

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\begin{aligned}
 &= (\bar{R}_c - \bar{y}_{0c}) \int_0^1 (1 - \bar{B}_{1c}) \bar{u}_{2c} [(\bar{R}_c - \bar{y}_{0c}) \eta + \bar{y}_{0c}] d\eta, \quad (43) \\
 &0.5 \bar{y}_0^2 (\bar{R} - \bar{y}_0) \int_0^1 [(1 - B_{w1}) \bar{B}_{1c} + B_{w1}] [(1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c} + \bar{u}_{w1}]^2 [(\bar{R} - \bar{y}_0) \eta + \bar{y}_0] d\eta + \\
 &+ i_0 (\bar{R} - \bar{y}_0) \int_0^1 [(1 - B_{w1}) + (B_{w1} - 1) \bar{B}_{1c}] [(1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c} + \bar{u}_{w1}]^2 [(\bar{R} - \bar{y}_0) \eta + \bar{y}_0] d\eta = \\
 &0.5 [(1 - \bar{u}_{w1}) + (\bar{u}_{w1} - 1) \bar{u}_{1c}^*] d / d\zeta [(1 - \bar{p}) \bar{y}_0^2] + \\
 &\frac{d}{d\zeta} (1 - \bar{p}) \left\{ (\bar{R} - \bar{y}_0) \int_0^{\eta^*} [(1 - B_{w1}) \bar{B}_{1c} + B_{w1}] [(1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c} + \bar{u}_{w1}]^2 [(\bar{R} - \bar{y}_0) \eta + \bar{y}_0] d\eta + \right. \\
 &+ i_0 (\bar{R} - \bar{y}_0) \int_0^{\eta^*} [(1 - B_{w1}) + (B_{w1} - 1) \bar{B}_{1c}] [(1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c} + \bar{u}_{w1}]^2 [(\bar{R} - \bar{y}_0) \eta + \bar{y}_0] d\eta \left. \right\} \cdot \sqrt{1 - \bar{p}} \cdot \\
 &\cdot [(1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c}^* + \bar{u}_{w1}] \frac{d}{d\zeta} (\bar{R} - \bar{y}_0) \int_0^{\eta^*} [(1 - B_{w1}) \bar{B}_{1c} + B_{w1}] [(1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c} + \bar{u}_{w1}] [(\bar{R} - \bar{y}_0) \eta + \bar{y}_0] \sqrt{1 - \bar{p}} d\eta + \\
 &- \sqrt{1 - \bar{p}} i_0 [(1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c}^* + \bar{u}_{w1}] \frac{d}{d\zeta} \sqrt{1 - \bar{p}} (\bar{R} - \bar{y}_0) \int_0^{\eta^*} [(1 - B_{w1}) + (B_{w1} - 1) \bar{B}_{1c}] [(1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c} + \bar{u}_{w1}] \cdot \\
 &\cdot [(\bar{R} - \bar{y}_0) \eta + \bar{y}_0] d\eta = (1 - \bar{p}) [(\bar{R} - \bar{y}_0) \eta^* + \bar{y}_0] (1 - \bar{u}_{w1})^2 \left\{ [(1 - B_{w1}) \bar{B}_{1c}^* + B_{w1}] (d\bar{u}_{1c} / d\zeta)^* + \right. \\
 &+ i_0 \kappa_{21} [(1 - B_{w1}) + (B_{w1} - 1) \bar{B}_{1c}^*] (d\bar{u}_{2c} / d\zeta)^* - 0.25 [(\bar{R} - \bar{y}_0) \eta + \bar{y}_0]^2 d\bar{p} / d\zeta \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Граничні умови для рівнянь (43) формуються наступним чином:

$$\zeta = 0, \quad y = y_{0c}, \quad h = h_c, \quad B_{w1} = 0, \quad \bar{B}_{1c} = B_{1c}, \quad \bar{R} = \bar{R}_c, \quad \bar{u}_{w1} = 0, \quad \bar{p} = 0. \quad (44)$$

Тут:  $\zeta = \kappa_1 \bar{x}$ ,  $\kappa_{21} = \kappa_2 / \kappa_1$ .

Крім того, для  $x \geq x_i$  додається рівняння імпульсу на осі:

$$\begin{aligned}
 &2\sqrt{1 - \bar{p}} \bar{R}^2 \int_0^1 [(B_{m1} - B_{w1}) \bar{B}_{1i} + B_{w1}] [(1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c} + \bar{u}_{w1}] \eta d\eta = 1, \\
 &\sqrt{1 - \bar{p}} \bar{R}^2 \int_0^1 [(B_{w1} - B_{m1}) \bar{B}_{1i} + 1 - B_{w1}] [(1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c} + \bar{u}_{w1}] \eta d\eta = \bar{R}_i^2 \int_0^1 (1 - B_{1i}) \bar{u}_{2c} \eta d\eta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left[ (B_{m1} - B_{w1}) \bar{B}_{li} + B_{w1} \right] \left[ (1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c} + \bar{u}_{w1} \right]^2 \eta d\eta + \\
 & + i_0 \int_0^1 \left[ (1 - B_{w1}) + (B_{w1} - B_{m1}) \bar{B}_{li} \right] \left[ (1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c} + \bar{u}_{w1} \right]^2 \eta d\eta = \\
 & = \left\{ \int_0^1 \left[ B_{w1} + (1 - B_{w1}) \bar{B}_{li} \right] \left[ (1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c} + \bar{u}_{w1} \right]^2 \eta d\eta + \right. \quad (45) \\
 & \left. + i_0 \int_0^1 \left[ (1 - B_{w1}) + (B_{w1} - 1) \bar{B}_{li} \right] \left[ (1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c} + \bar{u}_{w1} \right]^2 \eta d\eta = \frac{\bar{p}_i - \bar{p}}{4} \right\} \frac{\bar{R}_i^2}{(1 - \bar{p}) \bar{R}^2}, \\
 & \frac{d}{d\zeta} \bar{R}^2 (1 - \bar{p}) \left\{ (-\bar{y}_0) \int_0^{\eta^*} \left[ (B_{m1} - B_{w1}) \bar{B}_{li} + B_{w1} \right] \left[ (1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c} + \bar{u}_{w1} \right]^2 \eta d\eta + \right. \\
 & \left. + i_0 \int_0^{\eta^*} \left[ (1 - B_{w1}) + (B_{w1} - B_{m1}) \bar{B}_{li} \right] \left[ (1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c} + \bar{u}_{w1} \right]^2 \eta d\eta \right\} + \\
 & - \sqrt{1 - \bar{p}} \left[ (1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c}^* + \bar{u}_{w1} \right] \frac{d}{d\zeta} \bar{R}^2 \sqrt{1 - \bar{p}} \int_0^{\eta^*} \left[ (B_{m1} - B_{w1}) \bar{B}_{li} + B_{w1} \right] \left[ (1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c} + \bar{u}_{w1} \right] \eta d\eta + \\
 & - i_0 \sqrt{1 - \bar{p}} \left[ (1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c}^* + \bar{u}_{w1} \right] \frac{d}{d\zeta} \sqrt{1 - \bar{p}} \bar{R}^2 \int_0^{\eta^*} \left[ (B_{m1} - B_{w1}) \bar{B}_{li} + (1 - B_{w1}) \right] \left[ (1 - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c} + \bar{u}_{w1} \right] \eta d\eta = \\
 & = (1 - \bar{p}) \bar{R}^2 \eta^* (1 - \bar{u}_{w1})^2 \left\{ \left[ (B_{m1} - B_{w1}) \bar{B}_{li}^* + B_{w1} \right] (d\bar{u}_{1c} / d\eta)^* + \right. \\
 & \left. + i_0 \kappa_{21} \left[ (1 - B_{w1}) + (B_{w1} - B_{m1}) \bar{B}_{li}^* \right] (d\bar{u}_{2c} / d\eta)^* \right\} - 0.25 (\eta^*)^2 \bar{R}^2 d\bar{p} / d\zeta, \\
 & \bar{u}_{m1} \left[ B_{m1} + i_0 (1 - B_{m1}) \right] \frac{d\bar{u}_{m1}}{d\zeta} = 2\bar{u}_{m1}^2 (1 - \bar{u}_{m1})^2 \left[ B_{m1} \left( \frac{d^2 \bar{u}_{1c}}{d\eta^2} \right)_0 + i_0 \kappa_{21} \left( \frac{d^2 \bar{u}_{2c}}{d\eta^2} \right)_0 (1 - B_{m1}) \right] - \frac{1}{2} \frac{d\bar{p}}{d\zeta}.
 \end{aligned}$$

Граничними умовами є:

$$\zeta = 0, \quad B_{mI} = 1, \quad B_{wI} = B_{wIi}, \quad \bar{u}_{w1} = \bar{u}_{w1i}, \quad \bar{u}_{m1} = \bar{u}_{c1i}, \quad \bar{p} = \bar{p}_i. \quad (46)$$

де  $\bar{B}_{li} = \bar{B}_{li}(x_i)$ ,  $\bar{B}_{w1i} = \bar{B}_{w1i}(x_i)$ ,  $\bar{p}_i = \bar{p}(x_i)$ ,  $\zeta = \kappa_1 (x - x_i) / r_0$ ,  $\bar{u}_{m1} = u_{m1} / u_{01}$ ,  $\bar{u}_{c1i} = \sqrt{1 - \bar{p}_i}$ . Отримані рівняння (43)-(46) являють собою математичну модель двофазного турбулентного струменя рідин, що не змішуються, в обмеженому каналі.

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

У припущенні ковзання по стінці каналу профілі основних параметрів у формі (40) приймаються з наступними позначеннями:

$$u_{mi} = \bar{u}_{mi} u_{mic}, \quad u_{wi} = \bar{u}_{wi} u_{wic}, \quad B_{m1} = B_{m1c} \bar{B}_{m1}, \quad B_{w1} = B_{m1c} \bar{B}_{w1}, \quad B_{1c} = B_{m1c} \bar{B}_{1c},$$

$p_0$ - тиск у вільному струмені. Припускаючи, що, як і для вільного струменя:

$$u_{m2} = u_{m1} S_0, \quad u_{w2} = u_{w1} S_0,$$

можемо написати наступний безрозмірний масив рівнянь для турбулентного двофазного струменя, обмеженого в своїй основній частині:

$$\begin{aligned} & \bar{B}_{m1} \left[ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{1c} \eta d\eta + \bar{u}_{w1} \int_0^1 \bar{B}_{1c} \eta d\eta \right] + \bar{B}_{w1} \left[ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \left( \int_0^1 \bar{u}_{1c} \eta d\eta - \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{1c} \eta d\eta \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{2} - \int_0^1 \bar{B}_{1c} \eta d\eta \right) \bar{u}_{w1} \right] = \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{1c} \eta d\eta \cdot \bar{B}_{m1} \left[ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{2c} \eta d\eta + \bar{u}_{w1} \int_0^1 \bar{B}_{1c} \eta d\eta \right] + \\ & + \bar{B}_{w1} \left[ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \left( \int_0^1 \bar{u}_{2c} \eta d\eta - \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{2c} \eta d\eta \right) + \left( 0.5 - \int_0^1 \bar{B}_{1c} \eta d\eta \right) \bar{u}_{w1} \right] = \\ & = \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{2c} \eta d\eta + 1 / B_{m1c} \left[ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1} - 1) \int_0^1 \bar{u}_{2c} \eta d\eta + 0.5 \bar{u}_{w1} \right], \quad (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{p} = 4B_{m1c} & \left\{ \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{1c}^2 \eta d\eta + i_0 \int_0^1 \left( \frac{1}{B_{m1c}} - \bar{B}_{1c} \right) \bar{u}_{2c} \eta d\eta + (B_{m1} - B_{w1}) \left[ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1})^2 \int_0^1 \bar{B}_{1c} (i_0 \bar{u}_{2c}^2 - \bar{u}_{1c}^2) \eta d\eta + \right. \right. \\ & + 2\bar{u}_{w1} (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \int_0^1 \bar{B}_{1c} (i_0 \bar{u}_{2c}^2 - \bar{u}_{1c}^2) \eta d\eta + (i_0 - 1) \bar{u}_{w1}^2 \int_0^1 \bar{B}_{1c} \eta d\eta \left. \right] + \bar{B}_{w1} \left[ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1})^2 \left( \int_0^1 \bar{u}_{2c} \eta d\eta - \int_0^1 \bar{u}_{1c}^2 \eta d\eta \right) + \right. \\ & \left. + 2\bar{u}_{w1} (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \left( i_0 \int_0^1 \bar{u}_{2c} \eta d\eta - \int_0^1 \bar{u}_{1c} \eta d\eta \right) + 0.5 (i_0 - 1) \bar{u}_{w1}^2 \right] + \\ & \left. - i_0 / B_{m1c} \left[ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1})^2 \int_0^1 \bar{u}_{2c}^2 \eta d\eta + 2\bar{u}_{w1} (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \int_0^1 \bar{u}_{2c} \eta d\eta + 0.5 \bar{u}_{w1}^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\bar{x}} \int_0^{\eta^*} \left[ (\bar{B}_{m1} - \bar{B}_{w1}) \bar{B}_{1c} + \bar{B}_{w1} \right] \left[ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c} + \bar{u}_{w1} \right]^2 \eta d\eta + i_0 \int_0^{\eta^*} \left[ \frac{1}{B_{m1c}} - (\bar{B}_{m1} - \bar{B}_{w1}) \bar{B}_{1c} - \bar{B}_{w1} \right] \left[ \bar{u}_{w1} + \right.$$

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\begin{aligned}
 & + (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c} ]^2 \eta d\eta \} - [ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c}^* + \bar{u}_{w1} ] \frac{d}{d\bar{x}} \int_0^{\eta^*} [ (\bar{B}_{m1} - \bar{B}_{w1}) \bar{B}_{1c} + \bar{B}_{w1} ] [ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{1c} + \bar{u}_{w1} ] \eta d\eta + \\
 & - i_0 [ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c}^* + \bar{u}_{w1} ] \frac{d}{d\bar{x}} \int_0^{\eta^*} \left[ \frac{1}{B_{m1c}} + (\bar{B}_{w1} - \bar{B}_{m1}) \bar{B}_{1c} + \bar{B}_{w1} \right] [ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{2c} + \bar{u}_{w1} ] \eta d\eta = \\
 & = \kappa_1 \eta^* (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1})^2 \left\{ [ (\bar{B}_{m1} - \bar{B}_{w1}) \bar{B}_{1c}^* + \bar{B}_{w1} ] \left[ \left( \frac{d\bar{u}_{1c}}{d\eta} \right)^* - i_0 \kappa_{21} \left( \frac{d\bar{u}_{2c}}{d\eta} \right)^* \right] + i_0 \kappa_{21} \left( \frac{d\bar{u}_{2c}}{d\eta} \right)^* \right\} - \frac{(\eta^*)^2}{4B_{m1c}} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \\
 & , \\
 & [ \bar{B}_{m1} + i_0 (1 - \bar{B}_{m1}) ] \bar{u}_{m1} \frac{d\bar{u}_{m1}}{d\bar{x}} = - \frac{1}{2B_{m1c}} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} + 2\kappa_1 (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1})^2 \left[ \bar{B}_{m1} \left( \frac{d^2 \bar{u}_{1c}}{d\eta^2} \right)_0 + i_0 \kappa_{21} (1 - \bar{B}_{m1}) \left( \frac{d^2 \bar{u}_{2c}}{d\eta^2} \right)_0 \right].
 \end{aligned}$$

Граничними умовами є:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{u}_{w1} = 0, \quad \bar{B}_{w1} = 0, \quad \bar{u}_{m1} = 1, \quad \bar{B}_{m1} = 1. \quad (48)$$

## Розділ 8. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБМЕЖЕНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ДВОФАЗНОГО СТРУМЕНЯ

### 8.1 Результати розрахунку

Чисельний розв'язок крайової задачі (47), (48) виконано для широкої області змінних параметрів. З алгебраїчної підсистеми рівнянь (47) параметри  $\bar{B}_{m1}$ ,  $\bar{B}_{w1}$ ,  $\bar{p}$  виражаються як функції компонентів швидкості на осі та на стінці:  $\bar{u}_{m1}$ ,  $\bar{u}_{w1}$ . Систему диференціальних рівнянь для  $\bar{u}_{m1}(\bar{x})$ ,  $\bar{u}_{w1}(\bar{x})$ , розв'язували чисельно. Результати наступні:

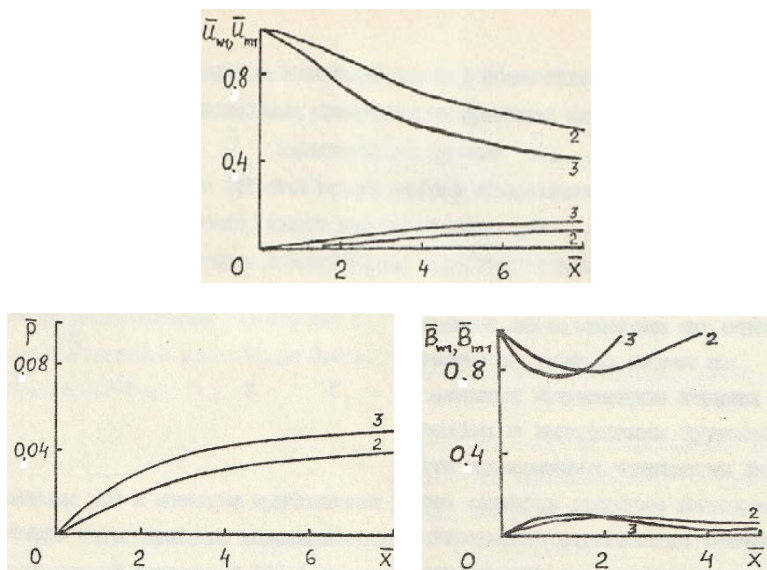


Рис. 92 Швидкість, тиск та функція-індикатор на осі та стінці:  
 $i_0=0.3, B_{m1c}=0.6, u_{m1c}=0.8, \kappa_{21}=3.6$ , two variants: 2-  $\kappa_1=0.006$ , 3-  $\kappa_1=0.008$ .

Швидкість струменя на осі каналу дещо падає (приблизно 0.4-0.6) і зростає на стінці (до 0.08-0.12). Тиск у каналі зростає на вході інтенсивно, а потім повільно, майже лінійно. Найбільш цікавою є особливість функцій-індикаторів на осі та на стінці. Як добре видно з рис. 92, турбулентне перемішування в першій фазі визначає довжину зміни функції з поздовжньою координатою, але не характер функції. Чим вище турбулентне перемішування,

тим коротший змінний процес, але характер і навіть значення однакові. Перша фаза на осі скорочується на вході в канал приблизно на 20%, але потім відновлюється до попереднього рівня (100% перша фаза на осі). Відповідно, перша фаза на стінці зростає на однаковій відстані від 0 до 10%, а потім падає нижче 5%.

Цей розрахунок був зроблений для випадку легшої другої фази. Таким чином, більш важка перша фаза на початку каналу трохи розподіляється по ньому, але потім майже повністю збирається навколо осі.

## 8.2 Аналіз результатів

Чисельне моделювання виявило особливості течії вільного струменя, відмінні від розглянутого вище. Функції  $\bar{u}_{m1}, \bar{u}_{w1}$  мають сильний вплив на  $\bar{B}_{m1}, \bar{B}_{w1}$ , особливо сильно на  $\bar{B}_{w1}$ . Це спричиняє швидке зростання похибки розрахунків, оскільки значення  $\bar{u}_{m1}, \bar{u}_{w1}$ , через невеликі похибки чисельного розв'язання, призводять до збільшення похибок  $\bar{B}_{m1}, \bar{B}_{w1}$ , які знаходяться в інтервалі від 0 до 1. Така особливість взаємозв'язку обчислених параметрів створює серйозні перешкоди при комп'ютерному моделюванні. Цікаво розглянути рівноважну течію в каналі. Наскільки зворотний вплив  $\bar{B}_{m1}, \bar{B}_{w1}$  на значення  $\bar{u}_{m1}, \bar{u}_{w1}$  невеликий, ми можемо написати:

$$\bar{x} \rightarrow \infty, \bar{B}_{m1} \rightarrow \bar{B}_{w1} \rightarrow \bar{B}_{1\infty}, \bar{u}_{m1} \rightarrow \bar{u}_{w1} \rightarrow \bar{u}_{1\infty}. \quad (49)$$

Умова (37) стосується повного рівномірного розподілу фаз та їх параметрів у поперечному перерізі камери, що може бути недосяжним. Але ми можемо вивчити це питання. Ці умови задовольняють наступні кусково-лінійні наближення (50):

$$\bar{B}_{m1} = 1 + (\bar{B}_{1\infty} - 1) \sum_{k=1}^{m_1} b_{1k} \bar{x}^k \left( 1 + \sum_{l=1}^{m_1} b_{2l} \bar{x}^l \right)^{-1}, \quad \bar{B}_{w1} = \bar{B}_{1\infty} \sum_{j=1}^{m_2} t_{1j} \bar{x}^j \left( 1 + \sum_{l=1}^{m_2} t_{2l} \bar{x}^l \right)^{-1},$$

де  $b_{1k}, b_{2l}, t_{1j}, t_{2i}$  - константи, обчислені з рівнянь (47). Загалом їх кількість становить  $2(m_1 + m_2)$ . Оскільки наведена вище задача знаходження коефіцієнтів є громіздкою вже в першому підході, було запропоновано врахувати слабкий вплив  $\bar{B}_{m1}, \bar{B}_{w1}$  на  $\bar{u}_{m1}, \bar{u}_{w1}$ , прийняти для функцій  $\bar{B}_{m1}, \bar{B}_{w1}$  наступні прості наближення:

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\bar{B}_{m1} = 1 + (\bar{B}_{1\infty} - 1) \frac{b_1 \tilde{x}}{1 + b_2 \tilde{x}}, \quad \bar{B}_{w1} = \bar{B}_{1\infty} \frac{t_1 \tilde{x}}{1 + t_2 \tilde{x}}. \quad (51)$$

Ми оголосили наступні умови:

$$\tilde{x}=1, \quad \bar{B}_{m1} = \bar{B}_{w1} = \bar{B}_{1\infty}; \quad \tilde{x}=0.5, \quad \bar{B}_{m1} = 1.01\bar{B}_{1\infty}, \quad \bar{B}_{w1} = 0.99\bar{B}_{1\infty}, \quad (52)$$

де  $\tilde{x} = \chi \bar{x}$ ,  $\chi = \chi(i_0, x_c, \bar{x})$ - деяка емпірична функція, напр.  $\chi = \chi(i_0, x_c) = \text{const}$ , зокрема. Потім були представлені наступні позначення (53):

$$\begin{aligned} \text{AI5} &= \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{1c} \eta d\eta, \quad \text{AI8} = \int_0^1 \bar{u}_{1c} \eta d\eta, \quad \text{AI11} = \int_0^1 \bar{u}_{1c}^2 \eta d\eta, \quad \text{AI14} = \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{1c}^2 \eta d\eta, \quad \text{AI15} = \\ &= \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{2c}^2 \eta d\eta, \quad \text{AI16} = \int_0^1 \bar{B}_{1c} \bar{u}_{2c} \eta d\eta, \quad \text{AEP} = \int_0^1 \bar{u}_{2c}^2 \eta d\eta, \quad \text{BT} = \int_0^1 \bar{u}_{2c} \eta d\eta, \quad \text{PL} = \int_0^1 \bar{B}_{1c} \eta d\eta. \end{aligned}$$

Тепер з перших 3 рівнянь (47) наступні вирази дають для введених параметрів:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{1\infty} &= 2[\text{BT} + B_{m1c}(\text{AI5} - \text{AI16})], \quad \bar{B}_{1\infty} = 2\text{AI5} / \bar{u}_{1\infty}, \quad \bar{u}_{m1} = (1 - F_2 \bar{u}_{w1}), \\ \bar{u}_{w1} &= (F_1 F_5 - F_3) / (F_1 F_4 - F_2 F_3), \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \bar{p} &= 4B_{m1c} \left\{ \text{AI14} + i_0 (\text{AEP} / B_{m1c} - \text{AI15}) + (\bar{B}_{m1} - \bar{B}_{w1}) \left[ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1})^2 (i_0 \text{AI15} - \text{AI14}) + \right. \right. \\ &+ 2(\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \bar{u}_{w1} (i_0 \text{AI16} - \text{AI15}) + (i_0 - 1) \text{PL} \bar{u}_{w1}^2 \left. \right] + \bar{B}_{w1} \left[ (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1})^2 (i_0 \text{AEP} - \text{AI11}) + \right. \\ &+ 2\bar{u}_{w1} (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) (i_0 \text{BT} - \text{AI8}) + 0.5 (i_0 - 1) \bar{u}_{w1}^2 \left. \right] - \frac{i_0}{B_{m1c}} \left[ \frac{\bar{u}_{w1}^2}{2} + (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1})^2 \text{AEP} + 2\bar{u}_{w1} (\bar{u}_{m1} - \bar{u}_{w1}) \text{BT} \right] \left. \right\}, \end{aligned}$$

де  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} F_5 &= \text{AI16} - \text{BT} / B_{m1c}, \quad F_4 = \bar{B}_{m1} (\text{PL} - \text{AI16}) + \bar{B}_{w1} (0.5 - \text{PL} - \text{BT} + \text{AI16}) + (\text{BT} - 0.5) / B_{m1c}, \\ F_1 &= \bar{B}_{m1} + \bar{B}_{w1} (\text{AI8} / \text{AI5} - 1), \quad F_2 = \bar{B}_{m1} (\text{PL} / \text{AI5} - 1) + \bar{B}_{w1} \left[ 1 + (0.5 - \text{PL} - \text{AI8}) / \text{AI5} \right], \\ F_3 &= \bar{B}_{m1} \text{AI16} + \bar{B}_{w1} (\text{BT} - \text{AI16}) - \text{BT} B_{m1c}. \end{aligned}$$

### 8.3 Емпіричні константи в чисельному розв'язуванні

Отриманий чисельний розв'язок крайової задачі (47), (48) залежить лише від однієї емпіричної константи або функції  $\chi$ , яка є множником змінної  $\tilde{x} = \chi \bar{x}$  і не залежить від констант турбулентного перемішування у фазах  $\kappa_i$ . Тому не вимагає введення будь-яких гіпотез щодо турбулентного напруження.

Кореляція  $\chi$  з емпіричними константами турбулентного перемішування  $\kappa_i$  легко обчислюється з рішення двох останніх рівнянь (47). Параметри повністю стабілізованого потоку обмеженого двофазного турбулентного струменя двох рідин, що не змішуються (наприклад,  $\bar{B}_{1\infty}$  та інших), розраховані за першими трьома рівняннями (47), і константи  $t_i$ ,  $b_i$ , визначені підстановкою (51) у (52), наведені в таблиці 6. Три випадки  $i_0=0.3$ ,  $B_{m1c}=0.6$ ,  $u_{m1c}=0.8$ , були проаналізовані як раніше.

Таблиця 6. Параметри стабілізованого обмеженого струменя

$i_0$	0,3			1,0			8,0		
$B_{m1c}$	1,0	0,8	0,6	1,0	0,8	0,6	1,0	0,8	0,6
$u_{m1c}$	1,0	0,92	0,8	1,0	0,84	0,66	1,0	0,53	0,29
$R$	3,48	4,11	5,0	2,75	3,35	4,38	2,09	3,18	5,0
$\bar{u}_{1\infty}$	0,21			0,22			0,27 0,25 0,24		
$\bar{B}_{1\infty}$	0,39	0,39	0,4	0,58	0,60	0,61	0,87	0,91	1,0
$\bar{p}_{\infty}$	0,11	0,12	0,14	0,16	0,16	0,15	0,19	0,34	0,51
$b_1$	156	153	150	70	60	62	14	8,5	0
$b_2$	155	152	149	69	59	61	13	7,5	0
$t_1$	99			99			99		
$t_2$	98			98			98		

Безрозмірна швидкість повністю стабілізованого потоку незалежно від  $i_0$  та інших параметрів близька до 0.2, а функція-індикатор фази суттєво залежить від  $i_0$ . Безрозмірний тиск мало залежить від коефіцієнта щільності, який стрибкоподібно зростає лише при великому коефіцієнті щільності і малій швидкості втягування струменя в канал. Останній випадок може свідчити про можливість заклинювання струменя в каналі.

Отриманий наближений розв'язок для розтікання струменя в каналі представлено на рис. 93, де проти осі каналу відображені швидкості течії та тиск. Чітко видно, що найбільш інтенсивне перемішування відбувається при  $\bar{x} \leq 0.1$ , потім воно відбувається повільно, особливо щодо тиску. Максимум відновлюваного тиску при високому коефіцієнті щільності дозволяє визначити в моделі, на першому підході, раціональну довжину стабілізуючого каналу.

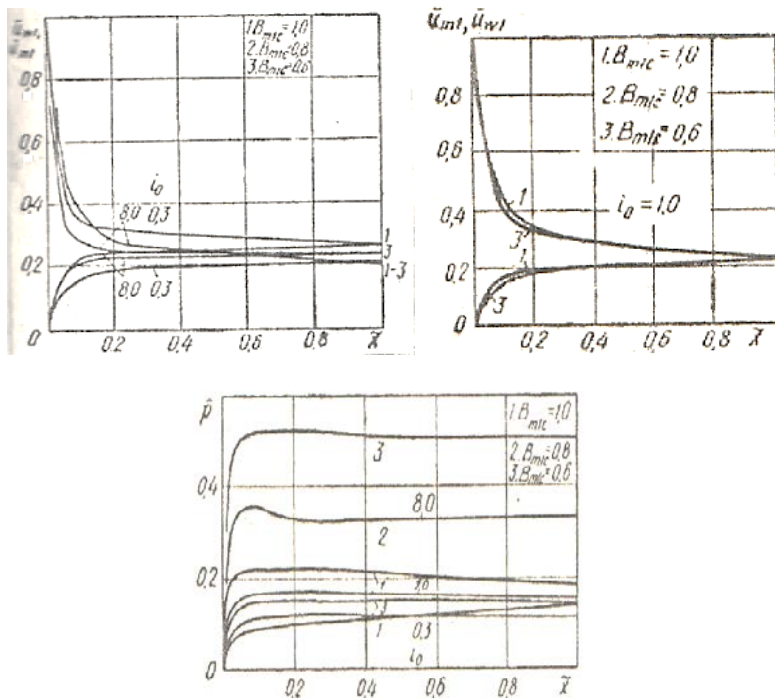


Рис. 93 Швидкість і тиск струминного потоку в камері проти осі

#### 8.4 Порівняння комп'ютерного моделювання з експериментальними даними

Доведення отриманих результатів чисельного розв'язання крайової задачі (47), (48) та її наближеного розв'язку виконано шляхом порівняння з відомими експериментальними даними. За двофазними потоками такі дані відсутні; тому на рис. 94 наведено порівняння експериментів з турбулентного перемішування в струминних апаратах, що працюють на однорідних потоках нестисливої рідини. Для  $\chi = 0.005$  отримані результати відповідають експериментальним даним [19]. Його можна покращити, вибравши функцію  $\chi(\bar{x})$  для найкращої кореляції в кожному конкретному випадку.

Метод застосовано для моделювання складних двофазних потоків охолодження коріуму під час важких аварій на АЕС [13, 20] та розрахунку параметрів нових струминних машин для виплавки сталі [21].

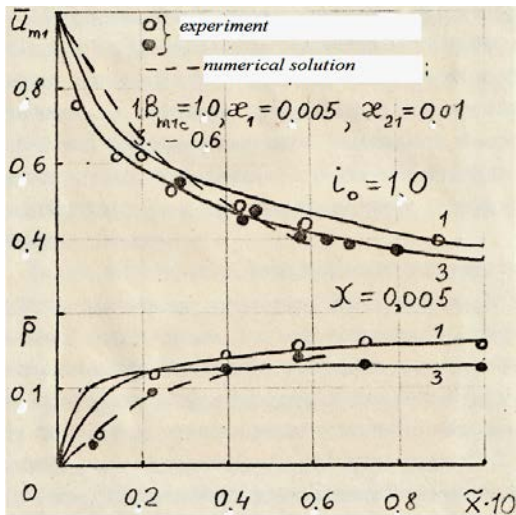


Рис. 94 Порівняння отриманих розв'язків з експериментальними даними

Двофазний турбулентний потік розплаву з паром для охолодження розплаву коріуму під час тяжких аварій на атомних електростанціях (АЕС) [13], як показано на рис. 95. Для  $i_0 > 3$  величина  $h$  знаходиться в діапазоні від 0 до -6, тому перше наближення (5) використовувалося для  $B_1$  у всьому діапазоні параметрів задачі. Випробувальна секція була виготовлена з двох циліндричних половинок (внутрішній діаметр 200 мм, висота 500 мм). Розплав генерували в індукційній печі. Охолоджуючу воду впорскували через форсунки. Сопла виступали приблизно на 10 мм над базовою плитою і були покриті жертвним шаром. Основними завданнями експериментів були: отримати умови, за яких спостерігається рівномірна пористість затверділого розплаву; визначити вплив властивостей матеріалу на формування пористості в ванні розплаву; отримати експериментальні дані для подальшого моделювання та оцінки прототипного сценарію тяжкої аварії на АЕС.

Експерименти НТ-ІХ і НТ-Х використовували суміш евтектичних оксидів 75% CaO-25% WO<sub>3</sub> як імітатор розплаву (температура плавлення: 1150 °С, щільність: 6000 кг/м<sup>3</sup>) воду як охолоджувач. Експерименти НТ-ХІ та НТ-ХІІ використовували суміш неевтектичних оксидів 80% MnO<sub>2</sub>-20% TiO<sub>2</sub> (температура плавлення: 1300 °С, щільність: 4500 кг/м<sup>3</sup>). В експериментах CaO-WO<sub>3</sub>: форсунки були герметизовані Pb-Vi чашками; затвердіння розплаву і загартування уламків відбувалися швидко і рівномірно; пористість була рівномірно розподілена в

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

діапазоні 33-38 %. В експериментах  $MnO+TiO_2$ : сопла закривали олов'яними чашками; затвердіння розплаву та гасіння уламків відбувалися відносно швидко у всіх уламках, також коли гаряча вода була введена як охолоджувач; пористість була рівномірно розподілена в діапазоні 47-50 %.

За методикою моделювання двофазної струминної течії було проведено розрахунок параметрів для описаного експериментального випадку наступним чином.



Рис. 95 Струміннь легкого охолоджувача проникає до шару розплаву знизу

Константи для інтегралів у наших інтегральних кореляціях були такими

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ a_{31} & a_{32} & b_{31} & b_{32} \\ a_{41} & a_{42} & b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5464 & 0.0208 & 0.0179 & -0.0101 \\ 0.1667 & 0.0101 & 0.0095 & -0.0042 \\ 0.4604 & 0.0139 & 0.0054 & -0.0048 \\ 0.1198 & 0.0059 & 0.0023 & -0.0016 \end{pmatrix}$$

З урахуванням  $i_0 \gg 3$ , функція  $h$  була обчислена з (11) для початкової частини струменя:

$$h_0 = h(0) = \frac{0.0054i_0 - 0.0860}{0.0069 + 0.0048i_0}, \quad h_i = h(\zeta_i) = \frac{0.0023i_0 - 0.0469}{0.0016i_0 + 0.0042}. \quad (55)$$

Оскільки максимальне значення  $h$  дорівнює 0 ( $B_1$  не може перевищувати 1), це дає:  $h_0=0$ , тоді  $\max i_0=16$  приблизно. За цим значенням  $i_0$  ковзання фаз оцінюється як

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$s_0 = 4\sqrt{\rho_{12}}$ , так що якщо  $\rho_{21} = 400$ , то  $u_{02} = 2u_{01}$  для початкової частини струменя. Подібним чином  $h_l = 0$ ,  $\max i_0 = 20.4$  і  $s_0 = 4.52\sqrt{\rho_{12}}$  для кінця початкової частини струменя, так що різниця  $s_0$  на початковій частині струменя становить загалом приблизно 13%.

Об'ємний коефіцієнт ежекції та швидкість розширення для кінця початкової частини струменя наступні:  $q_l = 0.013$ ,  $\delta_l = 1.73$ . Як було показано, ежекція мала, а розширення менше 2. Для початку основної частини струменя з (15) виходить:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1286 & 0.0071 & -0.0905 & -0.0040 \\ 0.0792 & 0.0033 & -0.0501 & -0.0016 \end{pmatrix}$$

$\beta_{10} = 0.1$ ,  $\beta_{20} = 0.052$ , і далі

$$h_i = \frac{0.0023i - 0.0494}{0.0016i + 0.0038}, \quad \delta_i = \frac{1}{\sqrt{2(0.0071h_i + 0.1286)}}, \quad (56)$$

Максимальний  $h_i = 0$ , тому  $\max s = 4.64\sqrt{\rho_{12}}$ ,  $\max i = 21.48$ , або за наведеними вище параметрами  $\max s = 0.232$ ,  $\delta_i = 1.97$ . А з (14), (16) виходить наступна крайова задача для основної частини (57):

$$B_{m1} = \frac{1.13\bar{u}_{m1}}{0.13 + \bar{u}_{m1}}, \quad \delta = \frac{1.97}{\bar{u}_{m1}} \sqrt{\frac{0.13 + \bar{u}_{m1}}{1.13}}, \quad \frac{d\bar{u}_{m1}}{d\zeta} = -\frac{6.46\bar{u}_{m1}^2}{\sqrt{0.13 + \bar{u}_{m1}}} \frac{\bar{u}_{m1} + 5\kappa_{21}(1 - \bar{u}_{m1})}{2.5 - 1.5\bar{u}_{m1}}.$$

Ця крайова задача була розв'язана чисельно для  $\kappa_{21} \in [0.1, 1.0]$ .

Проведено моделювання процесу охолодження ванни розплаву летким теплоносієм. Інтегральне занесення розплаву в змішувальний шар теплоносія

$$Q = 1/H \int_0^H q(x) dx, \quad \text{і} \quad Q = 1/H \sum_{i=1}^N q(x_i)(x_i - x_{i-1}),$$

де  $H$  – висота басейну,  $q(x_i)$  – коефіцієнт викиду,  $x_i$  – поточна точка в розрізі обчисленого інтервалу на  $x$ . Час для пари через басейн є

$$\Delta t = H/u, \quad u = 1/H \sum_{i=1}^N u_{mi}(x_i - x_{i-1})$$

$u$  – середня швидкість пари в шарі змішування.

Якщо кожна порція теплоносія випаровується поблизу сопла, можна отримати відведення тепла від розплаву теплоносієм згідно з наступним рівнянням теплового балансу:

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$c_2 M_2 (T_{20} - T_2) = q_c \Delta t h_{lv}, \quad (58)$$

де  $q_c$  – витрата теплоносія,  $h_{lv}$  – теплота пароутворення,  $T_{20}$ ,  $T_2$  – відповідно початкова та поточна температури розплаву,  $M_2$  – маса розплаву в ванні, що охолоджується летким теплоносієм, що подається через отвори. З (58) виходить наступна приведена температура розплаву:

$$T_2 = T_{20} - q_c \Delta t h_{lv} / (c_2 M_2). \quad (59)$$

Тоді тепловий баланс для одного циклу порції пари, що йде від сопла до верхньої частини басейну, виражається як

$$c_2 \rho_2 Q V (T_2 - T) = c_1 \rho_1 (1 - Q) V (T - T_1),$$

де  $V$  - загальний об'єм зони змішування, а  $T$  - рівноважна температура після теплообміну. З останнього співвідношення виходить

$$T = \frac{c_2 \rho_2 Q T_2 + c_1 \rho_1 (1 - Q) T_1}{c_2 \rho_2 Q + c_1 \rho_1 (1 - Q)}. \quad (60)$$

Припустивши, що пара йде з басейну до вільної поверхні, а краплі падають у басейн, ми можемо продовжити з урахуванням також охолодження розплаву такими краплями:  $m_i T + (M_2 - m_i) T_2 = M_2 T_2$ , де  $m_i$  - маса крапель у струмені, яка виглядає наступним чином:

$$m_i = 0.25 \pi Q \rho_2 (\bar{\delta} + 1)^2 H r_0^2. \quad (61)$$

Потім з (60) можна отримати корельовану температуру розплаву внаслідок одного кола проходження струменя через ванну розплаву. Йдучи таким чином, крок за кроком, ми розраховували температуру розплаву з часом. Таким чином, було розраховано:  $n=0.27$ ,  $\kappa_{21}=0.6$ ;  $n=1.0$ ,  $\kappa_{21}=0.4$ ;  $n=7.3$ ,  $\kappa_{21}=0.2$ . Наступне наближення задовольняє дані

$$\kappa_{21} = 0.4 - 0.1326 \ln n + 0.0163 (\ln n)^2, \quad (62)$$

де мінімальне значення  $\kappa_{21}$  становить 0.13. Для великих значень  $n$  було зазначено  $\kappa_{21}=0.1$ .

Наведену модель було використано для розрахунку характеристик охолодження ванни розплаву струменями леткого охолоджувача, що подається знизу [13]: рис. 96-100.

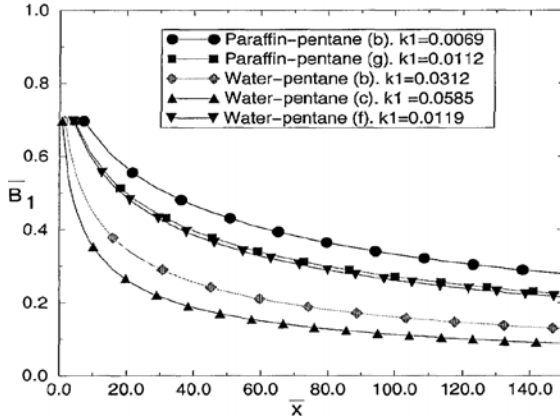


Рис. 96 Функція-індикатор  $B_1$  для різних випадків

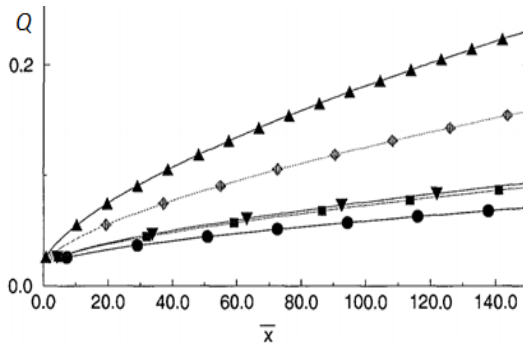


Fig. 97 Tendency for  $Q$  for different flow cases

Струмені охолоджувача через високу температуру розплаву в басейні випаровуються поблизу виходу з сопла, так що далі струмені пари змішуються з розплавом в басейні, охолоджуючи його. Теплові параметри, що визначають процес кипіння, були вивчені в [20]. Спочатку з експериментів отримували усереднені значення  $k_1$  (табл. 7), потім розраховували характерні параметри. Як видно з результатів на рис. 96-100, метод хороший для таких складних двофазних струменів, що дозволяє обчислювати важливі характеристики.

Таблиця 7. Експериментальні дані:  $r_0=0.3$  мм,  $\mu_1=2 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^2$ ,  $\rho_1=2.1 \text{ kg} / \text{m}^3$

Cases	$\kappa_1$		$u_{0,i}$ (m/sec)		$\rho_{2,1}$		$\mu_{2,1}$ (20°C)	
	water	paraf.	water	paraf.	water	paraf.	water	paraf.
(a)	0.008	0.016	0.23	0.29	476	419	4.16	271
(b)	0.031	0.007	0.29	0.59	476	419	4.16	271
(c)	0.058	0.014	0.59	0.17	476	419	4.16	271
(d)	0.014	0.009	0.29	0.29	476	419	4.16	271
(e)	0.008	0.014	0.59	0.47	476	419	4.16	271
(f)	0.012	0.011	0.29	0.59	476	419	4.16	271
(g)	0.012	0.011	0.59	0.77	476	419	4.16	271
(h)	-	0.012	-	1.01	-	419	-	271

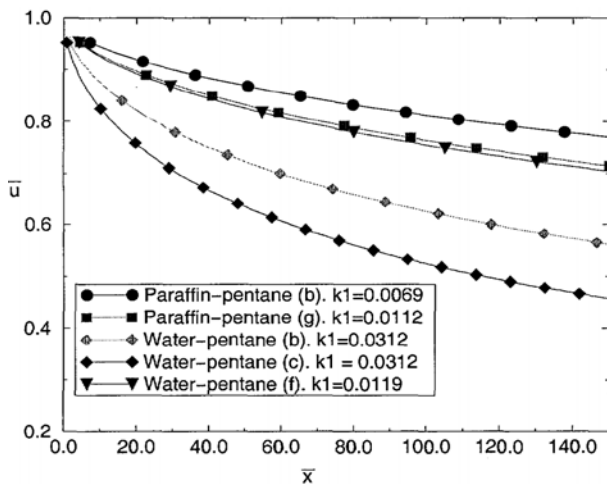


Рис. 98 Швидкість течії для різних випадків

Проведене дослідження процесів перемішування в турбулентному неоднорідному струмені рідин, що не змішуються, в струминних апаратах дозволяє визначити основні параметри апаратів, включаючи розподіл параметрів по осі апаратів, а також поперек шару змішування. Це важливо для оптимальної організації робочого процесу. Результати можуть бути корисними в кількох хімічних технологіях та інших галузях техніки, де застосовуються реактивні гідравлічні машини. Математична модель, розроблена для вільних і обмежених струменів двофазних потоків, і наближені кореляції, запропоновані в результаті аналізу, доступні для впровадження в дослідження та інженерні розрахунки іншими вченими та інженерами.

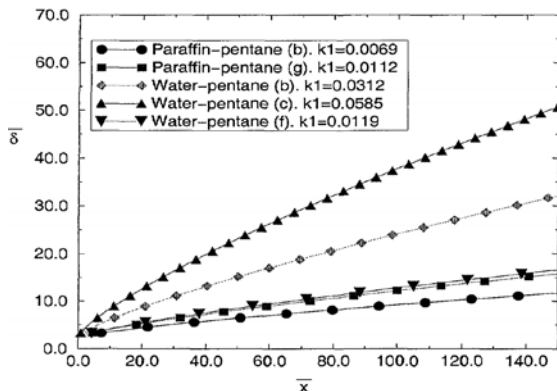


Рис. 99 Ширина зони змішування для проточних випадків

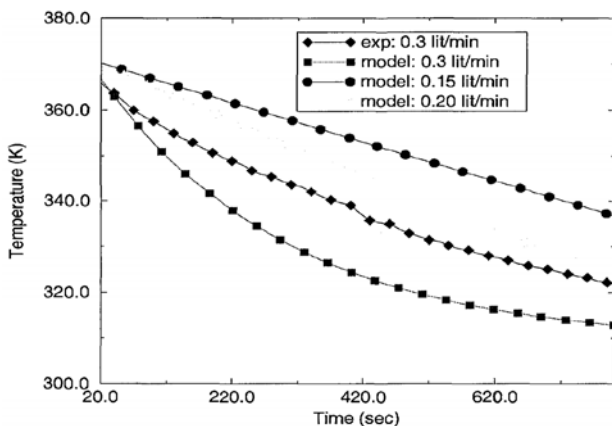


Рис. 100 Профіль температури для моделі та експерименту

Проблема турбулентного перемішування в струминних машинах, що працюють на рідинах, що не змішуються між собою, досить складна і мало досліджена. Тому ця спроба може бути цікавою як в теоретичному, так і в практичному аспектах, оскільки виявила основні особливості багатофазної течії. Пізніше ми продовжимо глибше розуміти процеси, деякі закономірності яких ми встановили тут на основі розроблених математичних моделей і виконаного чисельного комп'ютерного моделювання. Очікується, що отримані дані покращать продуктивність і якість струменевих машин у різних промислових і технічних застосуваннях. Новим у нашій методології є розподіл фаз у потоках змішування, які дуже важливі для глибокого розуміння та оптимізації процесів змішування.

## Розділ 9. ДВОФАЗНИЙ СТРУМЕНЕНИЙ ПРОНИКНИЙ БАСЕЙН ТА МІНІ-МІКРО КАНАЛЬНІ ПОТОКИ

Було розглянуто кілька моделей двофазних потоків для теплопередачі турбулентного кріогенного двофазного потоку рідкого метану в мікро/міні каналах охолодження. Поточний стан проблеми не дає основи для певного моделювання, тому необхідно розглянути гіпотетичний сценарій для подальшого підтвердження експериментальними даними.

### 9.1 Турбулентний двофазний потік у міні-каналі

Деякі складні фізичні властивості представлені нижче. Сильна залежність їх від температури і тиску, а також високошвидкісні процеси можуть викликати драматичні проблеми, не схожі на добре відомі процеси теплообміну. Вихідними даними для моделювання можна вважати:

Переріз каналу 2...4 мм x 2...4 мм або аналогічний (мініканал)

Товщина стінки 0.5...1.0 мм

Теплове навантаження на стіну до «полум'я» 1...7 МВт/м<sup>2</sup>

Теплове навантаження на інші стіни: адіабатичне

Тиск на вході в канал: 40...160 бар

Температура на вході в канал 270...675 °K

Температура на виході з каналу <800 °K (нижче samozаймання зрідженого природного газу в ударній трубі та машині швидкого стиснення)

Масова витрата 7...34 г/с

#### *Основні рівняння двофазної течії в прямокутному каналі*

Рівняння Нав'є-Стокса для турбулентного двовимірною стаціонарного двофазного потоку та теплопередачі записані в підході примежового шару, оскільки канал вузький (розміри його поперечного перерізу набагато менші за довжину):

$$u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0, \quad u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_1} \frac{dp}{dx} + v_1 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \quad u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = - \frac{1}{\rho_2} \frac{dp}{dx} + v_2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right),$$

$$\rho_1 c_1 \left( u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) + q_1, \quad (63)$$

$$\rho_2 c_2 \left( u_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right).$$

Тут  $q_1=Q/\delta$ ,  $Q$  – відомий тепловий потік до стінки ( $1\dots7$  МВт/м<sup>2</sup>), індекс 1 відноситься до парової фази, а 2 – для рідкої фази, декартові 2D координати,  $x$  – вздовж осі каналу та  $y$  – перпендикулярно до осі. Турбулентна модель приймається як «нова формула Прандтля» з кінематичним коефіцієнтом турбулентного змішування  $\nu$  (або відповідними значеннями для ламінарного потоку, якщо такі є).  $\rho$ ,  $c$ ,  $k$  – щільність, теплоємність і теплопровідність відповідного середовища (все може суттєво залежати від температури і тиску),  $u$ ,  $v$  – складові швидкості потоку по  $x$  і  $y$  відповідно.

Тиск  $p$  вважається однаковим для обох фаз і майже постійним по всьому каналу через його малий перетин. Для пари ми враховуємо стисливість, але цим членом  $v_1\partial\rho_1/\partial y$  ми нехтуємо як малим у порівнянні з подібним членом уздовж осі. На вході ми припускаємо, що весь метан є рідким із постійною температурою та тиском у каналі. Більш того, згодом він випаровується з того боку, куди йде тепловий потік

Насправді шар змішування поперек секції каналу також міститиме деяку взаємодію рідини та пари з випадковими окремими краплями рідкого метану, які контактують з гарячою стороною стінки, так що процес випаровування буде більш інтенсивним. Але ми вважаємо, що це не принципово, тому що здебільшого гаряча поверхня вкрита паровою плівкою, що кипить, і через значне переважання сил інерції рідкий метан буде прагнути до центральної частини каналу, де сили опору нижчі. Таким чином, ця модель дещо переоцінює частину повного випаровування потоку. Далі ми можемо виконати більш загальну модель, щоб довести це.

У цій першій спрощеній фізико-математичній моделі ми не розглядаємо двофазне змішування, припускаючи, що випаровування йде з боку каналу, куди надходить тепловий потік. Таким чином, шар пари з одного боку каналу зростає з відстанню. Інтерфейс фазового переходу розглядається як  $y = \delta(x)$ , де температура  $T^*$  відповідає температурі випаровування. В останніх двох рівняннях системи (63) ми також нехтуємо конвективними членами поперек каналу через його малий розмір.

#### *Boundary conditions*

Ми розглядаємо наступні граничні умови для масиву рівнянь (1):

$$y=0, u_1=0, k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = q_1; \tag{64}$$

$$y=\delta, u_1=u_2= u_\delta, v_1= v_2= v_\delta, \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \mu_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = \mu_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right),$$

$$\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} + \rho_2 \lambda_{21} \frac{d\delta}{dt}; \quad (65)$$

$$y=a, \quad u_2=0, \quad T_2 = T_{2w}; \quad (66)$$

Тут відомий тепловий потік зазначений на одній стороні каналу, швидкості рідкої та парової фаз рівні на поверхні фазового переходу, а профілі швидкостей є плавними на поверхні фазового переходу, де тангенціальна та нормальна сили також рівні;  $\lambda_{21}$  – теплота випаровування на поверхні фазового переходу,  $\mu$  – коефіцієнт динамічної в'язкості.

*Рівняння для границі фазового переходу*

Похідна за часом від поверхні фазового переходу  $v_\delta = \frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\delta}{dx} u_\delta$ ,  $T_{2w}$  – температура стінки, протилежної до нагрітої, яку можна приблизно обчислити як  $T_{2w} = T_* + q_1(a/k_w - \delta/k_1)$ , де  $y=a$  – протилежна стінка, оскільки,  $T_{2w} = T_{w0} + q_1 a/k_w$  ( $T_w = T_{w0} + q_1 y/k_w$ ) – для теплопровідності в металевій стінці.

Оскільки для нас найбільш важливим є питання про повну довжину випаровування, ми можемо використовувати параболічні поліноміальні наближення для профілів швидкості та лінійні наближення для профілів температури поперек тонкого шару. Для цього можна використати наведені вище граничні умови (64)-(66). Це призвело до

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{q_1}{\rho_2 \lambda_{21} u_\delta} \left[ 1 + \frac{k_2}{\delta - a} \left( \frac{a}{k_w} - \frac{\delta}{k_1} \right) \right],$$

$$u_1 = \frac{y}{\delta} \left( 2 - \frac{y}{\delta} \right) u_\delta, \quad u_2 = \frac{a-y}{(a-\delta)^2} (a + y - 2\delta) u_\delta; \quad (67)$$

$$T_1 = T_* + \frac{q_1}{k_1} (y - \delta), \quad T_2 = T_* + \frac{y - \delta}{a - \delta} \left( \frac{a}{k_w} - \frac{\delta}{k_1} \right) q_1. \quad (68)$$

Щоб використати модель, розроблену для комп'ютерного моделювання, нам потрібно розв'язати масив рівнянь (63) із граничними умовами (64)-(66) разом із диференціальним рівнянням (67) для поверхні фазового переходу, де умова  $\delta=a$  покаже відстань  $x=x_e$  повністю випарованого метану. Але ми можемо використати апроксимацію профілів (68), інтегрувати масив диференціальних рівнянь у частинних похідних (63) із граничними умовами (64)-(66), а потім розв'язати отримані звичайні диференціальні рівняння плюс

рівняння (67). Якщо ми орієнтуємося на приблизну повну відстань випаровування, останній підхід може бути кращим. А для інженерних застосувань доступно також чисельне вирішення рівняння (5) з постійним значенням середньої швидкості потоку  $u_\delta$ , апроксимація фізичних властивостей залежно від температурних профілів.

### Integral correlations

Тепер ми можемо інтегрувати масив РЧП (рівняння в частинних похідних) (63) з урахуванням граничних умов (64)-(66) та апроксимації профілів (68) за допомогою правила інтегрального диференціювання зі змінними границями:

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt = \frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t) dt - f(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta}{\partial x} + f(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha}{\partial x}. \quad (69)$$

Застосування двічі дає наступне:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} dt &= \frac{d^2}{dx^2} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t) dt - 2 \frac{\partial f(x, \beta)}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ &+ 2 \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - f(x, \beta(x)) \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + f(x, \alpha(x)) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (70)$$

Таким чином, ми отримуємо такі інтегральні кореляції для обох регіонів (фази 1 і 2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \int_0^\delta u_1 dy + \rho_1 \int_0^\delta \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dy &= m_{21}, \quad \rho_2 \left( \int_\delta^a \frac{\partial u_2}{\partial x} dy + \int_\delta^a \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = -m_{21} = m_{12}, \\ \int_0^\delta u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} dy + \int_0^\delta v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} dy &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{dp}{dx} \int_0^\delta dy + v_1 \int_0^\delta \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) dy + I_{21}, \quad (71) \\ \int_\delta^a u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} dy + \int_\delta^a v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} dy &= -\frac{1}{\rho_2} \frac{dp}{dx} \int_\delta^a dy + v_2 \int_\delta^a \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) dy - I_{21}, \\ \rho_1 c_1 \left( \int_0^\delta u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} dy + \int_0^\delta v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} dy \right) &= \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) dy + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} \left( k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) dy + q_1 \delta, \\ \rho_2 c_2 \left( \int_\delta^a u_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} dy + \int_\delta^a v_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} dy \right) &= \int_\delta^a \frac{\partial}{\partial x} \left( k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) dy + \int_\delta^a \frac{\partial}{\partial y} \left( k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right) dy. \end{aligned}$$

Фізичні властивості та тиск суттєво не змінюються у вузькому каналі; отже, вони вилучаються з інтеграла за  $y$ . Потім після деякої попередньої трансформації він переходить до

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \int_0^{\delta} u_1 dy + \rho_1 \left( \int_0^{\delta} \frac{\partial u_1}{\partial x} dy + v_{1\delta} \right) &= m_{21}, \quad \rho_2 \left( \int_{\delta}^a \frac{\partial u_2}{\partial x} dy + v_{2\delta} \right) = -m_{21}, \\ \frac{1}{2} \int_0^{\delta} \frac{\partial u_1^2}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} dy &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{dp}{dx} \delta + v_1 \int_0^{\delta} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} dy + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + I_{21}, \\ \frac{1}{2} \int_{\delta}^a \frac{\partial u_2^2}{\partial x} dy + \int_{\delta}^a v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} dy &= -\frac{1}{\rho_2} \frac{dp}{dx} (a - \delta) + v_2 \int_{\delta}^a \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} dy + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) - I_{21}, \\ \rho_1 c_1 \left( \int_0^{\delta} u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} dy \right) &= \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) dy + k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_0^{\delta} + Q, \\ \rho_2 c_2 \left( \int_{\delta}^a u_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} dy + \int_{\delta}^a v_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} dy \right) &= \int_{\delta}^a \frac{\partial}{\partial x} \left( k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) dy + k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{\delta}^a. \end{aligned} \quad (72)$$

де  $m_{21} = -m_{12}$  - потік маси від фази 2 до фази 1 внаслідок випаровування, а  $I_{21} = -I_{12}$  - відповідний потік імпульсу від фази 2 до фази 1 внаслідок випаровування. Двофазний потік відбувається в постійному обміні масою та імпульсом між фазами, починаючи від повністю рідкого потоку на вході в канал (загалом, може бути рідинно-паровим потоком) до повного потоку пари на виході з каналу. Таким чином, ці значення дорівнюють нулю на вході і на виході з каналу. З урахуванням рівнянь (68)-(70) отримуємо масив рівнянь (72).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} u_{\delta} \frac{2}{3} \delta + \rho_1 \left( \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u_1 dy - u_{\delta} \frac{d\delta}{dx} + v_{\delta} \right) &= m_{21}, \quad \rho_2 \left( \frac{d}{dx} \int_{\delta}^a u_2 dy + u_{\delta} \frac{d\delta}{dx} - v_{\delta} \right) = -m_{21}, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u_1^2 dy - u_{\delta}^2 \frac{d\delta}{dx} \right) + v_{\delta} u_{\delta} - \int_0^{\delta} u_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} dy &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{dp}{dx} \delta + \\ + v_1 \left( \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\delta} u_1 dy - 2 \frac{du_{\delta}}{dx} \frac{d\delta}{dx} - u_{\delta} \frac{d^2 \delta}{dx^2} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) &+ I_{21}, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dx} \int_{\delta}^a u_2^2 dy + u_{\delta}^2 \frac{d\delta}{dx} \right) - v_{\delta} u_{\delta} - \int_{\delta}^a u_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} dy &= -\frac{1}{\rho_2} \frac{dp}{dx} (a - \delta) + \\ + v_2 \left( \frac{d^2}{dx^2} \int_{\delta}^a u_2 dy + 2 \frac{du_{\delta}}{dx} \frac{d\delta}{dx} + u_{\delta} \frac{d^2 \delta}{dx^2} \right) + \frac{\partial v_2}{\partial y} & \Big|_{\delta}^a - I_{21}, \end{aligned} \quad (73)$$

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\rho_1 c_1 \left( \int_0^\delta u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} dy + \int_0^\delta v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} dy \right) = \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) dy + k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_0^\delta + Q,$$

$$\rho_2 c_2 \left( \int_\delta^a u_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} dy + \int_\delta^a v_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} dy \right) = \int_\delta^a \frac{\partial}{\partial x} \left( k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) dy + k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_\delta^a.$$

Подальше перетворення масиву рівнянь (11) дає наступне

$$\frac{2}{3} \frac{d}{dx} (\rho_1 u_\delta \delta) = m_{21}, \quad \frac{2}{3} \rho_2 \frac{d}{dx} [u_\delta (a - \delta)] = -m_{21}, \quad (74)$$

$$\frac{8}{15} \left[ \frac{d}{dx} (u_\delta^2 \delta) + u_\delta^2 \frac{d \rho_1}{\rho_1 dx} \right] = -\frac{\delta}{\rho_1} \frac{dp}{dx} + v_1 \left[ \frac{2}{3} \frac{d^2}{dx^2} (u_\delta \delta) - 2 \frac{du_\delta}{dx} \frac{d\delta}{dx} - u_\delta \frac{d^2 \delta}{dx^2} - \frac{u_\delta}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} - \frac{du_\delta}{dx} \right] + I_{21},$$

$$\frac{8}{15} \frac{d}{dx} [u_\delta^2 (a - \delta)] = -\frac{a - \delta}{\rho_2} \frac{dp}{dx} + v_2 \left[ \frac{2}{3} \frac{d^2}{dx^2} u_\delta (a - \delta) + 2 \frac{du_\delta}{dx} \frac{d\delta}{dx} + u_\delta \frac{d^2 \delta}{dx^2} + \frac{du_\delta}{dx} \right] - I_{21},$$

$$I_{21} = m_{21} \frac{v_\delta}{\rho_1} = \frac{2}{3 \rho_1} \frac{d}{dx} (\rho_1 u_\delta \delta) u_\delta \frac{d\delta}{dx},$$

Інтегралі такі:

$$\int_0^\delta u_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} dy = -\frac{8}{15 \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} u_\delta^2 - \frac{4}{15} \frac{d}{dx} (u_\delta^2 \delta) + \frac{u_\delta^2}{2} \frac{d\delta}{dx}, \quad \int_0^\delta u_1 dy = \frac{2}{3} u_\delta \delta,$$

$$\int_0^\delta T_1 dy = \left( T_* - \frac{q_1 \delta}{2k_1} \right) \delta, \quad \int_\delta^a u_2 dy = \frac{2}{3} u_\delta (a - \delta), \quad \int_0^\delta u_1^2 dy = \frac{8}{15} u_\delta^2 \delta, \quad \int_\delta^a u_2^2 dy = \frac{8}{15} u_\delta^2 (a - \delta),$$

$$\int_\delta^a u_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} dy = \frac{4}{15} \frac{d}{dx} [u_\delta^2 (\delta - a)] - \frac{u_\delta^2}{2} \frac{d\delta}{dx}, \quad \int_0^\delta u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} dy = -\frac{q_1 u_\delta}{3} \delta \left( \delta \frac{dk_1}{dx} + \frac{2}{3} k_1 \frac{d\delta}{dx} \right), \quad (75)$$

$$\int_0^\delta v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} dy = \frac{2}{3} T_* \left( \frac{\delta}{\rho_1} u_\delta \frac{d\rho_1}{dx} + \delta \frac{du_\delta}{dx} + u_\delta \frac{d\delta}{dx} \right) - \frac{q_1 u_\delta}{4k_1 \rho_1} \delta^2 \frac{d\rho_1}{dx} - \frac{q_1}{4k_1} \delta^2 \frac{du_\delta}{dx} + \frac{q_1 u_\delta}{6k_1} \delta \frac{d\delta}{dx},$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) dy = -\frac{q_1}{2} \frac{d}{dx} \left[ k_1 \frac{d}{dx} \left( \frac{\delta^2}{k_1} \right) \right], \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big|_0^\delta = \left( k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} + \rho_2 \lambda_{21} \frac{d\delta}{dt} \right)_\delta - q_1,$$

З першого рівняння системи (63) випливає  $\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{u_1}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}$ , що загальна

масова витрата  $\rho_1 u_\delta \delta + \rho_2 u_\delta (a - \delta) = g$ ,  $g \in$  задану масовою витратою.

*Оцінка відстані повного випаровування*

Перші оцінки тривалості повного випаровування суміші в каналі з використанням рівняння (67) за постійними фізичними параметрами. Комп'ютерна програма, підготовлена на платформі FLEX PDE, дозволила отримати наступні результати за вищевказаними параметрами (4мм,  $p_0=50$ бар,  $T_0=300^\circ\text{K}$ ), де можна спостерігати залежність загальної довжини пароутворення від рівня нагрівання. З рівняння (5) маємо

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{q_1}{\rho_2 \lambda_{21} u_\delta} \left[ 1 + \frac{k_2}{\delta - a} \left( \frac{a}{k_w} - \frac{\delta}{k_1} \right) \right], \quad x = 0, \quad \delta = 0. \quad (76)$$

Якби ми знали параметри в рівнянні (67), (76), ми могли б легко обчислити межу фазового переходу, розв'язавши задачу Коші (76) для  $\delta$ , і побачити, де пара займає загальний поперечний переріз. Проте всі фізичні параметри в рівнянні (67) залежать від температури і швидкості переміщення межі фазового переходу. Отже, за допомогою (76) ми можемо оцінити межу  $\delta$  і як таку довжину загального випаровування в потоці в каналі лише приблизно, використовуючи деякі наближені значення для швидкості потоку  $u_\delta$  та фізичних параметрів. Останні ми можемо апроксимувати відстанню, враховуючи діапазон зміни температури. Деякі результати такого комп'ютерного моделювання представлені нижче для  $q_1=1\dots7$  МВт/м<sup>2</sup>, спочатку для каналу 4x4 мм, а потім для 4x2 мм. Значення на рисунках наведено в м, так що дельта  $40e-4=4$  мм. При  $\delta=4$  мм весь канал зайнятий паром, тому подальше зростання  $\delta$  не має реального фізичного сенсу (так само, у випадку висоти каналу 2 мм це граничне значення

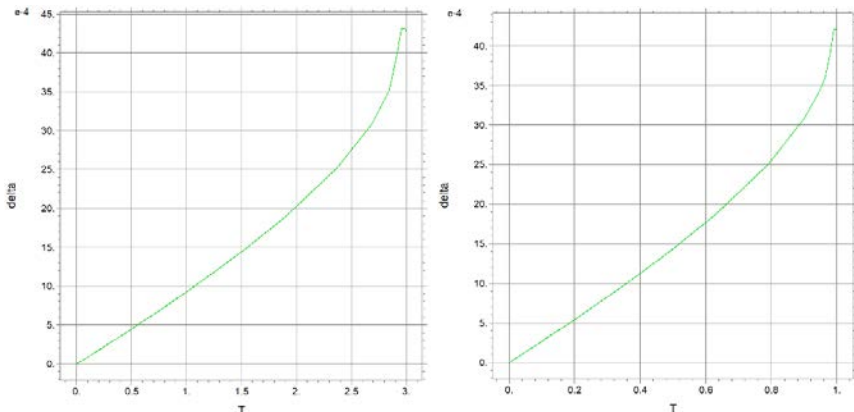


Рис. 101 Ширина шару пари в каналі з відстанню по осі каналу,  $q_1=1$  МВт/м<sup>2</sup>;  
Рис. 102 Те саме для  $q_1=3$  МВт/м<sup>2</sup>

Як видно з рис. 101-104, для  $q_1=1, 3, 5$  і  $7$  МВт/м<sup>2</sup> маємо відповідну довжину загального випаровування в каналі: 2.9, 0.98, 0.6 і 0.43 м. Ширина і висота каналу 4 мм. А на рис. 105-108 для  $q_1=1, 3, 5$  і  $7$  МВт/м<sup>2</sup> маємо наступну довжину загального випаровування в каналі: 1.45, 0.48, 0.39 і 0.23 м. Тепер ширина та висота каналу, відповідно 4 мм і 2 мм. Т на рисунках є координатою  $x$  у реальності (позначення FLEX PDE).

$$q_1 = 7e6, \text{ lam2}=38.5, \text{ ro2}=35, \text{ ro1}=17, \text{ delta0}= 0, \text{ G}=32e-3, \text{ u0}=57.14, \text{ lamw}=394, \\ \text{ lam21}=511e3, \text{ udel}=u0, \text{ b}= 4e-3, \text{ a}=4e-3, \text{ lam1}=88$$

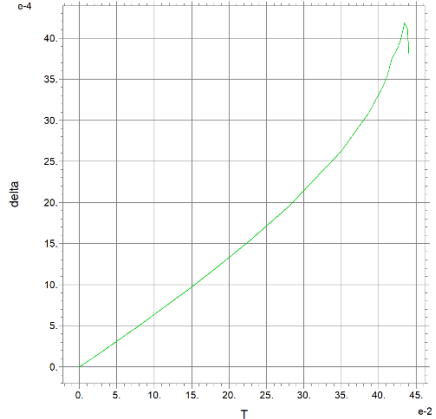
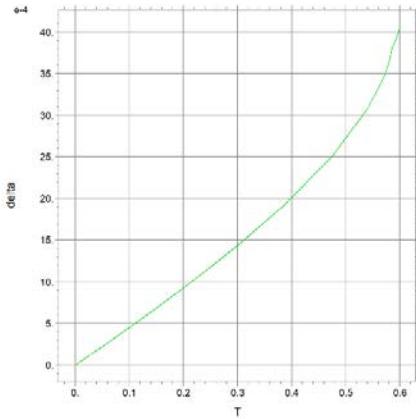


Рис. 103 Ширина шару пари в каналі з відстанню по осі каналу,  $q_1=5$  МВт/м<sup>2</sup>;  
Рис. 104 Те саме для  $q_1=7$  МВт/м<sup>2</sup>

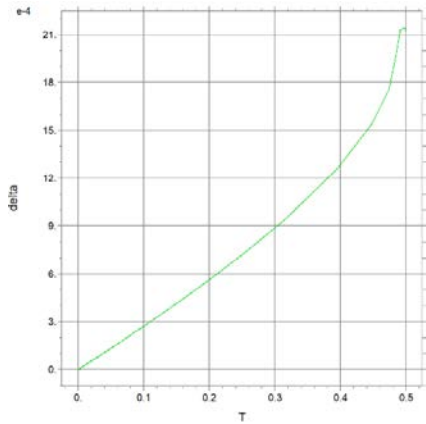
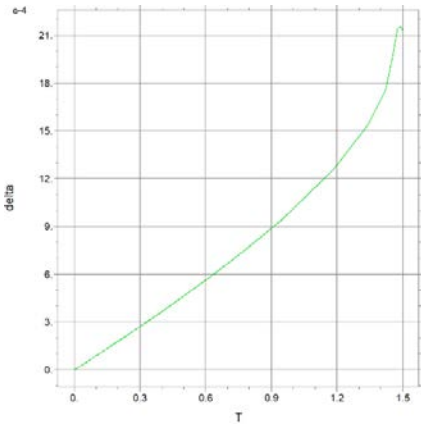


Рис. 105 Ширина шару пари в каналі з відстанню по осі каналу,  $q_1=1$  МВт/м<sup>2</sup>;  
Рис. 106 Те саме для  $q_1=3$  МВт/м<sup>2</sup>

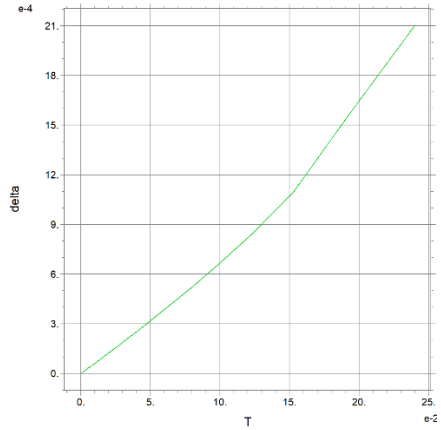
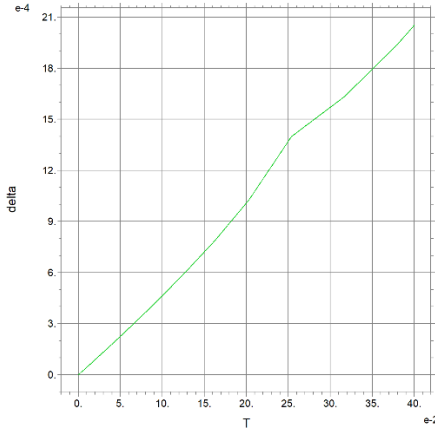


Рис. 107 Ширина шару пари в каналі з відстанню по осі каналу,  $q_1=5 \text{ MWt/m}^2$ ;  
Рис. 108 Те саме - для  $q_1=7 \text{ MWt/m}^2$

Як видно з (67) або (76),  $\delta$  пропорційна  $q_1$  і обернено пропорційна добутку трьох параметрів, які залежать від температури і тиску. Але, як показано на рис. 103, 104 і 107, 108, інші параметри також впливають, хоча при  $q_1=1 \text{ MWt/m}^2$  і  $3 \text{ MWt/m}^2$  обидва випадки,  $a=4 \text{ мм}$  і  $2 \text{ мм}$ , виявляють майже пропорційні результати щодо тривалості загального випаровування.

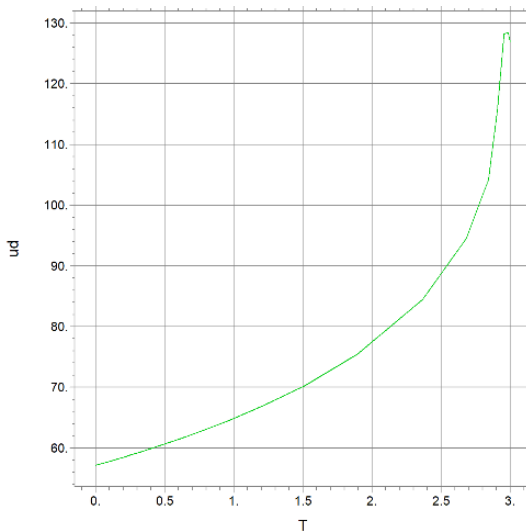


Рис. 109 Швидкість течії в каналі по осі,  $q_1=1 \text{ MWt/m}^2$

Також розраховували потік маси від другої фази до першої за рахунок випаровування. Приклад наведено на рис. 110, а швидкість течії вздовж осі – на рис. 109, 111. Як бачимо, швидкість течії зростає майже вдвічі під час випаровування потоку рідини до повної витрати пари. Після закінчення потоку (загальна кількість пари в поперечному перерізі) модель не працює, результати не є реальними, тому коливання на графіках не мають фізичного значення.

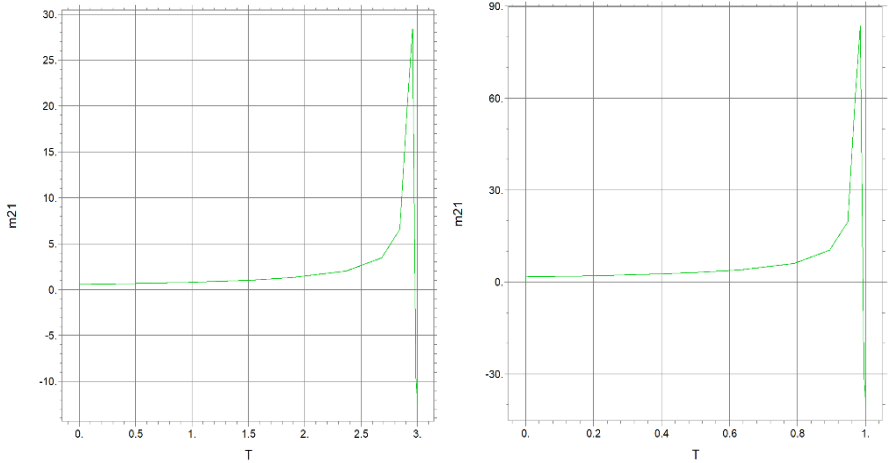


Рис. 110 Потік маси з рідкої в парову фазу (випаровування),  $q_1=1$  МВт/м<sup>2</sup>

Рис. 112 Потік маси з рідкої в парову фазу,  $q_1=3$  МВт/м<sup>2</sup>

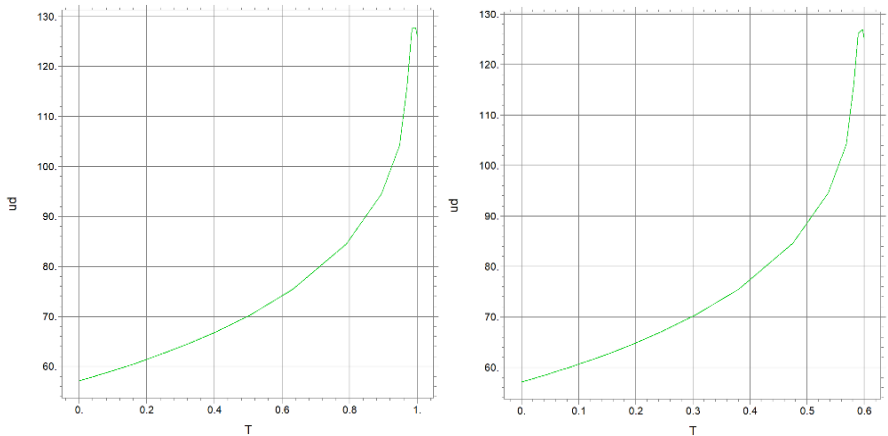


Рис. 111 Швидкість течії вздовж осі,  $q_1=3$  МВт/м<sup>2</sup>; Рис. 113  $q_1=5$  МВт/м<sup>2</sup>

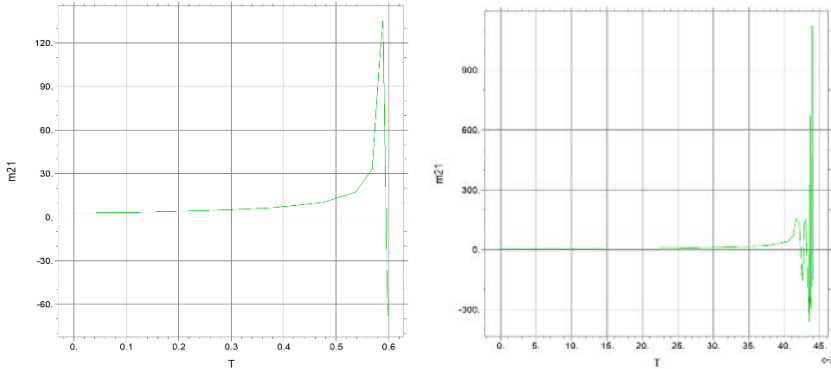


Рис. 114 Масовий потік (рідина/пара),  $q_1=5$  МВт/м<sup>2</sup>; Рис. 116  $q_1=7$  МВт/м<sup>2</sup>

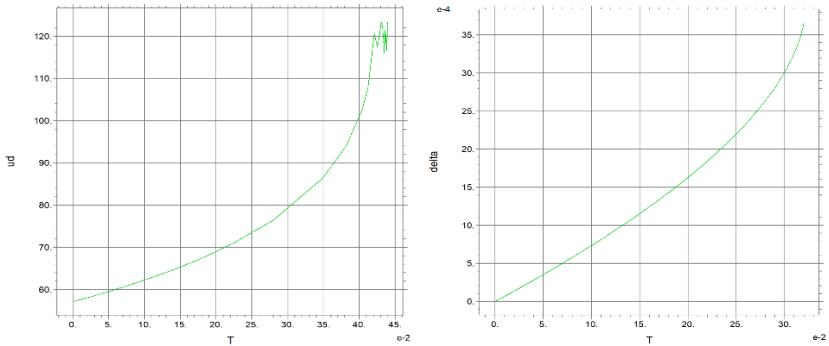


Рис. 115 Швидкість течії вздовж осі,  $q_1=7$  МВт/м<sup>2</sup>;

Рис. 117 Ширина потіку пари з відстанню по осі каналу,  $q_1=7$  МВт/м<sup>2</sup>

З новими даними:  $q_1 = 7e6$ ,  $lam2=38.5e-3$ ,  $ro2=35$ ,  $delta0= 0$ ,  $G=32e-3$ ,  $u0=57.14$ ,  $lamw=394$ ,  $lam21=511e3$ ,  $udel=u0$ ,  $b = 4e-3$ ,  $a=4e-3$ ,  $lam1=53e-3$ .  $P=5*10^6$  bar.

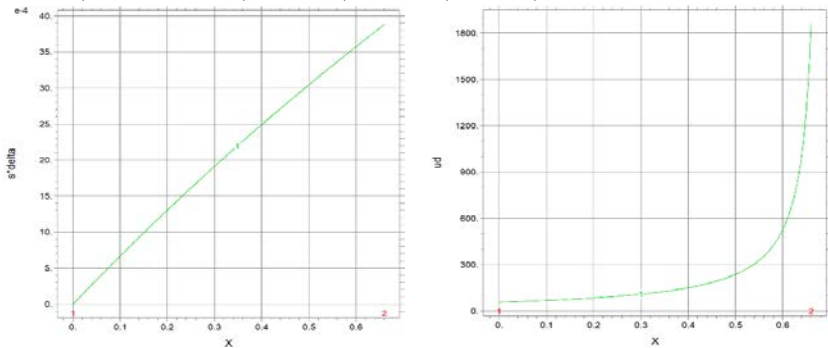


Рис. 118 Ширина потіку пари; Рис. 119 Швидкість течії,  $q_1=7$  МВт/м<sup>2</sup>

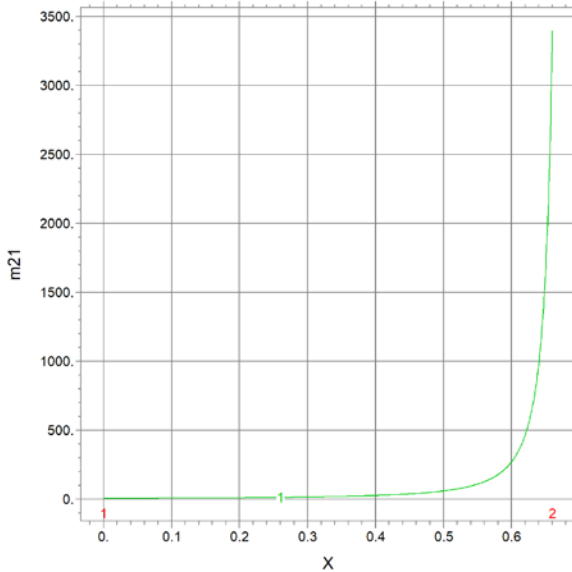


Рис. 120 Потік маси з рідкої фази в парову (випаровування),  $q_1=7$  МВт/м<sup>2</sup>

Потім результати розрахунку представлені наступними параметрами:  $q_1=1e6$ ,  $\nu_1=5.0e-5$ ,  $\nu_2=3.5e-5$ ,  $T_m=350$ ,  $\lambda_2=38e-3$ ,  $\rho_2=35$ ,  $\rho_{10}=20$ ,  $\delta_0=0$ ,  $p_0=5e6$ ,  $T_{10}=300$ ,  $T_{20}=300$ ,  $c_1=2.23e3$ ,  $c_2=1.7e3$ ,  $s=1e-3$ ,  $G=32e-3$ ,  $u_0=57.14$ ,  $\lambda_{mw}=394$ ,  $\lambda_{m1}=511e3$ ,  $b= a=4e-3$ ,  $\lambda_1=53e-3$ ,  $k_1=53e-3$ ,  $k_2=38e-3$ ,  $\rho_1=25-2.1*x$ , дельта та інші 2 функції:

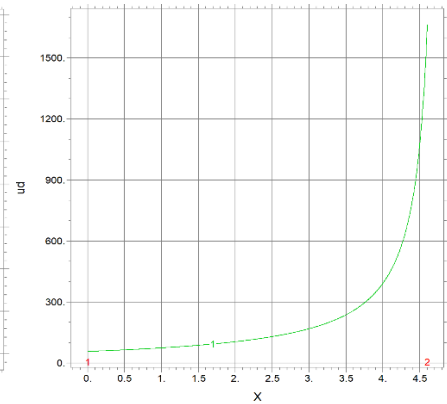
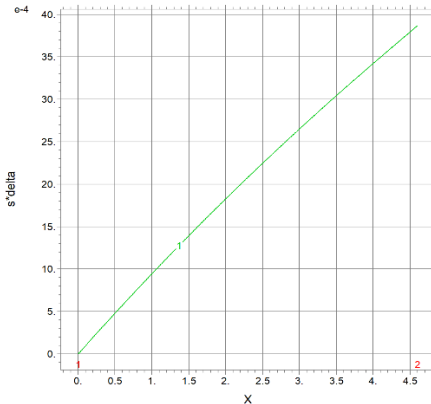


Рис. 121 Ширина шару пари по осі; Рис. 122 Швидкість течії,  $q_1=1$  МВт/м<sup>2</sup>

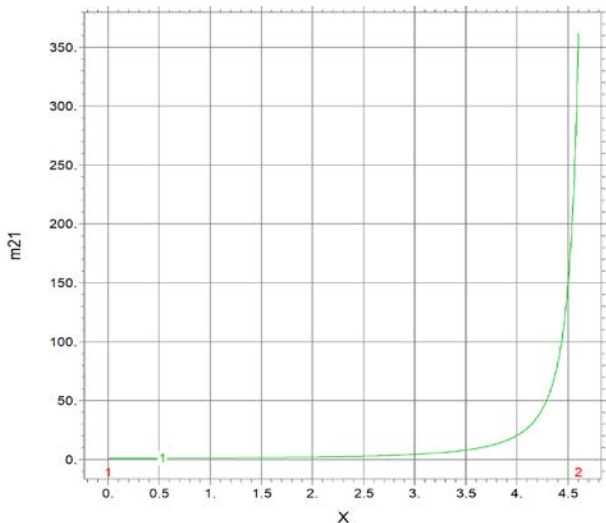


Рис. 120 Потік маси з рідкої фази в парову (випаровування),  $q_1=1$  МВт/м<sup>2</sup>

*Dimensionless form of the mathematical model*

У більш загальній, безрозмірній формі, вище спрощений масив рівнянь:

$$\bar{m}_{21} = \frac{2}{3} \frac{d}{d\bar{x}} (\bar{\rho}_1 \bar{u}_\delta \bar{\delta}), \quad \bar{u}_\delta = \frac{1}{\bar{\rho}_1 \bar{\delta} + \bar{\rho}_2 (1 - \bar{\delta})},$$

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} = \frac{K}{\bar{\rho}_2 \bar{\lambda}_{21} \bar{u}_\delta} \left[ 1 + \frac{\bar{k}_2}{\bar{\delta} - 1} \left( \frac{1}{\bar{k}_w} - \frac{\bar{\delta}}{\bar{k}_1} \right) \right], \quad (77)$$

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{\delta} = 0.$$

Тут:  $\bar{m}_{21} = \frac{m_{21}}{\rho_{20} u_{\delta 0}} = \frac{m_{21}}{g} ab$ ,  $m_{21} = \frac{kg}{m^2 \cdot s}$ ,  $u_{\delta 0} = \frac{g}{\rho_{20} ab}$ ,  $\bar{u}_\delta = \frac{u_\delta}{u_{\delta 0}}$ ,  $\bar{\rho}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{20}}$ ,  $\bar{\rho}_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{20}}$ ,

$\bar{\lambda}_{21} = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{21}^0}$ ,  $\bar{k}_2 = \frac{k_2}{k_{20}}$ ,  $\bar{k}_w = \frac{k_w}{k_{20}}$ ,  $\bar{k}_1 = \frac{k_1}{k_{20}}$ ,  $k_{20}, \rho_{20}, \lambda_{21}^0$  - фізичні властивості за

заявленими параметрами  $T_{20}$ ,  $\rho_0$ .  $K_v = \frac{q_1}{\rho_{20} \lambda_{21}^0 u_{\delta 0}}$  - безрозмірні критерії

відношення теплового потоку до теплоти пароутворення при зазначених параметрах. У наведених розрахунках приблизно  $K_v = 9.8 \cdot 10^{-4}$ ,  $q_1 = 1$  МВт/м<sup>2</sup>.

*Модель двофазного потоку тепла і рідини*

Більш точна математична модель з урахуванням реальних фізичних параметрів, що залежать від тиску та температури, включає диференціальні рівняння течії рідкої та парової фаз, їх температури та верхньої межі фазового переходу  $\delta$ . З (75) ми отримали відповідну модель наступним чином

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{q_1}{\rho_2 \lambda_{21} u_\delta} \left[ 1 + \frac{k_2}{\delta - a} \left( \frac{a}{k_w} \frac{\delta}{k_1} \right) \right], \quad x = 0, \quad \delta = 0.$$

$$u_\delta = g / [\rho_1 \delta + \rho_2 (a - \delta)], \quad x = 0, \quad u_{\delta 0} = g / (\rho_2 a). \quad (78)$$

$$\frac{8}{15} \left[ \frac{d}{dx} (u_\delta^2 \delta) + u_\delta^2 \frac{\delta}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} \right] = - \frac{\delta}{\rho_1} \frac{dp}{dx} + v_1 \left[ \frac{2}{3} \frac{d^2}{dx^2} (u_\delta \delta) - 2 \frac{du_\delta}{dx} \frac{d\delta}{dx} - u_\delta \frac{d^2 \delta}{dx^2} - \frac{u_\delta}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} - \frac{du_\delta}{dx} \right] +$$

$$+ \frac{2}{3\rho_1} \frac{d}{dx} (\rho_1 u_\delta \delta) u_\delta \frac{d\delta}{dx}, \quad x = 0, \quad p = 0,$$

$$\frac{8}{15} \left[ \frac{d}{dx} (a u_\delta^2) + u_\delta^2 \frac{\delta}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} \right] = - \frac{a}{\rho_2} \frac{dp}{dx} + v_2 \left[ \frac{2}{3} \frac{d^2}{dx^2} u_\delta (a - \delta) + 2 \frac{du_\delta}{dx} \frac{d\delta}{dx} + u_\delta \frac{d^2 \delta}{dx^2} + \frac{du_\delta}{dx} \right] +$$

$$v_1 \left[ \frac{2}{3} \frac{d^2}{dx^2} (u_\delta a) - 2 \frac{du_\delta}{dx} \frac{d\delta}{dx} - u_\delta \frac{d^2 \delta}{dx^2} - \frac{du_\delta}{dx} - \frac{u_\delta}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} \right], \quad x = 0, \quad \rho_1 = \rho_{10};$$

$$\rho_1 c_1 u_\delta \left[ \frac{2}{3} \frac{d(\bar{T}_1 \delta)}{dx} - T_* \frac{d\delta}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[ k_1 \left( \frac{d(\bar{T}_1 \delta)}{dx} - T_* \frac{d\delta}{dx} \right) \right],$$

$$\rho_2 c_2 u_\delta \left[ \frac{2}{3} \frac{d(\bar{T}_2 (a - \delta))}{dx} + T_* \frac{d\delta}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[ k_2 \left( \frac{d(\bar{T}_2 (a - \delta))}{dx} + T_* \frac{d\delta}{dx} \right) \right] - q_1 - \rho_2 \lambda_{21} u_\delta \frac{d\delta}{dx},$$

$$x = 0, \quad T_1 = T_2 = T_0, \quad \frac{d\bar{T}_1}{dx} = \frac{d\bar{T}_2}{dx} = 0.$$

Наближений масив рівнянь (77) із відповідними заданими граничними умовами можна розв'язати для 5 функцій:  $\delta$ ,  $p$ ,  $\rho_1$ ,  $T_1$  і  $T_2$ . Тут  $\bar{T}_1, \bar{T}_2$  - температурні профілі, усереднені по шару.

## 9.2 Стабільність течії в міні-мікро каналі

Мікромасштабний двофазний потік і передача тепла представляють великий інтерес для багатьох промислових застосувань, таких як термосифони для охолодження електронних компонентів, системи мікротеплових трубок, обробка матеріалів, нафтова промисловість, біотехнологія тощо. У багатьох

експериментах було помічено (Xu et al., 1999; Lin et al., 1998), що існують три основні режими потоку: ізольований бульбашковий потік, снаряд/бульбашка Тейлора, потік і кільцевий потік у мікроканалі (діаметром менше 1 мм). Коли витрати як рідини, так і газу низькі, домінуючим є режим витягнутої бульбашки Тейлора. При цьому режимі течії більшу частину русла займають подовжені бульбашки Тейлора, довжина яких у кілька-десятки разів перевищує її діаметр. Можна припустити, що більша частина каналу змочена дуже тонкою плівкою рідини.

Як у бульбашковому, так і в кільцевому снарядовому потоці, режимі двофазного потоку в мікроканалі, потік плівки рідини між газом і стінкою відіграє дуже важливу роль у загальній поведінці теплопередачі. Експериментальні спостереження Кусуди та ін. (Kusuda et al. 1981); Monde (1989) показав, що теплопередача посилюється, коли бульбашки проходять через щілину в умовах бульбашкового або скупчого потоку. Пізніше аналітична оцінка Монде et al. (1989) показала, що коефіцієнт теплопередачі через плівку рідини між бульбашками Тейлора та стінкою каналу, оцінений за провідністю, набагато менший, ніж експериментальні дані. Це вказує на те, що середня товщина не може бути використана для пояснення ефективності теплопередачі між газовим ядром і стінкою каналу через потік рідинної плівки. Як правило, у системі двофазного потоку з рідкою плівкою через поверхневий натяг межа розділу рідина-пар за своєю суттю є нестабільною, і на межі розділу утворюються поверхневі хвилі, що призводить до складної нестабільної картини потоку. Вважалося (Yang et al., 2000), що нестабільність потоку тонкої плівки може спричинити значне посилення теплопередачі як кипіння, так і конденсації в мікроканалі.

Було проведено багато досліджень щодо нестабільності плівкового потоку різних систем двофазного потоку у відносно великих каналах (діаметр > 3 мм) (Hsieh, 1972; Zabaras і Dukler, 1988; Das і Pattanayak, 1996; Middleman, 1995; Peterson, 1994). Існують значні відмінності в термо- та гідродинаміці, таких як режим потоку, баланс сил, характеристики нестабільності розділу, продуктивність теплообміну, тощо, двофазного потоку в двох різних масштабах каналів (мікро- та великих каналів). Використовувати результати, отримані для великого каналу, для двофазного потоку в каналах мікромасштабу сумнівно.

Було проведено декілька аналітичних та експериментальних досліджень нестабільності потоку плівки в мікроканалі (Goren, 1962; Teng, 1997; Gauglitz

and Radke, 1988). Горен (1962) вивчав нестійкість рідини на внутрішній поверхні циліндричної трубки з газовим сердечником. Виявлено, що безрозмірне найбільш нестійке хвильове число лежить в діапазоні  $0,65 \pm 0,71$ , коли сили інерції значно більші за в'язкі. Однак характеристичне рівняння, отримане Гореном, має неявний зв'язок складної форми, та аналітичні рішення можливі лише для деяких граничних випадків. Нестабільність плівки також була проаналізована Гаугліцем і Радке (1988) за допомогою рівняння Янга-Лапласа, а найбільш нестабільне хвильове число, отримане чисельно, було взято в дужки за результатами Горена (1962) для тих самих застосувань. У цих дослідженнях характеристики нестабільності плівкової течії визначалися чисельно, тому залежність нестійкості від товщини плівки та властивостей рідини обох фаз чітко не виявлена.

Нещодавно Тенг (1997) провів аналітичне дослідження нестабільності потоку тонкої плівки в капілярній трубці, використовуючи лінійні рівняння Ейлера. Досліджено вплив товщини плівки та властивостей рідини на нестабільність. Аналітичний розв'язок показує досить хорошу згоду з чисельним розв'язком Горена (1962), однак розглядалася лише течія в'язкої кільцевої плівки рідини. Teng та ін. (1999) досліджували нестабільність плівки конденсату в каналах малого діаметра. Їхня увага була зосереджена на явищі блокування капілярів та його впливі на теплообмін загалом. Товщина плівки є відносно великою, що суттєво відрізняється від режимів витягнутої бульбашки Тейлора двофазного потоку в мікроканалі.

Мета цієї моделі полягала в дослідженні явища нестабільності потоку тонкої рідкої плівки в каналі з надзвичайно вузьким (мікро) зазором, у якому потік тонкої рідкої плівки змочує обидві поверхні стінок, тоді як газова фаза рухається в ядрі каналу. За допомогою рівнянь Стокса (для повзучої течії) розроблено аналітичну модель нестабільності течії плівки рідини в каналі мікрощілини.

Досліджено стійкість фронту конденсації в потоці пари циліндричної форми<sup>1</sup>. Розв'язком модельної задачі встановлено, що для пари, що рухається в циліндричній камері вздовж стінок, конденсаційна футерівка може бути нестійкою за певних збурень. Виявлено нестійкі збурення та обговорено їх вплив на тепловий потік. Проблема стійкості рухомого фронту конденсації (випаровування) для потоку пари в циліндричній камері є дуже важливою для

---

<sup>1</sup> Yang Z.L., Kazachkov I.V. and Palm B. An Analytical Model on the Instability of Thin Film Flow Dynamics in a Micro-gap Channel// J. of Enhanced Heat Transfer. 2001, Vol. 8, no.3, p.175-184.

багатьох ситуацій тепломасообміну в хімічній технології, схемах атомних електростанцій, деяких природних процесах тощо. У стабільному випадку пара не контактує зі стінками агрегату і не руйнує їх або нормальні параметри (режими) розглянутого процесу.

### *Постановка проблеми*

Розглянемо в циліндричних координатах  $(r, \varphi, x)$  потік пари в каналі з потоком конденсованої плівки на стінці (див. рис. 124). Припустимо, що в незбуреному стані пара заповнює область  $r \in (0, R_0)$ , а плівка рідини - область  $r \in (R_0 + r_0)$ . Отже, поверхня  $r = R_0$  є межею фазового переходу і має постійну температуру  $T_*$  конденсації пари. Температура поверхні камери  $T_w$ . Припустимо, що пара рухається вздовж стінок камери зі сталою швидкістю  $v_0$  і знехтуємо впливом стисливості та в'язкості парової фази. В'язкість мала, і стисливістю можна знехтувати через малу швидкість. Також передбачається, що поздовжній градієнт плівки пари та рідини достатньо малий, щоб бути постійним:  $\partial T / \partial x = \Delta T / L = \alpha$ . Ми припускаємо, що  $\alpha \ll 1$  (малий градієнт температури вздовж осі  $x$ ).

Враховуючи все вищесказане, масив рівнянь теплової рівноваги записується у вигляді:

$$\rho_j c_{vj} v_j \frac{\Delta T}{L} = \frac{\chi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_j}{\partial r} \right), \quad (79)$$

де  $j = 1, 2$  відповідає паровій та рідкій фазі відповідно,  $\rho_j c_{vj}$  і  $\chi$  - щільність, коефіцієнт теплоємності при постійному об'ємі та теплопровідність. Тут  $v_j$  - швидкість,  $v_1 = v_0$  для пари, а  $v_2$  - поліноміальний профіль:

$$u_2 = v_0 \left[ \left( 1 - \frac{R_0^2}{r_0^2} \right) + 2 \frac{R_0}{r_0^2} r - \frac{r^2}{r_0^2} \right], \quad (80)$$

$$\frac{u_2}{v_0} = 1 - \frac{1}{s_0^2} + 2 \frac{r}{s_0^2} - \frac{r^2}{s_0^2}, \quad (81)$$

### *Математична модель*

Схема двофазного потоку в досліджуваному каналі з мікрощелиною виглядає наступним чином згідно з рис. 124. Припускається, що рідка фаза тече вздовж стінки каналу, а газова фаза рухається в ядрі каналу. Середня товщина плівки рідини на обох стінках дорівнює  $b$ , середня товщина ядра газу дорівнює  $2a$ , у 2D системі координат положення межі розділу газ-рідина у

верхній частині каналу виражається як  $H_2$ , а в нижній частині каналу – як  $H_1$ . Прийнято  $a/L \ll 1$ , де  $L$  – характерна довжина каналу вздовж осі

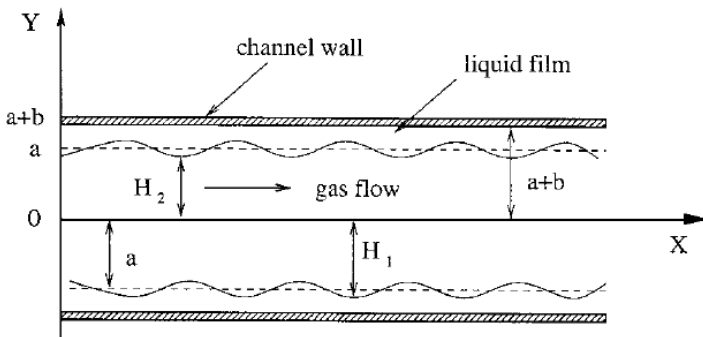


Рис. 124 Схема течії газу з плівкою рідини на стінках

Тут двофазний потік нестабільний через нестабільність межі фазового переходу. Нестабільність межі дає хвильові числа найбільш нестабільних хвиль, які породжують краплі рідини, що надходять у внутрішній газовий потік. Таким чином, всередині каналу формується потік газу з краплями рідини, де для точного змішування фаз і процесів теплообміну може бути застосований метод Накорчеського з функціями-індикаторами фаз.

Розглядаються лише довгохвильові збурення, оскільки короткохвильові збурення повинні ефективно пригнічуватися капілярними силами в міні (мікро) каналі. У цьому випадку градієнт тиску вздовж поперечного перерізу каналу (у-напрямку) також можна вважати малим і ним можна знехтувати. Також передбачається, що витрати як рідини, так і газу малі (число Рейнольдса  $Re \ll 1$ ), і що газ і рідина нестисливі. При відсутності масової сили і масообміну між двома рідинами, рівняння Нав'є-Стокса для обох рідин можна спростити як рівняння Стока. І була розроблена та проаналізована математична модель.

Математичну модель було застосовано для динаміки рідкої плівки в міні-мікроканалах, в яких рідка плівка тече вздовж поверхонь стінок, а газ – у ядрі. За допомогою рівнянь Стока проаналізовано поведінку нестабільності межі розділу двофазного потоку. Оскільки збурення на межі розділу завжди існує на двофазній межі розділу через сили поверхневого натягу, коли масова швидкість потоку в мікроканалі низька, збурення межі розділу присутні у вигляді кінематичних хвиль, які рухаються вздовж осі каналу зі швидкістю потоку газу в ядрі каналу. Важливо, що незалежно від того, який вид збурення

в системі, у випадку постійного градієнта тиску потоку газу в напрямку  $x$  збурення межі розділу не зростають з часом.

За результатами аналізу встановлено, що в каналі міні-мікросцілини за постійного градієнта тиску збурення по обидві сторони щілини суворо взаємопов'язані між собою та отримано їх взаємозв'язок. Отримана кореляція може бути використана для розрахунку всіх параметрів збурень на межі розділу. Модуляція за часом для градієнта тиску газу також може бути використана для контролю поведінки еволюції збурень межі розділу, отже, поведінки теплопередачі.

### **9.3 Струминний потік, що проникає в басейн іншої рідини**

Проникнення струменя в басейн іншої рідини залежить від різних умов: співвідношення щільності рідин, швидкості струменя до контакту з нерухомою поверхнею басейну іншої рідини: при високій швидкості і щільності рідини в басейні на поверхні виникає ударна хвиля, завдяки якій у голові струменя виникає тонкоплівковий потік. А розтікання струменя всередині басейну значною мірою залежить від того, тонкий чи товстий струмінь. Тонкі струмені схильні нестабільні щодо згинаючих збурень, тоді як товсті струмені проникають при змішуванні в басейні. Нижче коротко розглянуто ці дві моделі.

#### **9.3.1 Розпад тонких струменів, що проникають у басейн іншої рідини**

Нестабільність і розрив струменя рідини, що проникає в іншу рідину, привертає увагу багатьох дослідників. Піонерська робота була виконана Релеєм<sup>2</sup>, нестабільність і розрив струменя рідини, що проникає в іншу рідину, привертає увагу багатьох дослідників. Релей показав, що розпад струменя породжується гідродинамічною нестабільністю. Він продемонстрував, що круглий циліндричний струмінь рідини є нестійким, якщо збурення на поверхні струменя більші за окружність струменя. Декілька дослідників стежили за новаторською роботою Релея: Вебер розглядав вплив щільності та в'язкості навколишньої рідини на нестабільність струменя, Томотіка знайшов оптимальне співвідношення в'язкості струменя та навколишньої рідини, що створює максимальні збурення, Чандрасекар показав, що в'язкість зменшує швидкість розпаду та збільшує розмір краплі, Тейлор продемонстрував, що навколишнє середовище в'язкості має великий вплив на розпад струменя, показав, що для великої швидкості струменя краплі, утворені розпадом струменя, можуть бути набагато меншими, ніж діаметр струменя (це атомізація).

---

<sup>2</sup> Rayleigh, L.: Proc. London Mathematical Society, 1879, 10, pp. 4-10.

У цій галузі було написано кілька оглядових статей: останні Лін і Райтц і Чигер і Райтц., який показав, що розпад струменя породжується гідродинамічною нестабільністю. Він продемонстрував, що круглий циліндричний струмінь рідини є нестійким, якщо збурення на поверхні струменя більші за окружність струменя. Декілька дослідників стежили за новаторською роботою Релея: Вебер<sup>3</sup> розглядав вплив щільності та в'язкості навколишньої рідини на нестабільність струменя, Томотіка<sup>4</sup> знайшов оптимальне співвідношення в'язкості струменя та навколишньої рідини, що створює максимальні збурення, Чандрасекар<sup>5</sup> показав, що в'язкість зменшує швидкість розпаду та збільшує розмір краплі, Тейлор<sup>6</sup> продемонстрував, що в'язкість навколишнього середовища має великий вплив на розпад струменя, показав, що для великої швидкості струменя краплі, утворені розпадом струменя, можуть бути набагато меншими, ніж діаметр струменя (це атомізація).

У цій галузі було написано кілька оглядових статей: останні Лін і Райтц<sup>7</sup> та Чигер і Райтц<sup>8</sup>.

Хоча було досягнуто значного прогресу в поясненні впливу поверхневого натягу (число Вебера) і в'язкості (число Рейнольдса) на поведінку струменя при розпаді, мало уваги приділялося тонким струменям (тобто відношення характерного поперечного розміру до поздовжнього невелике), що проникають у басейн рідини. Особливо у випадку, коли інерція, опір і плавучість є домінуючими силами рідини<sup>9</sup>. Було проведено кілька аналітичних та експериментальних досліджень, щоб отримати довжину розриву плавучого струменя, що проникає в іншу рідину. Більшість із них були пов'язані з впорскуванням струменя газу в іншу рідину, як у псевдозрідженому шарі, напр. Yang і Kearins, і Blake et al<sup>10</sup>. Були проведені деякі дослідження погодних явищ, коли струмінь рідини впорскується в іншу рідину.

Механізм, пов'язаний із взаємодією струменя і навколишньої рідини, є переважаючим для високошвидкісних ламінарних струменів, які

---

<sup>3</sup> Weber, C.Z.: *Math. Mech.*, 1931, 11, pp. 136-154.

<sup>4</sup> Tomotika, S.: *Proc. R. Soc. London, Ser. A.*, 1935, 150, pp. 322-327.

<sup>5</sup> Chandrasekhar, S.: 1961, Oxford University Press.

<sup>6</sup> Taylor, G.I.: In *The Scientific Papers of G.I. Taylor*, Ed. G.K. Batchelor, Cambridge University Press, 1962, 3, pp. 244-254.

<sup>7</sup> Lin, S.P. and Reitz, R.D.: *Ann. Rev. of Fluid Mech.*, 1998, pp. 85-105.

<sup>8</sup> Chigier N. and Reitz, R.D.: In *Recent Advantages in Spray Combustion: Spray Atomization and Drop Burning Phenomena*, ed. K.K. Kuo, 1996, 1, pp. 109-135.

<sup>9</sup> W.C. Yang and D.L. Keairns, in D.L. Keairns and J.F. Davidson (eds.), *Cambridge Univ. Press, Cambridge* (1978).

<sup>10</sup> T.R. Blake, H. Webb and P.B. Sunderland: *Chemical Engineering Society*, Vol. 45, No. 2, (1990).

розпадаються в результаті зростання згинальних збурень на осі струменя<sup>11</sup>. Теоретичні дослідження динаміки згинальних збурень струменів рідини були розпочаті Вебером і продовжені надалі<sup>12</sup>. Квазіодновимірні рівняння були отримані Ентовым і Ярїним для довільної параметризації струменя і успішно застосовані для прогнозування довжини розриву струменя, що вигинається.

Ми визначили поведінку проникнення та довжину розриву тонкого струменя, що проникає в басейн рідини. Існують докази того, що механізм вигину плавучого струменя, здається, виникає і врешті-решт домінує в поведінці розпаду<sup>13</sup>. У поточному дослідженні застосовано припущення про розпад струменя через вигин, щоб отримати характеристику розриву струменя та довжину розриву струменя. Довжина розриву струменя порівнюється з експериментальними даними, наявними в літературі.

Проникання струменя рідини в іншу рідину можна охарактеризувати набором безрозмірних чисел. Коефіцієнт густини ( $\rho_{21} = \rho_2 / \rho_1$ ) є важливим, оскільки він визначає швидкість проникнення головки струменя та відіграє важливу роль у нестабільності струменя (тут  $\rho_2, \rho_1$  щільність басейну рідини та струменя відповідно). У випадку великих чисел Рейнольдса і Вебера сила інерції є домінуючою порівняно з силами в'язкості та капілярними силами. Для струменя, що витікає вертикально під дією сили тяжіння в басейн рідини, відношення щільності та число Фруда можуть бути домінуючими параметрами, які визначають нестабільність струменя. У такому разі рівняння моменту та моменту імпульсу для струменя можна записати за Ентовым і Ярїним, дотримуючись схематичного зображення на рис. 125:

---

<sup>11</sup> A. Haenlein, Naca Tech. Memo. 1932, 659.

E. Tyler and E.G. Richardson, Proc. Phys. Soc. London. 1925, 37, 297.

E. Tyler and F. Watkin, Phis. Mag. 1932, 14, 849.

R.P. Grant and S. Middleman, AIChEJ. 1966, 12, 669.

A.M. Sterling and C.A. Sleicher, J. Fluid Mech. 1975, 68, 477.

<sup>12</sup> P. Debye and J. Daen, Phys. Fluids. 1959, 2, 416.

S. Middleman and J. Gavis, Phys. Fluids. 1965, 8, 222.

J.D. Buckmaster, J. Fluid Mech. 1973, 61, 449.

V.M. Entov and A.L. Yarin: J. Fluid Mech., 1984, 140, 91.

A.L. Yarin: Longman Scientific & Technical, Haifa (1993).

<sup>13</sup> C.C. Chu, J.J. Sienicki, B.W. Spencer, W. Frid, and G. Löwenhielm, Nucl. Eng. and Design. 1995, 155, 159.

T.N. Dinh, V.A. Bui, R.R. Nourgaliev, T. Okkonen, and B.R. Sehgal, Nucl. Eng. and Design. 1996, 163, 191.

M. Buerger, S.H. Cho, E.V. Berg, and A. Shatz Nucl. Eng. and Design. 1995, 155, 215.

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\begin{aligned} \rho_1 f_0 \partial V_n / \partial t &= \partial Q_n / \partial s - \kappa Q_b + q_n + (\rho_1 - \rho_2) g_n, \\ \rho_1 f_0 \partial V_b / \partial t &= \partial Q_b / \partial s + \kappa Q_n + q_b + (\rho_1 - \rho_2) g_b, \\ \rho_1 I \partial / \partial t (\partial V_b / \partial s + \kappa V_n) &= -\partial M_n / \partial s + \kappa M_b + Q_b + k(\rho_2 - \rho_1) g_\tau I, \\ \rho_1 I \partial / \partial t (\partial V_n / \partial s - \kappa V_b) &= \partial M_b / \partial s + \kappa M_n + Q_n + k(\rho_2 - \rho_1) g_b I, \end{aligned} \quad (82)$$

де гідродинамічна ( $q_i$ ) і виштовхувальна ( $g_i$ ) сили:

$$\begin{aligned} q_n &= -\rho_2 U_0^2 f_0 \chi^2 / a_0^2 \exp(\gamma t) [A^2 \cos^2(\chi s / a_0) + B^2 \sin^2(\chi s / a_0)]^{\frac{1}{2}}, \\ g_n &= f_0 g \chi / a_0 \exp(\gamma t) [A^2 \sin^2(\chi s / a_0) + B^2 \cos^2(\chi s / a_0)]^{\frac{1}{2}}, \\ q_b &= q_b = 0, \quad \chi = 2\pi a_0 / l. \end{aligned} \quad (83)$$

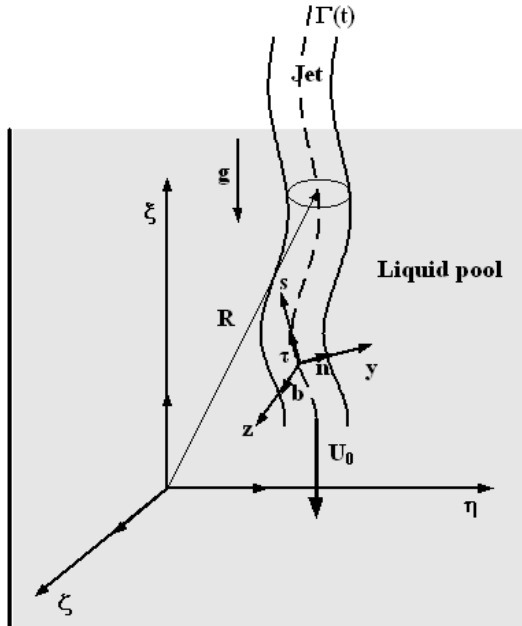


Рис.125 Схема тонкого струменя в басейні в криволінійних координатах Тут  $a_0$  і  $U_0$  – початковий радіус і швидкість струменя, відповідно,  $f_0 = \pi a_0^2$  – площа,  $I = 1/4 \pi a_0^4$  – момент інерції струменя.

Змінні  $Q$ ,  $M$  і  $\chi$  представляють силу зсуву, момент напружень у поперечному перерізі струменя та довжину збурення струменя відповідно. Змінна

$k$  - це кривизна, а  $\kappa$  - кручення струменя. Положення точки (або частинки рідини) в струмені визначається трьома параметрами:  $y$ ,  $z$  і  $s$ , які служать координатами в рухомій системі відліку криволінійної ( $y$  випадку неортогональної  $\kappa \neq 0$ ) системи координат. Розподілені сили  $q_i$  і  $g_i$  розраховуються та прикладаються до осі подібним чином, як наведено у наведених вище посиланнях Ентовым і Яріним.

Осі струменя параметризовані, а рівняння по осях записані в такому вигляді

$$\eta = H(s, t), \quad \zeta = Z(s, t), \quad (84)$$

де  $H$  і  $Z$  – переміщення осі в напрямках  $O_1\eta$  і  $O_1\zeta$  відповідно при  $\xi = s$ .

З рівняння (82) зберігається лише проекція рівняння імпульсу та моменту на нормальну та бінормальну осі, тобто розглядаються лише збурення згину. Ці рівняння описують невеликі збурення струменя рідини, що проникає в басейн рідини, нехтуючи зміною радіуса струменя. Ці порушення мають швидкість зростання  $\gamma$ . Проекція рівняння (82) на дотичну до осі описує зростання малих осесиметричних збурень струменя. Вважається, що збурення на осі струменя мають такий вигляд:

$$H = A \exp(\gamma t) \cos(\chi s / a_0), \quad Z = B \exp(\gamma t) \sin(\chi s / a_0), \quad (85)$$

де кривизна і кручення відповідно:

$$k = \chi^2 / a_0^2 \exp(\gamma t) [A^2 \cos^2(\chi s / a_0) + B^2 \sin^2(\chi s / a_0)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\kappa = \chi / a_0 AB [A^2 \cos^2(\chi s / a_0) + B^2 \sin^2(\chi s / a_0)]^{\frac{1}{2}}. \quad (86)$$

Згинальні збурення струменя і момент  $M_b$  можна записати як:

$$\sqrt{H^2 + Z^2} \quad \text{і} \quad M_b = I[\rho_2 U_0^2 k + (\rho_2 - \rho_1) g \sqrt{H_s^2 + Z_s^2}],$$

де  $H_s = -A\chi / a_0 \exp(\gamma t) \sin(\chi s / a_0)$ ,  $Z_s = B\chi / a_0 \exp(\gamma t) \cos(\chi s / a_0)$ .

Швидкість, нормальну та бінормальну до осі струменя, можна отримати шляхом диференціювання (85) за часом:

$$V_n = \sqrt{H_t^2 + Z_t^2} = -\gamma \exp(\gamma t) [A^2 \cos^2(\chi s / a_0) + B^2 \sin^2(\chi s / a_0)]^{\frac{1}{2}}, \quad V_b = 0. \quad (87)$$

Підстановка (2)-(6) у масив рівнянь (1) призводить до наступної системи рівнянь для малих збурень на тонкому струмені:

$$Q_n = \rho_1 I \partial^2 V_n / \partial s \partial t - \partial M_b / \partial s, \quad Q_b = \rho_1 I \partial(\kappa V_n) / \partial t - \kappa V_b, \quad (88)$$

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\partial Q_b / \partial s = -\kappa Q_n, \quad \rho_1 f_0 \partial V_n / \partial t = \partial Q_n / \partial s - \kappa Q_b + q_n + g_n (\rho_1 - \rho_2),$$

де в цьому випадку імпульс, нормальний до осі,  $M_n$ , вважається незначним. Вставляючи  $Q_n$  і  $Q_b$  з перших двох рівнянь (88) у третє та четверте, третє рівняння стає тотожним, а четверте рівняння для моменту імпульсу в нормальному напрямку стає

$$\rho_1 I \partial^2 (\kappa V_n) / \partial s \partial t - \partial (\kappa M_b) / \partial s + \rho_1 \kappa I \partial^2 V_n / \partial s \partial t - \kappa \partial M_b / \partial s = 0. \quad (89)$$

#### Аналіз стабільності

Досліджено стійкість струменя рідини внаслідок лінійних збурень на осі струменя та отримано довжину розриву струменя, яка зв'язує когерентну довжину струменя з безрозмірними параметрами. Підставляючи рівняння (86), (87) і  $M_b$  в (89) і зберігаючи лише члени першого порядку по  $\chi$ , отримуємо таке рівняння для швидкості зростання збурення

$$\gamma^2 = (\rho_{21} - 1)g(\chi/a_0)(B/A). \quad (90)$$

Рівняння (90) показує, що нестабільність струменя при згині спостерігається тоді і тільки тоді, коли щільність басейну більша за щільність струменя ( $\rho_{21} > 1$ ). Припускаючи, що збурення згинального струменя мають порядок кількох діаметрів струменя:  $\sqrt{Z^2 + H^2} = \Delta a_0$ , для довгохвильових збурень  $\cos(\chi s/a_0) \approx 1$  і  $\gamma_* t_* = \ln(\Delta a_0/A)$ ,  $t_* = 1/\gamma_* \ln(\Delta a_0/A)$ . Тоді довжина розриву струменя становить

$$L_*/a_0 = U_0 t_* = \ln\left(\frac{\Delta a_0}{A}\right) \frac{U_0}{a_0 \sqrt{B/A} (\rho_{21} - 1) g \chi_*/a_0},$$

який можна записати як

$$L_*/a_0 = \delta_1 \sqrt{Fr} / \sqrt{\delta_2 (\rho_{21} - 1)}. \quad (91)$$

Тут  $Fr = U_0^2 / (g a_0)$  - число Фруда,  $\delta_1 = \ln(\Delta a_0/A)$  є константою, яка залежить від початкового рівня збурення,  $\delta_2 = \chi_* B/A$  є константою щодо довжини хвилі та початкового рівня збурення двох координат у площині, яка перпендикулярна до криволінійної осі струменя.

З урахуванням членів другого порядку  $\chi$  в рівнянні (89). Тоді швидкість зростання збурень  $\gamma$  згинального струменя визначається таким виразом:

$$\gamma = \pm \frac{4U_0\chi}{a_0\sqrt{4 + \chi^2}} \sqrt{\rho_{21} + \frac{B}{A} \frac{\rho_{21} - 1}{\chi Fr}}, \quad (92)$$

де додатний темп зростання  $\gamma$  відповідає режиму нестабільності струменя, а від'ємний – режиму стабільного збурення. З рівняння (92) можна знайти оптимальну довжину збурення згину, яка визначає розпад струменя. Диференціювання (92) як функції довжини збурення  $\chi$  дає екстремум при

$$\chi_* = 4 \left[ \frac{Fr}{1 - \rho_{12}} \frac{B}{A} + \sqrt{\left(\frac{Fr}{1 - \rho_{12}}\right)^2 \left(\frac{A}{B}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right], \quad (93)$$

де  $\rho_{12} = 1/\rho_{21}$  ( $\chi_*$  є найбільш нестабільною довжиною збурення). Рівняння (93) було отримано за допомогою наступних припущень:  $U_0 \neq 0$ ,  $\chi_* \neq 0$ ,  $\rho_{21} + \frac{\rho_{21} - 1}{\chi_* Fr} \frac{B}{A} \neq 0$ .

Дослідження рівнянь (92) і (93) показує, що згасання струменя згину можливе в усіх випадках при  $\rho_{21} > 1$ . Коли  $\rho_{21} < 1$ , збурення згинального струменя зростають з часом тоді і тільки тоді, коли  $\chi > \frac{\rho_{12} - 1}{Fr} \frac{B}{A}$ . Інші збурення не повинні зростати з часом (коливання, але не загасання струменя). Тут слід зазначити, що збурення  $\chi$  вважається малим. Враховуючи вищевикладене, довжину розриву струменя можна отримати у такому вигляді:

$$\frac{L_*}{a_0} = \frac{\delta_1}{2\sqrt{\chi}} \frac{\sqrt{Fr}}{\sqrt{\rho_{21}\chi Fr + (\rho_{21} - 1)B/A}}. \quad (94)$$

У випадку  $\rho_{21} = 1$  (однакової щільності в струмені та в басейні) довжина збурення не існує. У цьому випадку слід розглядати рішення членів вищого порядку в  $\chi$ . Використовуючи рівняння (92) і (93) для найбільш нестабільних збурень струменя згину, можна отримати довжину розриву струменя:

$$\frac{L_*}{a_0} = \frac{\delta_1}{4} \frac{\sqrt{4 + \chi_*^2}}{\sqrt{[\rho_{21}\chi_* + B/A(\rho_{21} - 1)/Fr]\chi_*}}. \quad (95)$$

Через складність рівнянь (94) і (95) було розглянуто кілька граничних випадків для керівних параметрів, коефіцієнта щільності та числа Фруда. У випадку малого числа Фруда  $Fr \ll 1$  (мала швидкість струменя або великий

діаметр струменя) наступну оцінку оптимальної довжини збурення можна отримати з рівняння (12),  $\chi_* \approx 2$ . Тоді довжина розриву струменя становить

$$\frac{L_*}{a_0} = \frac{\delta_1}{2} \frac{\sqrt{Fr}}{\sqrt{(\rho_{21} - 1)B/A + 2\rho_{21}Fr}}, \quad (96)$$

і впливає за  $\rho_{21} \gg 1$ :  $\frac{L_*}{a_0} = \delta_2 \sqrt{\rho_{12}Fr}$  де  $\delta_2 = \frac{\delta_1}{2} \sqrt{\frac{A}{B}}$ . Інший граничний випадок,  $(\rho_{21} - 1) \sim 1$  дає  $L_* / a_0 = \delta_2 \sqrt{Fr / (\rho_{21} - 1)}$ .

Довжина затухання струменя на згині переважно визначається квадратним коренем із числа Фруда. Це добре узгоджується з Блейком та ін., Тернером, Янгом і Кеїрнсом, які отримали наступну експериментальну кореляцію для довжини розриву струменя, що проникає в киплячий шар:

$$\frac{L_*}{2a_0} = 6.5 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}} \sqrt{\frac{U_0^2}{2ga_0}}, \quad (97)$$

або  $\frac{L_*}{a_0} \approx 9.16 \sqrt{\frac{Fr}{1 - \rho_{21}}} = \frac{9.16}{\sqrt{Ri}}$ , де  $Ri = \frac{1 - \rho_{21}}{Fr}$  - число Річардсона.

Порівнюючи рівняння (96) і (97), можна отримати константу в теоретичному розв'язку (96). В останньому випадку розпад струменя залежить лише від одного параметра, а саме числа Річардсона. Отримана кореляція повністю відповідає експериментальним даним.

### 9.3.2 Довжина проникнення товстих струменів у басейн іншої рідини

Моделювання теплогідрравлічних процесів взаємодії розплаву коріуму з водою та низькотемпературними плавильними блоками в системах пасивного захисту від тяжких аварій на АЕС є предметом проникнення тонких і товстих струменів у басейн іншої рідини. Тема має велике значення для обґрунтування безпеки ядерної енергетики. У реакторах третього покоління такі системи є обов'язковими; тому це важлива проблема безпеки ядерної енергетики.

Проведено аналіз теплогідрравлічних проблем, вирішення яких може сприяти вдосконаленню існуючих систем або розробці нових ефективних систем. Обговорено підходи до вирішення поставлених проблем та найбільш вражаючі результати. Розроблені математичні моделі та проведені аналізи були визнані корисними для проектування пасивних систем для утримання розплаву коріуму всередині захисної оболонки після його викиду з корпусу реактора. Розглянуто задачу математичного моделювання охолоджуваності

розплавів коріуму водою та низькотемпературними плавильними блоками. Було проаналізовано та обговорено кілька найбільш вдалих пасивних систем та їхні характерні теплогідравлічні проблеми.

Має місце й ряд інших фізико-хімічних комплексних проблем динаміки сучасної багатофазної багатокомпонентної системи. Наприклад, парова плівка навколо окремих фрагментів розплаву може зруйнуватися, а взаємодія розплаву з водою може призвести до парових вибухів. Усі ці явища можуть мати значне потенційне занепокоєння щодо безпеки, частково через динамічне навантаження на реактор та/або конструкції захисної оболонки, а також через інтенсивне утворення дрібних частинок уламків, що може негативно вплинути на довгострокову здатність до охолодження матеріалу активної зони та, як наслідок, на характеристики безпеки ядерної енергетики. Тому проблема проникнення струменя коріуму в летючий басейн, його розпаду на краплі внаслідок інтенсивного турбулентного перемішування струменя з теплоносієм і паром, а потім охолодження частинок і їх дроблення є першочерговим для систем пасивного захисту.

Окрім вищезгаданого, ці проблеми цікаві і для інших: металургія, хімічна технологія, енергетика, та ін. Через складність реальних фізичних систем досліджувати процеси та з ними інші, наприклад фазова кристалізація та течії через пористі (зернисті) середовища, розглядаються та моделюються за допомогою так званого консервативного підходу. Слід зазначити, що дослідження таких складних проблем набули реальності лише в останні десятиліття завдяки досягненням інформатики та математичного моделювання.

Модель впорскування струменя розплаву коріуму в басейн летючого теплоносія з урахуванням пари, що утворюється внаслідок високотемпературної взаємодії струменя з летким теплоносієм, розглянемо за схематичним зображенням, наведеним на рис. 126. Основними параметрами турбулентного багатофазного струменя є початкова швидкість струменя розплаву, інтенсивність потоку пари, що визначається різницею температур розплаву і води, радіус сопла  $a$ . Фази - пара, рідина (компоненти розплаву і води), тверді частинки коріуму після затвердіння охолоджених частинок.

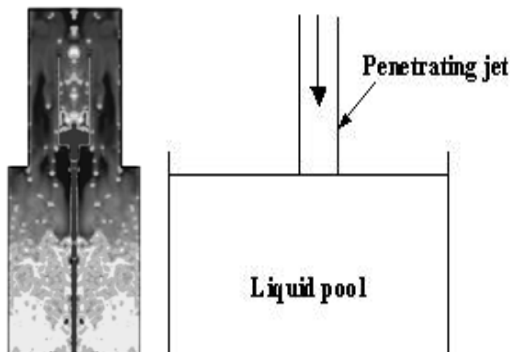


Рис. 126 Експериментальні фото та схема струменя, що входить в басейн

Динаміку струменя розплаву коріуму, що проникає у водний басейн, досліджували низка дослідників. Але проблема вимагає більш детального вивчення, особливо для товстих струменів, які пронизують резервуар іншої рідини під впливом домінуючих сил інерції, опору та сили плавучості. Для тонких струменів вище було показано, що нестійкість струменя залежить від згинальних збурень його осі. Тут у центрі уваги поведінка проникнення товстого струменя в басейн рідини разом із визначенням довжини проникнення як функції струменя та властивостей басейну.

Розроблено нелінійну модель проникнення струменя та проведено аналіз для ряду граничних випадків, які можуть зацікавити дослідників та інженерів у галузі безпеки ядерної енергетики, а також в інших областях струминних течій. Основною особливістю і новизною є врахування впливу пари на проникнення високотемпературного струменя в летючий теплоносій.

Нелінійна модель струменя, що проникає в басейн іншої рідини, формулюється розглядаючи струмінь як тіло змінної маси в басейні:

$$\rho_1 h \frac{dV_1}{dt} = g(\rho_1 h - \rho_2 x) - \alpha \rho_2 V_1^2 - \beta \rho R T_1, \quad (98)$$

Тут  $h$  - довжина струменя,  $x$  - поточна глибина проникнення струменя,  $V_1$  - швидкість струменя,  $V_1 = dx/dt$ ,  $\rho_1, \rho_2$  - щільності струменя та теплоносія відповідно,  $\rho$  - щільність пари,  $g$  - прискорення сили тяжіння,  $R, T_1$  - універсальна газова стала та температура струменя,  $\alpha, \beta$  - константи, де можна взяти для спрощення  $\alpha = 0.5$  і  $\beta = 1$ . Якщо пара відсутня,  $\beta = 0$ . Струмінь, що пронизує басейн, розглядається як тіло змінної маси, припускаючи, що він

рухається під дією сили інерції (що діє проти опору), сил плавучості та тиску пари, що піднімається з басейну на струмінь.

Поверхневі сили мають бути незначними порівняно з вищезгаданими. Радіус струменя вважається постійним під час проникнення протягом деякої частини проникнення. Це дозволяє поетапно розрахувати процес проникнення струменя в загальному випадку, беручи спочатку постійний радіус струменя, потім інший постійний радіус струменя і т.д. Таким чином, рівняння (98) імпульсу струменя, що розглядає струмінь як тіло змінної маси, далі записується наступним чином:

$$h \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \rho_{21} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + g(\rho_{21} x - h) + b = 0, \quad (99)$$

де  $\rho_{21} = \rho_2 / \rho_1$  і  $b = \beta RT_1 \rho / \rho_1$ .

Початкові умови для рівняння (99) задаються у вигляді

$$t=0, \quad x=0, \quad V_1 = \frac{dx}{dt} = V_0; \quad (100)$$

де  $V_0$ - швидкість струменя до контакту з басейном.

Задача Коші (99), (100) представлена для процесу проникнення струменя з урахуванням пари на струмені. Пишеться в розмірній формі. У багатьох випадках для узагальнення отриманих результатів і проведеного аналізу задачу Коші (99), (100) краще розв'язувати в безрозмірному вигляді:

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} = - \left[ \varepsilon \alpha \rho_{21} \bar{v}^2 + \frac{1}{Fr^2} (x \varepsilon \rho_{21} + \bar{b} - 1) \right], \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{v}, \quad \bar{x} \leq 1/\varepsilon; \quad (101)$$

$$\bar{t} = 0, \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{v} = \bar{v}_n, \quad (102)$$

Тут за масштаби для швидкості прийнято  $V_0$ , для відстані  $a$ , для часу -  $a/V_0$ .

Останній член у рівнянні (101) дорівнює  $(\rho_{21}-1)/Fr^2$ , коли  $\bar{x} > 1/\varepsilon$ .  $Fr^2 = V_0^2 / (ga)$  -

число Фруда,  $\varepsilon = a/h$ - відношення довжини струменя до його радіуса,  $\bar{b} = n/V_0^2$

- співвідношення між потенціальною енергією пари та кінетичною енергією струменя,  $\bar{v}_n = 1$ - за припущенням про незначний удар струменя з вільною

поверхнею басейну, або  $\bar{v}_n = 1 - 4\varepsilon \rho_{21} / (3\pi)$ - за рахунок цього явища.

Отриманий таким чином масив рівнянь з двох рівнянь першого порядку (101) з початковими умовами (102) описує особливості проникнення струменя в басейн з урахуванням дії пари проти проникнення струменя.

За  $x \geq h$  перше диференціальне рівняння (101) можна проінтегрувати шляхом введення нової змінної  $y = dx/dt$ . Рішення є:

$$\text{За } \rho_{21} > 1 - \frac{b}{gh}, \quad \frac{dx}{dt} = \gamma_1 t g \left[ \gamma_1 \left( c_1 - \frac{\alpha \rho_{21}}{h} t \right) \right]; \quad (103)$$

$$\text{За } \rho_{21} < 1 - \frac{b}{gh}, \quad \frac{dx}{dt} > \gamma_2, \quad \frac{dx}{dt} = -\gamma_2 c t h \left[ \gamma_2 \left( c_2 - \frac{\alpha \rho_{21}}{h} t \right) \right]; \quad (104)$$

$$\text{За } \rho_{21} < 1 - \frac{b}{gh}, \quad \frac{dx}{dt} < \gamma_2, \quad \frac{dx}{dt} = -\gamma_2 t h \left[ \gamma_2 \left( c_3 + \frac{\alpha \rho_{21}}{h} t \right) \right], \quad (105)$$

де  $\epsilon: \gamma_1^2 > 0, \gamma_2^2 > 0, c_1, c_2, c_3$  - константи, обчислені з рішення  $x \leq h$ :

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{gh(\rho_{21}-1)+b}{\alpha\rho_{21}}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{gh(1-\rho_{21})-b}{\alpha\rho_{21}}}, \quad \gamma_2^2 = -\gamma_1^2;$$

і  $\text{cth}z = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}$ ,  $\text{th}z = 1/\text{cth}z$ . Розв'язок (103)-(105) отримано для граничного

випадку загального розв'язку  $x > h$ .

Інтегруючи рівняння (103)-(105), можна отримати відповідну глибину проникнення струменя в басейн. Масив рівнянь (101) має особливу точку  $\bar{x}_0 = (1-\bar{b})\rho_{12}/\epsilon$ ,  $\bar{v}_0 = 0$ , звідки випливає  $\bar{x}_0 = \rho_{12}/\epsilon$ ,  $\bar{v}_0 = 0$  за відсутності вибуху пари. У разі відсутності випаровування ( $\bar{b}=0$ ) особливість відсутня, якщо теплоносій легший за струмінь, що відповідає більшості випадків тяжких аварій на АЕС, де в основному струмінь коріуму надходить у водний басейн. Пароутворення призводить до зменшення проникнення струменя до нуля у разі вибуху пари.

Розплав коріуму може бути навіть викинутий з басейну внаслідок вибуху пари,  $\bar{b} > 1$ . Без випаровування особлива точка йде глибше в басейн, так що глибина проникнення струменя збільшується зі зменшенням відношення радіуса струменя до його довжини і зі зменшенням співвідношення щільності в басейні і в струмені. Поділимо перше рівняння системи (101) на друге і вийде рівняння фазових траєкторій системи (101) з початковими умовами (102):

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} = -\frac{\epsilon\alpha\rho_{21}Fr^2\bar{v}^2 + \epsilon\rho_{21}\bar{x} + \bar{b} - 1}{Fr^2\bar{v}}, \quad \bar{x} = 0, \quad \bar{v} = \bar{v}_n. \quad (106)$$

Диференціальне рівняння першого порядку (106) для кожної точки  $(\bar{x}, \bar{v})$  визначає відповідний напрямок кривої  $d\bar{v}/d\bar{x}$ , що проходить через неї. Поле

траєкторій дозволяє отримати ескіз  $\bar{v}(\bar{x})$  і згодом визначити розв'язок за заданими початковими значеннями  $\bar{x}$  і  $\bar{v}$ . Можна почати з побудови геометричної множини точок, що мають постійні ізокліни  $d\bar{v}/d\bar{x} = m$  (лінії з рівними градієнтами швидкостей за напрямком руху струменя). Таким чином, з урахуванням вищесказаного, виходить:

$$\varepsilon\alpha\rho_{21}Fr^2\bar{v}^2 + mFr^2\bar{v} + b + \varepsilon\rho_{21}\bar{x} - 1 = 0,$$

звідки виходить наступне

$$\bar{v}_{1,2} = \frac{-mFr \pm \sqrt{m^2Fr^2 - 4\varepsilon\alpha\rho_{21}(b + \varepsilon\rho_{21}\bar{x} - 1)}}{2\varepsilon\alpha\rho_{21}Fr}. \quad (107)$$

Результати чисельного моделювання фазових траєкторій струменя, що пронизує легкий басейн, представлені на рис. 127, де:

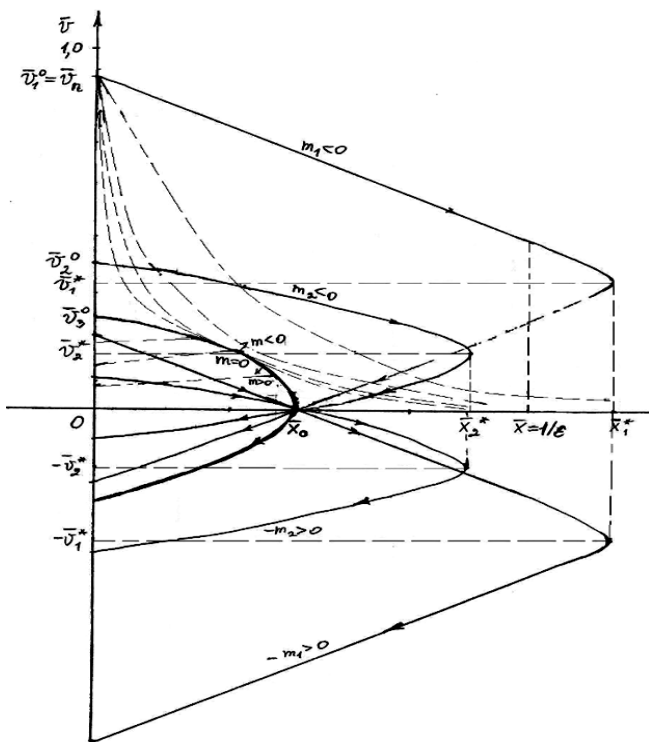


Рис. 127 Фазовий портрет струменя, що проникає до басейну

За отриманим розв'язком (107) розрахували значення швидкості струменя, яка дає максимальну глибину проникнення струменя в басейн для змінних параметрів системи, наприклад, за  $m=0$ :  $\bar{x}^* = \bar{x}_0$ .

$$m_1 = (d\bar{v}/d\bar{x})_{\bar{x}=0} < 0, \quad m_2 < 0, \quad m_2 > m_1, \quad m_3 = 0, \\ m_4 > 0, \quad m_4 = -m_2, \quad m_5 > 0, \quad m_5 = -m_1,$$

$\bar{x}^*$  - максимальна глибина проникнення струменя (після цієї точки відбувається зупинка або рух назад),  $x_0$  є критичною точкою (крізь неї проходять усі ізокліни). Струмінь проходить через цю точку, поки швидкість не стане нульовою, якщо вона почне проникати в басейн із зменшенням швидкості.

## ВИСНОВОК ДО МОНОГРАФІЇ

Поле турбулентних неоднорідних струминних течій зараз широке. Щомісяця публікуються нові наукові статті. Проблема математичного моделювання та розробка нових експериментальних методик актуальна для управління турбулентними струминними течіями в ряді технологічних і технічних процесів і пристроїв. Застосування в різних сферах: горіння, аеродинамічний шум, рух, хімічна промисловість і металургія та багато інших.

Керування інтенсивністю змішування компонентів у струминних течіях здійснюється за допомогою параметричних дій, процесів нестійкості тощо, напр. турбулентне змішування хімічних речовин у камерах згорання здійснюється не тільки для підвищення ефективності згорання, але й для зменшення викидів забруднюючих речовин. Дивно, що не так багато робіт було зроблено щодо двофазних потоків незмішуваних рідин, таких як вода та нафта, які представляють конкретні випадки двофазних потоків з обома деформівними рідкими фазами. Це стало ключовим моментом у розробці струменевої сталеплавильної машини, запропонованої професором А.І. Накорчевським, який розробив новий метод. І ми були першими, хто здійснив математичне моделювання та обчислювальні експерименти.

Немає аналогів методу Накорчевського для турбулентних гетерогенних струменів, де критичною точкою є дослідження детального розподілу фаз у випадку близького співвідношення густин (наприклад, вода та нафта, розплав металу та шлак тощо). Теоретичні та експериментальні методи вперше були розроблені для вивчення структури турбулентних струменів, стійкості та властивостей перемішування в різних умовах вільного та обмеженого струменів. Не багато робіт було зроблено щодо двофазних потоків незмішуваних рідин, як вода та нафта, які представляють двофазні потоки з обома рідкими фазами, що деформуються. Процеси перемішування і теплопередачі в таких двофазних струминах різко залежать від розподілу фаз і їх взаємодії всередині області потоку. Проф. Накорчевський вирішив цю проблему методом, заснованим на введенні функції-індикатора фаз. Відповідно до цього також був розроблений і застосований спеціальний датчик для вимірювання параметрів потоку для кожної з фаз разом з їх кількістю в заданій точці простору.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Накорчевский А.И. Гетерогенные турбулентные струи. Киев: Наукова думка, 1980, 142 с.
2. Накорчевский А.И., Казачков И.В. Расчет гетерогенной турбулентной струи. В кн.: Системы автоматизации непрерывных технологических процессов, Институт кибернетики НАНУ, 1979, С. 68-79.
3. Kazachkov I.V. Approaches for Mathematical Modeling and Experimental Study of the Turbulent Flows of Mutually Immiscible Liquids (Oil-Water)// International Journal of Petroleum and Petrochemical Engineering (IJPPE), 2018, 4(1), p.70-81.
4. Казачков И.В. Математическое моделирование гетерогенных турбулентных струй в цилиндрической камере // Автоматика, 1980, т. 13, с. 1-6.
5. Казачков И.В., Накорчевский А.И. Линии тока в турбулентной двухфазной струе двух несмешивающихся жидкостей/ Тезисы докладов V Всесоюзного совещания по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 1981.
6. Казачков И.В. Исследование турбулентного смешения и защиты стенки с помощью гарниссажа в струйных аппаратах, работающих на взаимно несмешивающихся жидкостях. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Киевский государственный университет им. Т.Г. Шевченко, 1981. 138 с.
7. Накорчевский А.И., Басок Б.И. Гидродинамика и теплообмен в гетерогенных системах и аппаратах пульсационного типа. Киев: Наукова думка, 2001. 348 с.
8. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: ИТФ, 1983, 238 с.
9. Nigmatulin R.I. and Friedly J.C. [Dynamics of Multiphase Media. CRC Press: Volumes 1 & 2. Revised and Augmented Edition \(v. 1 & v. 2\).](#) Oct 1, 1990, 878 p.
10. Kolev N.I., Multiphase Flow Dynamics 1. 2015. Springer International Publishing. 840 p. (totally 5 volumes by different applications including thermo hydraulics in nuclear energy processes).
11. Гиневский А.С. Теория турбулентных струй и следов. Интегральные методы расчета. М.: Машиностроение, 1969. 400 с.
12. Kazachkov I.V. Approaches for Mathematical Modeling and Experimental Study of the Turbulent Flows of Mutually Immiscible Liquids (Oil-Water)// International Journal of Petroleum and Petrochemical Engineering (IJPPE). - Volume 4, Issue 1, 2018, P. 1-12.
13. Kazachkov I.V., Paladino D. and Sehgal B.R. Ex-vessel coolability of a molten pool by coolant injection from submerged nozzles/ 9<sup>th</sup> Int. Conf. Nucl. Energy Devel. April 8-12, 2001. Nice, France.

14. [Abramovich](#) G.N. (Volume editor [Leon Schindel](#)). Theory of Turbulent Jets Cambridge, Mass., USA: MIT Press.- 1963, 671 pp.
15. Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Теория турбулентных струй (2-е переработанное и дополненное издание).- М.: Наука, 1984, 720 с.
16. Kotousov L.S. Measurement of the Water Jet Velocity at the Outlet of Nozzles with Different Profiles// Technical Physics 50 (9), 1112–1118 (2005).
17. USSR invention No.314 year 1986 Register “Phenomenon of abnormal high thrust increase in gas ejection process with pulse active jet”.
18. Yakovlevskiy O.V. The Mixing of Jets in a Channel with Variable Cross Section// Izvestiya Akademii NaukSSSR, OTN, Mekhanika i Mashinostroyeniye.- 1962, No. 1, P. 66-72 (English translation FTD-TT-62-1571).
19. Накорчевский А. И. Основные закономерности стабилизации течений в струйных аппаратах. –В кн.: Гидравлика и гидротехника.- Киев: Техника.- 1966, №4, С. 127-145.
20. Paladino D. Investigation of mechanisms for melt coolability with bottom coolant injection, *Lic. Eng. Thesis, RIT/NPS*, (2000).
21. Накорчевский А.И. Реактор для непрерывного рафинирования металла/ Патент СССР №492554.- Бюллетень.- 1975.- №43.

## Додаток 1.

### Підхід до моделювання багатофазних потоків як випадкових процесів<sup>14</sup>.

Розглянуто базову систему диференціальних рівнянь для багатофазного потоку із запровадженням ймовірності кожної фази в потоці. Основний аналіз зосереджений у разі гетерогенного двофазного потоку. Рівняння збереження маси, імпульсу та енергії отримані у припущенні, що параметри фаз, що взаємодіють, є учасниками статистичного процесу. Паралельно розглядається динамічна система за теоремою Колмогорова для двох станів статистичної системи (фаз двофазної суміші). Ймовірність фаз у потоці взята далі для порівняння з ймовірністю та параметрами двофазного потоку з рівнянь динаміки потоку. Аналіз параметрів двофазного потоку виконується по відношенню до існуючих режимів зі статистичної точки зору на основі досяжних параметрів потоку. Отримані результати призначені для подальшого обговорення, дослідження, порівняння з експериментальними даними та з результатами інших дослідників багатофазних потоків.

#### 1. Фізико-математичні моделі суцільних середовищ та моделювання багатофазних течій

Створення фізичних і математичних моделей суцільних середовищ і подальше дослідження фізико-механічних та інших процесів, що протікають у них, найчастіше базується на гіпотезах неперервності середовища та неперервної  $n$ -кратної диференційовності всіх функцій, що описують параметри суцільного середовища, майже всюди, за винятком окремих точок, ліній або поверхонь. Це дозволяє використовувати феноменологічні підходи, застосовуючи розвинені методи математичного аналізу та математичної фізики. Однак, хоча феноменологічний підхід дозволив вирішити ряд завдань механіки суцільного середовища, які вже стали класичними і є в даний час одними з найбільш часто застосовуваних, необхідно враховувати, що багато процесів у суцільних середовищах не задовольняють цій фізичній моделі. Наприклад, у турбулентній течії поля швидкості не описуються в класі неперервних або майже всюди неперервних функцій, а плівкова течія, що стискається в напрямку дотичної до вільної поверхні, стає ніде не диференційовною в цьому напрямку, навіть якщо залишається неперервною (пилоподібна поверхня з перпендикулярними зубами). Інші приклади: розпилення та кавітація. Тут неможливо здійснити індивідуалізацію навіть обсягів, оскільки неперервне середовище перетворюється на набір вільних точок.

У гетерогенних середовищах поля швидкостей, температур тощо дробляться, а об'єднання двох різних полів в один континуум, багатозначність параметрів відноситься не до точки індивідуалізованої середовища, а до точки простору, в якій об'єднані індивідуалізовані точки різних параметрів. До неklasичних задач механіки суцільних середовищ, які не задовольняють гіпотез феноменологічної теорії, застосовуються статистичний підхід та різні варіанти варіаційних методів [1-6]. Зважаючи на математичну складність, статистичний (мікроскопічний) підхід найчастіше використовується для обґрунтування феноменологічних (макроскопічних) моделей суцільних середовищ, якщо тільки він не є єдиним: розріджені гази, плазма тощо.

---

<sup>14</sup> Ivan V. Kazachkov. Modelling of Multiphase Flow as Random Process// *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)* 3: 137-149, 2019.

Строго кажучи, у природі немає суцільних середовищ, проте гіпотеза неперервності добре описує їх на макрорівні, а модель суцільних середовищ дозволяє використовувати потужну теорію неперервних функцій, диференціальне та інтегральне числення.

Для систем, що не відповідають гіпотезі неперервності займаного простору, більш адекватні фрактальна [7] теорія (об'єкти дробової розмірності) та розвинене інтегродиференціальне числення довільного порядку [8, 9] (а не тільки цілі похідні та інтеграли, як у класичному численні). Тут використовується феноменологічний підхід, у якому побудова математичних моделей суцільних середовищ виходить з припущення, що кожна точка середовища (фізично нескінченно малий об'єм), фізико-математичний стан якої характеризується набором визначальних параметрів, запроваджених з урахуванням експериментальних даних, і теоретичних досліджень. В даний час з позиції феноменологічного підходу розроблено такий набір математичних моделей різних класів задач з урахуванням їх специфічних особливостей, що назріла необхідність їх систематизації та розробки основних принципів математичного моделювання процесів у суцільних середовищах. При розробці нових математичних та чисельних моделей необхідно виходити з модульного принципу, що дозволяє максимально уніфікувати процес моделювання і полегшити використання комп'ютерних чисельних моделей різними дослідниками у різних завданнях.

При феноменологічному підході побудова математичних моделей суцільних середовищ полягає в припущенні, що кожна точка середовища (фізично нескінченно малий об'єм), фізико-механічний стан якої характеризується набором визначальних параметрів, запроваджених з урахуванням експериментальних і теоретичних даних чи статистично усереднених функцій (наприклад, температури). Загальні рівняння динаміки суцільних середовищ будь-якої структури (у тому числі і гетерогенної суміші, що розглядається без взаємодії фаз, що може не враховуватися при вивченні руху як однорідного складного суцільного середовища), можуть бути представлені у вигляді:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \vec{v}), \quad (1)$$

$$\rho(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v}) = \operatorname{div} P + \rho \vec{F} - \sum_{j=1}^N \vec{v} \nabla (\rho_j \vec{v}_j), \quad (2)$$

$$\rho(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{v} \nabla e) = \operatorname{div}(\vec{q} + P \vec{v}) + \rho \vec{F} \vec{v} + \sum_{j=1}^N [\rho_j \vec{F}_j \vec{v} - \operatorname{div}(\rho_j e_j \vec{v})], \quad (3)$$

де  $\rho$ - щільність гетерогенного середовища,  $\vec{v}$ - вектор швидкості гетерогенного середовища,  $t$ -час,  $P$ -тензор напруг,  $\vec{F}$ - об'ємна сила,  $\rho_j, \vec{v}_j$ - параметри компонентів середовища (аналогічно для інших параметрів з індексами),  $e$ - питома щільність енергії,  $q$ - питома об'ємна енергія.

Перше рівняння (1) виражає закон збереження маси, друге (2) – баланс імпульсу, третє (3) – закон збереження енергії. Для оборотних процесів некомпенсована теплота дорівнює нулю. Крім внутрішньої енергії та ентропії використовуються інші функції стану та додаткові термодинамічні співвідношення. У разі гетерогенного середовища, коли необхідно враховувати обмін масою, імпульсом та енергією між фазами всередині об'єму або на межах, у масиві рівнянь (1) - (3) повинні бути явно вказані члени обміну масою, імпульсом та енергією між фазами гетерогенної суміші. Саме це і становить основну проблему в механіці гетерогенних середовищ.

## 2. Статистичний підхід до моделювання багатофазних потоків

Вважатимемо, що кожна фаза присутня в даній точці суцільного середовища з імовірністю. Розглянемо взаємодію фаз багатофазного потоку згідно з теоремою Колмогорова [10, 11] для марковських процесів. Локально можна розглядати взаємодію фаз і аналізувати

марковські процеси двох станів (взаємодіючі фази 1 і 2) або навіть більше (у кожній точці середовища одночасно можуть взаємодіяти кілька фаз потоку) (схематично див. рис. 1).

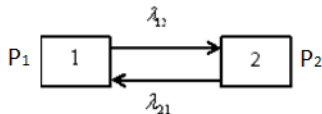


Рис. 1 Взаємодія фаз як марковський процес

Тут  $P_i$  - ймовірність і-ї фази в даній точці середовища,  $\lambda_{ij}$  - інтенсивність переходу і-го стану в j-й. Якщо кілька фаз взаємодіють, то всі фази представлені, як показано на рис. 1, як взаємодіючі актори марковського процесу. Інтенсивності взаємодії фаз визначаються фізичними властивостями і режимом течії. Згідно з теоремою Колмогорова ці ймовірності обчислюються з наступних рівнянь

$$\frac{dP_i}{dt} = -\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} P_i + \sum_{j=1}^m \lambda_{ji} P_j, \quad \sum_{i=1}^m P_i = 1. \quad (4)$$

У випадку рівнянь (1)-(3) для турбулентної багатофазної течії функцію-індикатор можна розглядати як математичне сподівання, так що усереднені за часом розв'язки рівнянь (4) на інтервалі часу  $[0, T]$  приводять до функцій-індикаторів фаз. У разі двох фаз рівняння (4) з відповідними початковими умовами виглядають наступним чином

$$\frac{dP_1}{dt} = -\lambda_{12} P_1 + \lambda_{21} P_2, \quad \frac{dP_2}{dt} = -\lambda_{21} P_2 + \lambda_{12} P_1, \quad P_1 + P_2 = 1; t = 0, P_1 = 1, P_2 = 0. \quad (5)$$

Ми можемо розглянути будь-яку іншу відправну точку для фаз, це одна з них, взята в (5) лише для прикладу. Задача Коші (5) містить три рівняння для двох функцій, тому є перевизначеною. Таким чином, ми можемо розв'язати систему будь-яких двох рівнянь, а потім помістити отриманий розв'язок у третє. Розв'язком (5) є

$$P_1 = \frac{\lambda_{12} e^{-(\lambda_{12} + \lambda_{21})t} + \lambda_{21}}{\lambda_{12} + \lambda_{21}}. \quad (6)$$

Після усереднення за часом дає

$$P_1 = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{12} + \lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} + \lambda_{21}} \cdot \frac{1 - e^{-(\lambda_{12} + \lambda_{21})T}}{(\lambda_{12} + \lambda_{21})T}. \quad (7)$$

З плином часу це переходить до наступного простішого виразу

$$P_1 = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{12} + \lambda_{21}} = \frac{1}{\lambda_{12}/\lambda_{21} + 1} = \frac{1}{\gamma + 1}, \quad \gamma = \lambda_{12}/\lambda_{21}, \quad \frac{dP_1}{dz} = -\frac{1}{(\gamma + 1)^2} \frac{d\gamma}{dz}.$$

Очевидно, що функція-індикатор  $B_1$  залежить від інтервалу усереднення, оскільки фази взаємодіють. За великим часовим інтервалом  $P_1 = \lambda_{21}/(\lambda_{12} + \lambda_{21})$ , так що він визначається інтенсивностями взаємодії фаз. Оскільки в кожній точці потоку ці коефіцієнти різні, функція-індикатор змінюється від точки до точки. За малий проміжок часу отримуємо  $B_1=1$  з точністю до лінійних членів на  $T$ . Кожна фаза займає деяку частину елементарного об'єму гетерогенного середовища: об'ємний вміст  $N$  фаз задовольняє рівняння  $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ , щільність середовища виражається через реальні щільності фаз:  $\rho = \sum_{j=1}^N \rho_j \alpha_j$ . У кожній точці неоднорідного середовища визначено  $N$  параметрів, що стосуються континууму (щільності, швидкості, температури тощо). Сукупність континуумів, кожен з яких відповідає своїй фазі і заповнює однаковий об'єм, називається багатошвидкісним континуумом.

Такий підхід застосовується в більшості багатофазних методів, за винятком лише кількох із них, як у [12].

Використовуючи описаний підхід із введенням імовірності фаз у кожній точці потоку, усі характеристики суміші  $a^l(t)$  (маса, швидкість, імпульс, енергія тощо) відповідних характеристик різних фаз  $a_i^l(t)$  у багатофазному потоці було запропоновано виразити так:

$$a^l(t) = \sum_{i=1}^m P_i(t) a_i^l(t), \quad (8)$$

де  $P_i(t)$  введено як вищезазначене і пов'язане з так званою функцією-індикатором  $B_i(t)$  Накорчевського [12]. Підсумовування рівнянь суміші за всіма фазами дає рівняння неоднорідного середовища як єдиної системи, без урахування внутрішньої структури. Така модель не демонструє особливостей міжфазної взаємодії в гетерогенній суміші. Навпаки, облік взаємодії макроскопічних включень фаз призводить до необхідності врахування умов спільної деформації та руху фаз, впливу форми та кількості включень, їх розподілу в просторі, фазових перетворень тощо.

Якщо фізико-механічні процеси в континуумах досить точно описуються неперервними або майже всюди неперервними функціями координат і часу, то можна замінити систему інтегральних рівнянь збереження на відповідні диференціальні рівняння. Однак для реальних неперервних середовищ, схильних до зовнішніх впливів, класичні методи можуть бути неприйнятними, через що варіаційні та чисельні методи, засновані на використанні інтегральних кореляцій, залишаються корисними у випадку тріщинних полів і середовищ, якщо інтегрування за Ріманом замінити інтегруванням за Лебегом. В області неперервного або майже всюди неперервного руху суцільного середовища за допомогою формули Гауса-Остроградського можна перейти від інтегральних рівнянь балансу до системи диференціальних рівнянь, що описують термогідродинамічні процеси в неоднорідному середовищі з урахуванням спільного руху фаз і міжфазного обміну масою, імпульсом і енергією.

Основною перешкодою у використанні цієї системи для математичного моделювання гетерогенних середовищ є необхідність уточнення законів взаємодії фаз, що є надзвичайно складним. Закон деформації неоднорідного середовища залежить не тільки від полів швидкостей, тиску і температури фаз; тому визначення закономірностей міжфазної взаємодії навіть для окремих випадків є дуже складним завданням. І все-таки облік розривів полів на межах розділу вкрай необхідний для деяких практично важливих завдань.

Досить слабкий прояв міжфазної взаємодії в гетерогенному середовищі, для опису процесів, що відбуваються в ньому, може бути використана система диференціальних рівнянь, отримана з рівнянь збереження кожного компонента гетерогенної суміші шляхом підсумовування. Але дивно, що рівняння балансу імпульсу та енергії залежать від відносного руху фаз всередині гетерогенної суміші. З (8) для двофазного потоку отримуємо

$$a^l(t) = P_1(t)a_1^l(t) + P_2(t)a_2^l(t) = P_1(t)a_1^l(t) + (1 - P_1(t))a_2^l(t) = a_2^l(t) + \frac{P_1(t)(a_1^l(t) - a_2^l(t))}{1} \quad (9)$$

### 3. Масив рівнянь збереження маси, імпульсу та енергії в двофазному потоці

Відповідно до вищевикладеного, система рівнянь для двофазної течії нестисливих рідин, що не змішуються, без закручування ( $\partial\varphi/\partial r=0$ ) у циліндричній системі координат  $(r, \varphi, z)$  виглядає наступним чином.

$$\frac{\partial}{\partial r} \{[\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)][u_2 + P_1(u_1 - u_2)]\} + \frac{1}{r} [\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)][u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{\partial}{\partial z} \{[\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)][w_2 + P_1(w_1 - w_2)]\} + \frac{\partial}{\partial t} [\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)] = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)]^2 \right. \\
 & \quad \left. + [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \frac{\partial}{\partial z} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \right\} \cdot \\
 & \cdot [\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)] + \frac{\partial}{\partial r} [p_2 + P_1(p_1 - p_2)] \\
 & \quad = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] \frac{\partial}{\partial r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \right\} + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] \frac{\partial}{\partial z} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \right\} \\
 & \quad \quad - \frac{1}{r^2} [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \\
 & \quad \quad + \frac{\partial}{r \partial r} [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] [u_2 + P_1(u_1 - u_2)], \tag{10} \\
 & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)]^2 \right. \\
 & \quad \left. + [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \frac{\partial}{\partial r} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\} \cdot \\
 & \cdot [\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)] + \frac{\partial}{\partial z} [p_2 + P_1(p_1 - p_2)] \\
 & \quad = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] \frac{\partial}{\partial r} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\} + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] \frac{\partial}{\partial z} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\} + \frac{\partial}{r \partial r} \{ [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] [w_2 + \\
 & \quad P_1(w_1 - w_2)] \} + [\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)] g, \\
 & [\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)] [c_{V2} + P_1(c_{V1} - c_{V2})] \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \cdot \right. \\
 & \quad \cdot \frac{\partial}{\partial r} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \frac{\partial}{\partial z} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \left. \right\} \\
 & \quad \quad + [p_2 + P_1(p_1 - p_2)] \cdot \\
 & \quad \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{1}{r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{\partial}{\partial z} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\} = \\
 & = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ [\kappa_2 + P_1(\kappa_1 - \kappa_2)] \frac{\partial}{\partial r} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \right\} + \frac{\partial}{r \partial r} \{ [\kappa_2 + P_1(\kappa_1 - \kappa_2)] [T_2 + \\
 & P_1(T_1 - T_2)] \} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ [\kappa_2 + P_1(\kappa_1 - \kappa_2)] \frac{\partial}{\partial z} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \right\} + \frac{1}{2} [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \\
 & \mu_2)] \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{\partial}{\partial r} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\}^2,
 \end{aligned}$$

де  $r$ - радіальна координата,  $z$ - напрямлена вздовж осі,  $u, w$ - відповідні складові швидкості,  $p$  і  $T$  - тиск і температура;  $c, \kappa, \mu$  - теплоємність, теплопровідність і коефіцієнт динамічної в'язкості відповідно. Тут гравітаційна сила спрямована вздовж координати  $z$ , так що вона діє в тому ж напрямку, що і імпульс потоку (рідина тече вертикально вниз). Якщо потік рідини рухається вертикально вгору, знак сили тяжіння має бути негативним, що можна пояснити знаком  $g$  (прискорення сили тяжіння).

#### 4. Масив рівнянь стаціонарного двофазного потоку в циліндричній системі координат

З масиву рівнянь (10) випливає наступне, для випадку постійних фізичних властивостей фаз, з урахуванням виразу (6), отриманого для ймовірностей фаз:

$$\begin{aligned}
 & [u_2 + P_1(u_1 - u_2)](\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial P_1}{\partial r} \\
 & \quad + [\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)] \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{u_2 + P_1(u_1 - u_2)}{r} \right\} + \\
 & + [w_2 + P_1(w_1 - w_2)](\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial P_1}{\partial z} + [\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)] \frac{\partial}{\partial z} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + \\
 & (\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial P_1}{\partial t} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)]^2 + \right. \\
 & [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \frac{\partial}{\partial z} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \left. \right\} \cdot [\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)] + \frac{\partial}{\partial r} [p_2 + \\
 & P_1(p_1 - p_2)] = (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial P_1}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] \cdot \\
 & \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial P_1}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] - \frac{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)}{r^2} [u_2 + \\
 & P_1(u_1 - u_2)] + \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \frac{\partial P_1}{\partial r} + \\
 & \quad + [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] \frac{\partial^2}{\partial z^2} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{1}{r} [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] \frac{\partial}{\partial r} [u_2 + \\
 & P_1(u_1 - u_2)], \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)]^2 + [u_2 + \right. \\
 & \quad \left. P_1(u_1 - u_2)] \frac{\partial}{\partial r} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\} \cdot \\
 & \cdot [\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)] + \frac{\partial}{\partial z} [p_2 + P_1(p_1 - p_2)] = (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial P_1}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + \\
 & + [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] \frac{\partial^2}{\partial r^2} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial P_1}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + \\
 & \quad + [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] \frac{\partial^2}{\partial z^2} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + \frac{\partial}{r \partial r} \{ [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] [w_2 + \\
 & \quad P_1(w_1 - w_2)] \} + [\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)] g, \quad (11) \\
 & [\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)] [c_{v2} + P_1(c_{v1} - c_{v2})] \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \cdot \right. \\
 & \quad \left. \cdot \frac{\partial}{\partial r} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \frac{\partial}{\partial z} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \right\} \\
 & \quad + [p_2 + P_1(p_1 - p_2)] \cdot \\
 & \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{1}{r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{\partial}{\partial z} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\} = \\
 & = (\kappa_1 - \kappa_2) \frac{\partial P_1}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + [\kappa_2 + P_1(\kappa_1 - \kappa_2)] \frac{\partial^2}{\partial r^2} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + \\
 & + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{r} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{\kappa_2 + P_1(\kappa_1 - \kappa_2)}{r} \frac{\partial}{\partial r} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \\
 & \quad + + (\kappa_1 - \kappa_2) \frac{\partial}{\partial z} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \frac{\partial P_1}{\partial z} \\
 & \quad + [\kappa_2 + P_1(\kappa_1 - \kappa_2)] \frac{\partial^2}{\partial z^2} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + \frac{1}{2} [\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] \cdot
 \end{aligned}$$

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{\partial}{\partial r} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\}^2.$$

### 5. Одновимірна стаціонарна двофазна течія в циліндричній системі координат

Найпростіша одновимірна течія описується рівняннями (11) з наступною системою рівнянь ( $\partial/\partial r=0$ , русло вузьке, характеристики в основному залежать від координати  $z$  вздовж осі русла):

$$\begin{aligned} & \frac{u_2 + P_1(u_1 - u_2)}{r} + \frac{w_2 + P_1(w_1 - w_2)}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)} (\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)} \frac{\partial P_1}{\partial t} = 0, \\ & \frac{\partial^2}{\partial z^2} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \left\{ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} \left[ w_2 + P_1(w_1 - w_2) \right] \right\} \cdot \\ & \quad \cdot \frac{\partial}{\partial z} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] = \frac{u_2 + P_1(u_1 - u_2)}{r^2} + \frac{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} \frac{\partial}{\partial t} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)], \\ & \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + \left\{ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} \frac{\partial P_1}{\partial z} \right\} \frac{\partial}{\partial z} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] = \\ & = \frac{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} \frac{\partial}{\partial t} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + \frac{1}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} \frac{\partial}{\partial z} [p_2 + P_1(p_1 - p_2)] - \\ & \quad \frac{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} g, \quad [c_{V2} + P_1(c_{V1} - c_{V2})] \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + [w_2 + P_1(w_1 - \right. \\ & \quad \left. w_2)] \frac{\partial}{\partial z} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \right\} + \\ & \quad + \frac{p_2 + P_1(p_1 - p_2)}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)} \left\{ \frac{1}{r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{\partial}{\partial z} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\} \\ & \quad = \frac{\kappa_2 + P_1(\kappa_1 - \kappa_2)}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + \\ & \quad + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)} \frac{\partial}{\partial z} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)}{2[\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)]} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \right\}^2. \end{aligned}$$

Стаціонарний режим вищевказаного потоку (12), є наступним

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dz^2} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \\ & \quad + \left\{ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} \frac{dP_1}{dz} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\} \frac{d}{dz} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] = \\ & = \frac{u_2 + P_1(u_1 - u_2)}{r^2}, \quad \frac{u_2 + P_1(u_1 - u_2)}{r} + \frac{w_2 + P_1(w_1 - w_2)}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)} (\rho_1 - \rho_2) \frac{dP_1}{dz} + \frac{d}{dz} [w_2 + \\ & \quad P_1(w_1 - w_2)] = 0, \\ & \quad \frac{d^2}{dz^2} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + \left\{ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} \frac{dP_1}{dz} \right\} \frac{d}{dz} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] = \frac{1}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} \cdot \\ & \quad \cdot \frac{d}{dz} [p_2 + P_1(p_1 - p_2)] - \frac{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} g, \\ & (13) [c_{V2} + P_1(c_{V1} - c_{V2})] [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \frac{d}{dz} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + \frac{p_2 + P_1(p_1 - p_2)}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)}. \end{aligned}$$

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \frac{1}{r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{d}{dz} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\} \\ & = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)} \frac{d}{dz} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \frac{dP_1}{dz} + \\ & + \frac{\kappa_2 + P_1(\kappa_1 - \kappa_2)}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)} \frac{d^2}{dz^2} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + \frac{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)}{2[\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)]} \left\{ \frac{d}{dz} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \right\}^2. \end{aligned}$$

Також його можна представити в наступній формі

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dz^2} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \\ & + \left\{ \frac{d}{dz} \ln[\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)] - \frac{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\} \\ & \cdot \frac{d}{dz} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] = \frac{u_2 + P_1(u_1 - u_2)}{r^2}, \quad \frac{u_2 + P_1(u_1 - u_2)}{r} + \frac{w_2 + P_1(w_1 - w_2)}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)} (\rho_1 - \rho_2) \frac{dP_1}{dz} + \\ & + \frac{d}{dz} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] = 0, \quad \frac{d^2}{dz^2} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + \left\{ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} \frac{dP_1}{dz} \right\} \frac{d}{dz} [w_2 + \\ & P_1(w_1 - w_2)] = \\ & = \frac{1}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} \frac{d}{dz} [p_2 + P_1(p_1 - p_2)] - \frac{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)} g, [c_{V2} + P_1(c_{V1} - c_{V2})] [w_2 + \\ & P_1(w_1 - w_2)] \cdot \\ & \cdot \frac{d}{dz} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + \frac{p_2 + P_1(p_1 - p_2)}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)} \left\{ \frac{1}{r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \right. \\ & \left. + \frac{d}{dz} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\} = \quad (14) \\ & = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)} \frac{d}{dz} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \frac{dP_1}{dz} + \\ & + \frac{\kappa_2 + P_1(\kappa_1 - \kappa_2)}{\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)} \frac{d^2}{dz^2} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] + \frac{\mu_2 + P_1(\mu_1 - \mu_2)}{2[\rho_2 + P_1(\rho_1 - \rho_2)]} \left\{ \frac{d}{dz} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \right\}^2. \end{aligned}$$

Безрозмірна форма одновимірного стаціонарного двофазного потоку

Для узагальнення розв'язку та його аналізу масив рівнянь представлений у безрозмірному вигляді. Шкали для швидкості, довжини, тиску та температури приймаються наступними:  $u_0$ ,  $R_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$ , а для безрозмірних параметрів ми зберігаємо ті ж позначення, що й раніше для розмірних. Безрозмірна система представлена у вигляді:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d}{dz} \ln[\mu_{21} + P_1(1 - \mu_{21})] - \frac{\rho_{21} + P_1(1 - \rho_{21})}{\mu_{21} + P_1(1 - \mu_{21})} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \text{Re} \right\} \frac{d}{dz} [u_2 \\ & + P_1(u_1 - u_2)] + \\ & + \frac{d^2}{dz^2} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] = \frac{u_2 + P_1(u_1 - u_2)}{r^2}, \quad \frac{w_2 + P_1(w_1 - w_2)}{\rho_{21} + P_1(1 - \rho_{21})} (1 - \rho_{21}) \frac{dP_1}{dz} + \frac{d}{dz} [w_2 + \\ & P_1(w_1 - w_2)] + \\ & + \frac{u_2 + P_1(u_1 - u_2)}{r} = 0, \quad \frac{d^2}{dz^2} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] + \frac{d \ln[\mu_{21} + P_1(1 - \mu_{21})]}{dz} \frac{d}{dz} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] = \\ & = \frac{Eu \cdot \text{Re}}{\mu_{21} + P_1(1 - \mu_{21})} \frac{d}{dz} [p_2 + P_1(p_1 - p_2)] - \frac{\rho_{21} + P_1(1 - \rho_{21})}{\mu_{21} + P_1(1 - \mu_{21})} \frac{Ga}{\text{Re}}, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [c_{V21} + P_1(1 - c_{V21})][w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \frac{d}{dz} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \\
 & + c_{pv1} \frac{p_2 + P_1(p_1 - p_2)}{\rho_{21} + P_1(1 - \rho_{21})} \cdot Eu \cdot Ec \cdot \\
 & \cdot \left\{ \frac{1}{r} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] + \frac{d}{dz} [w_2 + P_1(w_1 - w_2)] \right\} \\
 & = \frac{(1 - \kappa_{21})c_{pv1}/Pe}{\rho_{21} + P_1(1 - \rho_{21})} \frac{d}{dz} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \frac{dP_1}{dz} + \\
 & + \frac{\kappa_{21} + P_1(1 - \kappa_{21})}{\rho_{21} + P_1(1 - \rho_{21})} \frac{d^2}{dz^2} [T_2 + P_1(T_1 - T_2)] \frac{c_{pv1}}{Pe} + \frac{[\mu_{21} + P_1(1 - \mu_{21})]c_{pv1}}{2[\rho_{21} + P_1(1 - \rho_{21})]} \left\{ \frac{d}{dz} [u_2 + P_1(u_1 - u_2)] \right\}^2 \frac{Ec}{Re}.
 \end{aligned}$$

Тут:  $Ec = u_0^2/(c_{p1}T_0)$ ,  $Ga = gR_0^3/\nu_1^2$ ,  $Eu = p_0/(\rho_1 u_0^2)$ ,  $Re = u_0 R_0/\nu_1$ ,  $Pe = u_0 R_0/a_1$ ,  $\nu_1 = \mu_1/\rho_1$ ,  $\kappa_{21} = \kappa_2/\kappa_1$ ,  $\rho_{21} = \rho_2/\rho_1$ ,  $\mu_{21} = \mu_2/\mu_1$ ,  $a_1 = \mu_1/(\rho_1 c_{p1})$ ,  $c_{pv1} = c_{p1}/c_{v1}$ . Число Еккерта  $Ec$  відіграє важливу роль, представляючи відношення кінетичної енергії на стінці до питомої ентальпії рідини, число Галілея є безрозмірною групою, що представляє відношення сил, присутніх у потоці в'язких рідин (гравітаційна\*сила імпульсу/в'язка сила),  $Eu$  – критерій Ейлера (характерний тиск  $p_0$  до кінетичної енергії потоку  $\rho_1 u_0^2$ ),  $Re$  – число Рейнольдса,  $Pe$  – число Пекле.

### Аналіз математичної моделі, отриманої для випадку одномірного стаціонарного двофазного потоку

Параметри двофазної суміші та розподілу ймовірностей фаз

Система (15) містить 4 диференціальних рівняння для 9 функцій:  $P_1$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ . Таким чином, багатофазна система не замкнена, оскільки не має замикаючих зв'язків, якими є взаємодія маси, імпульсу та енергії між фазами. Це не вирішується в загальній постановці, лише для конкретних випадків через структурний підхід. Система (15) записана для гетерогенної суміші, яка не «відчуває» взаємодії фаз. Вона може бути використана для дослідження багатофазної системи, що має деякі експериментальні дані, щоб закрити (15) для подальшого її вирішення. Можна запропонувати наступну методику вирішення цього завдання. Спочатку розглянемо відомий розподіл температури для суміші  $\bar{T} = T_2 + P_1(T_1 - T_2) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2$  і розглянемо систему (15), яка шукає розв'язок для 4 функцій:  $\bar{w} = w_2 + P_1(w_1 - w_2)$ ,  $\bar{u} = u_2 + P_1(u_1 - u_2)$ ,  $\bar{p} = p_2 + P_1(p_1 - p_2)$ ,  $P_1$ . Функція  $P_1(z)$  є лише однією з ознак багатофазної природи системи. Є також кілька термів, що залежать від  $g$ . Оскільки ми припустили, що рішення залежить лише від  $z$ , вважаємо, що це спричиняє лише  $P_1(r, z)$ . Отже, з (15) випливає:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{d}{dz} \ln \bar{\mu} - \frac{\bar{p}}{\bar{\mu}} \bar{w} Re \right) \frac{d\bar{u}}{dz} + \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} = \frac{\bar{u}}{r^2} \frac{\bar{w}}{\bar{p}} (1 - \rho_{21}) \frac{dP_1}{dz} + \frac{d\bar{w}}{dz} + \frac{\bar{u}}{r} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{w}}{dz^2} + \frac{d \ln \bar{\mu}}{dz} \frac{d\bar{w}}{dz} = \frac{Eu \cdot Re}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{p}}{dz} - \\
 & \frac{\bar{p}}{\bar{\mu}} \frac{Ga}{Re}, \quad \bar{c}_{21} \bar{w} (\alpha_1 + 2\alpha_2 z) + c_{pv1} \frac{\bar{p}}{\bar{p}} Eu \cdot Ec \left( \frac{\bar{u}}{r} + \frac{d\bar{w}}{dz} \right) = \frac{1 - \kappa_{21}}{\bar{p} Pe} c_{pv1} (\alpha_1 + 2\alpha_2 z) \frac{dP_1}{dz} + \\
 & 2\alpha_2 \frac{\bar{\kappa}}{\bar{p}} \frac{c_{pv1}}{Pe} + \frac{\bar{\mu} c_{pv1}}{2\bar{p}} \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 \frac{Ec}{Re}, \quad \bar{\mu} = \mu_{21} + P_1(1 - \mu_{21}), \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\bar{c}_{21} = c_{V21} + P_1(1 - c_{V21}), \quad \bar{\kappa} = \kappa_{21} + P_1(1 - \kappa_{21}), \quad \bar{p} = \rho_{21} + P_1(1 - \rho_{21}).$$

Спочатку розглянемо строго одновимірну систему, так що  $\bar{u} = 0$ , і врахуємо ефект температури найпростішим способом як для лінійної функції по  $z$  ( $\alpha_2 = 0$ ), тоді масив рівнянь (16) дає:

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\frac{(\rho_{21}-1)\bar{w}}{\rho_{21}+P_1(1-\rho_{21})} \frac{dP_1}{dz} = \frac{d\bar{w}}{dz}, \quad \frac{d^2\bar{w}}{dz^2} + \frac{d\ln\bar{\mu}}{dz} \frac{d\bar{w}}{dz} = \frac{Eu \cdot Re}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{p}}{dz} - \frac{\bar{p}}{\bar{\mu}} \frac{Ga}{Re},$$

$$\bar{c}_{21}\bar{w}\alpha_1 + c_{pv1} \frac{\bar{p}}{\rho} Eu \cdot Ec \frac{d\bar{w}}{dz} = \frac{1-\kappa_{21}}{\bar{\rho}Pe} c_{pv1}\alpha_1 \frac{dP_1}{dz}, \quad (17)$$

Тепер із першого рівняння системи (17) випливає наступне

$$\frac{1}{\bar{w}} \frac{d\bar{w}}{dz} = \frac{(\rho_{21}-1)}{\rho_{21}+P_1(1-\rho_{21})} \frac{dP_1}{dz}, \quad \rightarrow \frac{d\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{(\rho_{21}-1)dP_1}{\rho_{21}+P_1(1-\rho_{21})}, \quad \rightarrow \ln\bar{w} + \ln[\rho_{21} + P_1(1 - \rho_{21})] = const,$$

де з розгляду наступної граничної умови:

$$z=0, \quad \bar{w}_0 = w_{20} + P_{10}(w_{10} - w_{20}), \quad \bar{\rho}_0 = \rho_{21} + P_{10}(1 - \rho_{21}). \quad (18)$$

Тепер остаточно вираз із наведених вище рівнянь з урахуванням граничної умови (18)

$$\bar{w} = \frac{\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{\rho_{21}+P_1(1-\rho_{21})}, \quad \text{or} \quad P_1 = \frac{1}{1-\rho_{21}} \left( \frac{\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{\bar{w}} - \rho_{21} \right), \quad \frac{dP_1}{dz} = - \frac{\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{(1-\rho_{21})\bar{w}^2} \frac{d\bar{w}}{dz}. \quad (19)$$

Нульовий індекс означає, що значення приймаються за  $z=0$ . З (19) можна отримати явний вираз для ймовірності першої фази  $P_1$  з урахуванням  $\bar{w} = w_2 + P_1(w_1 - w_2)$ :

$$(1 - \rho_{21})(w_1 - w_2)P_1^2 + [(1 - \rho_{21})w_2 + \rho_{21}(w_1 - w_2)]P_1 + \rho_{21}w_2 - \bar{\rho}_0\bar{w}_0 = 0. \quad (20)$$

Аналіз коректності отриманого масиву рівнянь і функції ймовірності

Аналіз рівняння (20) показує, що для одношвидкісного двофазного потоку, коли  $w_1 = w_2 = w$ , ймовірність фази виражається  $P_1 = P_{10}w_0/w$ , де з умови  $P_1 < 1$  виконується  $w > P_{10}w_0$ , так що якщо перша фаза присутня у великій кількості у двофазному потоці, швидкість потоку не може падати в такому потоці, вона повинна зростати зі зростанням координати за участю другої фази. Але якщо перша фаза далека від максимального значення (наприклад, близька до 0), то зі зменшенням швидкості потоку кількість першої фази в гетерогенній суміші зростає. Тоді для двофазного потоку приблизно однакових щільностей ( $\rho_{21}=1$ ) з умови  $0 < P_1 < 1$  отримуємо такі вимоги:  $w_1 < \bar{\rho}_0\bar{w}_0$ ,  $w_2 > \bar{\rho}_0\bar{w}_0$ , або інший випадок  $w_1 > \bar{\rho}_0\bar{w}_0$ ,  $w_2 < \bar{\rho}_0\bar{w}_0$ . Загальний розв'язок рівняння (20)

$$(P_1)_{1,2} = \frac{(\rho_{21}-1)w_2 + \rho_{21}(w_2 - w_1) \pm \sqrt{(\rho_{21}w_1 - w_2)^2 + 4\bar{\rho}_0\bar{w}_0(1-\rho_{21})(w_1 - w_2)}}{2(1-\rho_{21})(w_1 - w_2)}, \quad (21)$$

Звідки  $D = (\rho_{21}w_1 - w_2)^2 - 4\bar{\rho}_0\bar{w}_0(1 - \rho_{21})(w_2 - w_1)$  насамперед детально аналізується, оскільки нам потрібні лише реальні значення  $P_1$  ( $D \geq 0$ ):  $(\rho_{21}w_1 - w_2)^2 \geq 4\bar{\rho}_0\bar{w}_0(1 - \rho_{21})(w_2 - w_1)$ . Очевидно, це завжди задоволено при  $\rho_{21} \leq 1$ ,  $w_2 \leq w_1$  (легша фаза має меншу швидкість), і  $\rho_{21} \geq 1$ ,  $w_2 \geq w_1$  (важча фаза має вищу швидкість). Але у випадку двофазного струменя, коли більш легка рідина йде від сопла в оточення, а більш важка рідина втягується першою фазою [12-14], це не задовольняється, тому  $(\rho_{21}w_1 - w_2)^2 \geq 4\bar{\rho}_0\bar{w}_0(1 - \rho_{21})(w_2 - w_1)$  для 2 випадків:  $\rho_{21} \leq 1$ ,  $w_2 \geq w_1$  і  $\rho_{21} \geq 1$ ,  $w_2 \leq w_1$ . Останню нерівність розв'яжемо щодо складових швидкостей з іншими вказаними параметрами:

$$(\rho_{21}w_1 - w_2)^2 \geq 4\bar{\rho}_0\bar{w}_0(1 - \rho_{21})(w_2 - w_1), \quad w_2 \leq (w_2)_1, \quad w_2 \geq (w_2)_2;$$

$$(w_2)_{1,2} = \rho_{21}w_1 + 2\bar{\rho}_0\bar{w}_0(1 - \rho_{21}) \pm 2|1 - \rho_{21}|\sqrt{\bar{\rho}_0\bar{w}_0(\bar{\rho}_0\bar{w}_0 - w_1)}.$$

Отже, квадратний корінь має бути дійсним,  $w_1 \leq \bar{\rho}_0\bar{w}_0$ . А з (22) випливає

$$\rho_{21} < 1, \quad w_2 \leq \rho_{21}w_1 + 2(1 - \rho_{21})\bar{\rho}_0\bar{w}_0 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{w_1}{\bar{\rho}_0\bar{w}_0}} \right),$$

$$w_2 \geq \rho_{21}w_1 + 2(1 - \rho_{21})\bar{\rho}_0\bar{w}_0 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{w_1}{\bar{\rho}_0\bar{w}_0}} \right); \quad (22)$$

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

$$\rho_{21} > 1, w_2 \leq \rho_{21}w_1 + 2(1 - \rho_{21})\bar{\rho}_0\bar{w}_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{w_1}{\bar{\rho}_0\bar{w}_0}}\right),$$

$$w_2 \geq \rho_{21}w_1 + 2(1 - \rho_{21})\bar{\rho}_0\bar{w}_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{w_1}{\bar{\rho}_0\bar{w}_0}}\right). \quad (23)$$

Розглядаючи двофазний потік в позитивному напрямку по  $z$ , ми повинні зробити висновок, що умови (23) повинні виконуватися при позитивних значеннях  $w_2, w_1$ .

Постановка задачі Коші для чисельного розв'язання одновимірних рівнянь

З двох інших рівнянь системи (17) можна отримати

$$\frac{d^2\bar{w}}{dz^2} = \frac{Eu \cdot \text{Re}(1 - \rho_{21})\bar{w}}{(\mu_{21} - \rho_{21})\bar{w} + (1 - \mu_{21})\bar{w}_0\bar{\rho}_0} \frac{d\bar{p}}{dz} - \frac{Ga}{\text{Re}(\mu_{21} - \rho_{21})\bar{w} + (1 - \mu_{21})\bar{w}_0\bar{\rho}_0} +$$

$$- \frac{(1 - \rho_{21})\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{[(\mu_{21} - \rho_{21})\bar{w} + (1 - \mu_{21})\bar{w}_0\bar{\rho}_0]^2} \left(\frac{d\bar{w}}{dz}\right)^2, \quad P_1 = \frac{1}{1 - \rho_{21}} \left(\frac{\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{\bar{w}} - \rho_{21}\right) \quad (24)$$

$$\bar{p} \frac{d\bar{w}}{dz} = \frac{\alpha_1(1 - \kappa_{21})\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{Pe \cdot Eu \cdot Ec(1 - \rho_{21})} \left(-\frac{1}{\bar{w}^2} \frac{d\bar{w}}{dz}\right) - \frac{\alpha_1\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{Eu \cdot Ec \cdot c_{pv1}(1 - \rho_{21})\bar{w}} [(c_{v21} - \rho_{21})\bar{w} + (1 - c_{v21})\bar{w}_0\bar{\rho}_0].$$

Наведені вище рівняння краще представити в наступній стандартній формі

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = \frac{(\mu_{21} - \rho_{21})\bar{w} + (1 - \mu_{21})\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{Eu \cdot \text{Re}(1 - \rho_{21})\bar{w}} \frac{d^2\bar{w}}{dz^2} + \frac{\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{Eu \cdot \text{Re}\bar{w}} \left[ \text{Re} + \frac{1}{\bar{w}} \left(\frac{d\bar{w}}{dz}\right)^2 \right], \quad (25)$$

$$\frac{d\bar{w}}{dz} = Pe \cdot \frac{\alpha_1\bar{w}_0\bar{\rho}_0\bar{w}[(c_{v21} - \rho_{21})\bar{w} + (1 - c_{v21})\bar{w}_0\bar{\rho}_0]}{c_{pv1}[\bar{p}\bar{w}^2 Pe \cdot Eu \cdot Ec(1 - \rho_{21}) + \alpha_1(1 - \kappa_{21})\bar{w}_0\bar{\rho}_0]}, \quad P_1 = \frac{1}{1 - \rho_{21}} \left(\frac{\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{\bar{w}} - \rho_{21}\right).$$

$$z=0, \bar{w}_0 = w_{20} + P_{10}(w_{10} - w_{20}), \bar{\rho}_0 = \rho_{21} + P_{10}(1 - \rho_{21}), \bar{p} = 1. \quad (26)$$

Задачу Коші (25), (26) можна чисельно розв'язати за вказаними безрозмірними критеріями  $Eu, Re, Ga, Pe, Ec$ . Він дасть тиск і швидкість двофазної суміші та ймовірність першої фази  $P_1$ . Далі за цими параметрами з виразів  $\bar{w} = w_2 + P_1(w_1 - w_2)$ ,  $\bar{p} = p_2 + P_1(p_1 - p_2)$ ,  $\bar{T} = T_2 + P_1(T_1 - T_2)$  можна оцінити вплив взаємодіючих фаз, що мають функцію  $P_1$ .

Порівняння ймовірності фази з потоку рідини та з теоремою Колмогорова

Згадуючи стаціонарну функцію  $P_1$ , отриману в (7) для розглянутої на початку статті теореми Колмогорова, і порівнюючи її з наведеним вище розв'язком, отримуємо:

$$P_1 = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{12} + \lambda_{21}}, P_1 = \frac{1}{1 - \rho_{21}} \left(\frac{\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{\bar{w}} - \rho_{21}\right), \text{ ог } P_1 = \frac{1}{1 + \gamma}, \gamma = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}.$$

Потім формально розгляньте їх відповідність. Визначимо з порівняння цих виразів значення  $\lambda_{12}, \lambda_{21}$ , які відображають взаємодію фаз ( $\lambda_{12}$  – інтенсивність переходу фази 1 у фазу 2 і, навпаки,  $\lambda_{21}$  – фази 2 у фазу 1). Отримуємо наступне

$$\lambda_{21} = \bar{w}_0\bar{\rho}_0 - \rho_{21}\bar{w}, \lambda_{12} = \bar{w} - \bar{w}_0\bar{\rho}_0, \gamma = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} = \frac{\bar{w} - \bar{w}_0\bar{\rho}_0}{\bar{w}_0\bar{\rho}_0 - \rho_{21}\bar{w}}. \quad (27)$$

Кореляція (27) показує, що подібні коефіцієнти взаємодії з теорією Колмогорова утворюють спільну частину  $\bar{w}_0\bar{\rho}_0$  з протилежним знаком (як у третьому законі Ньютона для двох діючих тіл) і подібні доданки  $\bar{w}, \rho_{21}\bar{w}$ , де співвідношення густини одного з них підкреслює вплив густин на взаємодію фази у двофазному потоці. З фізичної точки зору це виглядає розумно, тому розв'язок (7) можна використовувати для аналізу в нестационарному випадку з коефіцієнтами (27). Оскільки ймовірність є значенням між 0 і 1, з вищесказаного випливає, що  $\gamma > 0$ , що дає такі умови, які задовольняють цю вимогу:

$$\bar{w}_0\bar{\rho}_0 < \bar{w} < \frac{\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{\rho_{21}}, \rho_{21} < 1; \text{ або } \frac{\bar{w}_0\bar{\rho}_0}{\rho_{21}} < \bar{w} < \bar{w}_0\bar{\rho}_0, \rho_{21} > 1.$$

Останнє показує, що з розглянутих виразів двофазна течія не може бути довільною. Якщо густина фази 2 менша за густину фази 1, то швидкість двофазної суміші змінюється в діапазоні, який розширюється зі зменшенням густини другої фази. Подібним чином, у випадку більш щільної другої фази, передбачається, що швидкість потоку може бути «дозволеною» для зміни в заданому діапазоні від  $\bar{W}_0\rho_0$  до значення, спрямованого до нуля зі збільшенням коефіцієнта густини.

#### Висновки

Аналіз отриманих рівнянь показав правильність зроблених припущень і основних рівнянь збереження. Умови коректності моделі у вигляді деяких обмежень на кореляцію між співвідношенням щільностей фаз і швидкістю двофазного потоку були отримані в результаті проведеного аналізу. Отримані результати потребують порівняння з результатами розрахунків інших авторів у літературі, і, що найважливіше, з експериментальними даними. Це предмет для подальшого дослідження.

#### Посилання до Додатку 1

1. Balescu Radu. Statistical mechanics of charged particles. - New York: Interscience Publishers. - 1963. - 465 pp.
2. Bogoliubov N.N. Problems of Dynamic Theory in Statistical Physics.- Oak Ridge, Tenn.: Technical Information Service.- 120pp.
3. Davis S.H. [Contact-Line Problems in Fluid Mechanics](#)// J. Appl. Mech.- 1983.- V. 50 (4b).- P. 977-982.
4. Жежерін Р.П. Проблема “електромагнітного тигля”// Проблеми магнітогідродинаміки та плазмодинаміки. АН Латв. ССР, Рига (1959), С. 279–294.
5. Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей.- М.: Наука.- 1979.- 320 с.
6. Ashby W.R. An Introduction to Cybernetics.- London: Chapman & Hall.- 1957.- 294 pp.
7. Benoit B. Mandelbrot. The Fractal Geometry of Nature.- San Francisco: W.H. Freeman, 1983.- 480 p.
8. Samko, S.; Kilbas, A.A.; and Marichev, O. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.- Publisher: Taylor & Francis Books, 1993. - 1006 p.
9. Бабенко Ю.И. Тепло-массообмен: методы расчета тепловых и диффузионных потоков.- Л.: Химия, 1986.- 236 с.
10. Kolmogorov A.N. The general theory of dynamical systems and classical mechanics. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Amsterdam, 1954), Vol. 1, pages 315-333.
11. Вентцель Е.С. Исследование операций.- М.: Советское радио, 1972.- 407 с.
12. Накорчевский А.И. Гетерогенные турбулентные струи. Киев: Наукова думка, 1980, 142 с.
13. Накорчевский А.И., Казачков И.В. Расчет гетерогенной турбулентной струи. В кн.: Системы автоматизации непрерывных технологических процессов, Институт кибернетики НАНУ, 1979, С. 68-79.
14. Kazachkov I.V. Der turbulente versenkte Strahl von zweier unmischbaren Flussigkeiten. Beitrag. Inst. fuer Kybernetik der Akademie der Wissenschaften der Ukraine. Kiev, 1980. 20 p.
15. Казачков И.В. Математическое моделирование гетерогенных турбулентных струй в цилиндрической камере // Автоматика, 1980, т. 13, с. 1-6.

16. Казачков І.В., Накорчевский А.И. Линии тока в турбулентной двухфазной струе двух несмешивающихся жидкостей/ Тезисы докладов V Всесоюзного совещания по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 1981.
17. Казачков И.В. Исследование турбулентного смешения и защиты стенки с помощью гарниссажа в струйных аппаратах, работающих на взаимно несмешивающихся жидкостях. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Киевский государственный университет им. Т.Г. Шевченко, 1981. 138 с.
18. Накорчевский А.И., Басок Б.И. Гидродинамика и теплообмен в гетерогенных системах и аппаратах пульсационного типа. Киев: Наукова думка, 2001. 348 с.

## Додаток 2.

### Платформа FLEX PDE та комп'ютерні програми для розрахунку струменевої та двофазної течії в мініканалі

Платформа FLEX PDE науково-дослідного інституту Wolfram є потужним інструментом для вивчення, аналізу та синтезу різних складних систем і процесів сучасної науки і техніки. Програмування на цій платформі просте і близьке до звичайної математичної мови. Власне, це верхній рівень системи, на якому користувач описує параметри моделювання та вихідні дані, а також постановку математичної задачі: рівняння, початкові та граничні умови, геометрію системи для моделювання тощо. Все інше виконується автоматично: за допомогою оператора платформа FLEX PDE вибирає правильний метод вирішення зазначеної проблеми, а потім виконує його. Це одна з відомих систем і пакетів, призначених для вирішення широкого кола завдань: FlexPDE, MathCAD, Matlab, Maple, ChemCAD та ін. Крім того, серед зазначених програмних продуктів особливе місце займає пакет FlexPDE, що підтримує метод скінченних елементів у моделюванні об'єктів з розподіленими змінними, що описуються лінійними та нелінійними рівняннями в частинних похідних.

FlexPDE можна використовувати для оптимізації проекту, оцінки продуктивності та концептуального аналізу. Важливо відзначити, що те саме програмне забезпечення можна використовувати для моделювання деталей проекту і немає необхідності залучати додаткові інструменти для оцінки окремих ефектів. У розробці програмного забезпечення пакет FlexPDE може служити ядром для програм спеціального призначення, які потребують створення кінцево-елементної моделі для системи рівнянь у частинних похідних. Зокрема, його можна використовувати для наступних завдань:

- стаціонарні задачі з електротехніки, механіки та теплотехніки;
- нестаціонарні (незалежні від часу) задачі з хімії, механіки, теплотехніки, біології, електротехніки, оптики та акустики.

Потужним інструментом для вивчення, аналізу та синтезу нелінійних процесів є метод математичного моделювання, який підтримується різними комп'ютерними системами та пакетами прикладного програмного забезпечення. Серед зазначених програмних продуктів особливе місце займає пакет FlexPDE, який підтримує метод скінченних елементів при моделюванні об'єктів з розподіленими змінними, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними. У науці і техніці більшість завдань того чи іншого рівня складності можна описати за

допомогою рівнянь у частинних похідних. Таким чином, такий пакет програм, як FlexPDE, може бути використаний практично в будь-якій галузі науки чи техніки.

Дослідники можуть застосовувати його для моделювання експериментів або приладів, оцінюючи або прогнозуючи значення різних ефектів. Різноманітність параметрів або залежностей не обмежена даною структурою, але може бути довільно аналітично визначена. У інженерії FlexPDE можна використовувати для оптимізації проекту, оцінки ефективності та концептуального аналізу. При цьому важливо відзначити, що одним і тим же програмним забезпеченням можна моделювати всі деталі проекту і не потрібно залучати додаткові інструменти.

Більшість наукових і технологічних задач на різних рівнях складності можна описати за допомогою граничних задач для рівнянь у частинних похідних. Таким чином, програмний пакет FlexPDE може бути використаний, будучи потужним і привабливим обчислювальним інструментом. Дослідники в різних областях застосовують FlexPDE для моделювання, оцінки або прогнозування значущості різних ефектів у своїх досліджуваних системах і процесах. Різноманітність параметрів або залежностей не обмежена даною структурою, але може бути довільно аналітично визначена. Ось чому на даний момент доступно багато книг з комп'ютерними сценаріями FLEX PDE, які використовуються безпосередньо для чисельного моделювання або для модифікації відповідно до подібних інших завдань.

FlexPDE - програма, призначена для побудови сценарних моделей розв'язування диференціальних рівнянь методом скінченних елементів. Згідно зі скриптом, написаним користувачем, FlexPDE виконує операції, необхідні для перетворення опису системи рівнянь у частинних похідних (або звичайних диференціальних рівнянь) у модель для розрахунку методом скінченних елементів, пошуку рішення для цієї системи та представлення результатів у графічній формі. Таким чином, FlexPDE виконує роль обчислювального середовища для вирішення завдань, оскільки ця програма містить повний набір функцій, необхідних для вирішення системи рівнянь у частинних похідних:

- функції редагування для підготовки сценарію;
- генератор кінцевих елементів;
- функції відбору скінченних елементів при пошуку рішення;
- графічні функції для представлення результатів рішень.

FlexPDE не обмежує користувача попередньо визначеним списком програмних проблем або типів рівнянь. Вибір типу рівнянь повністю залежить від користувача. Мова скриптів дозволяє користувачеві описати математичний апарат своєї системи диференціальних рівнянь у частинних похідних і структуру області розв'язків у цілому в природному форматі. Ця форма сценарію має багато переваг:

- Сценарій повністю описує систему рівнянь і область розв'язків, тому немає невизначеності щодо того, які рівняння розв'язуються, як це може бути у випадку з програмою з фіксованим набором прикладних задач.

- Нові змінні, нові рівняння або нові умови можна легко додати до сценарію за бажанням.

- За допомогою однієї програми можна розв'язувати багато різних завдань, тому немає необхідності проходити повторне навчання для вирішення кожного нового завдання.

- FlexPDE дозволяє розв'язувати системи диференціальних рівнянь першого або другого порядку в частинних похідних. Система диференціальних рівнянь може бути стаціонарною або залежною від часу.

- У рамках одного завдання можна розглядати одночасно стаціонарні та нестаціонарні рівняння. Кількість рівнянь у системі визначається потужністю комп'ютера, на якому встановлено математичний пакет FlexPDE.

- Рівняння можуть бути лінійними і нелінійними. Математичний пакет FlexPDE розв'язує нелінійні системи методом Ньютона-Рафсона.

- Можна вказати будь-яку кількість геометричних областей для вирішення з різними властивостями матеріалу.

FlexPDE має кілька модулів для вирішення завдань:

- Модуль редагування сценаріїв надає інструменти для редагування тексту та попереднього перегляду графічного результату.

- Аналізатор запису рівняння у вигляді символів, який перетворить інформацію в набір змінних, параметрів та їх співвідношень, знижуючи порядок інтегрування. Потім розкладає ці рівняння на матрицю Якобі.

- Модуль генератора сіток будує сітку з трикутних кінцевих елементів у двовимірній області розв'язання. При вирішенні тривимірних задач двовимірна сітка перетвориться на тетраедр, що перекриває довільну кількість неплоских шарів.

- Модуль числового аналізу кінцевих елементів вибирає відповідну схему вирішення для стаціонарних, нестаціонарних і власних значень, а окремі процедури розрахунку використовуються для лінійних і нелінійних систем.

- Процедура оцінки похибки оцінює ступінь наближення сітки та уточнює координати сітки в областях, де похибка велика. Система ітеративно уточнює параметри сітки та рішення, доки не буде досягнуто заданого рівня помилки.

- Модуль графічного виводу приймає довільні алгебраїчні функції з отриманого рішення та будує контурні, поверхневі та векторні графіки.

- Модуль виведення зовнішніх даних забезпечує можливість друку звітів у багатьох форматах, включаючи таблиці числових значень і сітки кінцевих елементів.

FlexPDE містить програму-редактор, за допомогою якої можна створити сценарій для завдання. Цей сценарій можна редагувати, виконувати обчислення, редагувати та повторно обчислювати, поки результат не задовольнить усі вимоги користувача. Потім сценарій можна зберегти як файл для подальшого використання або як основу для подальших змін. Найпростіший спосіб постановки завдання – скопіювати розв'язок подібних завдань, які вже є у користувача [2-7]. У будь-якому випадку слід виділити чотири основні компоненти етапу розробки сценарію:

- 1) змінні та рівняння;
- 2) область розв'язків і граничні умови;
- 3) властивості параметрів;
- 4) у якій графічній формі має бути представлено рішення.

При постановці будь-якого завдання для FlexPDE рекомендується дотримуватися деяких загальних правил:

- Почніть із основних законів фізичної системи. Формульний запис основних законів збереження зазвичай працює краще, ніж псевдоаналітичні спрощення.

- Почніть із простої моделі, бажано такої, для якої відповідь відома. Це дозволяє, з одного боку, перевірити ваше розуміння завдання, а з іншого – відчувати впевненість у можливостях пакету FlexPDE. Корисно взяти аналітичне рішення і за допомогою FlexPDE розрахувати значення початкових параметрів, при яких це рішення досягається. Необхідно враховувати відповідні граничні умови.

- Вказати умову графічного виводу у всіх випадках, коли це може допомогти в ході вирішення. Якщо побудувати графік тільки для кінцевого значення, то буде складно визначити, на якому етапі розрахунків сталася помилка. За допомогою графіків зручно постійно стежити за змінами в ході рішення.

Для комп'ютерного моделювання початкової частини двофазного турбулентного струменя нижче наведено програму FLEX PDE для одного із змодельованих випадків.

**For parameter  $i_0=8.0$ :**

{ Initialpart Jet.PDE

Application of the FlexPDE to the solution of the first-order differential equation for part of the mixing layer.

This is a problem in turbulent two-phase jet flow:

$dh/dt = -1.5*y_0*A^2(1 + 0.5*A)*(B01 + B02*i*k21)/(y_0^2*A^2*d1h + (u1 - 1 - 2*d1)*d2)$

$y_0$  :  $y_0 = 1/\sqrt{1 + 2*a10*A + (2*a20*A)*A}$  width of the potential core of the jet coming from the nozzle in cylindrical coordinate system

$d$  :  $d=y_0*A$  width of the mixing layer in cylindrical coordinate system

$t$  is here as time but in the stationary problem it is complex longitudinal coordinate - along the jet spreading axis

The analytic solution can be used as an accuracy check.

Since FlexPDE requires a spatial domain, we solve the equation on a simple box with minimum mesh size. }

title

"NONLINEAR FIRST ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION"

select

{ Since there is no spatial information required, use the minimum grid size }

variables

{ declare Height to be the system variable }

h(threshold=-6)

$y_0$ (threshold=1)

$d$ (threshold=1)

definitions

{ define the equation parameters }

$a110 = 0.5464$   $a120 = 0.0208$   $a210 = 0.1667$   $a220 = 0.0101$   $a310 = 0.4604$   $a320 = 0.0139$   
 $a420 = 0.0059$   $a410 = 0.1198$

$b110 = 0.0179$   $b120 = -0.0101$   $b210 = 0.0095$   $b220 = -0.0042$   $b310 = 0.0054$   $b320 = -0.0048$   
 $b420 = -0.0016$   $b410 = 0.0023$

$a11 = 0.4436$   $a12 = 0.0110$   $a21 = 0.1029$   $a22 = 0.0038$   $a31 = 0.4103$   $a32 = 0.0094$   $a42 = 0.0032$   
 $a41 = 0.0902$

$b11 = 0.0075$   $b12 = -0.0142$   $b21 = 0.0028$   $b22 = -0.0047$   $b31 = 0.0039$   $b32 = -0.0085$   
 $b42 = -0.0025$   $b41 = 0.0014$

$u1 = 11/16$   $u2 = 5/16$   $i=8$

{  $i = \text{staged}(8,1,0.3)$  { several values  $i_0$  } }

$k21 = \text{staged}(0.2,1,5)$  { several values  $k21$  }

{ define the accuracy check B01:  $B01 = 0.875 + 0.0625*h$

B02: B02=1-B01 }

a10 = h\*a120 + a110    a20 = h\*a220 + a210    a30 = h\*a320 + a310    a40 = h\*a420 + a410  
 b10 = h\*b120 + b110    b20 = h\*b220 + b210    b30 = h\*b320 + b310    b40 = h\*b420 +  
 b410

a1 = h\*a12 + a11    a2 = h\*a22 + a21    a3 = h\*a32 + a31    a4 = h\*a42 + a41

b1 = h\*b12 + b11    b2 = h\*b22 + b21    b3 = h\*b32 + b31    b4 = h\*b42 + b41

A = (b30\*i - a10 + a30)/(-b40\*i + a20 - a40)

DA = (i\*b320 - a120 + a320)/(-b40\*i + a20 - a40) - A\*(-i\*b420 + a220 - a420)/(-b40\*i +  
 a20 - a40)

d2 = a220\*A^2 + A\*(2\*DA\*a220 + a120) + a10\*DA

d1h = A\*(a3 + b3\*i - a1\*u1 - i\*b1\*u2 + A\*(-b2\*i\*u2 - a2\*u1 + b4\*i + a4))

d1h = DA\*(-b1\*i\*u2 - a1\*u1 + b3\*i + a3) + A\*(-i\*u2\*b12 + i\*b32 - u1\*a12 + a32) + 2\*A

h0 = (-i\*b310 + a110 - a310)/(i\*b320 - a120 + a320)

initial values

h = h0    y0=1    d=0

equations { The ODE }

h : dt(h) = -1.5\*(1 + 0.5\*A)\*(0.875 + 0.0625\*h + (0.125-0.0625\*h)\*i\*k21)/(1.e-8+y0\*d1h  
 + (u1 - 1 - 2\*d1)\*y0^3\*d2)

y0: y0 = 1/sqrt(1 + 2\*a10\*A + 2\*a20\*A^2)

d: d=y0\*A\*DA\*(-b2\*i\*u2 - a2\*u1 + b4\*i + a4) + A\*A\*(-i\*u2\*b22 + i\*b42 - u1\*a22 +  
 a42)

boundaries

{ define a fictitious spatial domain }

region 1

start (0,0)

line to (1,0) to (1,1) to (0,1) to close

{ define the time range }

time 0 to 0.0001

plots

for t=0, 0.0001, 0.001 by 0.0001 to endtime

history(h) at (0.5,0.5)

history(y0) at (0.5,0.5)

history(d) at (0.5,0.5)

MONITORS

for t=0, 0.002, 0.02 by 0.002 to endtime

history(h) at (0.5,0.5) as "function h"

history(y0) at (0.5,0.5) as "width of potential core"

history(d) at (0.5,0.5) as "width of mixing layer"

plots

for t=0, 0.002, 0.02 by 0.002 to endtime

{ Plot the solution: }

history(h) at (0.5,0.5)

history(y0) at (0.5,0.5)

history(d) at (0.5,0.5)

{ Plot the accuracy check: }

{ history((T0 - Tcheck - (b/2)\*t)/((b/2)\*t) at (0.5,0.5)

```

as "Relative Error"
end

```

The FLEX PDE platform (<https://www.pdesolutions.com/>) has the main operators, which are colored in red. In figure brackets there are comment, which are colored in green.

### For parameter $i_0=0.1$ :

```

title
"NONLINEAR FIRST ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION"
select
{ Since there is no spatial information required, use the minimum grid size }
ngrid=1
errlim=1e-3
variables
{ declare Height to be the system variable h(threshold=-6)
y0(threshold=1)
d(threshold=1) }
h
y0
d
definitions
{ define the equation parameters }
a110 = 0.3455 a120 = 0.0025 a210 = 0.0703 a220 = 0.00078 a310 = 0.3237 a320 =
0.0022 a420 = 0.00064 a410 = 0.0614
b110 = 0.1167 b120 = -0.0018 b210 = 0.0506 b220 = -0.00049 b310 = 0.0515 b320 = -
0.0012 b420 = -0.00029 b410 = 0.0180
a11 = 0.3327 a12 = 0.0023 a21 = 0.0631 a22 = 0.00064 a31 = 0.3164 a32 = 0.0021 a42
= 0.00056 a41 = 0.0574
b11 = 0.0777 b12 = -0.0017 b21 = 0.0267 b22 = -0.00044 b31 = 0.0446 b32 = -0.0012
b42 = -0.00028 b41 = 0.0140
u1 = 11/16 u2 = 5/16
i =0.1 { staged(8,1,0.3) { several values i0 }}
k21=0.1 { staged(0.2,1,5) several values k21 }
{ define the accuracy check B01: B01 = 0.875 + 0.0625*h
B02: B02=1-B01 }
a10 = h*a120 + a110 a20 = h*a220 + a210 a30 = h*a320 + a310 a40 = h*a420 + a410
b10 = h*b120 + b110 b20 = h*b220 + b210 b30 = h*b320 + b310 b40 = h*b420 +
b410
a1 = h*a12 + a11 a2 = h*a22 + a21 a3 = h*a32 + a31 a4 = h*a42 + a41
b1 = h*b12 + b11 b2 = h*b22 + b21 b3 = h*b32 + b31 b4 = h*b42 + b41
A = (b30*i - a10 + a30)/(-b40*i + a20 - a40)
DA = (i*b320 - a120 + a320)/(-b40*i + a20 - a40) - A*(-i*b420 + a220 - a420)/(-b40*i +
a20 - a40)
d2 = a220*A*A + A*(2*DA*a220 + a120) + a10*DA
d1 = A*(a3 + b3*i - a1*u1 - i*b1*u2 + A*(-b2*i*u2 - a2*u1 + b4*i + a4))

```

Казачков І.В. Турбулентні двофазні струмені рідин, що не змішуються між собою

```

d1h = DA*(-b1*i*u2 - a1*u1 + b3*i + a3) + A*(-i*u2*b12 + i*b32 - u1*a12 + a32) + 2*A
h0 = (-i*b310 + a110 - a310)/(i*b320 - a120 + a320)
initial values
  h = h0  y0=1  d=0
equations { The ODE }
h : dt(h) = -1.5*(1 + 0.5*A)*(0.875 + 0.0625*h + (0.125-0.0625*h)*i*k21)/(y0*d1h + (u1 -
1 - 2*d1)*y0*y0*y0*d2)
y0: y0 = 1/sqrt(1 + 2*a10*A + 2*a20*A*A)
d: d=y0*A
boundaries
  { define a fictitious spatial domain }
  region 1
  start (0,0)
  line to (1,0) to (1,1) to (0,1) to close
  { define the time range }
time 0 to 10
plots
  for t=0, 0.001, 0.01 by 0.02 to endtime
MONITORS
  for t=0, 0.001, 0.01 by 0.02 to endtime
  history(h) at (0.5,0.5) as "function h"
  history(y0) at (0.5,0.5) as "width of potential core"
  history(d) at (0.5,0.5) as "width of mixing layer"
  { Plot the accuracy check: }
  { history((T0 - Tcheck - (b/2)*t)/((b/2)*t) at (0.5,0.5)
    as "Relative Error" }
end 235251124

```

The FLEX PDE platform allows easy programming in finite element numerical methods for Partial differential and ordinary differential equations and equation arrays. It is really powerful software for Differential Equations. Presently, it has also support for Complex Eigenvalues, OpenGL graphics, surface contour plots, and automatic moving mesh reconnection.

Flex PDE computer program by two-phase flow in minichannel:

```

{ NONLINE.PDE
  Delta methane T=300
  This is a problem in viscous flow:
  dH/dt = a - b*sqrt(H)
  The analytic solution satisfies the relation
  sqrt(H0) + (a/b)ln[a-b*sqrt(H0)]
  - sqrt(H) - (a/b)ln[a-b*sqrt(H)] = (b/2)*t
  which can be used as an accuracy check.
  Since FlexPDE requires a spatial domain, we solve the equation on
  a simple box with minimum mesh size.}
TITLE
"NONLINEAR FIRST ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION"

```

```

SELECT
{ Since there is no spatial information required, use the minimum grid size }
ngrid=1
errlim=1e-5
VARIABLES
{ declare delta to be variable }
delta(threshold=4)
DEFINITIONS
{ define the equation parameters } { SI units }
q1 = 1e6
lam2=38.5
ro2=35
delta0= 0
G=32e-3
u0=57.14
lamw=394
lam21=511e3
udel=u0
b = 4e-3
a=4e-3
lam1=88
{ define the accuracy check }
INITIAL VALUES
delta = delta0
EQUATIONS { The ODE }
delta : dt(delta) = q1/(ro2*lam21*udel)*(1+lam2*(a/lamw-delta/lam1)/(delta-a))
BOUNDARIES
{ define a fictitious spatial domain }
region 1
start (0,0) line to (1,0) to (1,1) to (0,1) to close
{ define the time range }
time 0 to 3.0
PLOTS
for t=0, 0.01 by 3.0 to endtime
{ Plot the solution: }
history(delta) at (0.5,0.5)
{ Plot the accuracy check: }
end
"Fuuzc75iyt1AmwIeA4SQF+nLiLZ6s1T0VNldeFdPrV2STRDtMnh7E3HcHV8RyTRrnnz
hdf6DV3yH8rHZvwTd1CP4d0P+1AiBOeWQcpD61MTu68xFFDOyzaieAnIIKdwAY2TrB
qmrPgmCF9jHtDFuu/3BCPaGYAhSzqqJC2I6EZs".

```

### Додаток 3. Короткий вступ до комерційних платформ CFD

Задачі механіки рідин і газів, горіння і детонації і т.д. вирішуються за допомогою наступних комп'ютерних платформ:

CFX,  
FLUENT,  
STAR-CD,  
FLOWVISION,  
FLOW-3D,  
GDT,  
CFX

CFX - пакет програм, призначений для задач аеро- та гідродинаміки. З 2003 року він є частиною програмного пакету ANSYS, правильніше називати його ANSYS CFX.

Пакет програм, що поєднує в собі унікальні можливості для аналізу гідрогазодинамічних процесів, багатофазних потоків, хімічної кінетики, горіння, радіаційного теплообміну та багато інших. CFX забезпечує принципово новий рівень вирішення задач обчислювальної гідродинаміки завдяки унікальному поєднанню технологій, починаючи від прямого інтерфейсу до більшості САПР і закінчуючи можливістю проводити сполучений рідинно-структурний аналіз разом з ANSYS Multiphysics. Широкий набір моделей турбулентності в поєднанні з лінійним вирішувачем з технологією «Algebraic Coupled Multigrid» дозволяє досягти високої точності результатів при вирішенні різних класів задач.

CFX - визнаний лідер у розрахунках турбомашин, має широкий спектр застосування в основних галузях промисловості: аерокосмічна, автомобільна, суднобудівна та морська техніка, нафтогазова та хімічна промисловість, турбомашинобудування, теплотехніка, вентиляція та кондиціонування повітря, біомедичні програми.

Паралелізм: CFX має можливість розпаралелювати будь-які паралельні обчислювальні системи (з розподіленою та спільною пам'яттю) під різними операційними системами (включаючи Windows, LINUX, UNIX). CFX має дуже хорошу масштабованість (принаймні до 64 процесорів).

FLUENT - пакет програм, призначений для вирішення задач механіки рідини та газу. З 2006 року FLUENT є частиною програмного пакету ANSYS. Використовує технологію неструктурованої сітки (типи елементів - шестигранники, тетраедри, призми та піраміди). Адаптація розрахункової сітки дозволяє отримати точне рішення для областей з великими градієнтами потоку, наприклад, для прилежових шарів. Можливість використання динамічних адаптивних сіткових моделей дозволяє виконувати наступні розрахунки: потоки в циліндрах, клапанах та ін. FLUENT дозволяє виконувати комбіновані роторно-статорні розрахунки турбомашин з використанням технології ковзної сітки.

FLUENT включає ламінарні та турбулентні моделі динаміки рідини, теплопередачі, фазових переходів і випромінювання, а також моделі для розрахунку кавітації, стисливих рідин, теплообміну, реальних газів і модуль для розрахунку вологої пари. Це визнаний лідер у розрахунку хімічних реакцій і проблем горіння. FLUENT використовує найсучасніші підходи до моделювання хімічних реакцій. База даних містить властивості багатьох газоподібних, твердих, пиловугільних та рідких паливних матеріалів. Також доступні моделі для прогнозування NOx, включає багато моделей турбулентності: кілька версій моделі k-epsilon, k-omega, напруги Рейнольдса (RSM), LES, DES. Ця обчислювальна платформа є одним із найкращих пакетів у сфері багатофазного моделювання. Різноманітні

можливості дозволяють отримати найглибшу інформацію про обладнання. FLUENT використовує такі моделі як: VOF, суміш і модель Ейлера. Для деяких багатофазних явищ можна використовувати модель дискретної фази (DPM). Моделі VOF використовуються для розрахунку потоків з вільними поверхнями. Кавітаційна модель дозволяє розрахувати насоси, паливні форсунки, суднові гвинти.

Постпроцесор FLUENT дозволяє відображати результати розрахунків у векторному та контурному вигляді, а також відображати траєкторії руху частинок. Вбудований модуль анімації дозволяє обробляти результати нестационарних розрахунків. FLUENT дозволяє виконувати паралельні обчислення на платформах Windows, Linux і Unix. Можна використовувати багатопроцесорні машини або кластери. FLUENT має архітектуру клієнт-сервер і характеризується досить хорошою масштабованістю.

Посилання такі:

[www.processflow.ru/fluent.html](http://www.processflow.ru/fluent.html)(link is external)

[www.fluent.com/software/fluent/](http://www.fluent.com/software/fluent/)(link is external)

STAR-CD - багатоцільовий програмний пакет для розрахунків у галузі механіки рідини та газу. Дозволяє вирішувати проблеми в таких сферах:

- Стаціонарні та нестационарні течії
- Ламінарні потоки
- Турбулентні течії
- Стисливі та нестисливі (включаючи дозвукові та надзвукові)
- Теплообмін (конвективний, випромінювання, теплопровідність з урахуванням твердих речовин)
- Масообмін
- Хімічні реакції
- Спалювання газоподібного, рідкого і твердого палива
- Розподілений опір (наприклад, у пористих середовищах, теплообмінниках)
- Багатокомпонентні потоки
- Багатофазні течії - модель Лагранжа (дисперсні газ-тверде тіло, газ-рідина, рідина-тверде тіло, рідина-рідина)
- Багатофазні течії - модель Ейлера
- Вільні поверхні

Паралелізм. Передбачено пакет STAR-HPC (High Performance Computing), що входить до складу комплексу.

Наукове видання

КАЗАЧКОВ І. В.

Турбулентні двофазні струмені рідин,  
що не змішуються між собою  
(математичне та комп'ютерне моделювання  
перемішування та теплообміну в багатофазних течіях)

*Монографія*

Технічний редактор – І. П. Борис  
Верстка, макетування – В. М. Косяк  
Книга друкується в авторському редагуванні

---

Підписано до друку  
Гарнітура Times New Roman  
Замовлення №

Формат 60x84/16  
Обл.-вид. арк. 5,15  
Ум. друк. арк. 12,03

Папір офсетний  
Тираж сл. вид.

---



Ніжинський державний університет  
імені Миколи Гоголя.  
м. Ніжин, вул. Воздвиженська, 3/4  
(04631)7-19-72  
E-mail: [vidavn\\_ndu@ukr.net](mailto:vidavn_ndu@ukr.net)  
[www.ndu.edu.ua](http://www.ndu.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 2137 від 29.03.05 р.