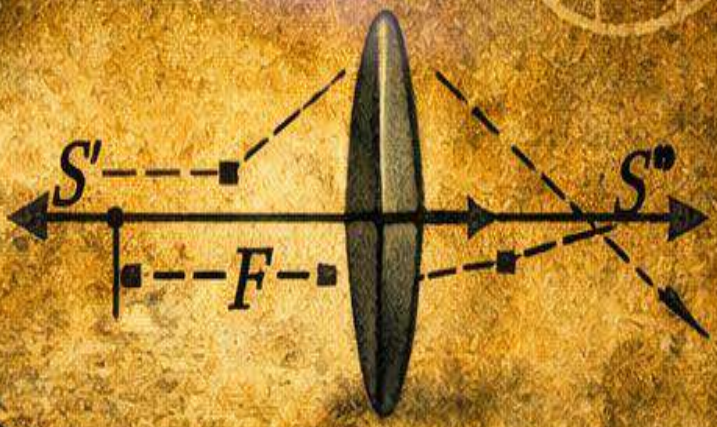
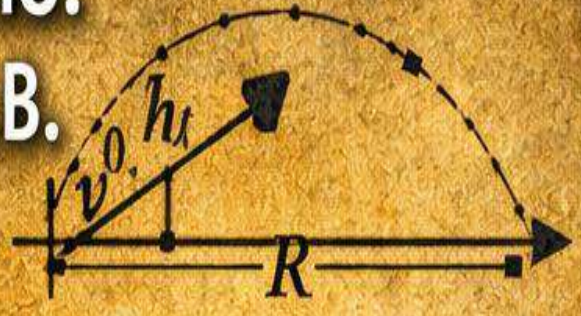
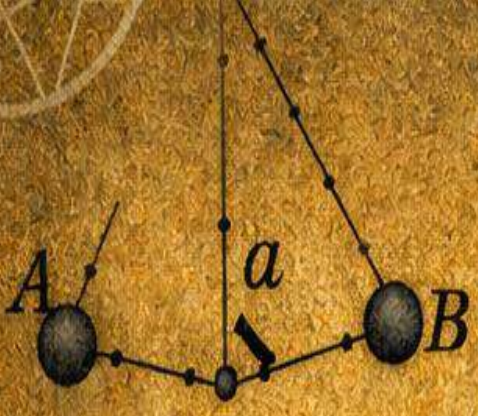


Мельничук Л.Ю.  
Мельничук О.В.

# ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ГЕОМЕТРИЧНОЇ ОПТИКИ



Ніжинський державний університет  
імені Миколи Гоголя

Мельничук Людмила Юріївна  
Мельничук Олександр Володимирович

# **Збірник задач з геометричної оптики**

**Навчальний посібник**

Ніжин – 2026

УДК 531/534 (076.1)

М 53

Рекомендовано Вченою радою  
Ніжинського державного університету  
імені Миколи Гоголя  
(протокол № 13 від 28.05.2026 р.)

**Рецензенти:**

**Небола І. І.** – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної фізики Ужгородського національного університету.

**Віра М. Б.** – кандидатка фізико-математичних наук, доцентка кафедри інформаційних технологій, фізико-математичних та економічних наук Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя

**Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В.**

М53 Збірник задач з геометричної оптики: Навч. посібник. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2026. – 140 с.

ISBN 978-617-527-365-4

Зібрано та систематизовано більше 500 задач різної міри складності. Низка з них – оригінальні. До складніших завдань є детальні рішення. На початку кожного розділу наводяться основні теоретичні відомості, методичні рекомендації щодо розв'язування задач, приклади розв'язування задач, задачі для самостійного розв'язування, контрольні запитання і завдання до теми.

Для студентів вищих навчальних закладів.

**УДК 531/534 (076.1)**

ISBN 978-617-527-365-4

© Видавництво НДУ ім. М. Гоголя, 2026

© Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В.

## ЗМІСТ

Передмова .....	4
1. Закони відбивання і заломлення світла .....	5
1.1. Основні теоретичні відомості .....	5
1.2. Методичні рекомендації .....	6
1.3. Приклади розв'язування задач .....	7
1.4. Задачі для самостійного розв'язування .....	19
1.4.1. Закони відбивання і заломлення світла .....	19
1.4.2. Повне внутрішнє відбивання.....	24
1.4.3. Хід променів у плоскопаралельній пластинці .....	27
1.4.4. Хід променів у трикутній призмі.....	34
1.4.5. Хід променів у кубі .....	45
1.4.6. Хід променів в кулі.....	45
1.5. Контрольні запитання і завдання до теми «Закони відбивання і заломлення світла».....	48
2. Лінзи .....	49
2.1. Основні теоретичні відомості .....	49
2.2. Методичні рекомендації.....	50
2.3. Приклади розв'язування задач.....	52
2.4. Задачі для самостійного розв'язування.....	60
2.4.1. Збиральні лінзи.....	60
2.4.2. Розсіювальні лінзи.....	81
2.5. Контрольні запитання і завдання до теми «Лінзи».....	93
3. Дзеркала.....	94
3.1. Основні теоретичні відомості .....	94
3.2. Методичні рекомендації .....	95
3.3. Приклади розв'язування задач.....	96
3.4. Задачі для самостійного розв'язування.....	105
3.4.1. Плоскі дзеркала.....	105
3.4.2. Сферичні дзеркала.....	112
3.4.3. Угнуті дзеркала.....	117
3.4.4. Опуклі дзеркала.....	126
3.5. Контрольні запитання і завдання до теми «Дзеркала».....	134
Додаток. Таблиці фізичних величин.....	135
Список використаних джерел .....	139

## ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник призначений для студентів фізико-математичних факультетів закладів вищої педагогічної освіти й відповідає програмі курсу загальної фізики. Він містить понад 500 задач і вправ з розділу «Геометрична оптика», а тематика та послідовність викладу узгоджені з навчальною програмою.

Збірник задач з геометричної оптики адресований студентам і магістрантам, а також усім, хто вивчає поширення світла та його взаємодію з оптичними системами. Матеріали спрямовані на формування глибокого розуміння фундаментальних законів фізики, розвиток аналітичного мислення та набуття практичних навичок розв'язування задач різної складності.

Посібник складається з трьох розділів: «Закони відбивання і заломлення світла», «Лінзи» та «Дзеркала». Такий поділ забезпечує послідовне засвоєння принципів геометричної оптики - від базових законів поширення світла до їх застосування в складніших системах.

У кожному розділі подано задачі різних типів - від репродуктивних до задач підвищеної складності. Це сприяє закріпленню теоретичного матеріалу та розвитку вміння застосовувати знання на практиці. Особливу увагу приділено задачам, що формують навички аналізу оптичних явищ, побудови зображень та використання формул тонких лінз і дзеркал.

Посібник може бути використаний як для аудиторної роботи, так і для самостійного навчання, підготовки до контрольних робіт, олімпіад та вступних випробувань. Кожен розділ містить теоретичні відомості, методичні рекомендації, приклади розв'язування, задачі для самостійної роботи та контрольні запитання. У кінці подано додаток «Таблиці фізичних величин».

Математичний апарат відповідає рівню загального курсу фізики, тому більшість задач доступні широкому колу студентів. Значна частина завдань є авторськими розробками, інші мають класичний характер і запозичені з опублікованих збірників. До більшості задач наведено лише відповіді, частина супроводжується вказівками, а найскладніші - детальними розв'язаннями. З методичних міркувань у кожному розділі подано приклади з повними розв'язаннями.

Автори сподіваються, що посібник стане важливою складовою методичного забезпечення курсу загальної фізики з розділу «Геометрична оптика» та сприятиме підвищенню якості підготовки здобувачів освіти.

# 1. ЗАКОНИ ВІДБИВАННЯ І ЗАЛОМЛЕННЯ СВІТЛА

## 1.1. Основні теоретичні відомості

### 1. Закони відбивання світла:

промінь, падаючий, промінь відбитий і перпендикуляр, поставлений в точку падіння променя на межі поділу двох середовищ, лежать в одній площині;

кут відбивання дорівнює куту падіння ( $\beta = \alpha$ ) (рис. 1.1).

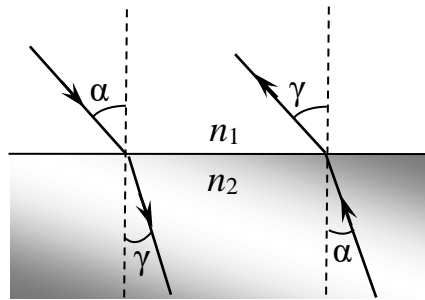


Рис. 1.1

### 2. Закони заломлення світла:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{21}, \quad (1)$$

де  $\alpha$  – кут падіння променя;  $\gamma$  – кут заломлення променя;  $n_{21} = n_2 / n_1$  – відносний показник заломлення другого середовища відносно першого;  $n_1$  і  $n_2$  – абсолютні показники заломлення відповідно першого і другого середовища;  $v_1$  і  $v_2$  – швидкості розповсюдження світла у першому і другому середовищах.

3. Якщо промінь переходить із другого середовища в перше, падаючи на межу поділу під кутом  $\gamma$ , то за принципом оборотності світлових променів кут заломлення буде дорівнювати  $\alpha$  (рис. 1.1).

4. Граничний кут повного відбивання при переході світла з оптично більш густого середовища в оптично менш густе середовище.

$$\alpha_{\text{гр}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (n_2 < n_1). \quad (2)$$

## 1.2. Методичні рекомендації

### 1. Закони відбивання світла

- Падаючий промінь, відбитий промінь і перпендикуляр у точці падіння завжди лежать в одній площині.
- Кут відбивання дорівнює куту падіння.
- При розв'язуванні задач необхідно будувати схему, де відбитий промінь симетричний відносно перпендикуляра.

### 2. Закони заломлення світла

- При розв'язуванні задач потрібно визначити відомі величини (кут падіння, показники заломлення) та підставити їх у формулу для знаходження кута заломлення.

### 3. Принцип оборотності променів

- Якщо промінь переходить із середовища 1 у середовище 2, то при зворотному переході кут заломлення дорівнює початковому куту падіння.
- Це правило зручно використовувати для перевірки правильності побудови ходу променів.

### 4. Граничний кут повного внутрішнього відбивання (ПВВ)

- При переході світла з оптично густішого середовища в менш густе існує граничний кут  $\alpha_{\text{гр}}$ .
- Якщо кут падіння більший за  $\alpha_{\text{гр}}$ , відбувається ПВВ.
- При розв'язуванні задач важливо правильно визначати, чи можливе заломлення, чи відбудеться лише відбивання.

### 5. Алгоритм розв'язування задач

Побудувати схему ходу променів. Визначити відомі величини (кути, показники заломлення, швидкості). Записати закон відбивання або закон заломлення. Виконати обчислення. Перевірити фізичний зміст результату (чи можливий такий кут, чи не перевищує він граничний).

### 6. Особливі випадки

- При малих кутах падіння можна використовувати наближення:  $\sin\alpha \approx \tan\alpha$
- Для різних довжин хвиль показник заломлення різний (дисперсія), тому задачі з білим світлом потрібно розглядати окремо для кожного кольору.
- У задачах на призми та пластини важливо враховувати паралельність променів після виходу та можливе зміщення.
- Візуальні ефекти: видима глибина предметів у воді чи склі, зміщення променя у пластинці.

### 7. Практичні поради

- Завжди звертайте увагу на геометрію променів.
- Використовуйте закони послідовно: відбивання  $\rightarrow$  заломлення  $\rightarrow$  граничний кут.
- Розділяйте задачі на етапи: схема  $\rightarrow$  формула  $\rightarrow$  обчислення  $\rightarrow$  аналіз.
- Практикуйте побудову графіків залежності  $n(\lambda)$  для різних довжин хвиль, щоб краще зрозуміти фізичний зміст дисперсії.
- Використовуйте задачі як тренування: від простих (кут падіння = кут відбивання) до складних (призми, пластини, тіні у воді).

### 1.3. Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.1.** Промінь падає на плоску межу двох середовищ, відносний показник заломлення яких  $n$ , частково відбивається, частково заломлюється. При якому куті падіння відбитий промінь буде перпендикулярним до заломленого променя?

*Розв'язання.* Згідно закону заломлення світла  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ . У нашому випадку  $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \alpha$ , тому

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (1)$$

звідки

$$\alpha = \operatorname{arctg} n. \quad (2)$$

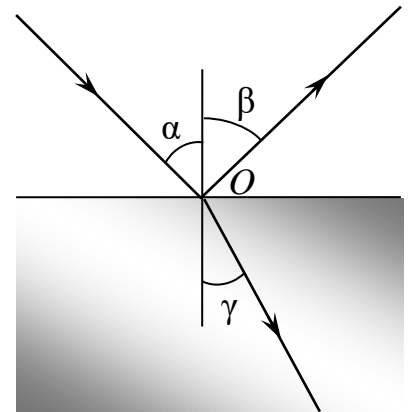
*Відповідь:*  $\alpha = \operatorname{arctg} n$ .

**Приклад 1.2.** Світло падає із вакууму на поверхню скла, абсолютний показник заломлення якого  $n = 1,63$ . Визначити кут заломлення, якщо відомо, що кут між падаючим і відбитим променями  $90^\circ$ .

*Розв'язання.* Абсолютний показник заломлення середовища  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{c}{v}$ , де  $c$  і  $v$  – швидкості світла у вакуумі і склі;  $\alpha$  – кут падіння променя;  $\gamma$  – кут заломлення.

З цієї формули  $\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n}$ . Кут відбивання  $\beta$  дорівнює куту падіння  $\alpha$  (рис. 1.2). За умовою задачі  $\alpha + \beta = 2\alpha = 90^\circ$ . Отже, кут падіння  $\alpha = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ . Тоді  $\sin \gamma = \frac{\sin 45^\circ}{1,63} \approx 0,44$ , звідки

$$\gamma = 26^\circ.$$



*Рис. 1.2*

*Відповідь:*  $\gamma = 26^\circ$ .

**Приклад 1.3.** Промінь світла падає із повітря на поверхню скла під кутом  $40^\circ$ . Як зміниться кут заломлення, якщо кут падіння збільшиться на  $20^\circ$ ?

*Розв'язання.* Згідно закону заломлення світла,  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ . За умовою задачі,  $n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin(\alpha_1 + 20^\circ)}{\sin \gamma_2}$ . Знаючи  $n$ ,  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ , визначимо  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$ :

$$\sin \gamma_1 = \frac{\sin \alpha_1}{n} \approx 0,402; \quad \alpha_1 = 23^\circ 42'; \quad (1)$$

$$\sin \gamma_2 = \frac{\sin \alpha_2}{n} \approx 0,541; \quad \alpha_2 = 32^\circ 45'. \quad (2)$$

Таким чином, кут заломлення зміниться на

$$\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1 = 32^\circ 45' - 23^\circ 42' = 9^\circ 3'. \quad (3)$$

*Відповідь:*  $\Delta\gamma = 9^\circ 3'$ .

**Приклад 1.4.** На горизонтальну поверхню середовища падає промінь світла з води під кутом  $\varphi = 20^\circ$  до поверхні, заломлюється і йде під кутом  $r = 46^\circ$  до поверхні. Визначити абсолютний показник заломлення середовища.

*Розв'язання.* Показник заломлення середовища відносно води  $n_{21} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2}$ . Абсолютні показники заломлення для води і середовища

відповідно  $n_1 = \frac{c}{v_1}$ ,  $n_2 = \frac{c}{v_2}$ , звідки  $v_1 = \frac{c}{n_1}$ ,  $v_2 = \frac{c}{n_2}$ . Підставивши значення  $v_1$

і  $v_2$ , отримаємо  $n_{21} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{c}{n_1} : \frac{c}{n_2} = \frac{n_2}{n_1}$ , звідки

$$n_2 = \frac{n_1 \sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

З рис. 1.3 видно, що  $\alpha = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$ ;  $\gamma = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$ . Таким чином, абсолютний показник заломлення середовища

$$n_2 = \frac{1,33 \sin 70^\circ}{\sin 44^\circ} = 1,8.$$

*Відповідь:*  $n_2 = 1,8$ .

**Приклад 1.5.** Висота палі залізничного мосту, який будується, 10 м. Глибина водойми 6 м. Яка довжина тіні палі на дні водойми, якщо сонячні промені світла падають під кутом  $\varphi = 40^\circ$  до горизонту?

*Розв'язання.* Довжина тіні  $BD$  складається з тіні  $OC$  надводної частини палі  $AC$  і тіні  $BN$  підводної частини палі  $CD$  (рис. 1.4). Із прямокутного трикутника  $\Delta ACO$  випливає, що

$OC = AC \operatorname{tg} \angle OAC = AC \operatorname{tg} \alpha$ ;  $\alpha$  – кут падіння, рівний  $90^\circ - \varphi$ .

Довжину підводної частини тіні  $BN$  знайдемо з  $\Delta ONB$ :

$$BN = ON \operatorname{tg} \angle BON = CD \operatorname{tg} \gamma,$$

де  $\gamma$  – кут заломлення сонячного променя на поверхні води у точці  $O$ .

Таким чином, довжина тіні палі:

$$BD = AC \operatorname{tg} \alpha + CD \operatorname{tg} \gamma.$$

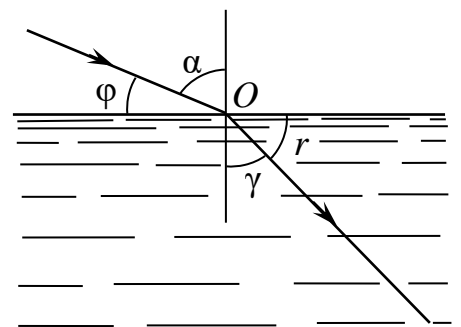


Рис. 1.3

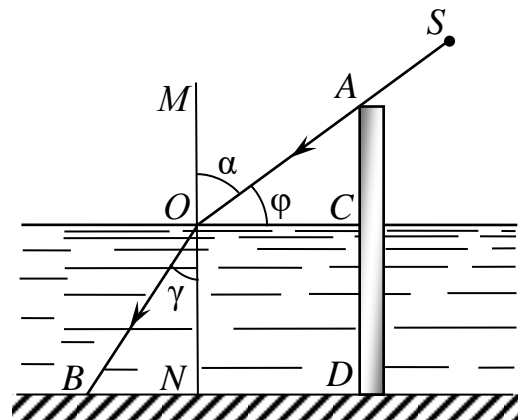


Рис. 1.4

Кут  $\gamma$  знайдемо з формули  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ , звідки  $\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n} = 0,576$ , а отже,

$\gamma = 35^\circ 10'$ . Тоді

$$BD = 4 \operatorname{tg} 50^\circ + 6 \operatorname{tg} 35^\circ 10' \approx 9 \text{ м.}$$

*Відповідь:*  $BD \approx 9 \text{ м.}$

**Приклад 1.6.** В дно озера і на березі вбиті вертикальні палі однакової висоти  $h = 1,5 \text{ м}$ . Визначити: а) залежність між довжинами їх тіней, які утворюються сонячними променями; б) довжину тіні на дні озера. Промені Сонця падають під кутом  $\alpha = 30^\circ$  до горизонтальної поверхні. Глибина озера більша, ніж довжина палі.

*Розв'язання.* а) Довжину тіні знаходимо із прямокутного  $\triangle ACB$  (рис. 1.5):  $BC = AC \operatorname{tg} \theta = AC \operatorname{tg} \alpha$ . Позначимо  $BC = l_1$ ,  $AC = h_1$ , тоді  $l_1 = h_1 \operatorname{tg} \alpha$ .

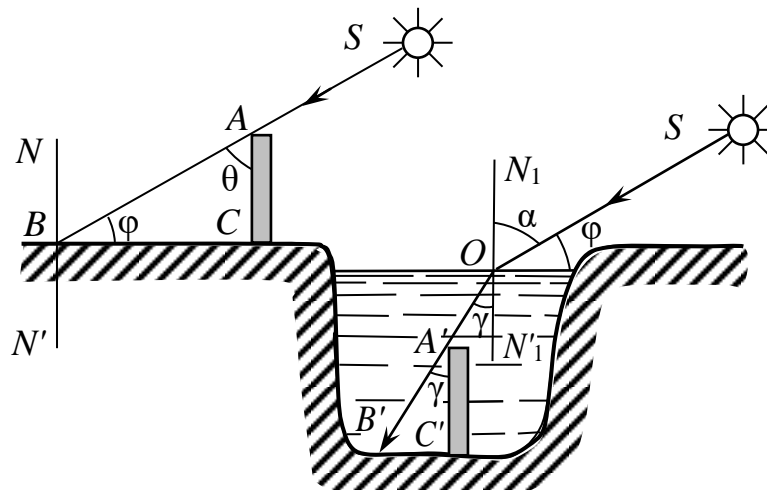
Тінь  $B'C'$  від палі на дні озера утворює сонячний промінь  $OA'B'$ , який заломився під кутом  $\gamma$ , впав на поверхню води під кутом  $\alpha$ . Довжину цієї тіні визначимо з  $\triangle A'C'B'$ :  $B'C' = A'C' \operatorname{tg} \gamma = A'C' \operatorname{tg} \gamma$ . Нехай  $B'C' = l_2$ ,  $A'C' = h_2$ , тоді  $l_2 = h_2 \operatorname{tg} \gamma$ .

Відношення довжин тіней від палі на березі і на дні озера

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{h_1 \operatorname{tg} \alpha}{h_2 \operatorname{tg} \gamma}.$$

За умовою задачі,  $h_1 = h_2$ . З урахуванням цього отримаємо співвідношення  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma}$ . Отже, відношення довжин тіней на березі озера і на

дні від палі однакової висоти дорівнює відношенню тангенса кута падіння до тангенса кута заломлення.



*Рис. 1.5*

б) Довжину тіні на дні озера визначимо за формулою  $l_2 = h \operatorname{tg} \gamma$ . Для знаходження чисельного значення кута  $\gamma$  використаємо формулу для

показника заломлення:  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ ,  $\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{\sin(90^\circ - \varphi)}{n} = 0,6511$ , то  $\gamma = 40^\circ 37'$ . Підставивши значення  $h$  і  $\gamma$  у вираз для  $l_2$ , отримаємо

$$l_2 = 1,5 \operatorname{tg} 40^\circ 37' = 1,3 \text{ м.}$$

Відповідь: а)  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma}$ ; б)  $l_2 = 1,3 \text{ м.}$

**Приклад 1.7.** Довести, що якщо кут між відбитим і заломленим променями складає  $90^\circ$ , то показник заломлення середовища дорівнює тангенсу кута падіння.

*Розв'язання.* З рис. 1.6 видно, що кут заломлення

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \beta = 90^\circ - \beta = 90^\circ - \alpha. \quad (1)$$

Показник заломлення середовища

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

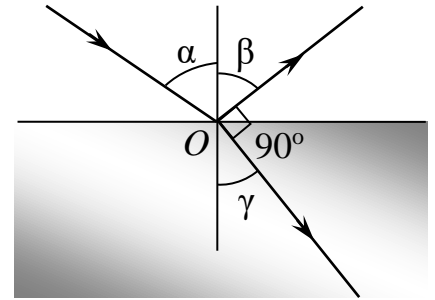


Рис. 1.6

**Приклад 1.8.** При визначенні на око у вертикальному напрямку здається, що бульбашка повітря знаходиться в скляному виробі на глибині  $h' = 2 \text{ см.}$  Визначити дійсну глибину знаходження повітряної бульбашки, якщо показник заломлення скла  $n = 1,8$ .

*Розв'язання.* Спостерігачу здається, що зображення точки  $S$  (рис. 1.7) знаходиться на перехресті продовження променів, які входять у око, тобто в точці  $S'$ , на глибині  $h'$ . З рисунка видно, що

$$h = \frac{OO_1}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad h' = \frac{OO_1}{\operatorname{tg} \gamma}, \text{ звідки}$$

$$\frac{h}{h'} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

В наслідок того, що кути  $\alpha$  і  $\gamma$  малі, їх тангенси можна замінити синусами:  $\operatorname{tg} \gamma = \sin \gamma$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$ . Тоді

$$\frac{h}{h'} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = n. \text{ Звідси } h = nh' = 3,6 \text{ см.}$$

Відповідь:  $h = 3,6 \text{ см.}$

**Приклад 1.9.** Знайти граничний кут падіння при переході променя світла із скла в воду, якщо абсолютні показники заломлення скла і води відповідно  $n_1 = 1,52$  і  $n_2 = 1,33$ .

*Розв'язання.* Щоб визначити граничний кут, у

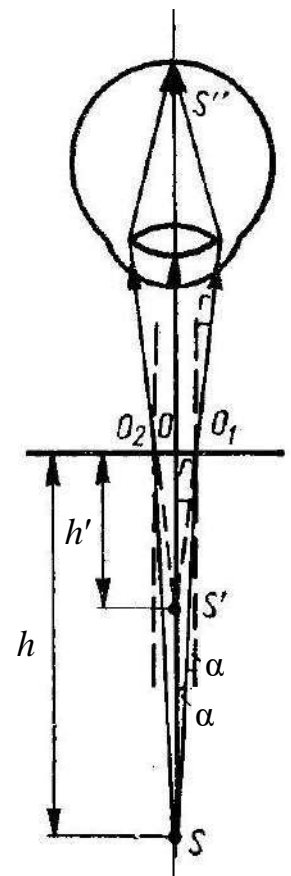


Рис. 1.7

формулі  $n_{21} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}$  потрібно прийняти  $\gamma = 90^\circ$ , або  $\sin \gamma = 1$  і  $\alpha = \alpha_0$ , тоді

$\sin \alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}$ , де  $n_2$  і  $n_1$  – абсолютні показники заломлення води і скла відповідно. Підставивши значення  $n_2$  і  $n_1$ , знайдемо  $\sin \alpha_0 = 0,875$ . Звідки

$\alpha_0 = 61^\circ$ .

*Відповідь:*  $\alpha_0 = 61^\circ$ .

**Приклад 1.10.** При переході світла з повітря в деяку речовину граничний кут повного відбивання світла виявився рівним  $24^\circ 37'$ . Визначити, яка це речовина.

*Розв'язання.* Формула для визначення показника заломлення має вигляд  $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}$ . Оскільки для граничного кута повного відбивання кут заломлення

$\gamma = 90^\circ$ , то попередня рівність набуде вигляду  $\sin \alpha_0 = \frac{1}{n}$ , звідки

$n = \frac{1}{\sin \alpha_0} = 2,4$ . Такий показник заломлення має, зокрема, алмаз.

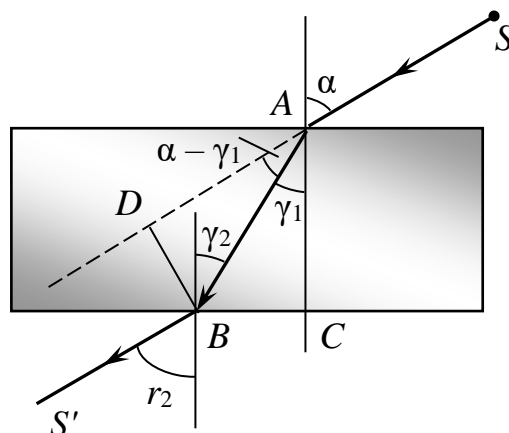
*Відповідь:*  $n = 2,4$ .

**Приклад 1.11.** Промінь світла  $SA$  (рис. 1.8) падає на скляну плоско-паралельну пластинку під кутом  $60^\circ$  до нормалі. Визначити, під яким кутом він вийде з пластинки і на скільки зміститься від початкового напрямку, якщо товщина пластинки  $AC = 10$  см.

*Розв'язання.* Запишемо формулу закону заломлення світла відповідно для точок  $A$  і  $B$ :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_1} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha'} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (1)$$

Перемножимо ці два рівняння і, прийнявши до уваги, що  $\gamma_1 = \gamma_2$ , отримаємо  $\sin \alpha = \sin \alpha'$ . Оскільки  $\alpha$  і  $\alpha'$  – гострі кути, то  $\alpha = \alpha'$ . Таким чином, з цього випливає, що промені  $SA$  і  $BS'$  паралельні. Проте промінь  $BS'$  зміщений по відношенню до падаючого на пластинку променя  $SA$  на відстань  $BD$ . Визначимо це зміщення з  $\triangle ADB$ :  $BD = AB \sin(\alpha - \gamma_1)$ .



**Рис. 1.8**

Визначимо значення кута  $\gamma_1$  за законом заломлення:

$$\sin \gamma_1 = \frac{\sin \alpha}{n} = 0,552; \gamma_1 = 31^\circ 20'; \quad (2)$$

відрізок  $AB$  – з прямокутного трикутника  $ACB$ :  $AB = \frac{AC}{\cos \gamma_1}$ . Отже, шукане

зміщення променя рівне

$$BD = \frac{AC}{\cos \gamma_1} \sin(\alpha - \gamma_1) \quad (3)$$

$$\text{Відповідь: } BD = \frac{AC}{\cos \gamma_1} \sin(\alpha - \gamma_1) \approx 3,7 \text{ см.}$$

**Приклад 1.12.** Промінь світла падає під кутом  $45^\circ$  на плоскопаралельну скляну пластинку. Накреслити хід променів: відбитих, заломлених і які виходять із пластинки. Знайти напрямок променів, які виходять, і зміщення променів в середині пластинки. Товщина пластинки 10 см.

*Розв'язання.* Відбитий промінь  $OS'$  (рис. 1.9) складає із перпендикуляром 1 кут  $\beta_1 = \alpha_1$ , де  $\alpha_1 = 45^\circ$  – кут падіння світла.

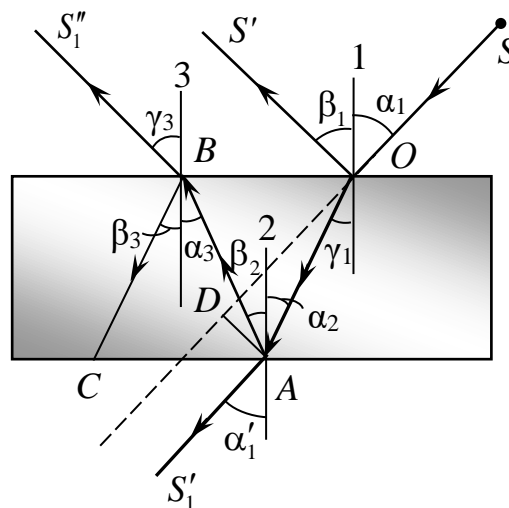


Рис. 1.9

Заломлений промінь  $OA$  йде під кутом  $\gamma_1$  до перпендикуляра 1.

Визначаємо цей кут згідно формули закону заломлення  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1} = n$ :

$$\sin \gamma_1 = \frac{\sin \alpha_1}{n} = 0,4504; \gamma_1 = 26^\circ 46'. \quad (1)$$

Промінь  $AS'_1$  виходить з пластинки під кутом  $\alpha'_1$  до перпендикуляра 2. Він паралельний до падаючого променя  $SO$  і зміщений в середині пластинки на відстані  $DA$ . Отже,  $\alpha'_1 = \alpha_1$ .

Зміщення променя

$$DA = \frac{h}{\cos \gamma_1} \sin(\alpha_1 - \gamma_1); DA = 3,5 \text{ см.} \quad (2)$$

Відбитий промінь  $AB$  пройде всередині пластинки під кутом  $\beta_2 = \alpha_2 = \gamma_1$  до перпендикуляра 2.

Промінь  $BS''_1$ , який виходить, буде паралельним відбитому променю  $OS'$ . Дійсно, оскільки  $\gamma_3 = \gamma_1$ , то з формули закону заломлення світла при переході світла із скла у повітря і із повітря в скло випливає:

$$\frac{\sin \alpha_3}{\sin \gamma_3} = \frac{1}{n}; \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1} = n. \quad (3)$$

Перемноживши дві останні рівності, отримаємо:  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_3} = 1$ , звідки

$\sin \alpha_1 = \sin \gamma_3$ . Оскільки кути  $\alpha_1$  і  $\alpha_3$  – гострі, то з останньої рівності матимемо, що  $\alpha_1 = \gamma_3$ . Оскільки  $\alpha_1 = \beta_1$ , то і  $\gamma_3 = \beta_1$ , тобто промені  $OS'$  і  $BS''_1$  – паралельні.

*Відповідь:* хід променів див. рис. 314;  $DA = \frac{h}{\cos \gamma_1} \sin(\alpha_1 - \gamma_1) = 3,5$  см;

промені  $OS'$  і  $BS''_1$  – паралельні.

**Приклад 1.13.** У воді йдуть два паралельних промені 1 і 2. Промінь 1 виходить у повітря безпосередньо, а промінь 2 проходить крізь горизонтальну плоскопаралельну скляну пластинку, яка лежить на поверхні води.

а) Чи залишаться промені 1 і 2 паралельними після виходу в повітря?

б) Чи вийде в повітря промінь 2, якщо промінь 1 зазнає повного внутрішнього відбиття?

*Розв'язання.* а) Оскільки показник заломлення одного середовища відносно іншого дорівнює відношенню швидкостей світла в цих середовищах, то

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{\text{в,ск}} = \frac{v_{\text{в}}}{v_{\text{ск}}} \quad \text{і} \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \beta'} = n_{\text{ск,п}} = \frac{v_{\text{ск}}}{v_{\text{п}}}.$$

Помноживши одне рівняння на друге, знайдемо

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta'} = \frac{v_{\text{в}}}{v_{\text{п}}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad (1)$$

звідки  $\beta'' = \beta$ . Закон заломлення світла при переході з середовища з показником заломлення  $n_1$  в середовище з показником заломлення  $n_2$  можна записати так:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \quad (2)$$

Запишемо це співвідношення для умови задачі:

$$n_{\text{в}} \sin \alpha = n_0 \sin \beta, \quad (3)$$

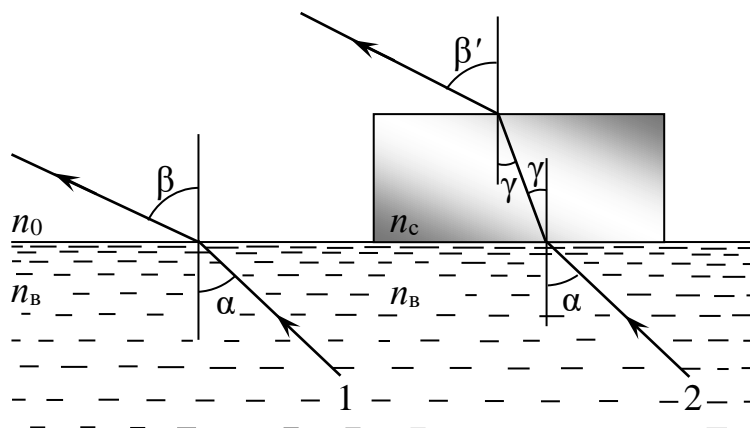


Рис. 1.10

$$n_B \sin \alpha = n_{ck} \sin \gamma = n_0 \sin \beta' \quad (\text{рис. 1.10}). \quad (4)$$

З цих рівнянь видно, що  $\beta'' = \beta$ , тобто промені вийдуть паралельно.

б) Якщо  $\beta = 90^\circ$ , то й  $\beta' = 90^\circ$ , тобто обидва промені зазнають повного внутрішнього відбиття одночасно.

Відповідь: а) Промені будуть паралельними. б) Ні. Також зазнає повного внутрішнього відбиття.

**Приклад 1.14.** Товста пластина зроблена з прозорого матеріалу, показник заломлення якого змінюється від значення  $n_1$  на верхній грані до значення  $n_2$  на нижній грані. Промінь входить в платину під кутом  $\alpha$ . Під яким кутом промінь вийде з пластини?

**Розв'язання.** Розіб'ємо пластину на безліч тонких пластинок такої малої товщини, щоб у межах кожної пластинки можна було вважати показник заломлення постійною величиною (рис. 1.11).

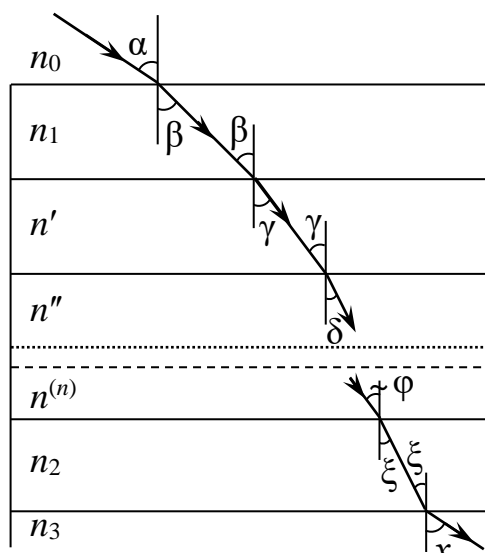


Рис. 1.11

Нехай промінь входить в пластину із середовища з показником заломлення  $n_0$ , а виходить із пластини в середовище з показником заломлення  $n_3$ . Тоді згідно закону заломлення світла

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} &= \frac{n_1}{n_0}, \\
\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} &= \frac{n'}{n_1}, \\
\frac{\sin \gamma}{\sin \delta} &= \frac{n''}{n'}, \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{\sin \varphi}{\sin \xi} &= \frac{n_2}{n^{(n)}}, \\
\frac{\sin \xi}{\sin x} &= \frac{n_3}{n_2}.
\end{aligned}
\tag{1}$$

Перемноживши ці рівності, отримаємо:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin x} = \frac{n_3}{n_0}.
\tag{2}$$

Таким чином, кут, під яким промінь вийде із пластини,

$$x = \arcsin \left( \frac{n_3}{n_0} \sin \alpha \right).
\tag{3}$$

Залежить тільки від кута падіння променя на пластину і від показників заломлення середовищ по обидва боки пластини. Зокрема, якщо  $n_3 = n_0$ , то

$$x = \alpha.
\tag{4}$$

Взагалі кут  $\theta$  нахилу променя до вертикалі пов'язаний із показником заломлення  $n$  у будь-якій точці пластини співвідношенням  $n \sin \theta = \text{const} = n_0 \sin \alpha$ . Якщо де-небудь всередині пластини показник заломлення набуде значення  $n = n_0 \sin \alpha$ , то відбудеться повне внутрішнє відбивання. В цьому випадку промінь вийде з пластини в середовище під тим же кутом  $\alpha$ , під яким він увійшов в пластину (рис. 1.12).

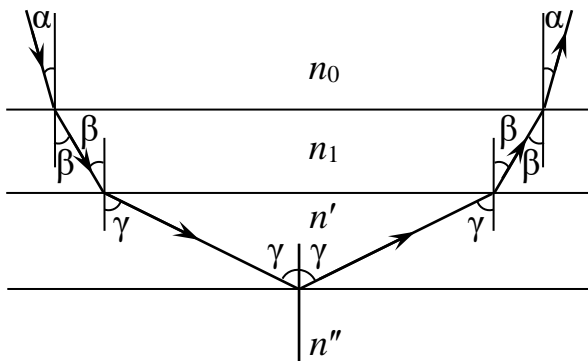


Рис. 1.12

Відповідь:  $x = \alpha$ .

**Приклад 1.15.** Кут заломлення призми  $\varphi = 45^\circ$ . Монохроматичний промінь світла падає на бічну грань призми під кутом  $\alpha_1 = 30^\circ$ . Знайти кут відхилення променя, якщо показник заломлення матеріалу призми  $n = 1,6$ .

*Розв'язання.* Нехай на ліву грань призми падає промінь  $SA$  (рис. 1.13). Тут він заломлюється і йде у напрямку  $AB$ . У точці  $B$  промінь другий раз заломлюється і йде у напрямку  $BS'$ . Продовжимо промені  $SA$  і  $BS'$  до їх перетину в точці  $C$ . Кут  $\delta$ , який утворений перетином продовження променя, падаючого на призму з продовженням променя, який виходить з призми (кут відхилення призми), потрібно визначити.

Згідно  $\triangle ABC$   $\delta = \angle CAB + \angle CBA$ , але з рис. 1.13 видно, що  $\angle CAB = \alpha_1 - \gamma_1$  і  $\angle CBA = \alpha_2 - \gamma_2$ , тому

$$\delta = \alpha_1 - \gamma_1 + \alpha_2 - \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - (\gamma_1 + \gamma_2).$$

Для  $\triangle ABD$   $\gamma_2 + \alpha_2 = \angle BDN'_1$ , а  $\angle BDN'_1 = \varphi$ . Тому  $\gamma_2 + \alpha_2 = \delta$ . З урахуванням сказаного вираз для кута відхилення променя буде мати вигляд

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi. \quad (1)$$

Щоб визначити  $\alpha_1$ , застосуємо послідовно закон заломлення світла до першої і другої грані:

$$\sin \gamma_1 = \frac{\sin \alpha_1}{n} = 0,3125, \quad \gamma_1 = 18^\circ 13'; \quad (2)$$

$$\frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha_2} = \frac{1}{n}, \quad \text{звідки } \sin \alpha_2 = n \sin \gamma_2. \quad (3)$$

Згідно  $\triangle ABD$   $\gamma_2 = \varphi - \gamma_1$ . Тому

$$\sin \alpha_2 = n \sin(\varphi - \gamma_1) = 0,720, \quad \alpha_2 = 46^\circ 3'. \quad (4)$$

Підставляючи знайдене значення у формулу для кута відхилення променя, отримаємо:

$$\delta = 30^\circ + 46^\circ 3' - 45^\circ = 31^\circ 3'.$$

*Відповідь:*  $\delta = 31^\circ 3'$ .

**Приклад 1.16.** Промінь світла  $SD$  падає на правильну тригранну призму перпендикулярно до грані  $AC$  (рис. 1.14). Визначити подальший хід променя у призмі і за гранню  $BC$ . Показник заломлення скла призми  $n = 1,8$ .

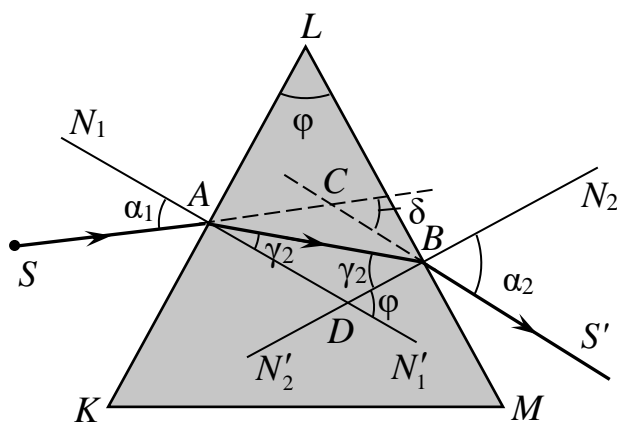


Рис. 1.13

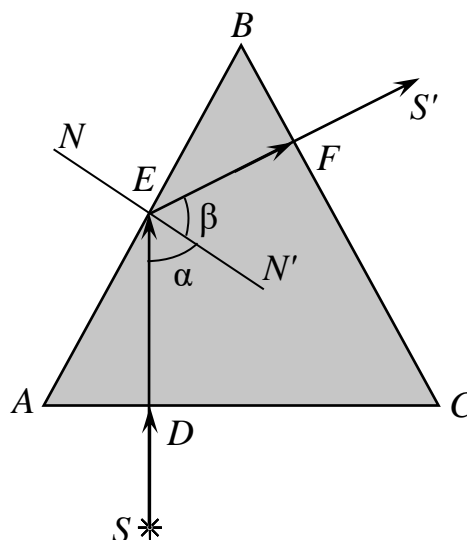


Рис. 1.14

*Розв'язання.* Промінь  $SD$  падає перпендикулярно на грань  $AC$ , тому він проходить цю грань, не заломлюючись. Із прямокутного  $\triangle ADE$ :  $\angle AED = 90^\circ - \angle DAE = 30^\circ$ . Кут падіння  $\alpha = \angle N'ED = \angle N'EA - \angle AED = 60^\circ$ .

Таким чином, на грань  $AB$  промінь  $DE$  падає під кутом  $\alpha = 60^\circ$ . Оскільки промінь  $DE$  падає на межу поділу середовища, оптично більш густого (скло), і середовища, оптично менш густого (повітря), тобто можуть бути три випадки: 1) кут падіння світла  $\alpha$  менший граничного кута повного відбивання світла  $\alpha_0$ . При цьому в точці  $E$  промінь розділиться на два промені – відбитий і заломлений; 2)  $\alpha = \alpha_0$ ; тоді в точці  $E$  промінь  $DE$  розділиться на два промені – відбитий і заломлений, який піде в напрямку  $EB$  (кут заломлення дорівнює  $90^\circ$ ); 3)  $\alpha > \alpha_0$ ; на грані  $AB$  буде повне відбивання світла.

Щоб визначити подальший хід променя від точки  $E$ , потрібно визначити кут  $\alpha_0$  для скла, з якого виготовлено призму:

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n} = 0,5556; \alpha_0 = 33^\circ 45'.$$

Оскільки  $\alpha > \alpha_0$ , то в точці  $E$  відбудеться повне відбивання світла. Кут відбивання  $\alpha' = \alpha = 60^\circ$ .

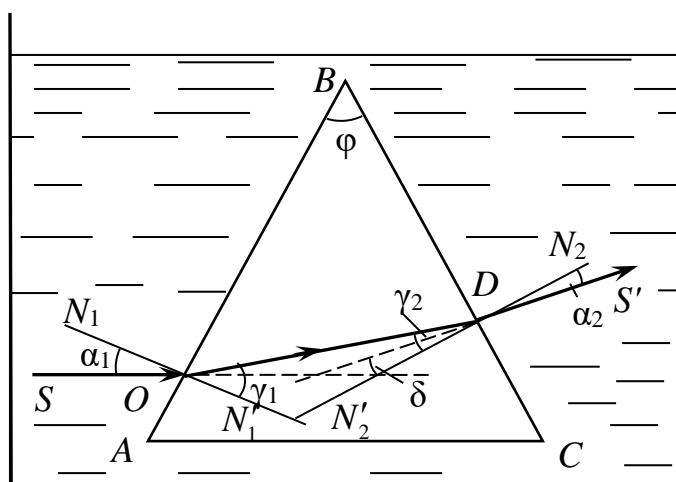
Із  $\triangle BFE$  видно, що  $\angle BFE = 180^\circ - \angle FBE - \angle BEF = 120^\circ - \angle BEF$  ( $\angle FBE$  – кут заломлення рівнокутної призми);  $\angle BEF = 180^\circ - (\angle AED + \angle DEF) = 180^\circ - (\angle AED + 2\alpha) = 30^\circ$ . З урахуванням вище наведених обрахунків

$$\angle BFE = 90^\circ.$$

Отже, промінь  $EF$  падає перпендикулярно на грань  $BC$ , тому не буде заломлюватися і піде в напрямку  $FS'$ .

*Відповідь:* хід променів див. рис. 1.14.

**Приклад 1.17.** В посудині з водою знаходиться порожня рівнокутна тригранна призма, яка склеєна з тонких скляних пластинок. В середині призми – повітря (рис. 1.15). Визначити подальший хід променя  $SO$ , який паралельний основі призми  $AC$ , і знайти кут відхилення променя. Товщиною скляних пластинок, з яких виготовлена призма, знехтувати.



*Рис. 1.15*

*Розв'язання.* На межі поділу вода – повітря (грань призми  $AB$ ) промінь світла  $SO$  буде заломлюватися. Оскільки друге середовище оптично менш густе, ніж перше, то заломлений промінь  $OD$  буде відхилитися від перпендикуляра  $N_1N'_1$ . Кут заломлення  $\gamma_1$  визначимо за формулою показника заломлення світла:  $\sin \gamma_1 = n \sin \alpha_1$ . Із побудови видно, що кут  $\alpha_1 = 30^\circ$ ; показник заломлення води  $n = 1,33$ . Тоді  $\sin \gamma_1 = 0,665$ ;  $\gamma_1 = 41^\circ 41'$ .

Промінь  $OD$  на межі поділу повітря – вода заломиться, але оскільки світло переходить із оптично менш густого середовища в оптично більш густе, заломлений промінь  $DS'$  наблизиться до перпендикуляра  $N_2N'_2$ . Кут заломлення  $\gamma_2$  визначимо згідно формули закону заломлення світла:

$$\sin \gamma_2 = \frac{\sin \alpha_2}{n}.$$

В даному виразі невідомий кут  $\alpha_2$  – кут падіння на грань  $BC$ . З рис. 317 видно, що  $\gamma_2 = 90^\circ - \angle ODB$ . Із  $\triangle OBD$ :

$$\angle ODB = 180^\circ - (\angle BOD + \angle OBD); \angle BOD = 90^\circ - \gamma_1 = 48^\circ 19'; \angle OBD = 60^\circ.$$

З урахуванням цього  $\angle ODB = 71^\circ 41'$ , а шуканий кут  $\gamma_2 = 18^\circ 19'$ .

Підставивши значення  $\gamma_2$  і  $n$  у вираз для  $\sin \alpha_2$ , отримаємо

$$\sin \alpha_2 = 0,2361, \alpha_2 = 13^\circ 40'.$$

Кут відхилення променя  $\delta$  знайдемо за формулою

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi = -12^\circ 20'.$$

Знак *мінус* вказує на те, що промінь  $DS'$ , який виходить з призми, відхиляється не до основи призми, а до її вершини  $B$ .

*Відповідь:* хід променів див. рис. 1.15;  $\delta = -12^\circ 20'$ .

## 1.4. Задачі для самостійного розв'язування

### 1.4.1. Закони відбивання і заломлення світла

**1.1.** Промінь світла переходить із середовища з показником заломлення  $n_1$  в середовище з показником заломлення  $n_2$ . Показати, що якщо кут між відбитим і променем після заломлення дорівнює  $\pi/2$ , то виконується умова  $\operatorname{tg}\alpha = n_2 / n_1$  ( $\alpha$  – кут падіння променя).

**1.2.** На дно посудини, наповненої водою до висоти 10 см, встановлено точкове джерело світла. На поверхні води плаває кругла непрозора пластинка таким чином, що її центр знаходиться над джерелом світла. Який найменший радіус повинна мати ця пластинка, щоб не один промінь не зміг вийти через поверхню води?

*Відповідь:* 0,114 м.

**1.3.** При падінні білого світла під кутом  $45^\circ$  на скляну пластинку кути заломлення для променів різних довжин хвиль наступні:

$\lambda$ , нм	759	687	589	486	397
A	$24^\circ 2'$	$23^\circ 57'$	$23^\circ 47'$	$23^\circ 27'$	$22^\circ 57'$

Побудувати графік залежності показника заломлення матеріалу пластинки від довжини хвилі.

**1.4.** Показники заломлення деякого сорту скла для червоного і фіолетового променів дорівнюють відповідно 1,51 і 1,53. Знайти граничні кути повного внутрішнього відбивання при падінні цих променів на межу скло – повітря.

*Відповідь:*  $\varphi_{\text{ч}} = 41^\circ 28'$ ;  $\varphi_{\text{ф}} = 40^\circ 49'$ .

**1.5.** Що відбудеться при падінні білого променя під кутом  $41^\circ$  на поверхню поділу скло – повітря, якщо взяти скло з попередньої задачі? (Скористатися результатами обчисленням попередньої задачі.)

*Відповідь:* Фіолетові промені зазнають повного внутрішнього відбивання, червоні промені виходять із скла у повітря.

**1.6.** На поверхню розчину цукру з показником заломлення  $n = 1,38$  падає промінь світла. Чому дорівнює кут падіння світла, якщо кут між відбитим і заломленим променями складає  $90^\circ$ ?

*Відповідь:*  $\alpha_1 \approx 54^\circ 4'$ .

**1.7.** Визначити, на який кут відхилиться промінь світла від початкового напрямку при переході із скла ( $n = 1,6$ ) у повітря та з води у повітря. Кут падіння світла  $30^\circ$ .

*Відповідь:*  $\delta_1 \approx 23^\circ 8'$ ;  $\delta_2 \approx 11^\circ 41'$ .

**1.8.** На прозоре середовище з повітря падає промінь світла під кутом  $\alpha = 40^\circ$  до поверхні. При переході в середовище промінь відхиляється від початкового напрямку на  $\delta = 24^\circ 49'$ . Визначити показник заломлення середовища.

*Відповідь:*  $n = 1,8$ .

**1.9.** Промінь світла переходить з алмаза в повітря і утворює кут заломлення  $85^\circ$ . Визначити кут падіння світла.

*Відповідь:*  $\alpha \approx 24^\circ 31'$ .

**1.10.** Визначити швидкість розповсюдження світла в середовищі, якщо при куті падіння світла з повітря у середовище, рівному  $\alpha = 45^\circ$ , кут заломлення виявився  $\gamma = 23^\circ 8'$ .

*Відповідь:*  $v \approx 1,67 \cdot 10^8$  м/с.

**1.11.** Промінь світла переходить із скипидару в повітрі. Граничний кут повного відбивання  $42^\circ 23'$ . Визначити швидкість поширення світла у скипидарі.

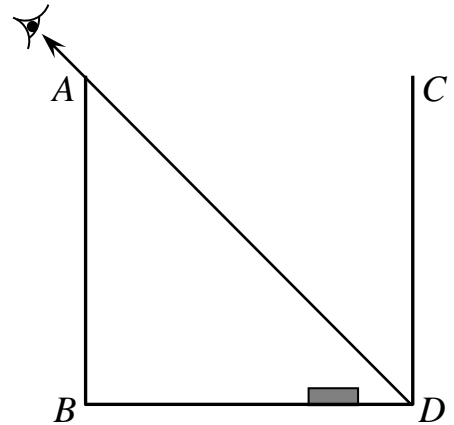
*Відповідь:*  $v \approx 2 \cdot 10^8$  м/с.

**1.12.** Промінь світла переходить з повітря у скло, показник заломлення якого  $n = 1,6$ . При якому куті падіння кут заломлення буде в 2 рази меншим кута падіння? Чи виконуватиметься така умова при переході світла з води у скло?

*Відповідь:*  $\alpha = 2\gamma = 78^\circ$ . Друга умова виконуватися не буде, оскільки максимальний кут падіння світла  $90^\circ$  ( $\alpha = 2\gamma = 108^\circ$ ).

**1.13.** На дні кубічної посудини з непрозорими стінками лежить монета на відстані  $d = 5$  см від однієї із стінок (рис. 1.16). Спостерігач розмістив око так, що в нього можуть попадати промені, відбиті від стінки посудини  $CD$ . Якій об'єм води необхідно налити в посудину, щоб спостерігач міг побачити монету? Ребро посудини  $a = 30$  см.

*Відповідь:*  $h = \frac{d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha} \approx 13,4$  см.



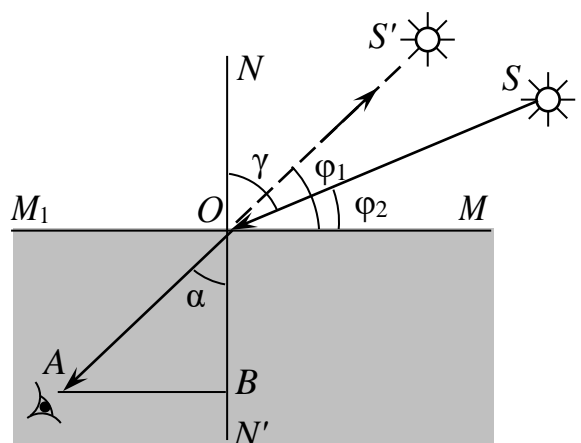
*Рис. 1.16*

Води необхідно налити

$$V = a^2 h = 12,05 \text{ л.}$$

**1.14.** Знаходячись під водою, водолаз бачить Сонце на висоті  $45^\circ$  над горизонтом. Визначити дійсну висоту Сонця над горизонтом.

*Відповідь:* Водолаз бачить Сонце в напрямку продовження заломленого сонячного променя  $OA$  (рис. 1.17). Видима висота Сонця над горизонтом  $\angle S'OM = \varphi_1$ , а дійсна висота  $\angle SOM = \varphi_2$ . На рис. до задачі бачимо, що  $\varphi_2 = 90^\circ - \gamma$ . З  $\triangle OBA$  випливає, що  $\alpha = 90^\circ - \varphi_1 = 45^\circ$ . Тоді  $\arcsin \gamma = \arcsin(n \sin \alpha) = 70^\circ 71' \times (n \sin \alpha) = 70^\circ 71'$ , а отже,



*Рис. 1.17*

$$\varphi_2 = 19^\circ 53'.$$

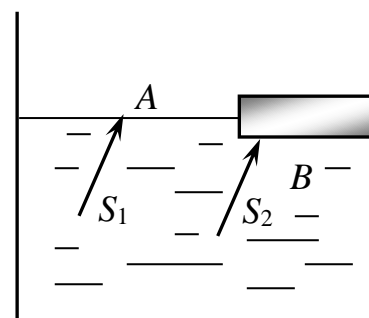
**1.15.** Спостерігач дивиться на предмет, який лежить на дні водоймища. Йому здається, що предмет знаходиться на глибині  $h = 1$  м на відстані  $l = 5$  м від ока по прямій лінії. Очі спостерігача містяться на одній і тій же висоті  $H = 1,5$  м над поверхнею води. На якій дійсній глибині  $h_0$  лежить предмет?

$$\text{Відповідь: } h_0 = h \sqrt{\frac{(n^2 - 1)l^2}{(H + h)^2} + 1} = 2 \text{ м.}$$

**1.16.** Водолаз розглядає з води світний предмет, який знаходиться над його головою на відстані  $h = 3$  м над поверхнею води. Визначити видиму відстань предмета над поверхнею води.

*Відповідь:* Водолазу буде здаватися, що світний предмет знаходиться на висоті  $h_1 = nh = 4$  м.

**1.17.** У воді розповсюджуються два паралельних промені світла  $S_1A$  і  $S_2B$  (рис. 1.18). Промінь  $S_1A$  виходить у повітря безпосередньо, а промінь  $S_2B$  проходить крізь горизонтальну плоскопаралельну пластинку. а) Чи будуть промені  $S_1A$  і  $S_2B$  паралельні по виході у повітря? б) Чи вийде у повітря промінь  $S_2B$ , якщо промінь  $S_1A$  падає під кутом  $40^\circ$  до поверхні води?



*Рис. 1.18*

*Відповідь:* а) Так. б) Ні.

**1.18.** У багатьох вимірювальних приладах роль стрілки виконує світловий промінь, відбитий від маленького плоского дзеркальця. На який кут повернулось дзеркальце, якщо відбитий промінь перемістився по шкалі на 32 мм? Відстань від шкали до дзеркальця 2 м.

*Відповідь:*  $27,5'$ .

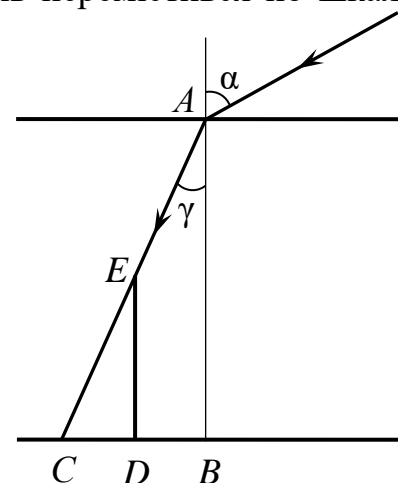
**1.19.** Жердина висотою 1 м вбита вертикально в дно озера так, що вона повністю знаходиться під водою. Визначити довжину тіні від жердини на дні озера, якщо промені Сонця падають на поверхню води під кутом  $30^\circ$ .

*Відповідь:* На рис. 1.19  $DC$  – тінь від жердини

$$ED; \quad DC = ED \cdot \operatorname{tg} \gamma; \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_b;$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n_b} = \frac{0,5}{1,33} = 0,38. \quad \text{Отже,} \quad \gamma = 22^\circ 30';$$

$$DC = DE \cdot \operatorname{tg} 22^\circ 30' = 38 \text{ см.}$$



*Рис. 1.19*

**1.20.** Вертикальний кілок заввишки  $h = 1$  м, що стоїть біля вуличного ліхтаря, відкидає тінь завдовжки  $l_1 = 0,8$  м. Якщо перенести кілок на  $d = 1$  м далі від ліхтаря (у тій самій площині), то він відкине тінь завдовжки  $l_2 = 1,25$  м. На якій висоті  $H$  висить ліхтар?

*Розв'язання.* Позначивши відстань від кілочка до стовпа у першому

випадку  $x$ , можна з подібності  $\triangle OAB$  і  $\triangle CDB$  (рис. 1.20) написати:

$$\frac{H}{h} = \frac{x + l_1}{l_1},$$

а з подібності  $\triangle OAB_1$  і  $\triangle C_1D_1B_1$  –

$$\frac{H}{h} = \frac{x + d + l_2}{l_2}.$$

Виключаючи з цих рівнянь  $x$ , знаходимо

$$H = \frac{(d + l_2 - l_1)h}{l_2 - l_1}.$$

$$\text{Відповідь: } H = \frac{(d + l_2 - l_1)h}{l_2 - l_1}.$$

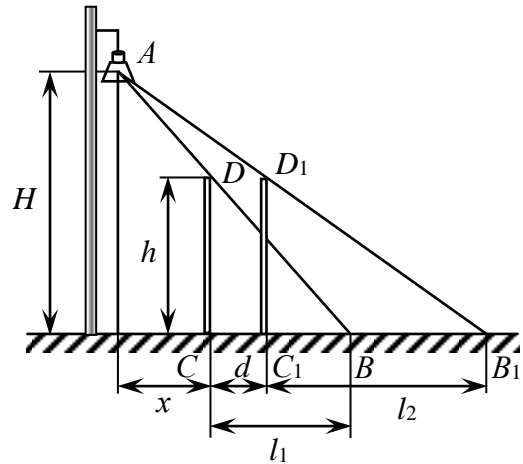


Рис. 1.20

**1.21.** Промінь світла заломлюється на межі повітря – скло. При якому куті падіння заломлений промінь утворює з відбитим кут в  $90^\circ$ ? Який найменший кут між відбитим і заломленим променями?

*Відповідь:*  $\text{tg} \alpha = n$ , де  $n$  – показник заломлення скла.

**1.22.** На скільки зміниться довжина хвилі червоних променів при переході з повітря в скло, якщо показник заломлення скла для цих променів 1,51, а їх частота  $\nu = 4 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ ?

*Відповідь:*  $0,254 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ .

**1.23.** Людина подивилась на дно водойми у вертикальному напрямі зверху вниз і визначила її уявну глибину 90 см. Чому рівна дійсна глибина водойми?

*Відповідь:* 1,2 м.

**1.24.** На поверхні шару чотирьоххлористого вуглецю ( $n_1 = 1,46$ ) товщиною 4,0 см плаває шар води ( $n_2 = 1,33$ ) товщиною 2,0 см. На якій уявній глибині буде знаходитись дно посудини при нормальному падінні променів?

*Відповідь:* 4,2 см.

**1.25.** Пучок паралельних променів падає на поверхню води під кутом  $30^\circ$ . Ширина пучка в повітрі 5 см. Знайти ширину пучка у воді.

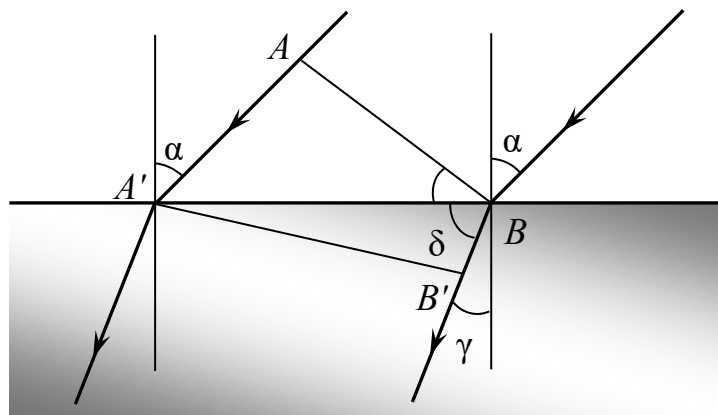
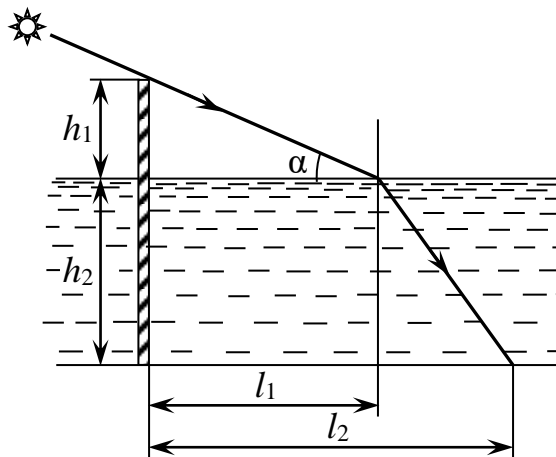


Рис. 1.21

*Відповідь:* На рис. 1.21  $AB$  – фронт плоскої хвилі у повітрі;  $A'B'$  – фронт плоскої хвилі у воді.  $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_b$ ;  $\sin \alpha = \frac{0,5}{1,33} = 0,367$ ;  $\gamma = 22^\circ 10'$ ;  $\cos \alpha = \frac{AB}{A'B}$ ;  
 $A'B = \frac{AB}{\cos \alpha}$ ;  $\sin \delta = \frac{A'B'}{A'B}$ . Звідси  $A'B' = \frac{AB \sin \delta}{\cos \alpha}$ ;  $\sin \delta = \sin(90^\circ - \gamma)$ . Отже,  
 $A'B' = \frac{AB \cdot \cos \gamma}{\cos \alpha} = 5,35$  см.

**1.26.** Стовп вбито у дно річки так, що  $h_1 = 1$  м стовпа піднімається над водою. Знайти довжину тіні стовпа на поверхні і на дні ріки, якщо висота Сонця над горизонтом  $\alpha = 30^\circ$ , глибина річки  $h_2 = 2$  м, показник заломлення для води  $n = 1,33$ .

*Відповідь:*  $l_1 = h_1 \operatorname{ctg} \alpha = 1,73$  м;  $l_2 = h_1 \operatorname{ctg} \alpha + h_2 \operatorname{tg} \beta = 3,44$  м (рис. 1.22), причому  $\sin \beta = \frac{1}{n} \sin(90^\circ - \alpha)$ .



*Рис. 1.22*

**1.27.** На якій глибині під водою знаходиться водолаз, якщо він бачить відбитими від поверхні води ті частини горизонтального дна, які знаходяться від нього на відстані 15 м і більше? Зріст водолаза 1,7 м.

*Відповідь:* 7,4 м.

**1.28.** На висоті  $h$  над поверхнею води знаходиться точкове джерело світла  $S$ . Де буде знаходитися зображення  $S'$  цього джерела, яке дає плоске дзеркальне дно посудини, якщо дивитись по вертикалі вниз? Глибина посудини з водою  $d$ , показник заломлення води  $n = 1,33$ .

*Відповідь:*  $|SS'| = 2 \left( h + \frac{d}{n} \right) = 2 \left( h + \frac{3}{4} d \right)$ .

**1.29.** Водолаз стоїть на горизонтальному дні водойми завглибшки 15 м. На якій відстані від водолаза, зріст якого 1,7 м, містяться ті частини дна, які він може побачити відбитими від поверхні води?

*Відповідь:*  $\geq 32,3$  м.

**1.30.** У дно басейна глибиною 3 м вмонтована маленька лампочка. Поверхня води спокійна. Який радіус світлого кола на поверхні басейна?

*Відповідь:* 3,42 м.

**1.31.** Точкове джерело світла розміщено на дні широкої посудини з водою. У скільки разів максимальний час, який потрібен, щоб світло вийшло у повітря, більший, ніж мінімальний?

*Відповідь:* 1,52.

**1.32.** Яка справжня глибина басейна, якщо при визначенні його глибини «на око» у вертикальному напрямку здається, що його глибина дорівнює 2 м.

*Відповідь:* 2,7 м.

**1.33.** У дно водойми вбито палю заввишки 4 м, що на 1 м виступає з води. Визначити довжину тіні палі на дні озера, якщо промені Сонця падають на поверхню води під кутом  $45^\circ$ . Показник заломлення води 1,33.

*Відповідь:* 2,9 м.

**1.34.** На дні посудини з водою знаходиться точкове джерело світла, а на поверхні води плаває непрозорий диск радіуса  $R$ , перешкоджаючи світловим променям виходити із води в повітря. Центр диска знаходиться над джерелом. У посудину повільно доливають воду. При якій мінімальній висоті стовпа води промені від джерела світла почнуть виходити з води?

*Відповідь:*  $H = R\sqrt{n^2 - 1}$ .

**1.35.** На дні струмка лежить камінець. Хлопчик хоче потрапити в нього палицею. Він прицілюється, тримаючи палицю під кутом  $60^\circ$  до поверхні води. На якій відстані від камінця палиця торкнеться дна струмка, якщо глибина струмка 32 см?

*Відповідь:* 5,5 см.

**1.36.** Над центром круглої ополонки радіусом 0,4 м на висоті 0,8 м рибалки запалили вночі ліхтар. Глибина озера 1,5 м. Який радіус плями на дні озера?

*Відповідь:* 0,94 м.

#### **1.4.2. Повне внутрішнє відбивання**

**1.37.** Визначити граничний кут, при якому відбувається повне внутрішнє відбивання в алмазі.

*Відповідь:*  $67^\circ 33'$ .

**1.38.** Показник заломлення скла дорівнює 1,52. Знайти граничні кути повного внутрішнього відбивання для поверхонь розділу: а) скло – повітря; б) вода – повітря; в) скло – вода.

*Відповідь:* а)  $41^\circ 8'$ ; б)  $48^\circ 45'$ ; в)  $61^\circ 10'$ .

**1.39.** У воді проходять два паралельних промені. Перший промінь на межі вода – повітря має повне внутрішнє відбивання. На шляху другого променя на поверхні води міститься плоскопаралельна скляна пластинка. Чи вийде другий промінь з води чи також зазнає повного відбивання?

*Відповідь:* Другий промінь також зазнає повного внутрішнього відбивання і не вийде у повітря.

**1.40.** В якому напрямленні плавець, який пірнув у воду, бачить захід Сонця?

*Відповідь:* Під кутом  $41^{\circ}15'$  до поверхні води.

**1.41.** Промінь світла виходить із скипидару в повітря. Граничний кут повного внутрішнього відбивання для цього променя  $42^{\circ}23'$ . Чому дорівнює швидкість розповсюдження світла в скипидарі?

*Відповідь:*  $2,02 \cdot 10^8$  м/с.

**1.42.** На стакан, наповнений водою, покладена скляна пластинка. Під яким кутом повинен падати на пластинку промінь світла, щоб від поверхні поділу води зі склом відбулося повне внутрішнє відбивання? Показник заломлення скла 1,5.

*Відповідь:* Маємо  $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_1$ , де  $n_1$  – показник заломлення скла. Повне

внутрішнє відбивання від поверхні, яка відділяє воду від скла, виникне, якщо виконується умова:  $\sin \gamma = \frac{n_2}{n_1}$ . Тоді  $\sin \alpha = n_1 \sin \gamma = n_1 \frac{n_2}{n_1} = n_2 = 1,33$ . Оскільки  $\sin \alpha > 1$ , то умови задачі не виконуються.

**1.43.** Промінь світла переходить із скла у воду. При якому найменшому куті падіння спостерігатиметься повне внутрішнє відбивання?

*Відповідь:*  $62^{\circ}28'$ .

**1.44.** Визначити показник заломлення рідини, якщо промені, що падають під кутом  $40^{\circ}$  до горизонту, заломлюються у рідині під кутом  $35^{\circ}$ .

*Відповідь:* 1,33.

**1.45.** Світловий промінь падає під кутом  $\alpha$  на тіло з показником заломлення  $n$ . Як повинні бути зв'язані між собою величини  $\alpha$  та  $n$ , щоб відбитий промінь був перпендикулярним до заломленого?

*Відповідь:*  $\text{tg } \alpha = n$ .

**1.46.** Світловий промінь виходить з води в повітря. Граничний кут повного внутрішнього відбивання для цього променя  $49^{\circ}$ . Знайти швидкість поширення світла у воді.

*Відповідь:*  $2,26 \cdot 10^8$  м/с.

**1.47.** З якої мінімальної відстані людина, яка занурилась у воду на дно озера з джерелом світла, може спостерігати дно внаслідок повного відбивання світла від межі вода – повітря, якщо глибина озера 10 м, а джерело знаходиться на дні озера?

*Відповідь:* 22,8 м.

**1.48.** Який граничний кут при падінні променя на межу скло – вода?

*Розв'язання.* За означенням відносного показника заломлення

$$n_{21} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \text{ де } \alpha \text{ – кут падіння; } \gamma \text{ – кут, утворений заломленим променем з}$$

нормаллю до межі середовищ.

У випадку повного внутрішнього відбивання  $\gamma = 90^{\circ}$ , а отже,  $\sin \alpha = n_{21} = n_2 / n_1$ , де  $n_1$  і  $n_2$  – показники заломлення води і скла відносно повітря; вони дорівнюють відповідно 1,33 і 1,52.

Відповідь:  $\alpha_{\text{гр}} = \arcsin n_{21} = \arcsin(n_2 / n_1) \approx 61^\circ$ .

**1.49.** На якій глибині під водою перебуває водолаз, якщо він бачить відбитими від поверхні води ті частини горизонтального дна, які розміщені від нього на відстані  $s = 15$  м і далі? Зріст водолаза  $h = 1,5$  м. Показник заломлення для води  $n = 1,33$ .

*Розв'язання.* Відстань  $ED$  дорівнює відстані від водолаза до найближчих до нього предметів, які він бачить відбитими від поверхні води (рис. 1.23):  $ED = s = 15$  м;  $AE = h = 1,5$  м.

Граничний кут  $\varphi_{\text{гр}}$  визначається з умови повного внутрішнього відбивання

$$\sin \varphi_{\text{гр}} = 1 / n, \quad (1)$$

Як видно з рис. 1.23,

$$\frac{s - FD}{2} = (H - h) \operatorname{tg} \varphi_{\text{гр}}, \quad (2)$$

звідки

$$FD = h \operatorname{tg} \varphi_{\text{гр}}. \quad (3)$$

Розв'язуючи рівняння (2) і (3), знаходимо шукану глибину:

$$H = \frac{h}{2} + \frac{s}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_{\text{гр}}}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{гр}} = \frac{\sin \varphi_{\text{гр}}}{\cos \varphi_{\text{гр}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Підставляючи значення  $\operatorname{tg} \varphi_{\text{гр}}$  у рівняння (4) остаточно матимемо

$$H = \frac{h}{2} + \frac{s}{2} \sqrt{n^2 - 1}. \quad (5)$$

Відповідь:  $H = 7,3$  м.

**1.50.** Промінь падає під кутом  $30^\circ$  на дно скляної посудини ( $n_1 = 1,50$ ), заповненої водою ( $n_2 = 1,33$ ), і виходить через дно у повітря. Під яким кутом виходить промінь?

Відповідь:  $41^\circ 41'$ .

**1.51.** Промінь ковзає горизонтально по воді. Під яким кутом цей промінь спостерігається людиною, що занурилась у воду?

Відповідь:  $48^\circ 45'$ .

**1.52.** На торець скляного світловода падає світло під кутом  $\alpha$ . Яким повинен бути найменший показник заломлення скла, щоб світло, яке увійшло у світловід, не могло вийти через його бічну стінку незалежно від кута  $\alpha$ ?

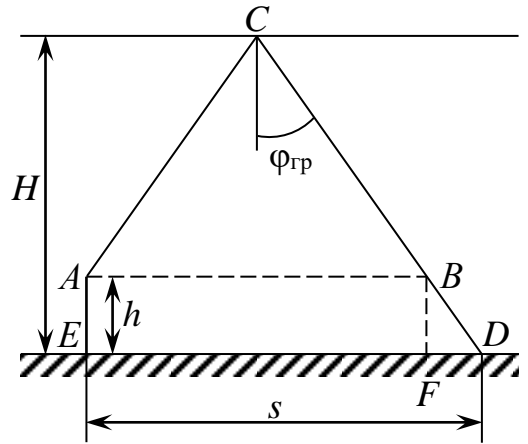


Рис. 1.23

*Відповідь:* За законом заломлення  $\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n}$  (рис. 1.24). На поверхню світловода промінь повинен падати під кутом, не меншим від граничного:  $\beta = 90^\circ - \gamma$ ;

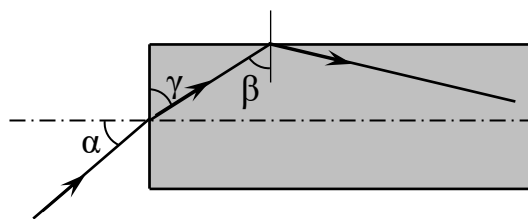
$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \gamma) = \cos \gamma \geq \frac{1}{n}, \quad (1)$$

має максимальне значення при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\sin \gamma = \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Піднесемо до квадрата і додамо (1) і

$$(2): 1 \geq \frac{2}{n^2}; n \geq \sqrt{2}.$$



*Рис. 1.24*

**1.53.** Знайти граничний кут повного відбивання при переході світла із скла у воду. Показник заломлення скла 1,6, води – 1,33.

*Відповідь:*  $56^\circ 14'$ .

**1.54.** На поверхні озера глибиною 2 м плаває круглий пліт радіусом 8 м. Знайти радіус повної тіні на дні озера при освітленні води розсіяним світлом.

*Відповідь:* 5,72 м.

### 1.4.3. Хід променів у плоскопаралельній пластинці

**1.55.** Промінь світла падає під кутом  $30^\circ$  на плоскопаралельну скляну пластинку і виходить з неї паралельно початковому променю. Показник заломлення скла 1,5. Яка товщина  $d$  пластинки, якщо відстань між променями рівна 1,94 см?

*Відповідь:*  $d = 0,1$  м.

**1.56.** На плоскопаралельну скляну пластинку товщиною 1 см падає промінь світла під кутом  $60^\circ$ . Показник заломлення скла 1,73. Частина світла відбивається, а частина, заломлюючись, проходить у скло, відбивається від нижньої поверхні пластинки і, заломлюючись вдруге, повертається назад, у повітря паралельно першому відбитому променю. Визначити відстань  $l$  між променями.

*Відповідь:*  $l = 5,8$  мм.

**1.57.** Промінь білого світла падає під кутом  $60^\circ$  на плоскопаралельну скляну пластинку. Крайній червоний і фіолетовий промені світлового пучка, який виходить з протилежної грані пластинки, знаходяться один від одного на відстані 0,3 мм. Визначити товщину пластинки, якщо показник заломлення скла для крайніх червоних променів 1,51, а для крайніх фіолетових 1,53.

*Відповідь:*  $h = \frac{\Delta l}{\text{tg } \gamma_{\text{ч}} - \text{tg } \gamma_{\text{ф}}} = 23$  мм, де  $\Delta l$  – відстань між променями;  $\gamma_{\text{ч}}$  –

кут заломлення для червоних променів;  $\gamma_{\text{ф}}$  – для фіолетових променів.

**1.58.** Знайти зміщення променів при проходженні їх крізь плоско-паралельну скляну пластинку ( $n = 1,50$ ) товщиною  $d = 1$  см, якщо кут падіння променів  $\alpha = 45^\circ$ .

*Відповідь:*  $x = \frac{nd}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = 0,33$  см.

**1.59.** Пучок паралельних променів шириною  $a = 5$  см падає на товсту скляну пластинку з показником заломлення  $n = 1,50$  під кутом  $\alpha = 30^\circ$ . Визначити ширину пучка після заломлення у пластинці.

*Відповідь:*  $x = \frac{a\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n \cos \alpha} = 5,4$  см.

**1.60.** На столі лежить аркуш паперу. Промінь світла, який падає на папір під кутом  $\alpha = 30^\circ$ , дає на ньому світлу пляму. На скільки зміститься ця пляма, якщо на папір покласти плоскопаралельну скляну пластину товщиною  $d = 5$  см?

*Відповідь:* 1,1 см.

**1.61.** Промінь падає під кутом  $\alpha = 60^\circ$  на скляну пластинку товщиною  $d = 30$  мм. Визначити бокове зміщення  $\Delta x$  променя після виходу із пластинки.

*Відповідь:* 15,4 мм.

**1.62.** Пучок паралельних променів падає на товсту скляну пластину під кутом  $\alpha = 60^\circ$ , і заломлюючись, переходить у скло. Ширина  $a$  пучка в повітрі дорівнює 10 см. Визначити ширину  $b$  пучка в склі.

*Відповідь:* 16,3 см.

**1.63.** На дні посудини під центром круглої непрозорої пластинки діаметром  $d = 2$  см помістили точкове джерело світла. Посудина поступово заповнюється водою, пластинка при цьому плаває на поверхні. При якій висоті рівня води промені почнуть виходити з води?

*Відповідь:*  $x = \frac{d}{2} \sqrt{n^2 - 1} = 7,7$  см.

**1.64.** Кут падіння світла на скляну плоскопаралельну пластинку  $60^\circ$ . Промінь, що пройшов крізь пластинку, змістився на 8 мм. Яка товщина пластинки?

*Відповідь:* 14,7 мм.

**1.65.** Чому дорівнюватиме кут заломлення світлого променя в скляній пластинці, якщо промінь падає на її поверхню під кутом  $45^\circ$  у повітрі? у воді? у сірковуглеці?

*Відповідь:*  $27^\circ$ ;  $37^\circ$ ;  $57^\circ$ .

**1.66.** Промінь падає під кутом  $60^\circ$  на скляну пластинку завтовшки 2 см з паралельними гранями. Визначити зміщення променя, який вийшов з пластинки.

*Відповідь:* 1,2 см.

**1.67.** Визначити зміщення  $a$  променя, який проходить крізь прозору пластинку з паралельними гранями, якщо кут падіння променя  $\alpha$ , кут заломлення  $\gamma$ , а товщина пластинки  $d$ . Чи може промінь, пройшовши крізь

пластинку з паралельними гранями, зміститися так, щоб відстань між ним та його початковим напрямом була більша від товщини пластинки?

*Відповідь:*  $a = d \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma}$ ;  $a = d \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin(90^\circ - \gamma)}$ . Оскільки  $\alpha < 90^\circ$ , то

$a < d$ .

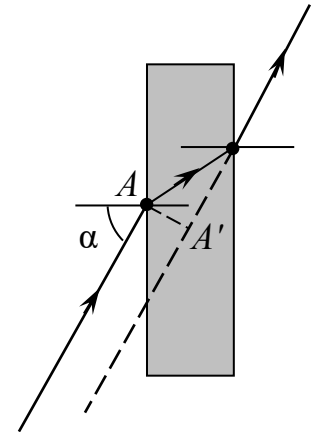
**1.68.** Промінь світла падає на прозору плоскопаралельну пластинку під деяким кутом  $\alpha \neq 0$ . Чи може зміщення променя перевищувати його товщину?

*Відповідь:* Ні.

**1.69.** Промінь світла падає на плоскопаралельну скляну пластинку під кутом  $\alpha = 60^\circ$ . Яка товщина пластинки  $d$ , коли при виході з неї промінь зміститься на 20 мм? Показник заломлення скла  $n = 1,5$ .

*Відповідь:* 39 мм.

*Вказівка.* Хід променя показано на рис. 1.25. Зміщення променя дорівнює відрізку  $AA'$ .



*Рис. 1.25*

**1.70.** Промінь падає на плоску скляну пластинку завтовшки  $d = 3$  см під кутом  $\alpha = 70^\circ$ . Визначити зміщення променя всередині пластинки. Показник заломлення скла 1,5.

*Відповідь:* 2 см.

**1.71.** Предмет міститься на відстані  $l = 15$  см від плоскопаралельної скляної пластинки. Спостерігач розглядає предмет через пластинку так, що промінь зору нормальний до неї. Визначити відстань  $x$  від зображення предмета до найближчої для спостерігача грані, якщо товщина пластинки  $d = 4,5$  см, показник заломлення скла  $n = 1,5$ .

*Розв'язання.* Див. рис. 1.26.  $BC = BK + KC$ . Але  $KC = AE = ES \operatorname{tg} \alpha = l \operatorname{tg} \alpha$  ( $\alpha$  – кут, під яким виходить промінь з точки  $S$ ), а  $BK = AK \operatorname{tg} \gamma = d \operatorname{tg} \gamma$ . Тому  $BC = = l \operatorname{tg} \alpha + d \operatorname{tg} \gamma$ . Тепер з трикутника  $BKS'$  знайдемо

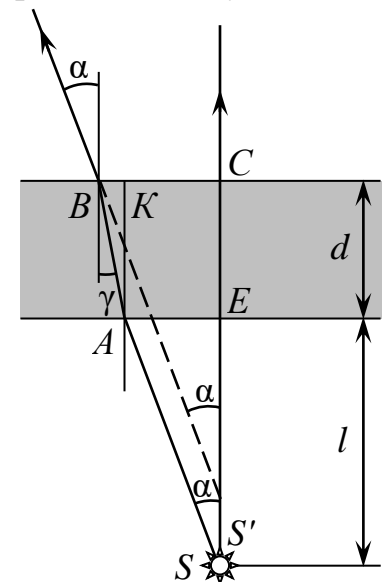
$$CS' = \frac{BC}{\operatorname{tg} \alpha} = l + d \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Через те, що кут  $\alpha$  малий, а отже, малий і кут  $\gamma$ , то  $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$  і  $\operatorname{tg} \gamma \approx \sin \gamma$ . Тому

$$\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{n} \text{ і } CS' = l + \frac{d}{n}.$$

*Відповідь:*  $x = 18$  см.

**1.72.** Знайти місце зображення об'єкта, розміщеного на відстані  $l = 4$  см від передньої поверхні плоскопаралельної скляної пластинки завтовшки  $d = 1$  см, посрібленої з тильного боку, приймаючи показник заломлення пластинки  $n = 1,5$ . Зображення розглядати перпендикулярно до поверхні пластинки.



*Рис. 1.26*

Відповідь: На  $5\frac{1}{3}$  см за переднім боком пластинки (рис. 1.27).

Вказівка. Зображення мовби у дзеркалі, що знаходиться на відстані  $d/n$  від передньої поверхні (рис. 1.27).

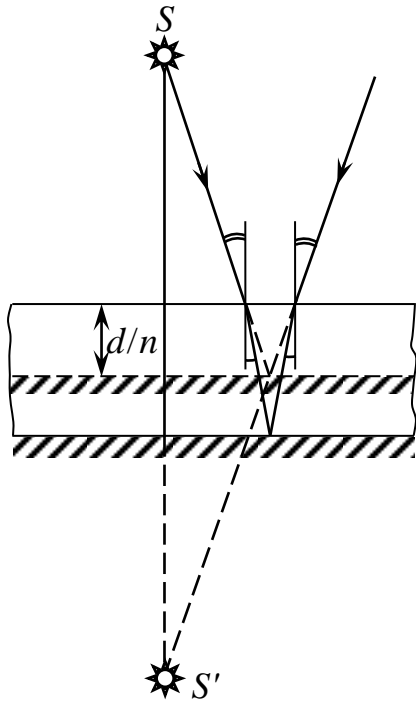


Рис. 1.27

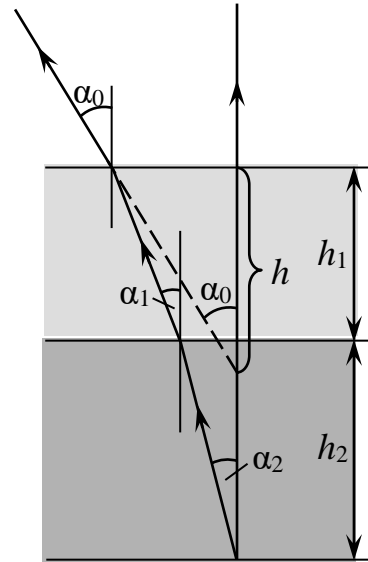


Рис. 1.28

**1.73.** У посудину налито дві незмішувані рідини з показниками заломлення  $n_1 = 1,3$  і  $n_2 = 1,5$ . Зверху рідина з показником заломлення  $n_1$ . Товщина її шару  $h_1 = 3$  см. Товщина шару другої рідини  $h_2 = 5$  см. На якій відстані від поверхні рідини здаватиметься дно посудини, якщо дивитись на нього крізь обидві рідини.

Відповідь:  $h = \frac{h_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2} \approx 5,63$  см.

Вказівка. З рис. 1.28 видно, що  $h_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + h_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = h \operatorname{tg} \alpha_0$ . Вибираючи промінь II так, щоб кути  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  були малі ( $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$ ), і користуючись законом заломлення, знаходимо відповідь.

**1.74.** Людина дивиться на своє зображення у дзеркалі, яке лежить на дні посудини з водою. На яку відстань акомодується око людини, коли вона на висоті  $h = 10$  см над рівнем води, а дзеркало – на глибині  $h_0 = 8$  см під рівнем води? Показник заломлення води  $n = 1,33$ .

Відповідь: На 32 см.

Вказівка. Див. задачу 1.72.

**1.75.** Промінь світла падає на плоскопаралельну скляну пластинку товщиною  $h = 5$  см під кутом  $\alpha = 35^\circ$ . Визначити зміщення променя всередині пластинки.

Відповідь:  $d = \frac{h \sin(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} \approx 2,44$  см.

**1.76.** Промінь світла, який падає під кутом  $\alpha = 70^\circ$  на аркуш паперу, утворює на ньому світлу пляму. На скільки зміститься ця пляма, якщо на папір покласти скляну пластинку товщиною  $h = 6$  см?

*Відповідь:*  $d = 4$  см.

**1.77.** На плоскопаралельну пластинку товщиною  $h = 10$  см падає промінь світла під кутом  $\alpha = 40^\circ$ . Проходячи через пластинку, він зміщується на  $l = 3$  см. Знайти показник заломлення речовини пластинки.

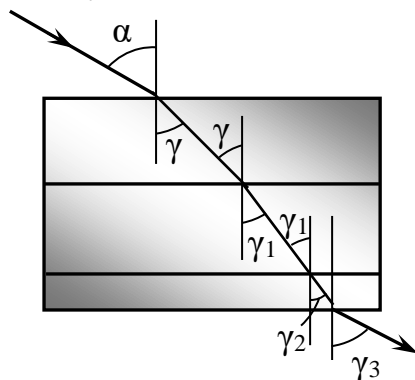
*Відповідь:*  $n = 1,57$ .

**1.78.** Паралельний пучок світла падає з повітря на скляну плоскопаралельну пластинку під кутом  $\alpha = 50^\circ$ . Ширина пучка в повітрі  $d = 5$  см. Визначити ширину пучка в скляній пластиці.

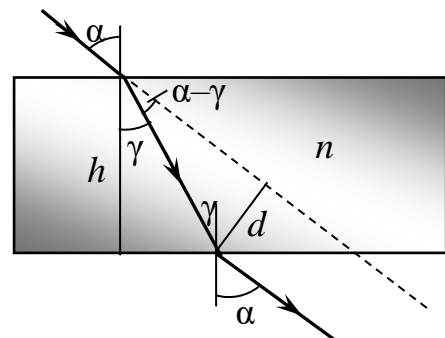
*Відповідь:*  $d_1 \approx 6,8$  см.

**1.79.** В посудину зі скляним дном налита вода і масло. На поверхню рідини під кутом  $\alpha = 60^\circ$  падає світло. Під яким кутом буде виходити світло через дно посудини?

*Відповідь:* Посудину з рідинами можна розглядати як систему трьох плоскопаралельних пластинок: масло – вода – скло (рис. 1.29).  $\gamma_3 = \arcsin \frac{\sin \alpha}{n_c} = 33^\circ 28'$ .



**Рис. 1.29**



**Рис. 1.30**

**1.80.** Вузький паралельний пучок світла падає на плоскопаралельну скляну пластинку під кутом  $\alpha$ , синус якого дорівнює 0,8. Пучок, який вийшов з пластинки, виявився зсунутим відносно продовження падаючого пучка на відстань  $d = 2$  см. Яка товщина  $h$  пластинки, якщо показник заломлення скла  $n = 1,7$ ?

*Відповідь:* Пучок, що вийшов з пластинки, буде паралельний падаючому,  $\frac{h}{\cos \gamma} = \frac{d}{\sin(\alpha - \gamma)}$  (рис. 1.30). Оскільки  $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n$ , то

$$h = \frac{d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha (\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha})} \approx 4,2 \text{ см.}$$

**1.81.** На яку відстань  $x$  зміститься світловий промінь, що поширюється в склі з показником заломлення  $n$ , якщо на його шляху зустрінеться щілина, заповнена повітрям? Грані щілини плоскі і паралельні. Відстань між гранями

дорівнює  $d$ , кут падіння променя на грань дорівнює  $\alpha$ . Повного відбивання немає (рис. 1.31).

$$\text{Відповідь: } x = \left( \frac{n \cos \alpha}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right) d \sin \alpha.$$

**1.82.** Плоскопаралельну пластинку завтовшки  $d = 5$  см посріблено з нижнього боку. Промінь падає зверху на пластинку під кутом  $\alpha = 30^\circ$ , частково відбивається, а частина світла проходить у пластинку, відбивається від нижньої поверхні пластинки і, заломлюючись вдруге, виходить у повітря паралельно першому відбитому променю. Визначити показник заломлення  $n$  матеріалу пластинки, якщо відстань між двома паралельними променями  $l = 2,5$  см.

*Відповідь:* Хід променів у пластинці подано на рис. 1.32. Кут  $ABC$  у прямокутному трикутнику  $ACB$  дорівнює  $\alpha$ , тому  $AB = \frac{l}{\cos \alpha}$ . З другого боку, з трикутника  $ADB$  видно, що  $AB = 2d \operatorname{tg} \gamma$ . Кути  $\alpha$  і  $\gamma$  пов'язані законом заломлення  $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n$ . Розв'язуючи ці рівняння, після виключення невідомих  $\gamma$  і  $AB$  дістаємо:

$$n = \sin \alpha \sqrt{1 + \left( 2 \frac{d}{l} \cos \alpha \right)^2} \approx 1,8.$$

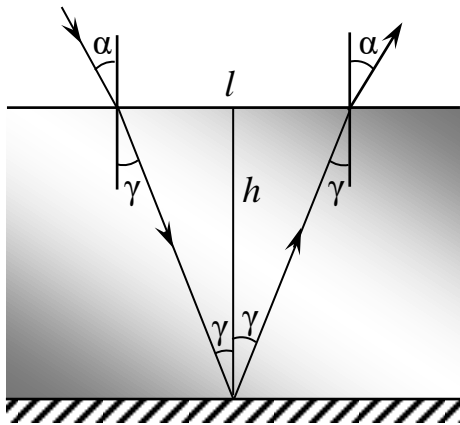


Рис. 1.31

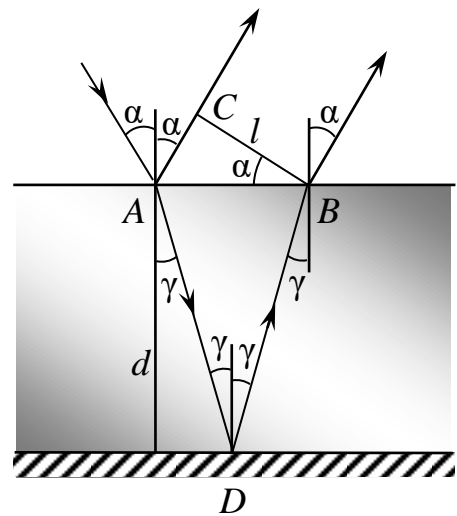


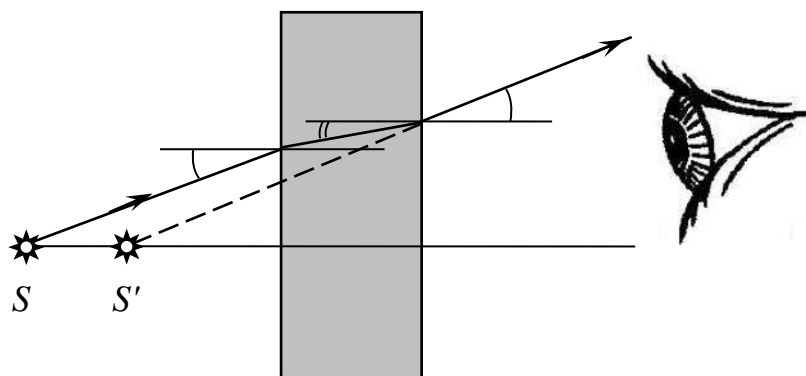
Рис. 1.32

**1.83.** На скляну плоскопаралельну пластинку падає промінь під кутом  $\alpha$ . Промінь частково відбивається від верхньої поверхні, частково проходить у пластинку, знову відбивається від нижньої поверхні і потім виходить через верхню. Знайти кут  $\varphi$  виходу променя і довжину  $l$  шляху, який проходить заломлений промінь в пластинці. Товщина пластинки  $d$ , показник заломлення світла  $n$ .

$$\text{Відповідь: } \varphi = \alpha; l = \frac{2nd}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

**1.84.** Між світною точкою і оком встановлено плоскопаралельну пластинку. Знайти побудовою уявне зображення точки.

*Відповідь:* Див. рис. 1.33.



*Рис. 1.33*

**1.85.** Яка товщина  $H$  плоскопаралельної скляної пластинки, якщо точку, нанесену чорнилом на нижній поверхні пластинки, спостерігач бачить на відстані  $h = 5$  см від верхньої поверхні? Промінь зору перпендикулярний до поверхні пластинки. Показник заломлення скла  $n = 1,6$ . Для малих кутів  $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ .

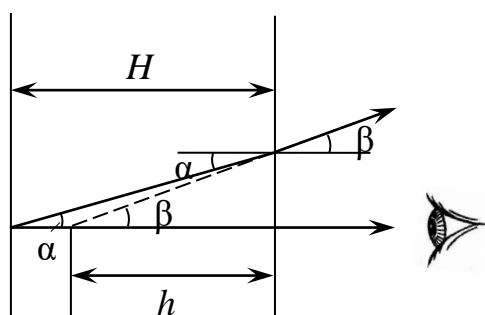
*Відповідь:* Щоб визначити позірне місцезнаходження точки, побудуємо два промені, які виходять з точки і потрапляють в око спостерігача. Нехай один з променів перпендикулярний до поверхні пластинки, другий падає на поверхню пластинки під малим кутом  $\alpha$ , заломлюється під кутом  $\beta$  і потрапляє в око спостерігача, якому здається, що точка лежить на перетині продовжень променів на відстані  $h$  від поверхні пластини.

З рис. 1.34 видно, що  $h \text{ tg } \beta = H \text{ tg } \alpha$ . Звідси  $\frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta} = \frac{h}{H}$ . За законом

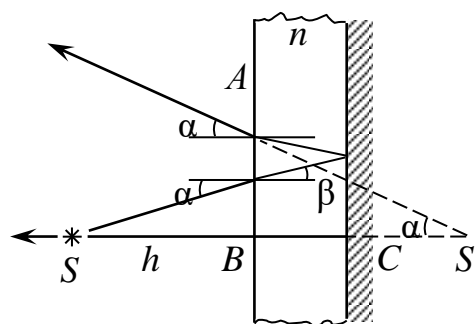
заломлення  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}$ . Для малих кутів  $\alpha$  і  $\beta$  ліві частини останніх рівнянь

можна вважати однаковими. Отже, рівні і праві частини:  $H = nh = 8$  см.

**1.86.** Точкове джерело розміщене на відстані  $h = 1,5$  см від передньої поверхні плоскопаралельної пластинки товщиною  $d = 1,2$  см, посрібленої з заднього боку. На якій відстані  $x$  від джерела розміщене його зображення, що утворюється внаслідок відбивання променя від задньої поверхні пластинки?



*Рис. 1.34*



*Рис. 1.35*

Показник заломлення речовини пластинки  $n = 1,6$ . Спостерігають у напрямі, перпендикулярному до пластинки.

*Відповідь:* Спостерігач бачить зображення в точці  $S'$ . Її можна знайти як точку перетину двох близьких променів, що вийшли з  $S$  і відбилися від задньої поверхні пластинки (рис. 1.35). Промінь  $SBC$ , перпендикулярний до пластинки, після відбивання проходить через  $S$ . Промінь, що падає на пластинку під малим кутом  $\alpha$ , виходить з неї в точці  $A$  на відстані  $AB = htg\alpha + 2dtg\beta$ . Водночас  $AB = (x - h)tg\alpha$ . Через малість кутів  $\alpha$  і  $\beta$  закон заломлення можна записати у вигляді  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \approx \frac{tg \alpha}{tg \beta}$ . Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо:

$$x = 2 \left( h + \frac{d}{n} \right) = 4,5 \text{ см.}$$

#### 1.4.4. Хід променів у трикутній призмі

**1.87.** Промінь світла падає на грань призми з показником заломлення  $n$  під малим кутом. Показати, що якщо кут заломлення  $\varphi$  призми малий, то кут відхилення  $\delta$  променів не залежить від кута падіння і дорівнює  $\varphi(n - 1)$ .

**1.88.** На рівнобедрену призму із заломлюючим кутом  $\varphi = 40^\circ$  падає промінь, що йде всередині призми паралельно основі призми. Кут падіння променя  $30^\circ$ . Знайти показник заломлення матеріалу призми.

*Відповідь:* 1,46.

**1.89.** На скляну призму з заломленим кутом  $\varphi = 60^\circ$  падає промінь світла. Визначити показник заломлення  $n$  скла, якщо при симетричному ході променя в призмі кут відхилення  $\delta = 40^\circ$ .

*Відповідь:* 1,53.

**1.90.** Кут заломлення скляної призми  $\varphi = 30^\circ$ . Промінь світла падає на грань призми перпендикулярно до її поверхні і виходить у повітря з другої грані, відхиляючись на кут  $\delta = 20^\circ$  від початкового напрямку. Визначити показник заломлення  $n$  скла.

*Відповідь:* 1,63.

**1.91.** Кут заломлення призми  $\varphi = 60^\circ$ . Кут найменшого відхилення променя від початкового напрямку  $\delta = 30^\circ$ . Визначити показник заломлення  $n$  скла, з якого виготовлено призму.

*Відповідь:* 1,41.

**1.92.** Монохроматичний промінь світла падає перпендикулярно на бічну грань призми з кутом заломлення  $\varphi = 30^\circ$  і виходить з призми під кутом  $\alpha_2 = 64^\circ 10'$ . Визначити показник заломлення матеріалу, з якого виготовлена призма.

*Відповідь:*  $n = 1,8$ .

**1.93.** Монохроматичний промінь падає нормально на бічну поверхню призми, кут заломлення дорівнює  $40^\circ$ . Показник заломлення матеріалу призми для цього променя 1,5. Знайти відхилення променя, який вийшов із

призми, від початкового напрямку.

*Відповідь:*  $34^{\circ}37'$ .

**1.94.** Монохроматичний промінь падає нормально на бічну поверхню призми і виходить з неї відхиленням на  $25^{\circ}$ . Показник заломлення матеріалу призми для цього променя 1,7. Знайти кут заломлення призми.

*Відповідь:*  $\varphi = 28^{\circ}$ .

**1.95.** Промінь світла падає на грань скляної призми перпендикулярно до її поверхні і виходить з протилежної грані, відхилившись на кут  $\delta = 25^{\circ}$  від початкового напрямку. Визначити кут заломлення  $\varphi$  призми.

*Відповідь:*  $35^{\circ}30'$ .

**1.96.** Монохроматичний промінь падає нормально на бічну поверхню призми, кут заломлення якої  $\varphi = 30^{\circ}$ . Показник заломлення призми для цього променя  $n = 1,50$ . Знайти кут відхилення променя від початкового напрямку при виході з призми.

*Відповідь:*  $\delta = \arcsin(n \sin \varphi) - \alpha$ .

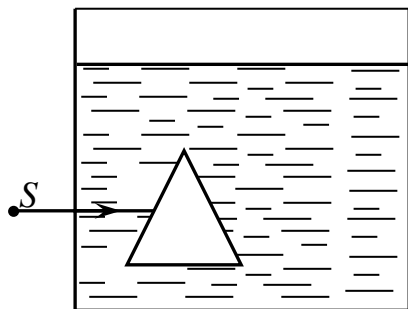
**1.97.** Промінь падає нормально на бічну грань рівнобедреної трикутної скляної призми. Знайдіть кут відхилення променя від початкового напрямку, якщо кут заломлення призми дорівнює  $40^{\circ}$ . Показник заломлення скла 1,5.

*Відповідь:*  $34,6^{\circ}$ .

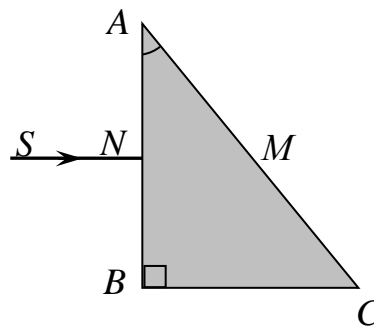
**1.98.** Кут заломлення призми, яка має форму гострого клина,  $\varphi = 2^{\circ}$ . Визначити кут найменшого відхилення  $\delta_{\min}$  променя при проходженні через призму, якщо показник заломлення скла призми  $n = 1,6$ .

*Відповідь:*  $1^{\circ}12'$ .

**1.99.** У посудині з водою стоїть порожниста призма, склеєна із скла (всередині повітря) (рис. 1.36). Накреслити подальший хід променя  $SA$  (показати лише загальний характер ходу променя, не виконуючи обчислень).



*Рис. 1.36*



*Рис. 1.37*

**1.100.** Промінь  $SN$  падає на прямокутну скляну призму  $BAC$  (рис. 1.37) перпендикулярно до грані  $AB$ . Заломиться промінь на грані  $AC$  в точці  $N$  його падіння чи зазнає повного відбивання, якщо кут  $BAC = 30^{\circ}$ ?

*Відповідь:* Відбудеться.

**1.101.** При якому найменшому значенні кута заломлення  $A$  скляної призми  $ABC$  (див. рис. 1.37) промінь  $SM$  зазнаватиме повного відбивання?

*Відповідь:*  $39^{\circ}$ .

**1.102.** Промінь падає під кутом  $50^{\circ}$  на пряму трикутну призму із кутом

заломлення  $60^\circ$ . Визначити кут заломлення променя під час виходу з призми.

*Відповідь:*  $56^\circ$ .

**1.103.** Промінь падає перпендикулярно на бічну грань прямої скляної призми, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник з кутом при вершині  $20^\circ$ . На скільки градусів відхилиться промінь під час виходу з призми порівняно з початковим напрямком, якщо промінь усередині призми падає:  
а) на другу бічну грань; б) на основу?

*Відповідь:* а) На  $13^\circ$  вниз; б) на  $20^\circ$  вгору.

**1.104.** Промінь світла падає нормально до поверхні скляної призми із кутом заломлення  $30^\circ$ . Знайти кут виходу променя з призми. При якому куті заломлення призми промінь зазнає повного відбивання? Показник заломлення скла 1,6.

*Відповідь:*  $53^\circ 8'$ ;  $38^\circ 41'$ .

**1.105.** На грань скляної призми з кутом заломлення  $\varphi = 60^\circ$  падає промінь світла під кутом  $\alpha_1 = 45^\circ$ . Знайти кут виходу променя з призми  $\alpha_2$  і кут відхилення  $\delta$  променя від початкового напрямку.

*Відповідь:*  $53^\circ 38'$ .

**1.106.** Промінь падає перпендикулярно до однієї з граней, що утворюють двогранний кут скляної рівнобедреної прямокутної призми, розміщеної у воді. Чи буде в цьому разі мати місце повне внутрішнє відбивання світла на грані, що лежить проти прямого кута призми? Показник заломлення скла і води 1,6 і 1,33 відповідно.

*Відповідь:* Не буде.

**1.107.** Знайти кут відхилення променя скляною призмою ( $n = 1,8$ ) із кутом заломлення  $5^\circ$ , якщо він падає на грань призми під малим кутом?

*Відповідь:*  $4^\circ$ .

**1.108.** Кут заломлення рівнобедреної призми дорівнює  $10^\circ$ . Монохроматичний промінь падає на бічну грань під кутом  $10^\circ$ . Знайти кут відхилення променя від початкового напрямку, якщо показник заломлення матеріалу призми 1,6.

*Відповідь:*  $6^\circ 2'$ .

**1.109.** Показник заломлення матеріалу призми для деякого монохроматичного світла дорівнює 1,6. Яким повинен бути найбільший кут падіння цього променя на призму, щоб при виході променя з неї не настало повне внутрішнє відбивання? Кут заломлення призми  $45^\circ$ .

*Відповідь:*  $10^\circ 8'$ .

**1.110.** Перетин скляної призми площиною, перпендикулярною до основи, має форму рівнобедреного трикутника. Одна з рівних граней призми посріблена. На другу (непосріблену) грань падає перпендикулярно промінь світла, і після двох відбивань виходить через основу призми перпендикулярно до нього. Визначити кут між рівними гранями призми.

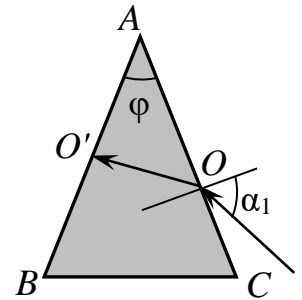
*Відповідь:*  $\varphi = 36^\circ$ .

**1.111.** У призми з кутом заломлення  $\varphi = 30^\circ$  одна бокова грань посріблена. Промінь світла, який падає на іншу грань під кутом  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,

після заломлення і відбивання від посрібленої грані повернувся назад в попередньому напрямку. Знайти показник заломлення матеріалу, з якого виготовлено призму.

*Відповідь:* Відбитий від посрібленої грані промінь  $AB$  піде в протилежному напрямку тільки тоді, коли кут його падіння на грань буде дорівнювати нулю (рис.

1.38). Тоді 
$$n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \varphi} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$



*Рис. 1.38*

**1.112.** У прямокутній рівнобедреній скляній призмі посріблені обидві грані-катети. Довести, що промені, які падають під будь-яким кутом на грань-гіпотенузу, будуть виходити з призми паралельно початковому напрямку.

**1.113.** Для отримання за допомогою проекційного апарата проєкцій дослідів в прямому, а не перевернутому вигляді, використовують «обернену призму», кут заломлення якої  $\varphi = 30^\circ$ . Накреслити хід у призмі і поза нею двох променів, падаючих на призму паралельно до її основи. Чи зміниться відстань між променями? Чи однакові шляхи першого і другого променів всередині призми?

*Відповідь:* Промені виходять з призми паралельно попередньому напрямку. Відстань між променями, які увійшли в призму і вийшли з призми, однакові. Шляхи першого і другого променя всередині призми однакові.

**1.114.** В спектрографі промінь світла падає під кутом  $\alpha = 45^\circ$  на кварцову призму, кут заломлення  $\varphi = 60^\circ$ . Показник заломлення кварцу  $n = 1,55$ . Під яким кутом виходить промінь з призми?

*Відповідь:*  $\alpha_2 \approx 57^\circ$ .

**1.115.** У воді знаходиться повна рівнокутна призма, виготовлена з тонких скляних пластинок. Визначити кут найбільшого відхилення.

*Відповідь:*  $\delta \approx 16^\circ$ .

**1.116.** Який кут заломлення кут у скляній призмі, якщо кут найменшого відхилення дорівнює заломленому куту призми?

*Відповідь:*  $\varphi \approx 81^\circ 4'$ .

**1.117.** Призма з кутом заломлення  $\varphi = 50^\circ$  дає кут найменшого відхилення  $\delta = 35^\circ$ . Яким буде кут найменшого відхилення, якщо цю призму занурити у воду?

*Відповідь:*  $\delta' \approx 10^\circ 53'$ .

**1.118.** Переріз скляної призми має форму рівностороннього трикутника. Промінь падає на одну з граней перпендикулярно до неї. Знайти кут  $\varphi$  між напрямками променя падаючого і променя, що вийшов з призми. Показник заломлення скла  $n = 1,5$ .

*Відповідь:* Заломившись на грані  $AB$  призми, промінь не відхиляється від перпендикуляра (рис. 1.39), тому кут  $\alpha$  падіння промені на грань  $AC$  (зсередини призми) становить  $60^\circ$ . Кут, під яким промінь повинен був би

вийти, заломившись на грані  $AC$ , можна знайти за законом заломлення  $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}$ . При  $\alpha = 60^\circ$  і  $n = 1,5$  кут  $\gamma$  не має дійсних значень. Отже, на грані  $AC$  відбувається повне і відбивання і промінь виходить через грань  $BC$  перпендикулярно до неї. Шуканий  $\angle NOP = \varphi = 60^\circ$ .

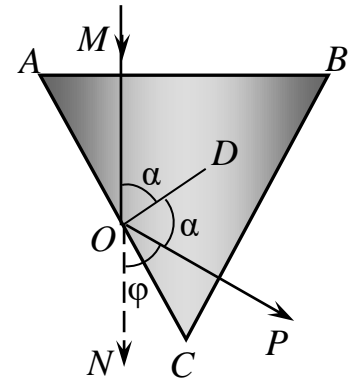


Рис. 1.39

**1.119.** Пучок світла ковзає вздовж бічної грані рівнобедреної призми. При якому граничному заломному куті  $\varphi$  призми заломлені промені повністю відіб'ються від другої бічної грані призми? Показник заломлення матеріалу призми  $n = 1,6$ .

*Відповідь:* Кут  $\beta$  заломлення променів на першій грані (рис. 1.40)

визначається з рівняння  $\frac{\sin(\pi/2)}{\sin \beta} = n$ , звідки  $\sin \beta = 1/n$ , тобто  $\beta$  – граничний

кут повного відбивання. Для повного відбивання на другій грані повинно бути  $\gamma \geq \beta$ . Очевидно, що  $\varphi = \beta + \gamma$ , отже, найменший кут заломлення призми  $\varphi = 2\beta$ , або

$$\sin \varphi = \sin 2\beta = 2 \sin \beta \cdot \cos \beta = \frac{2\sqrt{n^2 - 1}}{n^2} \approx 0,976.$$

Звідси  $\varphi = 77^\circ 20'$ .

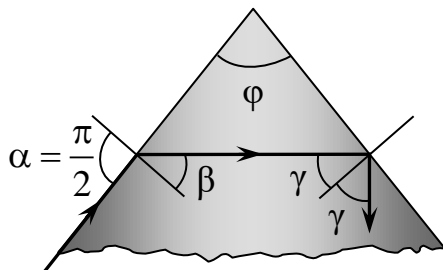


Рис. 1.40

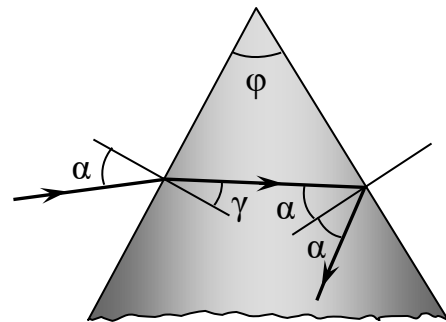


Рис. 1.41

**1.120.** Призму зроблено із скла (флінт) з показником заломлення  $n = 1,75$ . Заломний кут призми  $\varphi = 60^\circ$ . При якому куті падіння і на одну з граней вихід променя з другої грані стає неможливим?

*Відповідь:* Вихід променя із другої грані неможливий, якщо кут падіння на цю грань  $\alpha$  більший або дорівнює граничному куту повного відбивання.

Отже,  $\sin \alpha \geq \frac{1}{n}$ . Крім того, як видно з рис. 1.41,  $\varphi = \alpha + \gamma$  і  $\sin \alpha / \sin \gamma = n$ .

Звідси

$$\sin \alpha = n \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - n \cos \varphi \sin \alpha \leq \sin \varphi \sqrt{n^2 - 1} - \cos \varphi = 0,7435.$$

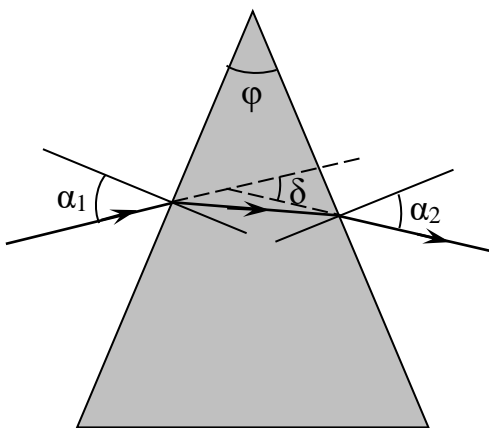
Отже,  $\alpha \leq 48^\circ$ .

**1.121.** Промінь світла падає перпендикулярно на коротку грань тригранної обертової призми з кутами  $90^\circ$  і  $45^\circ$ , виготовленої з важкого флінтгласу з показником заломлення  $n = 1,74$ . На який найбільший кут  $\alpha$  може відхилитися промінь у напрямі до  $90^\circ$ -го ребра в площині, перпендикулярній до цього ребра, щоб світло не виходило частково через довгу грань призми?

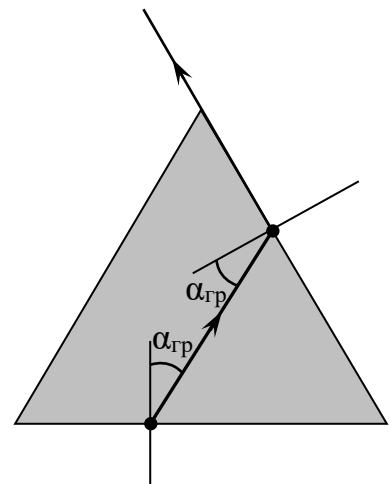
*Відповідь:*  $\sin \alpha \approx 0,3$ ;  $\alpha \approx 17^\circ 30'$ .

**1.122.** Промінь світла падає на оптичну призму з кварцового скла під кутом  $\alpha_1 = 36^\circ$ . Кут заломлення призми  $\varphi = 40^\circ$ . Під яким кутом промінь вийде з призми і який його кут відхилення від початкового напрямку? Показник заломлення кварцового скла 1,54.

*Відповідь:*  $\alpha_2 = 27,4^\circ$ ;  $\delta = 23,4^\circ$ . Хід променя крізь призму показано на рис. 1.42.



*Рис. 1.42*



*Рис. 1.43*

**1.123.** На основі рівнобічної скляної призми лежить пилінка. Яке максимально допустиме значення показника заломлення  $n$ , при якому пилінку ще можна побачити крізь бічні грані призми з допомогою променів, що на межі скло – повітря не зазнали жодного відбиття.

*Відповідь:*  $n = 2$  (рис.1.43).

**1.124.** Пучок світла ковзає вздовж бічної грані рівнобедреної призми. При якому граничному куті заломлення призми заломлені промені зазнають повного внутрішнього відбивання на другій бічній грані? Показник заломлення матеріалу призми для цих променів дорівнює 1,6.

*Відповідь:*  $77^\circ 22'$ .

**1.125.** Монохроматичний промінь входить через грань прямокутної рівнобедреної призми. Увійшовши в призму, промінь зазнає повного внутрішнього відбивання від грані, яка відповідає гіпотенузі, і виходить через грань, відповідну другому катету. Яким повинен бути найменший кут падіння променя на призму, щоб ще відбувалося повне внутрішнє відбивання, якщо показник заломлення матеріалу призми для цього променя 1,5?

*Відповідь:*  $4^\circ 47'$ .

**1.126.** Монохроматичний промінь падає на бічну поверхню рівнобедреної призми і після заломлення проходить у призмі паралельно її основі. Виходячи з призми, він відхилюється на кут  $\delta$  від свого початкового напрямку. Знайти в цьому випадку зв'язок між кутом заломлення призми  $\varphi$ , відхиленням променя  $\delta$  і показником заломлення  $n$  для цього променя.

*Відповідь:*  $\sin \frac{\delta + \varphi}{2} = n \sin \frac{\varphi}{2}$ . В цьому випадку отримується найменше

відхилення променя від його початкового напрямку.

**1.127.** Промінь білого світла падає на бічну поверхню рівнобедреної призми під таким кутом, що червоний промінь виходить з неї перпендикулярно до другої грані. Знайти відхилення червоного і фіолетового променів від початкового напрямку, якщо кут заломлення призми дорівнює  $45^\circ$ . Показники заломлення матеріалу призми для червоно і фіолетового променів відповідно 1,37 і 1,42.

*Відповідь:*  $\delta_{\text{ч}} = 30^\circ 37'$ ;  $\delta_{\text{ф}} = 33^\circ 27'$ .

**1.128.** Промінь світла 1 падає нормально на межу скляного клина з малим кутом при вершині (рис. 1.44). На який кут повернеться заломлений промінь при повороті падаючого променя на невеликий кут навколо осі, перпендикулярної площині рисунка?

*Відповідь:* Внаслідок малих кутів (див. рис. 1.45) згідно закону заломлення

$$\frac{\sin(\varepsilon + \gamma)}{\sin \gamma} = n; \quad \frac{\varepsilon + \gamma}{\gamma} = n; \quad \varepsilon = \lambda(n - 1);$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n; \quad \frac{\alpha}{\beta} = n; \quad \beta = \frac{\alpha}{n};$$

$$\frac{\sin(\varphi + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} = n; \quad \frac{\varphi + \gamma}{\beta + \gamma} = n;$$

$$\varphi = n\beta + (n - 1)\gamma = \alpha + \gamma(n - 1).$$

Звідки  $\varphi - \varepsilon = \alpha$ , тобто промінь 2 повернутий відносно заломленого променя 1 на кут  $\alpha$ .

**1.129.** На скляну призму з кутом заломлення  $60^\circ$  і показником заломлення 1,5 падає промінь світла під кутом  $30^\circ$ . Який кут заломлення променя при його виході з призми?

*Відповідь:*  $77^\circ 6'$ .

**1.130.** Переріз скляної призми має форму рівнобедреного трикутника. Одна з граней дзеркальна. Промінь падає нормально на другу таку саму грань і після двох відбивань виходить через основу призми перпендикулярно до неї. Знайти кути призми.

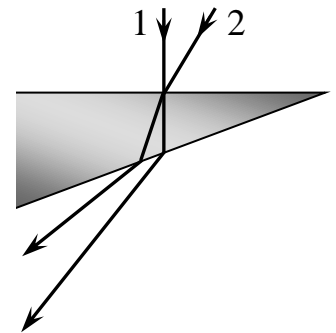


Рис. 1.44

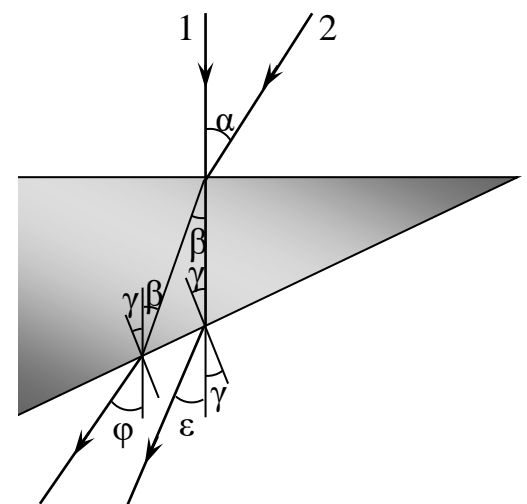


Рис. 1.45

*Відповідь:*  $\alpha = 72^\circ$ ;  $\beta = 36^\circ$ , де  $\alpha$  – кут при основі;  $\beta$  – кут при вершині призми.

**1.131.** Біле світло, пройшовши через призму, розкладається в спектр. Чому ж призма повного відбивання дає некольорові зображення?

**1.132.** Кут заломлення скляної призми  $60^\circ$ . Під яким кутом промені повинні падати на призму, щоб виходити з неї ковзаючи вздовж поверхні протилежної грані? Показник заломлення скла 1,6.

*Відповідь:*  $\alpha = 35^\circ$ .

**1.133.** У призмі з кутом заломлення  $30^\circ$  одна грань посріблена. Промінь, падаючий на другу грань під кутом  $45^\circ$ , після заломлення і відбивання від посрібленої грані повернувся назад тим же шляхом. Визначити показник заломлення матеріалу призми.

*Відповідь:*  $n = 1,41$ .

**1.134.** Прозора трикутна призма із кутом заломлення  $30^\circ$  має одну посріблену грань. Промінь світла, що падає на другу грань під кутом  $60^\circ$ , після заломлення на ній і відбивання від посрібленої грані повернувся назад у зворотному напрямку. При якому значенні показника заломлення матеріалу призми це можливо?

*Відповідь:*  $n = 1,73$ .

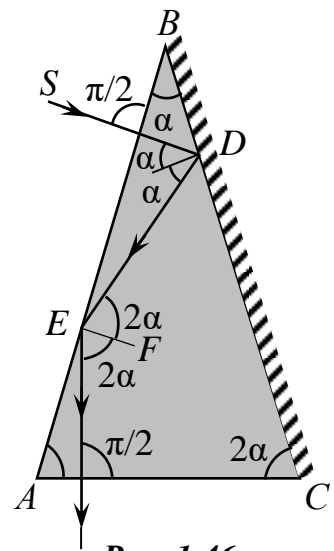
**1.135.** Переріз скляної призми має форму рівнобедреного трикутника. Одну з однакових граней посріблено. Промінь, що падає перпендикулярно на іншу, непосріблену, грань, після двох відбивань виходить через основу призми перпендикулярно до неї. Знайти кути призми.

*Відповідь:* Кут при вершині  $36^\circ$ ; кути при основі  $72^\circ$ .

**1.136.** Переріз скляної призми має форму рівностороннього трикутника. Одну з рівних граней посріблено. Промінь, який збігається з перпендикуляром до поверхні скла, падає на іншу, непосріблену грань і після двох відбивань виходить через основу призми перпендикулярно до неї. Знайти кути призми.

*Відповідь:* Хід променів у призмі показано на рис. 1.46. Кут падіння променя на посріблену грань  $BC$  дорівнює куту  $ABC$  призми (ці кути мають взаємно перпендикулярні сторони). Позначимо його  $\alpha$ . Очевидно, що кут падіння на непосріблену грань  $AB$  призми  $\angle DEF = \angle SDE = 2\alpha$  (внутрішні різносторонні кути при паралельних  $SD$  і  $EF$  і січній  $DE$ ). На рисунку зображено випадок, коли цей кут більший від граничного для даного гатунку скла.  $\angle EAC = \angle FEP = 2\alpha$  (як кути з взаємно перпендикулярними сторонами). Оскільки  $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \pi$ , то  $\angle ABC = \alpha = 36^\circ$ ;

$$\angle EAC = \angle ACB = 2\alpha = 72^\circ.$$



*Рис. 1.46*

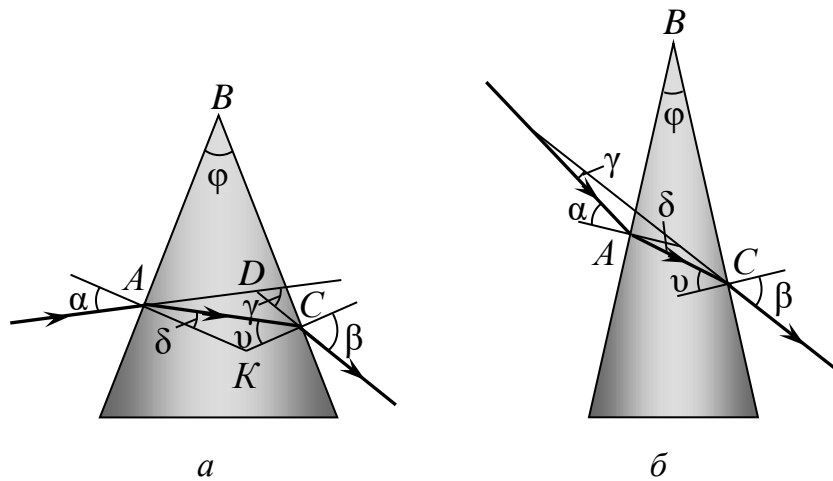
**1.137.** Промінь світла входить у скляну призму під кутом  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  і виходить з призми в повітря під кутом  $\beta = \frac{\pi}{3}$ , причому, пройшовши призму, відхиляється від свого податкового напрямку на кут  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ . Знайти заломний кут  $\varphi$  призми.

*Відповідь:* Позначимо  $\delta$  і  $\nu$  кути, які утворює промінь, що проходить всередині призми, з перпендикулярами до граней (рис. 1.47, а). Сума кутів  $\triangle AKC$  дорівнює  $\pi$ , а сума кутів чотирикутника  $ABCK$  дорівнює  $2\pi$ , причому  $\angle BAK = \angle BCK = \frac{\pi}{2}$ . Отже,  $\varphi = \delta + \nu$ . Водночас  $\gamma$  – зовнішній кут  $\triangle ADC$ , тому  $\gamma = (\alpha - \delta) + (\beta - \nu) = \alpha + \beta - \varphi$ . Шуканий кут

$$\varphi = \alpha + \beta - \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

Побудова ходу променя в призмі, зображена на рис. 1.47, б, веде до розв'язку

$$\varphi = \beta + \gamma - \alpha = \frac{5}{12}\pi.$$



**Рис. 1.47**

Ці розв'язки знайдено лише за допомогою геометричних умов. Проте одночасно з цими умовами повинні виконуватись також і закони заломлення. Зокрема, в другому випадку кут падіння на другу грань призми  $\nu = \varphi + \delta > \varphi$ .

Оскільки показник заломлення скла  $n > 1$  і  $\frac{\sin \nu}{\sin \beta} = \frac{1}{n}$ , то  $\sin \beta > \sin \nu$  і  $\beta > \varphi$ .

Остання нерівність суперечить значенням  $\beta = 60^\circ = \frac{4}{12}\pi$  і  $\varphi = \frac{5}{12}\pi$ , тому другий розв'язок потрібно відкинути.

**1.138.** Паралельний пучок монохроматичного світла падає нормально на бокову поверхню призми, заломний кут якої  $\varphi = 30^\circ$ . Показник заломлення матеріалу призми для такого світла  $n = 1,4$ . Знайти кут відхилення  $\delta$

світлового пучка від початкового напрямку після виходу з призми.

*Відповідь:*  $\sin \delta = \sin \varphi \left( n \cos \varphi - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} \right) \approx 0,25$ ;  $\delta = 14^\circ 30'$ , або ж

$$\delta = \arcsin(n \sin \varphi) - \varphi = 14^\circ 30'.$$

**1.139.** Промінь світла виходить з призми під таким самим кутом, під яким входить у призму, причому відхиляється від початкового напрямку на кут  $\varphi = 15^\circ$ . Заломний кут призми  $\gamma = 45^\circ$ . Знайти показник заломлення  $n$  речовини призми.

*Відповідь:* Хід променів у призмі зображено на рис. 1.48. Зовнішній кут рівнобедреного трикутника  $ADC$   $\varphi = 2(\alpha - \beta)$ . Сума кутів трикутника  $ABC$  дорівнює двом прямим:  $\gamma + 2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \pi$ , тобто  $\gamma = 2\beta$ . За законом заломлення

$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ . Звідси знаходимо:

$$n = \frac{\sin \frac{\varphi + \gamma}{2}}{\sin(\gamma/2)} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\varphi + \gamma)}{1 - \cos \gamma}} \approx 1,3.$$

**1.140.** Одну грань призми з показником заломлення  $n = 1,41$  і з заломним кутом  $\varphi = 30^\circ$  посріблено. Промінь падає на другу грань під кутом  $\alpha = 45^\circ$ , потім знову через цю грань виходить з призми. Знайти кут  $\nu$  між падаючим променем і променем, що виходить з призми.

*Відповідь:* Хід променів у призмі показано на рис. 1.49. Оскільки кут між перпендикулярами до граней дорівнює  $\varphi$ , то  $\angle ABC = 2(\beta - \varphi)$ . У  $\triangle ABC$  сума кутів  $\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) + 2(\beta - \varphi) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \pi$ . Звідси

$$\vartheta = 2\varphi - \beta. \quad (1)$$

Шуканий кут  $\nu$  є зовнішнім кутом трикутника  $ABD$ . Тому

$$\vartheta = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = \pi + \delta - \alpha. \quad (2)$$

Записавши ще закони заломлення

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} = n, \quad (3)$$

дістанемо систему рівнянь (1) – (3) для знаходження невідомого. З неї випливає:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta = \sin \alpha \sqrt{1 - \left( \sin 2\varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos 2\varphi \sin \alpha \right)^2} - \\ - \cos \alpha \left( \sin 2\varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos 2\varphi \sin \alpha \right). \end{aligned}$$

Підставивши  $\varphi = \pi/6$  і  $\alpha = \pi/4$ , матимемо:

$$\sin \vartheta = \frac{1}{4} \left( \sqrt{2} \sqrt{5 - 3n^2} + \sqrt{3} \sqrt{2n^2 - 1} + 1 - \sqrt{3} \sqrt{2n^2 - 1} \right). \quad (4)$$

Якщо  $n = \sqrt{2}$ , то легко показати, що на другу грань призми у точці  $C$  промінь падає перпендикулярно до грані, отже, відбитий промінь піде по шляху падаючого. Із знайденої формули для цього випадку  $\sin \vartheta = 0$  і  $\vartheta = \pi$ .

Якщо  $n = 1,41$  точно, то  $\sin \vartheta \approx 0,0059$ , тобто шуканий кут відрізняється від  $180^\circ$  приблизно на  $20\pi$ .

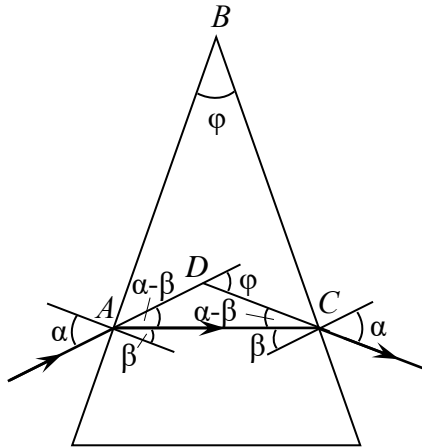


Рис. 1.48

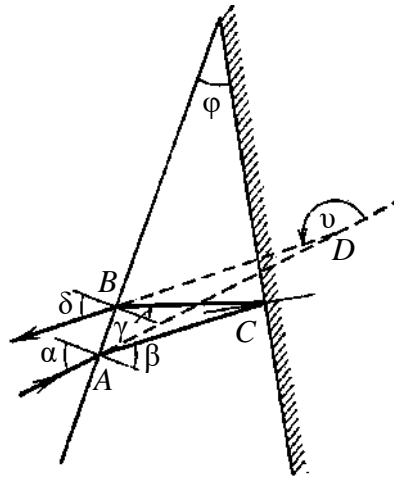


Рис. 1.49

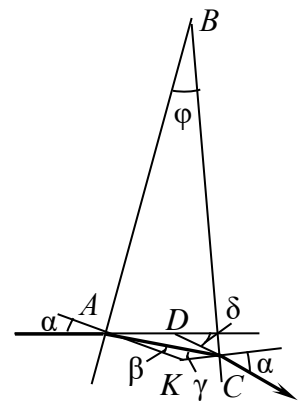


Рис. 1.50

**1.141.** Визначити кут  $\delta$  відхилення променя скляною призмою, кут заломлення якої дорівнює  $\varphi = 5^\circ$ , якщо промінь падає на грань призми під малим кутом. Показник заломлення скла  $n = 1,8$ .

*Відповідь:* Нехай промінь падає на грань  $AB$  (рис. 1.50) під кутом  $\alpha$ , заломлюється під кутом  $\gamma$ . За законом заломлення

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \delta} = n, \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Кут  $\delta$  – зовнішній кут  $\triangle ADC$ , тому

$$\delta = (\alpha - \beta) + (\delta - \gamma); \quad (2)$$

$\angle AKC = \pi - \varphi$ , отже,

$$\varphi = \beta + \gamma. \quad (3)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1) – (3) і враховуючи, що при малих кутах відношення синусів можна замінити відношенням кутів дістаємо:

$$\varphi = (n - 1)\varphi = 4^\circ.$$

**1.142.** При яких значеннях показника заломлення прямокутної призми можливий хід променя, зображений на рис. 1.51? Переріз призми – рівнобедрений трикутник; промінь падає на межу  $AB$  нормально.

*Відповідь:* Кут падіння на грані  $AC$  і  $BC$  дорівнює  $45^\circ$ . Для повного внутрішнього відбивання необхідно,

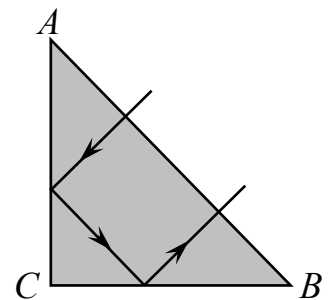


Рис. 1.51.

щоб  $\sin \alpha > \frac{1}{n}$ . Звідси  $n > \sqrt{2} \approx 1,4$ .

**1.143.** У воду занурено прямокутний скляний клин. Показник заломлення скла  $n_1 = 1,5$ . За яких значень кута  $\alpha$  (рис. 1.52) промінь світла, що падає нормально на грані  $AB$ , повністю досягає грані  $AC$ ?

*Відповідь:* Кут падіння променя на грань  $BC$  дорівнює шуканому куту  $\alpha$ . Для того щоб промінь повністю відбився від грані  $BC$ , необхідно, щоб кут  $\alpha$  був більшим граничного.

Отже,  $\sin \alpha > \frac{n_2}{n_1}$ , де  $n_2$  – показник заломлення води.

Звідси  $\alpha > 62^\circ 30'$ .

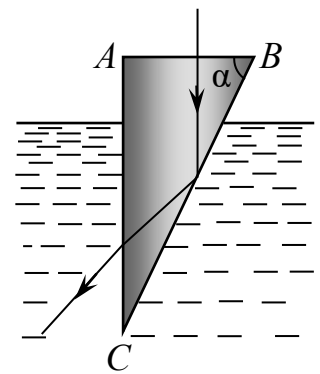


Рис. 1.52.

### 1.4.5. Хід променів у кубі

**1.144.** Чи можна через бічну грань скляного куба ( $n = 1,5$ ) побачити монету, яка лежить під ним?

*Відповідь:* Ні.

**1.145.** Світлові промені, що падають на верхню грань скляної пластинки квадратного перерізу, як зображено на рис. 1.53, зазнають повного відбиття на вертикальній грані. Яким має бути найменший показник заломлення скла?

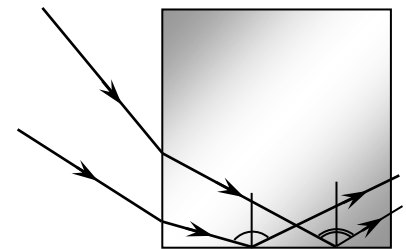


Рис. 1.53

*Відповідь:*  $n \geq 1,41$ .

**1.146.** Скляний куб лежить на аркуші паперу, покриваючи собою намальовані на ньому зірочки. При цьому виявляється, що крізь бічні сторони куба зірочок не видно. Коли під основу куба впустити краплю води, то зірочки можна побачити через бічні стінки. Пояснити це явище.

*Вказівка.* Найменший кут падіння на бічну грань дорівнює  $90^\circ - \alpha_{\text{гр}}$ . Граничний кут для межі скло – повітря дорівнює  $42^\circ$ , для поверхні скло – вода він збільшується до  $63,5^\circ$ .

### 1.4.6. Хід променів в кулі

**1.147.** В середині суцільної кулі радіусом  $R$  з показником заломлення  $n = 2$  зліва від центра біля поверхні знаходиться точкове джерело світла  $S$  (рис. 1.54). На якій відстані справа від центра кулі радіус світлового пучка,

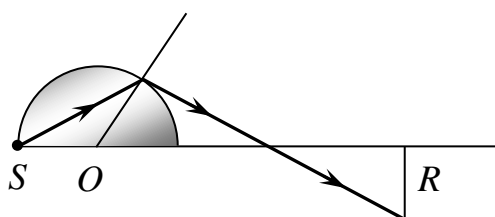


Рис. 1.54

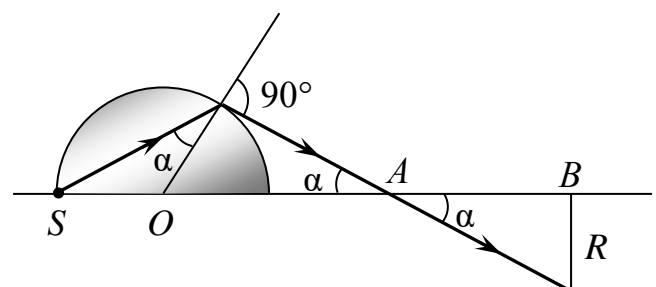


Рис. 1.55

який виходить з кулі, буде дорівнювати  $R$ ?

*Відповідь:* Положення пучка, який виходить з кулі, визначиться явищем повного внутрішнього відбивання світла (див. рис. 1.55):

$$n \sin \alpha = 1; \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ; \quad x = |AO| + |AB| = \frac{R}{\sin 30^\circ} + \frac{R}{\operatorname{tg} 30^\circ} = R(2 + \sqrt{3});$$

$$x = 3,73R.$$

**1.148.** Промінь світла з повітря падає на однорідну прозору кулю, проникає в неї і досягає поверхні розділу куля – повітря. Який кут  $\varphi$  складає промінь, який вийшов, з падаючим на кулю, якщо кут падіння променя  $26^\circ$ , а кут заломлення  $17^\circ$  (рис. 1.56)?

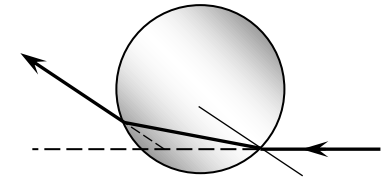


Рис. 1.56

*Відповідь:*  $\varphi = 2(\alpha - \gamma) = 18^\circ$ .

**1.149.** Промінь світла падає на однорідну прозору кулю і проникає в неї. Проходячи всередині кулі, промінь досягає межі куля – повітря. Чи може в цій точці статися повне внутрішнє відбиття?

*Відповідь:* Ні. Промінь вийде з кулі дещо ослабленим.

*Вказівка.* Хід променів показано на рис. 1.57. За означенням,

$$n = \sin \alpha / \sin \gamma = \sin \alpha' / \sin \gamma',$$

оскільки  $\gamma = \gamma'$ , то  $\alpha = \alpha'$ .

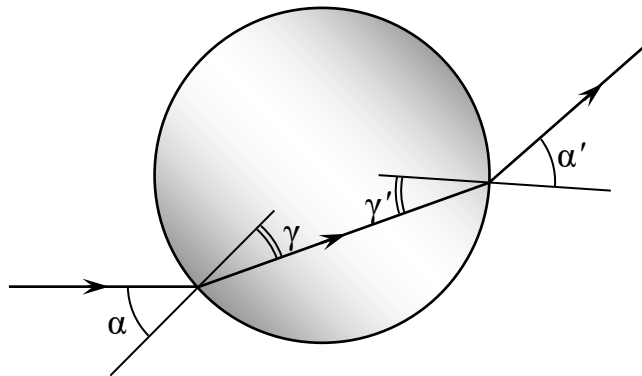


Рис. 1.57

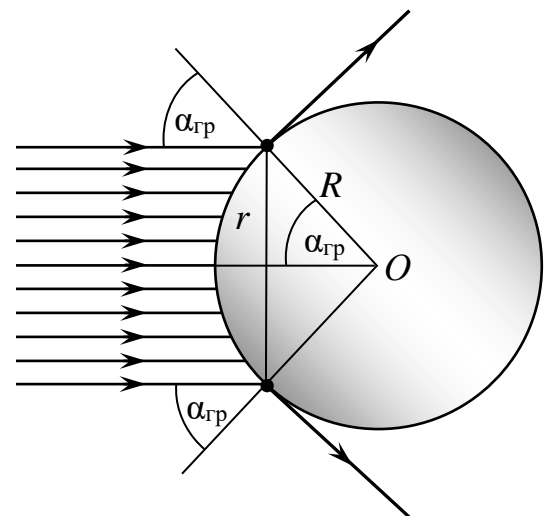


Рис. 1.58

**1.150.** У склі з показником заломлення  $n_{\text{ск}} = 1,52$  є сферична порожнина радіусом  $R = 3$  см, заповнена водою ( $n_{\text{в}} = 1,33$ ). На порожнину падають паралельні промені світла. Визначити радіус світлового пучка, що проникає в порожнину.

*Розв'язання.* За умовою задачі паралельні промені світла падають на сферичну порожнину у склі ( $n_{\text{ск}} = 1,52$ ) (рис. 1.58), заповнену водою ( $n_{\text{в}} = 1,33$ ).

Граничний кут  $\alpha_{\text{гр}}$ , при якому падаючі промені вже не попадатимуть у порожнину, визначаємо з умови, що кут заломлення при цьому дорівнює  $90^\circ$ :

$$\sin \alpha_{\text{гр}} = \frac{n_{\text{в}}}{n_{\text{ск}}}.$$

Кут падіння паралельних променів на сферичну поверхню змінюється від 0 до 90°. Отже, на якійсь відстані кут падіння дорівнюватиме граничному і промені світла не проникатимуть у порожнину. Відстань  $r$ , очевидно, є радіусом світлого пучка, який проходить у порожнину. З рисунка видно, що

$$r = R \sin \alpha_{\text{гр}} = R \frac{n_{\text{в}}}{n_{\text{ск}}}.$$

*Відповідь:*  $r = 2,6$  см.

## 1.5. Контрольні запитання і завдання до теми «Геометрична оптика»

1. Сформулювати закони відбивання і заломлення світла.
2. Як і чому утворюється місячна доріжка?
3. За якої умови в речовині може мати місце повне внутрішнє відбивання, що ідуть із вакууму?
4. Якого мінімального розміру повинно бути дзеркало, що висить на стіні, щоб людина побачила себе на весь зріст, якщо очі людини знаходяться проти верхнього краю дзеркала? Як залежить розмір дзеркала від відстані між дзеркалом і людиною?
5. Яку характеристику невідомої речовини треба знати, щоб визначити швидкість світла в ній?
6. Яку призму і як слід використати, щоб: *a)* повернути промені у зворотному напрямі; *б)* повернути промені на  $90^\circ$ ; *в)* поміняти місцями промені?
7. Яка характеристика світлової хвилі змінюється при переході з повітря у скло? Чи змінюватиметься колір монохроматичного променя при такому переході?
8. Чим пояснюється блиск дорогоцінних каменів?
9. Чому блищать повітряні бульбашки у воді?
10. Чому вдень не видно зірок?
11. Як, маючи скляний куб, визначити швидкість монохроматичного світла в ньому?
12. Пучок паралельних променів світла, входячи під кутом у воду, розширюється. Чому?
13. Під яким кутом заломлюються промені, що падають нормально на межу поділу двох середовищ?
14. Чому у жарку погоду на шосе на деякій відстані іноді виникає міраж перевернутих машин?

## 2. ЛІНЗИ

### 2.1. Основні теоретичні відомості

#### 1. Формула тонкої лінзи (формула Барроу):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} = D, \quad (1)$$

де  $a$  і  $b$  – відповідно відстань від оптичного центра лінзи до предмета і до зображення;  $F$  – фокусна відстань лінзи;  $D$  – оптична сила лінзи.

Якщо фокус уявний (лінза розсіювальна), то величина  $F$  від'ємна. Якщо зображення уявне, то величина  $b$  від'ємна.

#### 2. Формули тонкої лінзи:

$$\left( \frac{n_l}{n_c} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{F} = D, \quad (2)$$

де  $n_l$  – абсолютний показник заломлення середовища лінзи;  $n_c$  – абсолютний показник заломлення оточуючого середовища (однакового з обох боків лінзи);  $R_1$  і  $R_2$  – радіуси кривизни лінзи;  $D$  – оптична сила лінзи.

В наведеній формулі радіуси опуклих поверхонь беруться зі знаком плюс, увігнутих – зі знаком мінус.

#### 3. Оптична сила системи двох тонких щільно складених лінз:

$$D = D_1 + D_2, \quad (3)$$

де  $D_1$  і  $D_2$  – оптичні сили лінз.

#### 4. Поперечне збільшення в лінзах:

$$\Gamma = \frac{H}{h}, \quad (4)$$

де  $H$  і  $h$  – відповідно висота зображення і висота предмета.

## 2.2. Методичні рекомендації

Лінзою називають прозоре тіло, обмежене двома сферичними або сферичною і плоскою поверхнями. Товщину лінзи вважатимемо малою порівняно з радіусами кривизни  $R_1$  і  $R_2$  цих поверхонь. Тому вершини сферичних поверхонь можна вважати такими, що практично збігаються в одній точці, яка називається оптичним центром і лінзи. Промінь, що проходить через оптичний центр лінзи, тобто що йде вздовж оптичної осі лінзи, не змінює свого напрямку. *Оптичну вісь, проведену через вершини сферичних поверхонь, називають головною оптичною віссю, інші – побічними.*

Лінзу, в якій середина товща, ніж краї, називають збиральною; якщо краї лінзи товщі за середину, то лінза – розсіювальна.

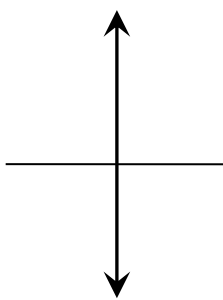


Рис. 2.1

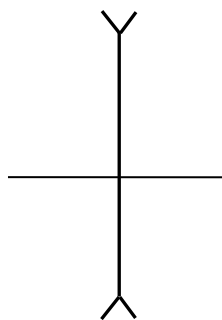


Рис. 2.2

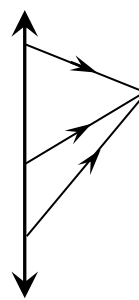
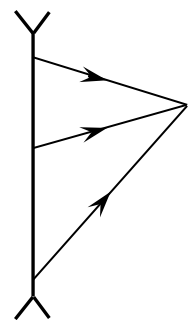


Рис. 2.3



Умовне позначення збиральної лінзи подано на рис. 2.1, розсіювальної – на рис. 2.2.

Пучок променів, паралельних головній оптичній осі, після заломлення в лінзі збігається у фокусі. Фокус лінзи дійсний для збиральної лінзи, уявний для розсіювальної. *Площина, проведена через фокус перпендикулярно до оптичної осі, називається фокальною площиною.* Кожний з променів, паралельних побічній оптичній осі, після заломлення проходить через ту саму точку, що лежить на фокальній площині лінзи. У випадку розсіювальної лінзи в цій точці перетинаються не самі промені, а їх уявні продовження.

Тонка лінза для променів, що утворюють малий кут з головною оптичною віссю, має властивість давати зображення однієї точки предмета також у вигляді точки. Зображення предмета може бути дійсним або уявним. У першому випадку воно утворене променями, які дійсно перетинаються після заломлення в лінзі (рис. 2.3). У другому зображення утворено лише уявними продовженнями заломлених у лінзі променів (рис. 2.4).

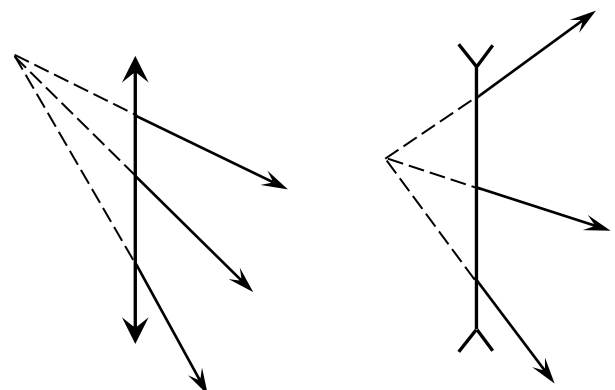


Рис. 2.4

Приймемо лінзу і знайдемо вершину пучка променів, які

перетинаються. Ця вершина – одна з точок предмета або джерела. Оскільки при наявності лінзи промені можуть і не перетинатися в дійсності в цій точці, то предмет (джерело) також може бути як дійрним (рис. 2.5), так і уявним (рис. 2.6). В останньому випадку джерелом буде вершина пучка уявних продовжень променів, які падають на лінзу.

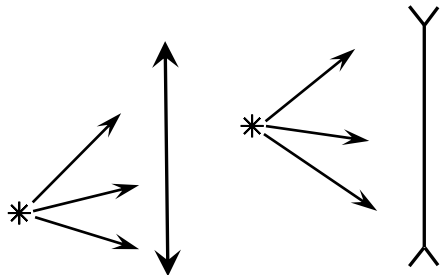


Рис. 2.5

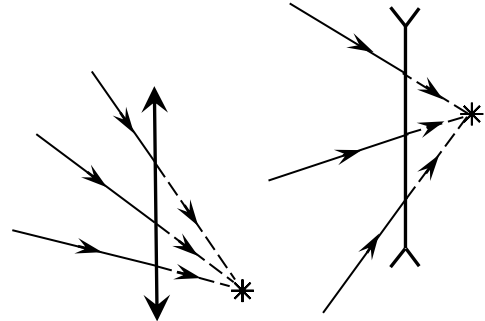


Рис. 2.6

Формула лінзи і правило, за яким ставлять знаки перед доданками цієї формули, цілком збігаються з аналогічними для сферичного дзеркала, тобто  $\pm \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \pm \frac{1}{F}$ , де  $a$  – відстань від предмета до лінзи;  $b$  – відстань від лінзи до зображення;  $F$  – фокусна відстань. Плюс перед доданками формули ставлять тоді, коли відповідна величина дійсна, мінус – коли уявна. Знак відповіді вказує лише на правильність визначення характеру (але не абсолютного значення) невідомої величини. Додатна відповідь свідчить про справедливість припущення про уявність або дійсність величини  $a$  (або  $b$  або  $F$ ), від'ємна – про помилковість.

Фокусна відстань  $F$ , радіуси кривизни сферичних поверхонь  $R_1$  і  $R_2$  і показники заломлення  $n_1$  і  $n_2$  речовини лінзи і навколишнього середовища зв'язані між собою співвідношенням

$$\pm \frac{1}{F} = \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \left( \pm \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \right).$$

Звичайно формула дає лише абсолютне значення  $F$ , а знак перед лівою частиною ставлять, користуючись правилом: дійсний фокус – плюс, уявний – мінус. Знаки перед доданками, що містять  $R_1$  і  $R_2$ , беруть додатними для опуклих поверхонь, від'ємними – для вгнутих.

Величину  $D = \frac{1}{F}$ , обернену фокусній відстані, називають оптичною силою лінзи.

### 2.3. Приклади розв'язування задач

**Приклад 2.1.** Побудувати зображення світної точки  $S$  у збиральній (опуклій) лінзі.

*Розв'язання.* Для побудови зображення точки  $S$  (рис. 2.7) вибираємо промені побудови: а) промінь  $SA$ , паралельний до головної оптичної вісі лінзи  $O_1O_2$ ; заломлений промінь піде в напрямку  $AF_2$  (через фокус); б) промінь  $SO$ , який проходить через оптичний центр лінзи  $O$  (у напрямку побічної оптичної осі), чи в) промінь  $SF_1$ , який проходить через фокус лінзи, після заломлення в лінзі він піде паралельно до головної оптичної вісі. Точка перетину  $S'$  цих заломлених променів є зображенням світної точки  $S$ .

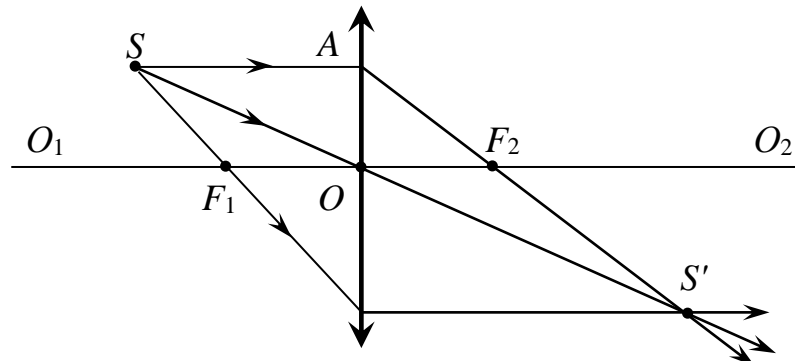


Рис. 2.7

**Приклад 2.2.** Побудувати зображення світної точки  $S$ , яка лежить на головній оптичній вісі лінзи.

*Розв'язання.* Проведемо через фокус  $F_2$  фокальну площину  $MN$  (рис. 2.8). З точки  $S$  проведемо який-небудь промінь до лінзи в точку  $A$ . Паралельно променю  $SA$  проведемо побічну оптичну вісь  $BO$ , яка перетне фокальну площину  $MN$  в точці  $C$ . Промінь  $SA$  після заломлення в лінзі також повинен пройти через точку  $C$ . В ролі другого променя побудови візьмемо промінь, який спрямований уздовж головної оптичної вісі. Точка перетину  $S'$  променів  $AS'$  і  $SS'$  є зображенням точки  $S$ .

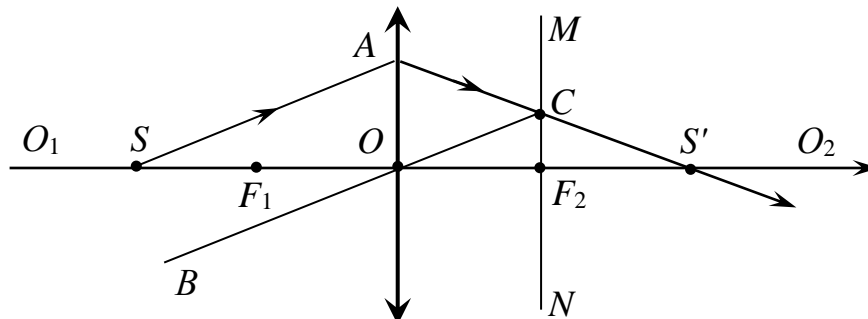


Рис. 2.8

**Приклад 2.3.** Побувати зображення предмета, отримане за допомогою опуклої лінзи, якщо предмет знаходиться від лінзи на відстані: а)  $a > 2F$ ; б)

$F < a < 2F$ ; в)  $a < F$ .

*Розв'язання.* а) Із точки  $A$  (рис. 2.9, а) проводимо два промені побудови:  $AC$ , паралельний до головної оптичної осі  $O_1O_2$  лінзи, і  $AO$  – через оптичний центр  $O$  лінзи. Точка перетину  $A'$  променів  $CF$  і  $AO$  є зображенням точки  $A$ . Аналогічно знаходимо зображення  $B'$  точки  $B$ . Усі інші зображення точок предмета  $AB$  знаходимо між  $A'$  і  $B'$ . Зображення  $A'B'$  є дійсним, перевернутим, зменшеним і знаходиться від лінзи на відстані  $b$ , яка менша подвійної фокусної відстані лінзи і більша фокусної відстані, тобто

$$F < b < 2F.$$

б) З рис. 2.9, б видно, що зображення  $A'B'$  знаходиться за лінзою на відстані  $b > 2F$ ; воно дійсне, перевернуте і збільшене.

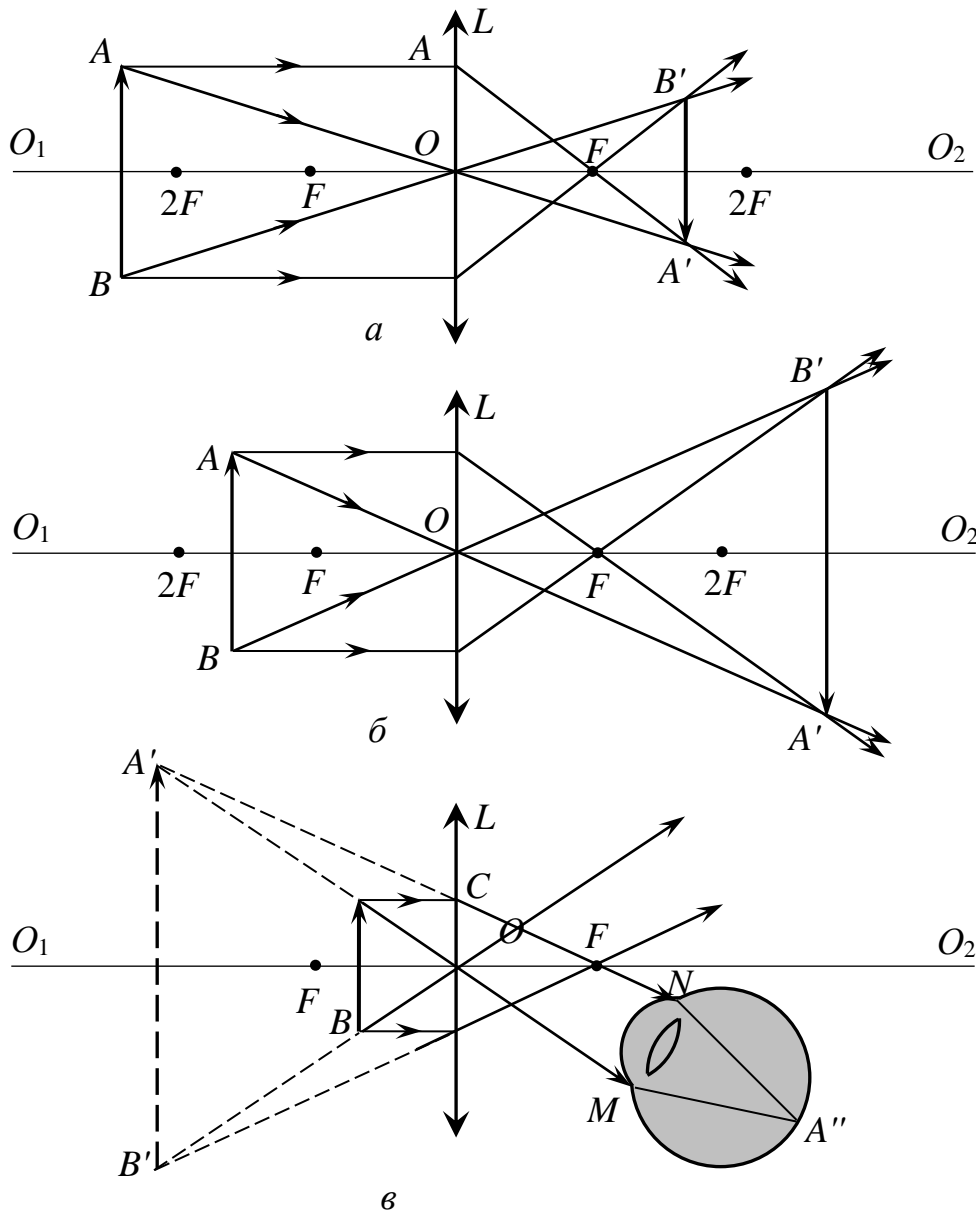


Рис. 2.9

в) В якості променів побудови виберемо промінь  $AC \parallel OO_1$  (рис. 2.9, в) і промінь  $AO$ . Промені  $CFN$  і  $AOM$  не перетинаються. Для отримання

зображення предмета необхідно розбіжні пучки світла, які виходять з лінзи, перетворити у збіжні. Якщо розмістити око, як показано на рис. 2.9, в, то розбіжні промені зберуться на сітківці ока і утворять зображення  $A''$  точки  $A$ . Уявне зображення точки (предмета) знаходиться там, де перетинаються продовження променів, які входять в око, в даному випадку – в точці  $A'$ .

Аналогічно можна побудувати уявне зображення  $B'$  точки  $B$ . З'єднавши точки  $A'$  і  $B'$ , отримаємо уявне зображення  $A'B'$  плоского предмета  $AB$ . Воно лежить з того ж боку від лінзи, що й предмет, уявне, збільшене і пряме.

**Приклад 2.4.** На рис. 2.10, а зображена світна точка  $S$  і її зображення  $S'$ , утворене опуклою лінзою, головна оптична вісь якої  $O_1O_2$ . Знайти положення лінзи і її фокусів.

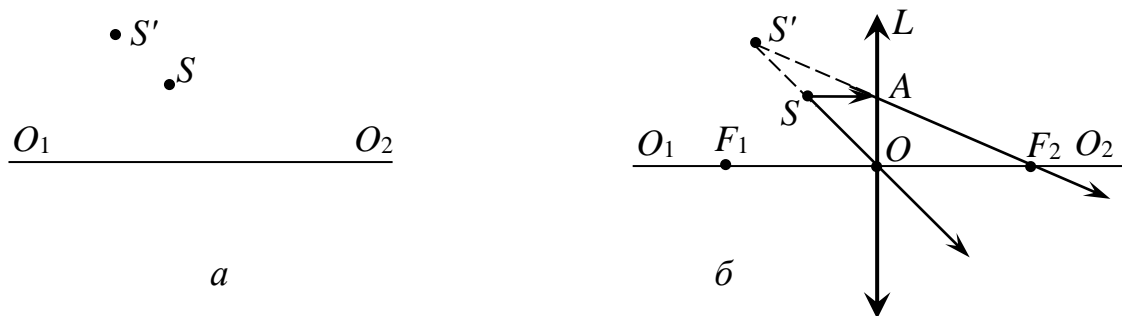


Рис. 2.10

*Розв'язання.* Оскільки світна точка  $S$  і її зображення  $S'$  знаходиться з одного боку від оптичної вісі лінзи, то, очевидно, що зображення  $S'$  є уявним. Точка  $S$  і її зображення  $S'$  повинні знаходитись на промені, який проходить через оптичний центр  $O$  лінзи. Отже, для знаходження положення лінзи достатньо провести пряму через точки  $S$  і  $S'$  (рис. 2.10, б). Точка перетину  $O$  цієї прямої з головною оптичною віссю  $O_1O_2$  є оптичним центром лінзи.

Положення фокусів лінзи визначимо так. З точки  $S$  проведемо промінь  $SA \parallel O_1O_2$ . Заломлений лінзою промінь пройде через фокус  $F_2$ . Оскільки  $S'$  – уявне зображення точки  $S$ , то воно повинно знаходитись на продовженні заломленого променя, який проходить через фокус  $F_2$ . Тому пряма, яка проходить через точки  $S'$  і  $A$ , перетне головну оптичну вісь  $O_1O_2$  у точці, яка є фокусом  $F_2$  лінзи. Другий фокус  $F_1$  лінзи – це точка на головній оптичній вісі, симетрична  $F_2$  відносно точки  $O$  – оптичного центра лінзи.

**Приклад 2.5.** Задана головна оптична вісь  $O_1O_2$  лінзи, світна точка  $S$  і її зображення  $S'$  (рис. 2.11, а). Знайти побудовою оптичний центр лінзи і положення її головних фокусів.

*Розв'язання.* Точка  $S$  і її зображення  $S'$  лежать по різні боки від головної оптичної вісі  $O_1O_2$ . Із цього можна зробити висновок, що точка  $S'$  є дійсним зображенням точки  $S$ . Світна точка і її зображення завжди лежать на прямій, яка проходить через оптичний центр лінзи. Таким чином, точка перетину  $O$  прямої, яка проходить через точки  $S$  і  $S'$ , з головною оптичною віссю  $O_1O_2$  є оптичним центром лінзи (рис. 2.11, б).

Для знаходження головних фокусів лінзи проводимо через точку  $O$  площину, перпендикулярну до оптичної вісі  $O_1O_2$ , із точки  $S$  проведемо промінь  $SA \parallel O_1O_2$ . Заломлений лінзою промінь  $AS'$  пройде через головний фокус  $F_1$  – точку перетину променя  $AS'$  з головною оптичною віссю  $O_1O_2$ . Другим головним фокусом лінзи буде точка  $F_2$ , яка лежить на головній

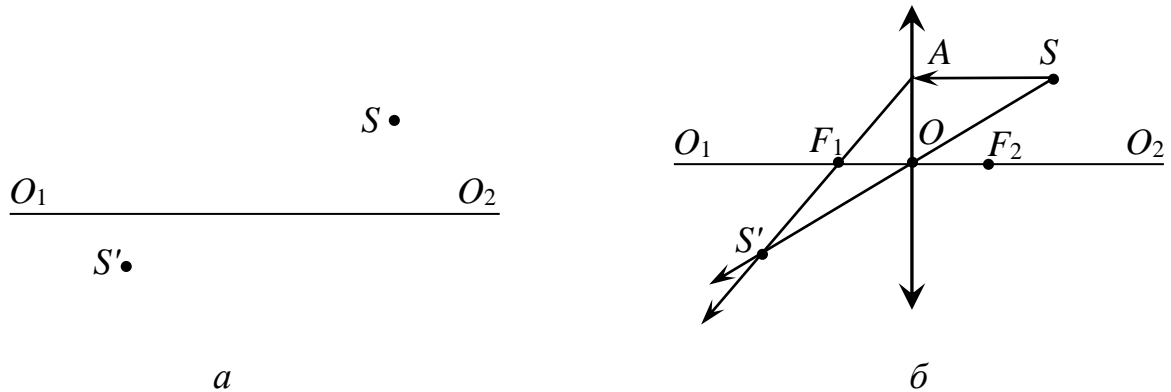


Рис. 2.11

оптичній вісі і симетрична  $F_1$  відносно точки  $O$ .

**Приклад 2.6.** Побудувати зображення предмета, яке можна отримати за допомогою двовгнутої лінзи, якщо предмет знаходиться від лінзи на відстані: а)  $a > 2F$ ; б)  $F < a < 2F$ ; в) предмет розміщений між фокусом лінзи і лінзою.

**Розв'язання.** а) Виберемо два промені побудови, наприклад, промінь  $AC$ , паралельний головній оптичній вісі  $O_1O_2$ , і промінь  $AD$ , продовження якого проходить через уявний фокус  $F_2$  (рис. 2.12, а). Промінь  $AC$  після заломлення піде так, що його продовження буде проходити через уявний фокус  $F_1$ , а промінь  $AD$  вийде з лінзи паралельно головній оптичній вісі. Заломлені промені  $CE$  і  $DK$  не перетинаються. Якщо на шляху цих променів розмістити око, то спостерігач побачить зображення точки  $A$  в точці  $A'$ , де перетинаються продовження променів  $EC$  і  $KD$ . Аналогічно будується зображення точки  $B$ . Таким чином, зображення предмета буде уявним, зменшеним, прямим і знаходитися між фокусом  $F_1$ , який лежить з того ж боку від лінзи, що і предмет, і лінзою.

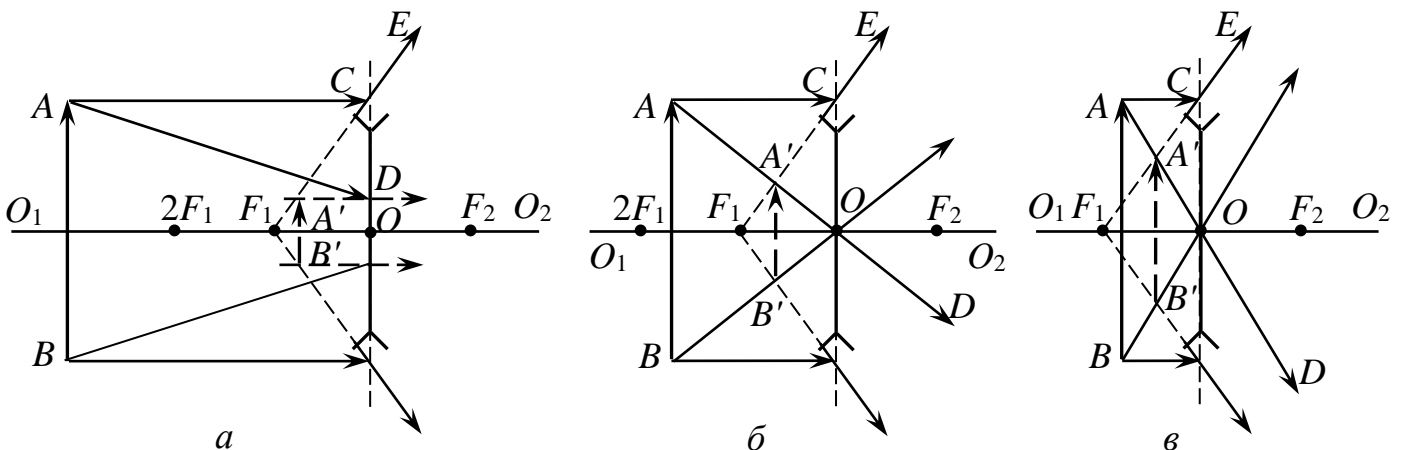


Рис. 2.12

б) Для побудови зображення точки  $A$  виберемо два променя побудови: промінь  $AC \parallel O_1O_2$  і промінь, який проходить через оптичний центр  $O$  лінзи. Промінь  $AC$ , заломившись у лінзі, пройде так, що його продовження пройде через фокус  $F_1$ . Промінь  $AO$  не буде заломлюватись (рис. 2.12, б). Точка перетину  $A'$  продовжень, які виходять із лінзи, променів  $CE$  і  $AOD$  є місцем знаходження уявного зображення точки  $A$ . Аналогічно будуюмо зображення точки  $B$ . Отже, і в цьому випадку зображення  $A'B'$  є уявним, прямим, зменшеним і знаходиться між фокусом  $F_1$  і лінзою.

в) Зображення  $A'B'$  предмета  $AB$  будуюмо аналогічно випадку б). Зображення  $A'B'$  (рис. 2.12, в) є уявним, прямим, зменшеним і знаходиться між предметом і лінзою.

**Приклад 2.7.** Оптична сила збиральної лінзи 8 дптр. Предмет знаходиться на відстані  $a = 0,5$  м від лінзи. На якій відстані  $b$  від лінзи буде знаходитись зображення і яке лінійне збільшення дає лінза?

*Розв'язання.* Із формули тонкої лінзи  $\frac{1}{b} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a}$ . Оскільки  $\frac{1}{F} = D$  – оптична сила лінзи, то  $\frac{1}{b} = D - \frac{1}{a} = \frac{aD - 1}{a}$ , звідки

$$b = \frac{a}{aD - 1} = 0,17 \text{ м.} \quad (1)$$

Лінійне збільшення

$$\Gamma = \frac{b}{a} \approx 0,34. \quad (2)$$

**Приклад 2.8.** На якій відстані від предмета потрібно розмістити екран, щоб двоопукла лінза з радіусами кривизни поверхонь  $R = 0,2$  м і показником заломлення  $n = 1,6$  давала зображення предмета, збільшене в 2 рази?

*Розв'язання.* З умови задачі випливає, що предмет розташований на відстані, більшій за фокусну, і меншій чим подвійна фокусна відстань. Для побудови зображення точки  $A$  (рис. 2.13) проведемо два променя побудови: промінь  $AC$ , паралельний головній оптичній осі  $O_1O_2$ , і промінь  $AO$ , який проходить через оптичний центр  $O$  лінзи. Промені, які пройшли через лінзу, зустрінуться в точці  $A'$ . Усі промені, які виходять із точки  $A$ , пройшовши через лінзу, зберуться у точці  $A'$ .

Знайдемо співвідношення між відстанями між лінзою і предметом  $a$  і між лінзою і зображенням  $b$ . Із подібності  $\triangle AOB$  і  $\triangle A'OB'$  маємо:

$$\frac{OK'}{OK} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{b}{a}. \text{ За умовою задачі, } \frac{b}{a} = 2, \text{ або ж } b = 2a. \text{ Формула тонкої лінзи}$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a}, \text{ звідки } a = \frac{3}{2}F. \quad (1)$$

Фокусну відстань  $F$  лінзи визначимо за формулою  $\frac{1}{F} = (n - 1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ .



починають переміщувати лінзу до екрана і знаходять, що при другому чіткому зображенні предмета висота зображення дорівнює  $H_2$ . Знайти дійсну висоту предмета  $h$ . Яку умову має задовольняти відстань  $L$  між предметом і екраном?

*Розв'язання. 1-й спосіб.* Маємо:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$  і  $\frac{b}{a} = \frac{h}{H_1}$ . Перетворимо ці

вирази так:

$$\frac{ab}{a+b} = F \quad (1)$$

і  $\frac{b}{a+b} = \frac{h}{H_1+h}$ , або  $\frac{a}{a+b} = \frac{H_1}{h+H_1}$ . З двох останніх виразів знайдемо, що

$$ab = (a+b)^2 \frac{H_1 h}{(H_1+h)^2}. \quad (2)$$

Після переміщення лінзи

$$\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} = F, \quad a_1 b_1 = (a_1 + b_1)^2 \frac{h H_2}{(h + H_2)^2}. \quad (3)$$

Враховуючи, що  $a_1 + b_1 = a + b$ , з рівнянь (1) і (2) дістаємо

$$a_1 b_1 = ab.$$

Підставляючи сюди  $a_1 b_1$  і  $ab$  з рівнянь (2) і (3), приходимо до виразу

$$\frac{h H_1}{(h + H_1)^2} = \frac{h H_2}{(h + H_2)^2}, \quad (4)$$

розв'язуючи який, знаходимо

$$h = \sqrt{H_1 H_2}. \quad (5)$$

*2-й спосіб.* Внаслідок симетричності формули лінзи відносно  $a$  і  $b$  можна твердити, що коли від переміщення лінзи дістаємо два зображення при закріплених предметі й екрані, тобто  $a + b = \text{const}$ , то  $a_1 = b_2$  і  $b_1 = a_2$ . Тоді

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{a_1} \quad \text{і} \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{a_2}, \quad \text{тому} \quad \frac{H_1 H_2}{h^2} = 1, \quad \text{звідки} \quad h = \sqrt{H_1 H_2}.$$

*Відповідь:*  $h = \sqrt{H_1 H_2}$ ;  $L > 4F$ .

**Приклад 2.11.** Знайти побудовою положення розсіювальної лінзи і її головних фокусів, якщо розміри предмета  $AB = 10$  см, його зображення  $A_1 B_1 = 5$  см, а відстань між точками  $B$  і  $B_1$  на оптичній осі  $a = 4$  см. Добуті дані перевірити розрахунком.

*Відповідь:* 8 см.

*Розв'язання.* З рис. 2.14 й умови випливає, що

$$BB' = a - b = 4 \text{ см}, \quad (1)$$

де  $a$  – відстань від предмета до лінзи;  $b$  – відстань від зображення до лінзи.  
 Використаємо формулу лінзи (оскільки лінза розсіювальна, то фокусна відстань від'ємна).

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \quad (2)$$

З подібних трикутників  $AOB$  і  $A'O'B'$  знаходимо  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{a}{b}$ .

Оскільки  $AB = 10$  см,  $A'B' = 5$  см, то  $a = 2b$ . З рівняння (1) знаходимо, що

$$a = 8 \text{ см}, b = 4 \text{ см}. \quad (3)$$

Визначаємо фокусну відстань, підставляючи значення  $a$  і  $b$  у рівняння (2):  $F = 8$  см.

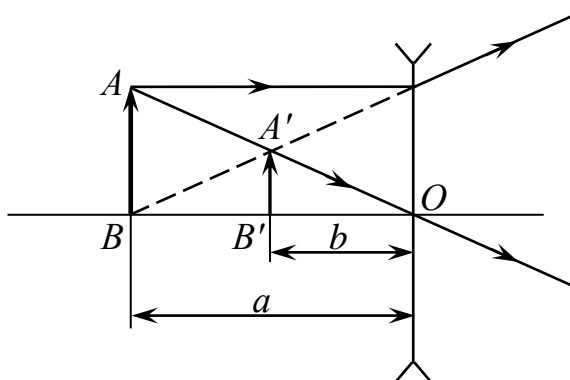


Рис. 2.14

## 2.4. Задачі для самостійного розв'язування

### 2.4.1. Збиральні лінзи

2.1. На рис. 2.15 зображена тонка збиральна лінза, яка знаходиться у повітрі;  $F, F'$  – її фокуси. Знайти побудовою хід довільного променя  $AB$  після лінзи.

2.2. Побудувати зображення предмета  $AB$  у розсіювальній лінзі (рис. 2.16).

2.3. Хід променя 1, який пройшов через розсіювальну лінзу, подано на рис. 2.17. Як пройде промінь 2 після лінзи?

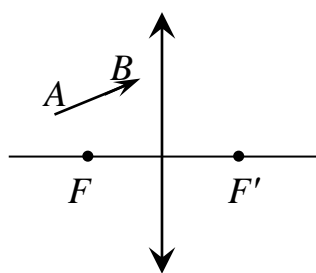


Рис. 2.15

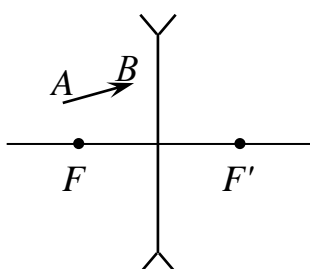


Рис. 2.16

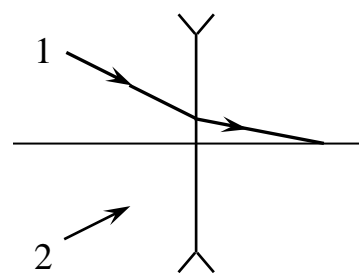


Рис. 2.17

2.4. На рис. 2.18 представлено положення двох точок  $A$  і  $B$  та їх зображень  $A'$  і  $B'$ , які дає тонка лінза. Знайти побудовою положення лінзи і її фокусів.

2.5. Знайти побудовою хід променів за збиральною і розсіювальною лінзами, якщо відомо положення лінз, головної оптичної осі та головних фокусів (рис. 2.19, а, б, в, г).

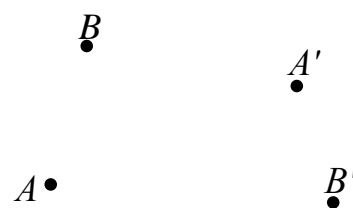


Рис. 2.18

*Відповідь:* Щоб знайти хід променя 1 (рис. 2.20, а), проведемо побічну оптичну вісь  $O'O'$ , паралельну цьому променю. Промінь, що йде вздовж оптичної осі, свого напрямку не змінює. Оскільки паралельні промені збираються у фокальній площині, то промінь 1 повинен пройти через точку  $A$  перетину фокальної площини і побічної оптичної осі  $O'O'$ . Щоб знайти хід променя після заломлення у розсіювальній лінзі (рис. 2.20, б), проведемо оптичну вісь  $O'O'$ , паралельну цьому променю. Оскільки розсіювальна лінза розсіює промені, то в уявному побічному фокусі  $B$  зберуться продовження всіх променів, паралельних побічній осі  $O'O'$ . Сам промінь, зломившись лінзою, піде в напрям 1.

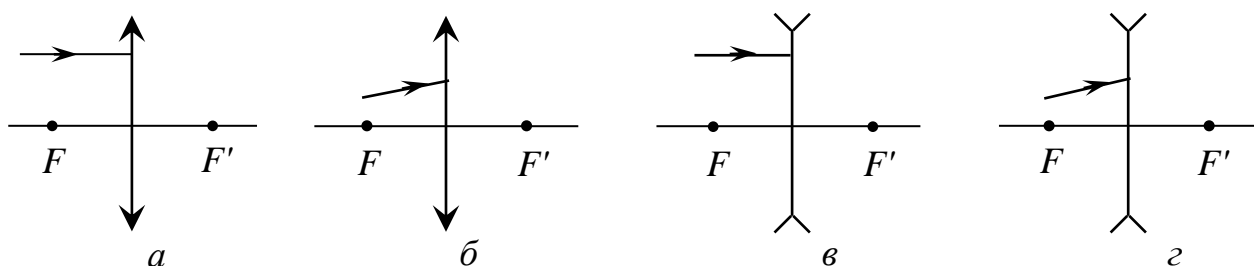


Рис. 2.19

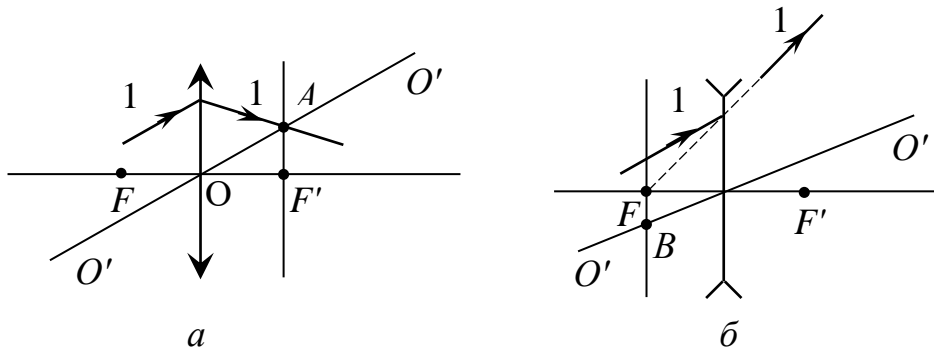


Рис. 2.20

2.6. Знаючи хід променів 1 і 2 до лінзи, знайти хід променя 2 за збиральною та розсіювальною лінзами, якщо відомо положення лінзи і головної оптичної осі (рис. 2.21, а, б).

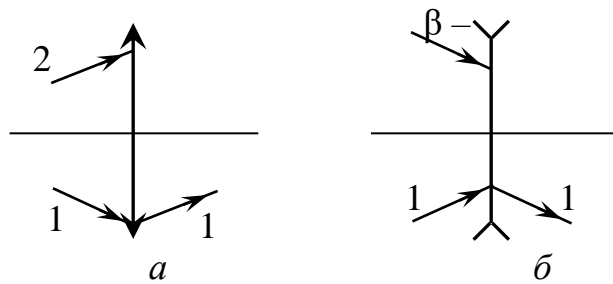


Рис. 2.21

2.7. Побудувати зображення предметів, які розміщені на головній оптичній осі у збиральній і розсіювальній лінзах (рис. 2.22).

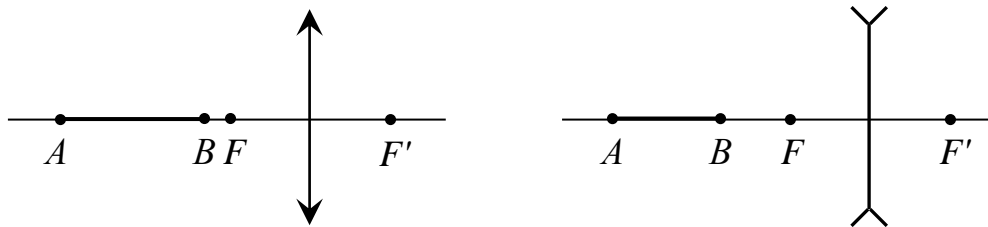


Рис. 2.22

2.8. Знайти побудовою положення тонкої лінзи та її фокусів, якщо відомо положення оптичної осі  $OO'$  і пари спряжених точок  $S$  і  $S'$  (рис. 2.23). Встановити, яка це лінза.

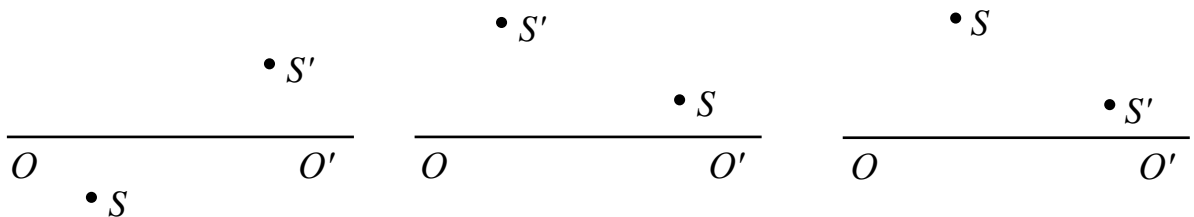
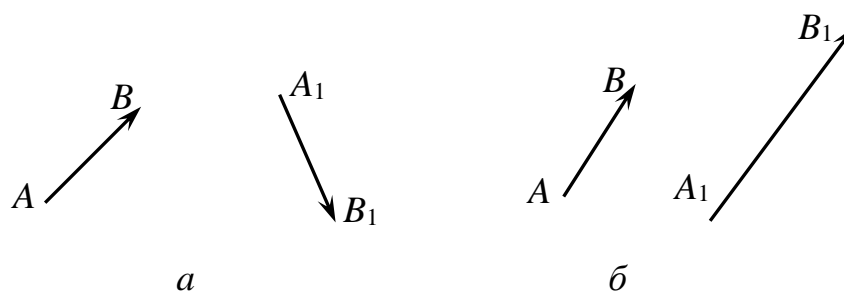


Рис. 2.23

**2.9.** За відомим положенням предмета  $AB$  та його зображення  $A_1B_1$  знайти побудовою положення лінзи та її фокусів (рис. 2.24).



**Рис. 2.24**

**2.10.** Дано положення предмета  $S$ , його зображення  $S'$  і головної оптичної осі (рис. 2.25). Визначити тип лінзи, її положення, положення фокусів.

**2.11.** Тонка збиральна лінза з фокусною відстанню 25 см проектує зображення предмета на екран, розташований від лінзи на відстані 5,25 м. Екран наблизили до лінзи на 25 см. На скільки необхідно перемістити предмет, щоб знову одержати його чітке зображення на екрані?

*Відповідь:* 24,93 см.

**2.12.** Тонка лінза дає пряме уявне зображення предмета, яке у 2 рази менше від предмета. Якщо предмет змістити на 10 см уздовж оптичної вісі, то зображення предмета зменшиться ще у 2 рази. Де знаходився предмет і яка оптична сила лінзи?

*Відповідь:*  $d = 5$  см;  $D = -20$  дптр.

**2.13.** Відстань між предметом і його прямим збільшеним у два рази зображенням, одержаним за допомогою тонкої лінзи, дорівнює  $L$ . Знайти оптичну силу лінзи і з'ясувати характер зображення (дійсне чи уявне).

*Відповідь:*  $D = \frac{1}{2L}$ ; уявне.

**2.14.** За допомогою тонкої збиральної лінзи з фокусною відстанню 25 см потрібно одержати дійсне, в чотири рази збільшене зображення предмета. Знайти відстань від предмета до лінзи і відстань від лінзи до екрана.

*Відповідь:*  $a = 31,25$  см;  $b = 125$  см.

**2.15.** Збиральна лінза вставлена в круглий отвір у непрозорій ширмі. Точкове джерело світла знаходиться на відстані 10 см від лінзи. По інший бік лінзи на такій самій відстані поставлено екран перпендикулярно до головної оптичної осі. На екрані видно освітлений круг, діаметр якого вдвічі менший діаметра лінзи. Яка фокусна відстань лінзи?

*Відповідь:* 4 см, 6,7 см.

**2.16.** Яка мінімально можлива відстань між предметом і його дійсним зображенням, що отримано за допомогою збиральної лінзи з фокусною відстанню  $F$ ?

*Відповідь:*  $4F$ .



**Рис. 2.25**

**2.17.** Знайти відношення оптичних сил лінз, виготовлених із скла та алмазу з однаковими радіусами кривизни.

*Відповідь:*  $\frac{D_{\text{ск}}}{D_{\text{ал}}} = 0,35$ .

**2.18.** Довести, що найменша відстань між предметом і його дійсним зображенням у збиральній лінзі становить  $4F$ , де  $F$  – фокусна відстань лінзи.

**2.19.** Збиральна лінза дає різке зображення на екрані при двох положеннях лінзи, які знаходяться на відстані  $k$  один від одного. Довести, що в цьому випадку  $F = (L^2 - k^2) / 4L$ , де  $L$  – відстань між предметом і екраном, що залишається постійною.

**2.20.** Як розмістити джерело світла відносно збиральної лінзи і вгнутого дзеркала, щоб отримати паралельний пучок променів?

**2.21.** Де і якого розміру отримається зображення предмета висотою 2 см, розміщеного на відстані 15 см від збиральної лінзи з фокусною відстанню 0,1 м?

*Відповідь:*  $b = 0,3$  м;  $H = 4$  см.

**2.22.** Знайти фокусну відстань збиральної лінзи, якщо добуток відстані від предмета до її переднього фокуса на відстань від заднього фокуса до зображення дорівнює  $l$ .

*Відповідь:*  $F = \sqrt{l}$ .

**2.23.** Оптична сила скляної лінзи у повітрі 5,5 дптр, а в рідині 1,63 дптр. Який показник заломлення рідини? Показник заломлення лінзи 1,5.

*Відповідь:* 1,31.

**2.24.** Збиральна лінза дає зображення предмета зі збільшенням 2. Відстань від предмета до лінзи більша за її фокусну відстань на 6 см. Знайти відстань від лінзи до екрана.

*Відповідь:* 36 см.

**2.25.** Точкове джерело світла міститься на деякій відстані від збиральної лінзи з фокусною відстанню 0,6 м. Коливання лінзи перпендикулярно до головної оптичної осі приводять до коливання зображення з амплітудою 1,6 см, а поперечні коливання джерела з тією самою амплітудою – до коливання зображення з амплітудою 1,5 см. Знайти відстань від джерела світла до лінзи.

*Відповідь:* 0,64 м.

**2.26.** Кульку по черзі розміщують у точки  $A$  і  $B$  на головній оптичній осі збиральної лінзи по один бік від неї. Відстань  $AB$  дорівнює  $l$ . Лінза дає зображення кульки відповідно зі збільшенням  $\Gamma_A$  і  $\Gamma_B$ . Знайти відстань  $L$  між зображеннями кульки.

*Відповідь:*  $L = \Gamma_A \Gamma_B l$ .

**2.27.** Збиральна лінза дає зображення предмета, який розташовано на відстані 9,9 см від неї, зі збільшенням у 10 разів. Знайти фокусну відстань лінзи у випадках дійсного та уявного зображень.

*Відповідь:* 9 см; 11 см.

**2.28.** Відстань від предмета до екрана дорівнює 90 см. Де треба

розмістити між ними лінзу з фокусною відстанню 20 см, щоб отримати на екрані чітке зображення предмета?

*Відповідь:* 30 і 60 см.

**2.29.** Предмет знаходиться на відстані  $4F$  від лінзи. У скільки разів зображення на екрані менше від самого предмета?

*Відповідь:* У 3 рази.

**2.30.** Збиральна лінза з фокусною відстанню 6 см вставлена в отвір радіуса 3 см у непрозорій ширмі. На екрані, відстань від якого до ширми 16 см, одержали чітке зображення точкового джерела світла. Яким буде радіус світлого круга на екрані, якщо вийняти лінзу з отвору?

*Відповідь:* 8 см.

**2.31.** Збиральна лінза з оптичною силою 8 дптр дає зображення предмета, розмір якого дорівнює розміру предмета. Як треба змінити відстань між лінзою і предметом, щоб його зображення зменшилося втричі?

*Відповідь:* Збільшити на 25 см.

**2.32.** Лінза з оптичною силою 4 дптр дає збільшене в п'ять разів зображення предмета, розміщеного перед лінзою. Яка відстань між предметом і лінзою?

*Відповідь:* 0,3 м; 0,2 м.

**2.33.** Зображення предмета, віддаленого від тонкої збиральної лінзи на відстань 0,4 м, більше від предмета в 5 разів. Визначте можливі значення оптичної сили лінзи.

*Відповідь:* 3 дптр; 2 дптр.

**2.34.** Предмет розмістили на відстані  $4F$  від лінзи. У скільки разів його зображення на екрані менше від самого предмета?

*Відповідь:* У 3 рази.

**2.35.** Відстань від предмета до екрана 90 см. Де треба розмістити між ними лінзу, фокусна відстань якої 20 см, щоб дістати на екрані чітке зображення предмета?

*Відповідь:* 30 і 60 см від екрана.

**2.36.** Відстань від предмета до екрана 3 м. Лінзу якої оптичної сили треба взяти і де її треба розмістити, щоб дістати зображення предмета, збільшене в 5 разів?

*Відповідь:* 2,4 дптр; 0,5 м.

**2.37.** Відстань між джерелами світла 24 см. Де треба розмістити збиральну лінзу з фокусною відстанню 9 см, щоб їх зображення сумістилися?

*Відповідь:* Між джерелами на відстані 6 см від будь-якого з них.

**2.38.** Фокусна відстань двоопуклої скляної лінзи ( $n = 1,5$ ), у якої радіуси кривизни поверхні однакові, рівна 25 см. Де зберуться падаючі на лінзу паралельні оптичній осі промені, якщо за лінзою знаходиться вода?

*Відповідь:*  $F_1 = \frac{2(n_1 - 1)n_2}{2n_1 - n_2 - 1} F = 50$  см, де  $F_1$  – фокусна відстань лінзи у

воді;  $n_1$  – показник заломлення скла;  $n_2$  – показник заломлення води;  $F$  – фокусна відстань лінзи у повітрі;  $F_1 = 0,5$  м.

**2.39.** На відстані 20 см від збиральної лінзи, оптична сила якої  $D = 10$  дптр, поставили предмет висотою  $h = 5$  см. Знайти положення  $b$  і зображення  $H$ . Зробити малюнок.

*Відповідь:*  $b = \frac{a}{1 + aD} = 20$  см;  $H = 5$  см.

**2.40.** Довести, що у двоопуклій лінзі з однаковими радіусами кривизни поверхонь і показником заломлення  $n = 1,50$  фокуси збігаються з центрами кривизни. У скільки разів зміниться фокусна відстань, якщо лінзу занурити у воду ( $n = 1,33$ )?

*Відповідь:*  $\frac{F_2}{F_1} = \frac{(n_1 - 1)n_2}{n_1 - n_2} = 3,9$ .

**2.41.** На якій відстані від двоопуклої лінзи треба поставити предмет, щоб відстань від нього до його дійсного зображення була мінімальною?

*Відповідь:*  $a = 2F$ .

**2.42.** Збиральну лінзу, виготовлену із скла ( $n = 1,50$ ), що має фокусну відстань у повітрі 10 см, занурили у воду. Як змінилась її фокусна відстань?

*Відповідь:*  $F_2 = F_1 \frac{n/n_{\text{п}} - 1}{n/n_{\text{в}}} = 39,1$  см, де  $n_{\text{п}}$ ,  $n_{\text{в}}$  – відповідно показники

заломлення повітря і води.

**2.43.** За допомогою лінзи з оптичною силою  $D = 5$  дптр дістали зображення предмета, однакове за розмірами з самим предметом. На якій відстані від лінзи треба поставити предмет, щоб зображення зменшилось у чотири рази?

*Відповідь:* 1 м.

**2.44.** За допомогою тонкої лінзи на екрані дістали зображення предмета з п'ятикратним збільшенням. Не змінюючи положення лінзи, екран змістили вздовж оптичної осі на  $l = 30$  см. Щоб зображення було різким, змістили і предмет. У цьому разі зображення виявилось у три рази більшим за предмет. На яку відстань змістили предмет?

*Відповідь:* Оскільки зображення дійсне (бо воно спостерігається на екрані), то формулу лінзи для першого та другого випадків запишемо так:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b-l} = \frac{1}{F}.$$

Ми врахували, що екран наблизили до лінзи, а предмет віддалили. Тільки при цій умові збільшення у другому випадку менше. Враховуючи збільшення

$\frac{b}{a} = 5$  та  $\frac{b-l}{a+x} = 3$ , дістанемо

$$\frac{5}{b} + \frac{1}{b} = \frac{3}{b-l} + \frac{1}{b-l}.$$

Звідки  $b = 3l$ ,  $a = \frac{3}{5}l$ ,  $x = \frac{1}{15}l = 2$  см. Якби екран віддаляли від лінзи, то з

рівнянь

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b+l} = \frac{1}{F}$$

дістали б  $b = -3l < 0$ . Але це неможливо, бо зображення предмета дійсне. Отже, предмет віддалили від лінзи на 2 см.

**2.45.** На відстані 15 см від двоопуклої лінзи, оптична сила якої рівна 10 дптр, розміщений перпендикулярно до оптичної осі предмет висотою в 2 см. Знайти положення і висоту зображення. Зробити креслення.

*Відповідь:*  $b = 0,3$  м;  $H = 4$  см.

**2.46.** Довести, що в двоопуклій лінзі з однаковими радіусами кривизни і з показником заломлення  $n = 1,5$  головні фокуси співпадають з центрами кривизни.

**2.47.** Лінза з фокусною відстанню 16 см дає різке зображення предмета при двох положеннях, відстань між якими 60 см. Знайти відстань від предмета до екрана.

*Відповідь:* 1 м.

**2.48.** Екран містить на відстані  $l$  від свічки. Ставлячи між свічкою та екраном збиральну лінзу, можна дістати різке зображення свічки на екрані при двох положеннях лінзи, віддалених одне від одного на відстань  $a$ . Довести, що в даному разі головну фокусну відстань лінзи можна обчислити за формулою

$$F = \frac{l^2 - a^2}{4l}.$$

**2.49.** Двоопукла лінза, обмежена сферичними поверхнями однакового радіуса кривизни в 12 см, розміщена на такій відстані від предмета, що утворене зображення на екрані вийшло в  $\Gamma$  разів більше предмета. Визначити відстань від предмета до екрана, якщо: а)  $\Gamma = 1$ ; б)  $\Gamma = 20$ ; в)  $\Gamma = 0,2$ . Показник заломлення матеріалу лінзи 1,5.

*Відповідь:* а) 0,48 м; б) 2,65 м; в) 0,864 м.

**2.50.** Лінза попередньої задачі занурена у воду. Знайти її фокусну відстань.

*Відповідь:*  $F = 0,47$  м.

**2.51.** Розв'язати попередню задачу за умови, що лінза занурена у сірководень.

*Відповідь:*  $F = -0,75$  м – лінза буде розсіювальною.

**2.52.** Плоско-опукла лінза з радіусом кривизни 30 см і показником заломлення 1,5 дає зображення предмета із збільшенням, яке дорівнює 2. Знайти відстані від лінзи до предмета і зображення. Зробити креслення.

*Відповідь:*  $a = -90$  см;  $b = 180$  см.

**2.53.** Знайти поздовжню хроматичну аберацію двоопуклої лінзи із флінтгласу з однаковими радіусами кривизни  $|R_1| = |R_2| = 8$  см. Показники заломлення флінтгласу для червоного ( $\lambda_1 = 760$  нм) і фіолетового ( $\lambda_2 = 430$  нм) променів відповідно рівні 1,5 і 1,8.

*Відповідь:*  $F_{\text{ч}} - F_{\text{ф}} = 3$  см.

**2.54.** На відстані 40 см перед лінзою попередньої задачі на оптичній осі знаходиться світна точка. Знайти положення зображення цієї точки, якщо вона випромінює монохроматичне світло з довжиною хвилі: а)  $\lambda = 760$  нм; б)  $\lambda = 430$  нм.

*Відповідь:* а) 10 см; б) 5,7 см.

**2.55.** У фокальній площині двоопуклої лінзи міститься плоске дзеркало. Предмет знаходиться перед лінзою між фокусом і подвійною фокусною відстанню. Побудувати зображення предмета.

**2.56.** Циліндричний пучок променів, який має радіус 5 см, направляють на розсіювальну лінзу паралельно її головній оптичній осі. Пройшовши через лінзу, пучок дає на екрані круг радіусом 7 см. Який буде радіус круга на екрані, якщо розсіювальну лінзу замінити збиральною з тією ж за модулем фокусною відстанню?

*Відповідь:* 3 см.

**2.57.** Світловий промінь, що падає на розсіювальну лінзу з фокусною відстанню 13,5 см, після заломлення в ній перетинає головну оптичну вісь у точці, що міститься на відстані 9 см від лінзи. На якій відстані від лінзи промінь перетне вісь, якщо лінзу забрати?

*Відповідь:* 5,4 см.

**2.58.** Свічка знаходиться на відстані 3,75 м від екрана. Між свічкою і екраном поставили збиральну лінзу, яка дає на екрані чітке зображення свічки при двох положеннях лінзи, відстань між якими 0,75 м. Знайти фокусну відстань лінзи.

*Відповідь:* 0,9 м.

**2.59.** На головній оптичній осі збиральної лінзи розміщені два точкових джерела світла на відстанях 20 і 80 см від лінзи. Зображення цих джерел співпадають. Знайти фокусну відстань лінзи.

*Відповідь:* 32 см.

**2.60.** Знайти фокусну відстань лінзи, занурену у воду, якщо відомо, що її фокусна відстань у повітрі дорівнює 20 см. Показник заломлення скла, з якого зроблена лінза, дорівнює 1,6.

*Відповідь:*  $F = 0,59$  м.

**2.61.** Збиральна лінза з показником заломлення 1,5 дає дійсне зображення на відстані 0,1 м від неї. Якщо предмет і лінзу опускають у воду, не змінюючи відстані між ними, то зображення отримується на відстані 0,6 м від лінзи. Знайти фокусну відстань лінзи. Показник заломлення води 1,33.

*Відповідь:*  $F = 12$  см.

**2.62.** Збиральна лінза дає на екрані зображення предмета. Між лінзою і екраном розмістили плоскопаралельну пластинку товщиною 3 см і показником заломлення 1,5. В якому напрямку і на скільки потрібно перемістити екран, щоб знову отримати чітке зображення предмета?

*Відповідь:* Екран потрібно перемістити від лінзи на відстань 1 см.

**2.63.** Висота зображення, отриманого за допомогою збиральної лінзи,  $H_1$ . Не змінюючи відстані між предметом і екраном, переміщенням лінзи досягають другого чіткого зображення предмета. Висота цього зображення  $H_2$ . Знайти дійсну висоту предмета.

Відповідь:  $h = \sqrt{H_1 H_2}$ .

**2.64.** Поздовжня хроматична аберація симетричної збиральної лінзи 0,022 м. Визначити радіус кривизни лінзи, якщо показник заломлення цього сорту скла для червоних променів 1,57, а для фіолетових 1,60.

Відповідь:  $R = \frac{2(F_{\text{ч}} - F_{\text{ф}})}{\frac{1}{n_{\text{ч}} - 1} - \frac{1}{n_{\text{ф}} - 1}} = 0,5 \text{ м}$ , де  $F_{\text{ч}}$  – фокусна відстань лінзи для

червоних променів;  $F_{\text{ф}}$  – для фіолетових променів;  $n_{\text{ч}}$ ,  $n_{\text{ф}}$  – показники заломлення лінзи відповідно для червоних і фіолетових променів.

**2.65.** Як зміниться фокусна відстань лінзи, якщо її рівномірно нагріти?

Відповідь: Збільшиться, оскільки збільшиться радіус кривизни і зменшиться показник заломлення.

**2.66.** Циліндричний пучок світла радіуса 4 см спрямували на збиральну лінзу паралельно її головній осі. Проїшовши через лінзу, пучок дає на екрані світлий круг радіуса 5 см. Яким буде радіус круга на екрані, якщо збиральну лінзу замінити розсіювальною з тією ж самою фокусною відстанню?

Відповідь: 13 см.

**2.67.** У непрозорій ширмі зроблено круглий отвір, у який вставлено збиральну лінзу. На оптичній осі лінзи на відстані  $a = 10$  см від лінзи розміщено точкове джерело світла. По другий бік лінзи на такій самій відстані  $a$  від неї встановлено перпендикулярно до оптичної осі екран. На екрані видно світлу пляму, діаметр якої у  $n = 2$  рази менший, ніж діаметр лінзи. Визначити фокусну відстань  $F$  лінзи.

Відповідь: Можливі два випадки. Відстань  $a$  від лінзи до екрана більша, ніж відстань  $b$  від лінзи до дійсного зображення  $S_1$  джерела  $S$ . Промені падають на екран розбіжним пучком (рис. 2.26, а). З подібності трикутників  $ABS_1$  і  $CDS_1$  випливає:  $\frac{b}{a-b} = \frac{AB}{CD} = n$ . За формулою лінзи  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ . Звідси

$$F = \frac{na}{2n+1} = 4 \text{ см.}$$

У другому випадку відстань  $a$  до екрана менша від відстані  $b$  до зображення (рис. 2.26, б). З подібності трикутників  $ABS_1$  і  $CDS_1$  знаходимо:  $\frac{b}{b-a} = n$ .

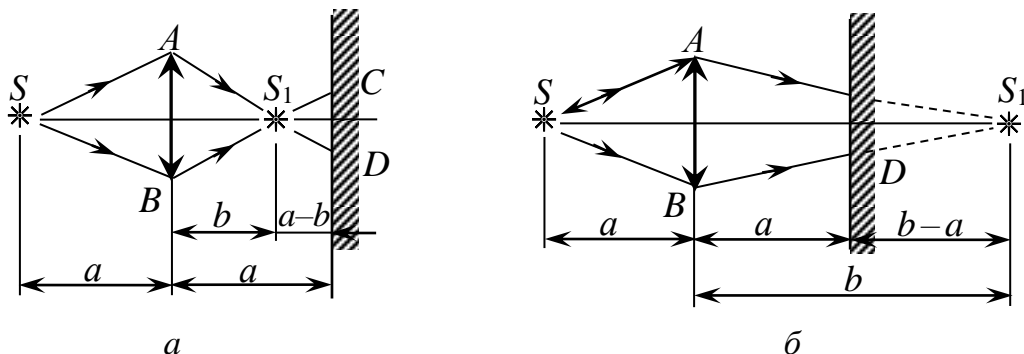


Рис. 2.26

Використовуючи знову формулу лінзи  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ , маємо:

$$F = \frac{na}{2n-1} = 6,7 \text{ см.}$$

**2.68.** Точкове джерело світла лежить на оптичній осі лінзи на відстані  $L = 25$  см від неї. Фокусна відстань лінзи  $F = 10$  см, її діаметр  $D = 5$  см. З другого боку лінзи розміщують екран так, що на ньому утворюється чітке зображення джерела. Потім екран переміщують уздовж оптичної осі на відстань  $l = 5$  см. Визначити діаметр  $d$  світлого кружка на екрані.

*Відповідь:* Спочатку екран був від лінзи на відстані  $b = \frac{Fa}{a-F}$ . Після того

як екран перемістили на відстань  $l$ , зображення джерела розплилось у круглу пляму  $BC$  або  $DE$  (рис. 2.27). З подібності трикутників  $ACH$ ,  $BCG$  і  $DCE$  випливає:  $\frac{D}{d} = \frac{b}{l}$ , тому  $d = \frac{Dl}{b}(L-F) = 1,5$  см.

**2.69.** Збиральну лінзу, фокусна відстань якої  $F = 0,06$  м, вставлено в отвір радіусом  $r = 0,03$  м у непрозорій перешкоді. На екрані, що встановлений від перешкоди на відстані  $b = 0,16$  м, одержано чітке зображення точкового джерела світла. Який буде радіус світлого круга на екрані, якщо вийняти лінзу з отвору?

*Відповідь:* За формулою тонкої лінзи  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ . З подібності трикутників (рис. 2.28)  $\frac{2r}{a} = \frac{2R}{a+b}$ . Звідси  $R = \frac{br}{F} = 0,08$  м.

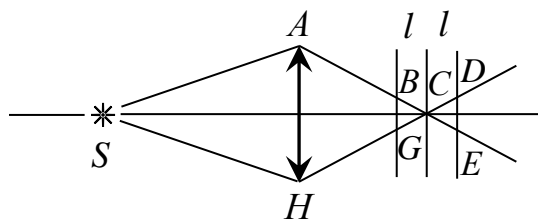


Рис. 2.27

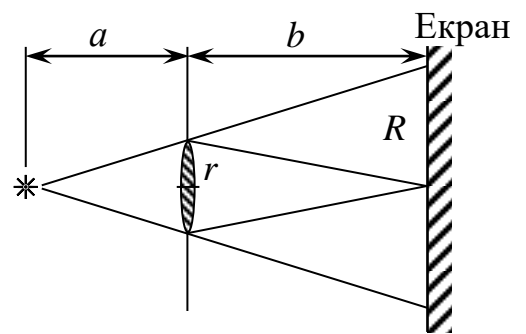


Рис. 2.28

**2.70.** Лінзу з фокусною відстанню  $F = 5$  см щільно вставлено в круглий отвір у дошці. Діаметр отвору  $D_1 = 3$  см. На відстані  $l = 15$  см від лінзи на її оптичній осі знаходиться точкове джерело світла. По другий бік дошки розміщено аркуш паперу, на якому виникає чітке зображення джерела. Яким буде діаметр  $D$  світлого кружка на аркуші паперу, якщо лінзу вийняти з отвору?

*Відповідь:*  $D_2 = D_1 l / (l - F) = 4,5$  см.

**2.71.** Зображення міліметрової поділки шкали, розміщеної перед лінзою на відстані  $d = 12,5$  см, має на екрані довжину  $L = 8$  см. На якій відстані  $b$  від лінзи встановлено екран?

*Відповідь:* Збільшення  $\Gamma = \frac{L}{l} = \frac{b}{d}$ , тому  $b = \frac{L}{l} d = 10$  м.

**2.72.** Освітлену щілину висотою  $h = 5$  см проєктують за допомогою збиральної лінзи з фокусною відстанню  $F = 10$  см на екран, що лежить від лінзи на  $b = 12$  см. Знайти розмір  $H$  зображення щілини на екрані.

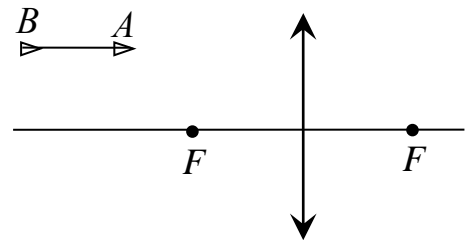
*Відповідь:*  $H = h \left( \frac{b}{F} - 1 \right) = 1$  см.

**2.73.** Предмет розміром  $l = 8$  см треба спроектувати на екран. Яку фокусну відстань  $F$  повинен мати об'єктив, що лежить від екрана на відстані  $b = 4$  м, щоб зображення предмета на екрані мало розмір  $L = 2$  м?

*Відповідь:*  $F = \frac{bl}{L+l} = 15,4$  см.

**2.74.** Побудувати зображення відрізка  $AB$ , паралельного головній оптичній осі лінзи (рис. 2.29).

*Відповідь:* Спосіб побудови зрозумілий з рис. 2.30. Щоб побудувати зображення кожної з точок, досить визначити хід будь-яких двох промів, що виходять з точки, після заломлення в лінзі.



*Рис. 2.29*

**2.75.** Точковий предмет рухається по дузі кола з швидкістю  $v_1 = 3$  см/с навколо осі збиральної лінзи в площині, перпендикулярній до осі і віддаленій від лінзи на відстань  $d = 1,5 F$ , де  $F$  – фокусна відстань лінзи. В якому напрямі і з якою швидкістю  $v_2$  рухається зображення предмета?

*Відповідь:* Застосувавши формулу лінзи  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ , знайдемо відстань

від лінзи до зображення  $b = \frac{Fa}{a-F} = 3F$ , а потім збільшення  $\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{F}{a-F} = 2$ .

Предмет, зображення і центр лінзи лежать завжди на одній прямій. Тому зображення рухається по колу вдвоє більшого радіуса і з вдвоє більшою швидкістю  $v_2 = \Gamma v_1 = 6$  см/с. Предмет і зображення розміщені в діаметрально протилежних точках кіл, а отже, швидкості  $v_1$  і  $v_2$  мають протилежні напрямі.

**2.76.** За допомогою лінзи з фокусною відстанню  $F = 4$  см утворюють зображення точки, що лежить на відстані  $a = 12$  см від лінзи і трохи вище від її оптичної осі. На яку відстань  $L$  зміститься зображення точки при переміщенні лінзи на відстань  $l = 3$  см униз від її початкового положення?

*Відповідь:* Відстань  $b$  від лінзи до екрана, на якому утворюється

зображення точки, можна визначити за формулою лінзи  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ . При зміщенні лінзи вниз, зображення також ковзає вниз по екрану (рис. 2.31). З подібності трикутників  $ASB$  і  $OSC$  випливає, що  $\frac{L}{l} = \frac{a+b}{a}$ . Тому

$$L = \frac{la}{a-F} = 4,5 \text{ см.}$$

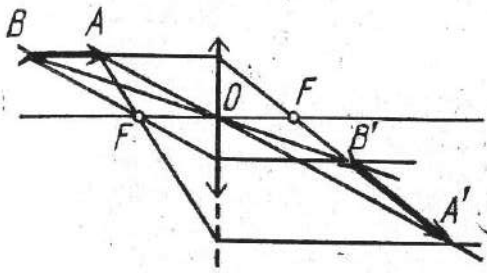


Рис. 2.30

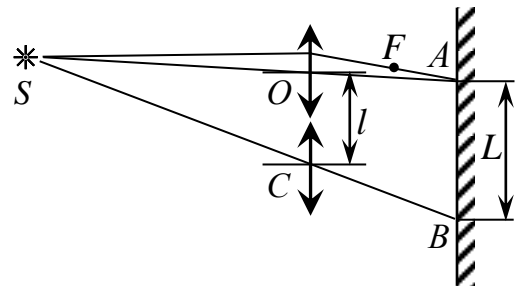


Рис. 2.31

**2.77.** Світна точка описує коло радіусом  $r$  площині, перпендикулярній до оптичної осі лінзи, а її зображення, утворене за допомогою лінзи з оптичною силою  $D$ , описує на екрані коло радіусом  $R$ . На якій відстані  $b$  від лінзи розміщено екран?

*Відповідь:*  $\frac{R}{r} = \frac{b}{a}$ . За формулою лінзи  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = D$ . Звідси  $b = \frac{R+r}{rD}$ .

**2.78.** Дійсне зображення світної точки одержано на відстані  $b = 8$  см від лінзи і на відстані  $L = 2$  см нижче від її оптичної осі. На якій найменшій відстані  $x$  перед лінзою треба встановити екран, що має форму верхньої половини лінзи, щоб зображення точки зникло? Фокусна відстань лінзи  $F = 5$  см, її діаметр  $d = 10$  см.

*Відповідь:* Зображення зникне, якщо жодний промінь, який виходить з очки, якщо жодний промінь, який виходить з точки, не потрапить на лінзу (рис. 2.32). Тоді  $\frac{d}{2} : x = 1 : (a - x)$ . Крім того,  $\frac{L}{l} = \frac{b}{a}$  і  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ . Звідси

$$x = \frac{dFb}{2LF + db - db} = 8 \text{ см.}$$

**2.79.** Кінооператорові треба зняти автомобіль на повітряній подушці, що рухається з швидкістю  $v = 72$  км/год на відстані  $d = 26$  м від оператора. Фокусна відстань об'єктива кінокамери «Нева»  $F = 13$  мм. Яка повинна бути експозиція  $\Delta t$ , щоб розмір Дл контура зображення не перевищувала  $a = 0,05$  мм?

*Відповідь:* Відстань  $\Delta l = v\Delta t$ , на яку переміститься автомобіль за час експозиції, і відстань  $\Delta r$ , на яку переміститься за той самий час його зображення, зв'язані співвідношенням  $\frac{\Delta r}{\Delta l} = \frac{b}{a}$ . Крім того,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ . За

умовою задачі  $\Delta r \leq a$ . Розв'язавши дану систему рівнянь і нерівностей, дістанемо:

$$\Delta t \leq \frac{a(d-F)}{vF} \approx \frac{1}{200} \text{ с.}$$

**2.80.** Фокусна відстань двоопуклої лінзи  $F = 5$  см. Точкове джерело світла лежить на осі лінзи на відстані  $a = 6$  см від неї. Лінзу розрізали по діаметру на дві однакові частинні розсунули на відстань  $s = 1$  см симетрично відносно оптичної осі. Знайти відстань  $S$  між двома зображеннями точки.

*Відповідь:* Формула лінзи  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$  дає змогу знайти відстань  $b$ , на якій буде розміщене зображення від лінзи. Кожна з розсунутих половинок лінзи діє як ціла лінза, вісь якої лежить від джерела на відстані  $i = \frac{s}{2}$ . Отже. Кожне з зображень розміщене від цієї осі на відстані  $L = l \frac{b}{a}$  (рис. 2.33). Шукана

відстань  $S = 2L + 2l = \frac{sa}{a-F} = 6$  см.

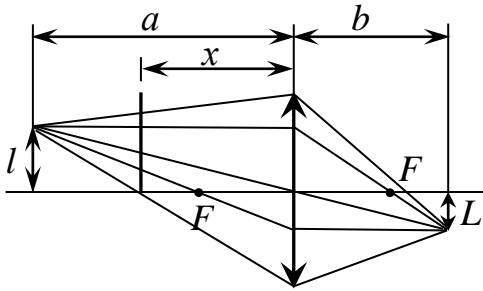


Рис. 2.32

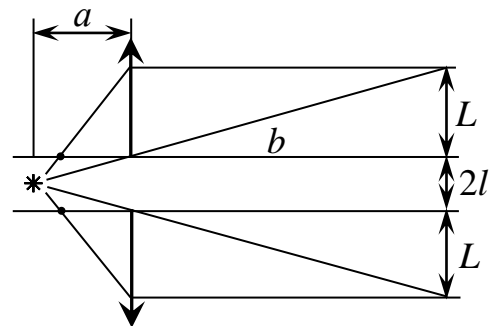


Рис. 2.33

**2.81.** Уздовж оптичної осі тонкої збиральної лінзи з фокусною відстанню  $F = 12$  см розміщено предмет, один кінець якого лежить на відстані  $a_1 = 18,9$  см від лінзи, а другий кінець – на відстані  $a_2 = 18,1$  см. Визначити збільшення  $\Gamma$  зображення.

*Відповідь:* Збільшенням зображення назвемо, як звичайно, відношення величини зображення до величини предмета:  $\Gamma = \frac{L}{l} = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}$ . Застосувавши

двічі формулу лінзи  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F}$  і  $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F}$ , дістанемо

$$\Gamma = \frac{F^2}{(a_1 - F)(a_2 - F)} \approx 4.$$

**2.82.** З яким збільшенням  $k$  зображується тонкий прямий предмет, що збігається на деякій ділянці з головною оптичною біссю збиральної лінзи, якщо об'єкт, установлений біля одного з кінців предмета, зображується із

збільшенням  $\Gamma_1$ , біля другого –  $\Gamma_2$ . Обидва кінці предмета лежать від лінзи на відстані, яка більша за фокусну.

*Відповідь:* Предмет, розміщений вздовж головної оптичної осі, зображається із збільшенням  $\Gamma = \frac{F}{a_1 - F} \cdot \frac{F}{a_2 - F}$  (див. задачу 1120). Об'єкт,

розміщений на відстані  $a_1$ , зображається із збільшенням  $\Gamma_1 = \frac{F}{a_1 - F}$  (див.

задачу 1115), на відстані  $a_2$  – із збільшенням  $\Gamma_2 = \frac{F}{a_2 - F}$ . Отже,  $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ .

**2.83.** Центр кульки по черзі вміщують у точки  $A$  і  $B$ , які знаходяться на оптичній осі лінзи по один бік від неї. Відстань  $AB$  дорівнює  $l$ . Лінза дає по черзі два дійсних зображення кульки із збільшеннями відповідно  $\Gamma_A$  і  $\Gamma_B$ . Знайти відстань  $x$  між зображеннями кульки.

*Відповідь:*  $x = \Gamma_A \Gamma_B l$ .

**2.84.** Яка найменша можлива відстань  $s_0$  між предметом і його дійсним зображенням, що створюється за допомогою збиральної лінзи з фокусною відстанню  $F$ ?

*Відповідь:* Позначимо  $s = a + b$ . Оскільки  $F = \frac{ab}{a+b}$  і  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ , то

$s = \frac{ab}{F} \leq \frac{(a+b)^2}{4F} = \frac{s^2}{4F}$ . Очевидно, що  $s \geq 4F$ . Отже,  $s_0 = 4F$ . При цьому  $a = b = 2F$ .

**2.85.** Відстань між предметом і його дійсним зображенням, утвореним за допомогою збиральної лінзи,  $S = 6,25F$ , де  $F$  — фокусна відстань лінзи. Визначити відстань від предмета до лінзи  $a$  і від лінзи до зображення  $b$ .

*Відповідь:*  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ ;  $a + b = s$ . Звідси

$$a = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - Fs} = \frac{25 \pm 15}{8} F; \quad b = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - Fs} = \frac{25 \mp 15}{8} F.$$

Отже, можливі два розв'язки:

$$a_1 = 5F, \quad b_1 = 1,25F;$$

$$a_2 = 1,25F, \quad b_2 = 5F.$$

Наявність цих двох розв'язків відразу впливає з властивості оборотності світлових променів – джерело можна замінити зображенням, а зображення джерелом, замінивши всі стрілки, які показують напрям променів, на протилежні.

**2.86.** Відстань між свічкою і екраном  $L = 3,75$  м. Між ними встановлюють збиральну лінзу, яка дає на екрані різке зображення свічки при двох положеннях лінзи. Визначити фокусну відстань  $F$  лінзи, якщо відстань між цими положеннями лінзи  $l = 0,75$  м.

*Відповідь:* Для першого положення лінзи

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F} \text{ і } a_1 + b_1 = L;$$

для другого положення –

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F} \text{ і } a_2 + b_2 = L.$$

За умовою задачі  $|a_2 - a_1| = l$ . З перших чотирьох рівнянь випливає, що  $a_1$  і  $b_1$  (як  $a_2$  і  $b_2$ ) повинні бути коренями рівняння  $x^2 - Lx + FL = 0$ , тобто

$$a_1 = b_2 = \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2}{4} - FL} \text{ і } a_2 = b_1 = \frac{L}{2} \mp \sqrt{\frac{L^2}{4} - FL}$$

(друге розміщення – це перетворене перше). Отже,

$$l^2 = 4 \left( \frac{L^2}{4} - FL \right), \text{ або } F = \frac{L^2 - l^2}{4L} = 0,9 \text{ м.}$$

**2.87.** Запалена свічка знаходиться на відстані  $L$  від екрана. Розміщуючи між екраном і свічкою лінзу з фокусною відстанню  $F$  можна дістати на екрані чітке зображення свічки при двох положеннях лінзи, які знаходяться на відстані  $l$  одне від одного. Знайти вказану відстань  $l$ .

*Відповідь:*  $l = \sqrt{L^2 - 4LF}$  (див. розв'язання задачі 2.86).

**2.88.** Предмет розміщений на відстані  $L = 0,6$  м від екрана. Використовуючи збиральну лінзу, можна утворити на екрані два чіткі зображення предмета при двох різних положеннях лінзи. Знайти відношення  $k$  величин зображень, якщо відстань між цими положеннями лінзи становить  $l = 0,4$  м.

*Відповідь:* Використовуючи двічі формулу лінзи і дані про відстані  $L$  і  $l$  (див. задачі 2.85, 2.86), дістаємо:

$$a_1 = b_2 = 0,5(L \pm l) \text{ і } a_2 = b_1 = 0,5(L \mp l).$$

Величина зображення в першому випадку  $h \frac{b_1}{a_1}$ , у другому  $h \frac{b_2}{a_2}$ , де  $h$  – висота

предмета. Відношення величин зображень

$$k = \frac{b_1 a_2}{a_1 b_2} = \left( \frac{L \mp l}{L \pm l} \right)^2. \text{ Отже, } k_1 = 0,04; k_2 = 25.$$

**2.89.** Предмет лежить на відстані  $L = 0,9$  м від екрана. Між предметом і екраном переміщують лінзу, причому при одному положенні лінзи на екрані утворюється збільшене зображення предмета, а при іншому – зменшене. Яка фокусна відстань  $F$  лінзи, якщо лінійні розміри першого зображення в  $k = 4$  рази більші за розміри другого?

*Відповідь:* Нехай точки, в яких поміщають лінзу для утворення зображень, лежать одна від одної на відстані  $l$ . Скориставшись розв'язанням задач 2.85 і 2.88, дістанемо відразу:

$$\left(\frac{L+l}{L-l}\right)^2 = k, \quad F = \frac{L^2 - l^2}{4L} = \frac{L\sqrt{k}}{(\sqrt{k} + 1)^2} = 0,2 \text{ м.}$$

**2.90.** Між предметом і екраном вміщено збиральну лінзу. Пересуваючи її, дістають на екрані два чітких зображення предмета відповідно до двох положень лінзи. Відстань від предмета до екрана  $L = 0,8$  м. Знайти відстань  $l$  між вказаними положеннями лінзи, якщо відношення величин зображень предмета на екрані  $k = 9$ .

$$\text{Відповідь: } l = \frac{\sqrt{k} - 1}{\sqrt{k} + 1} L = 0,4 \text{ (див. розв'язання задач 2.85 і 2.88).}$$

**2.91.** Предмет лежить на висоті  $L = 0,1$  м від попереднього фокуса збиральної лінзи, а екран, на якому утворюється чітке зображення предмета, розміщений на відстані  $l = 0,4$  м від заднього фокуса лінзи. Знайти фокусну відстань  $F$  лінзи. З яким збільшенням  $k$  зображується предмет?

$$\text{Відповідь: } F = \sqrt{Ll} = 0,2 \text{ м і } k = \frac{\sqrt{Ll} + l}{\sqrt{Ll} + L} = \sqrt{\frac{l}{L}} = 2.$$

**2.92.** Зображення предмета на матовому склі фотоапарата при зніманні з відстані  $a_1 = 8,5$  м має висоту  $h_1 = 13,5$  мм, а з відстані  $a_2 = 2$  м – висоту  $h_2 = 60$  мм. Знайти фокусну відстань об'єктива

$$\text{Відповідь: } F = \frac{h_2 a_2 - h_1 a_1}{h_2 - h_1} = 11,3 \text{ см.}$$

**2.93.** Висота полум'я свічки  $H = 5$  см. Лінза відкидає на екран зображення цього полум'я висотою  $h_1 = 15$  см. Не зрушуючи лінзи, свічку відсунули на  $l = 1,5$  см далі від лінзи і, пересунувши екран, знову дістали різке зображення полум'я висотою  $h_2 = 10$  см. Знайти головну фокусну відстань  $F$  лінзи.

$$\text{Відповідь: } F = \frac{h_1 h_2 l}{(h_1 - h_2) H} = 9 \text{ см.}$$

**2.94.** Джерело світла розміщене на відстані  $L = 5$  м від екрана, на якому за допомогою збиральної лінзи дістають збільшене  $\Gamma_1 = 4$  рази зображення джерела. Потім екран відсувають на  $l = 4$  м. Відновити чіткість збільшеного зображення можна по-різному. Визначити, якими будуть збільшення  $\Gamma_2$  і  $\Gamma_3$ , якщо зробити це, пересунувши: а) лише лінзу, б) лише джерело.

*Відповідь:* Для основного розміщення

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F}; \quad a_1 + b_1 = L; \quad \frac{b_1}{a_1} = \Gamma_1. \quad (1)$$

Після відсування екрана і лінзи

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F}; \quad a_2 + b_2 = L + l; \quad \frac{b_2}{a_2} = \Gamma_2. \quad (2)$$

Після відсування екрана і джерела

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} = \frac{1}{F}; \quad a_3 + b_3 = L + l + c; \quad b_3 = b_1 + l; \quad \frac{b_3}{a_3} = \Gamma_3. \quad (3)$$

Звідси

$$\Gamma_2 = \frac{(1 + \Gamma_1)\sqrt{L+l} + \sqrt{L(1-\Gamma_1)^2 + l(1+\Gamma_1)^2}}{(1 + \Gamma_1)\sqrt{L+l} - \sqrt{L(1-\Gamma_1)^2 + l(1+\Gamma_1)^2}} \approx 9,14; \quad (4)$$

$$\Gamma_3 = \frac{L(1+\Gamma_1)^2}{l\Gamma_1} + \Gamma_1 = 9. \quad (5)$$

**2.95.** За допомогою лінзи, оптична сила якої  $D = +4$  дптр, треба утворити збільшене в  $k = 5$  разів зображення предмета. На якій відстані  $d$  перед лінзою треба помістити цей предмет?

*Відповідь:* Збільшене зображення може бути дійсним або уявним

$$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = D, \quad \frac{b}{a} = k; \quad \text{звідси } a = \frac{k \pm 1}{kD}.$$

Щоб утворити дійсне збільшене зображення, предмет треба помістити перед лінзою на відстані  $d_1 = 0,3$  м, уявне – на відстані  $d_2 = 0,2$  м.

**2.96.** Збиральна лінза дає розбіжний пучок світла, причому кут між крайніми променями пучка  $\alpha = 60^\circ$ . Знайти фокусну відстань лінзи, якщо її діаметр  $D = 10$  см, а точкове джерело світла знаходиться на відстані  $l = 4$  см від лінзи.

*Відповідь:* Як видно з креслення (рис. 2.34),  $\frac{D}{2} = b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , де  $b$  – відстань від лінзи до зображення джерела, яке визначається за формулою лінзи:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad \text{Звідси}$$

$$F = \frac{Dl}{D - 2d \operatorname{tg}(\alpha/2)} \approx 7,4 \text{ см.}$$

**2.97.** В електричному ліхтаріку перед лампочкою є збиральна лінза діаметром  $D = 6$  см з фокусною відстанню  $F = 6$  см. На якій відстані  $a$  від лінзи знаходиться лампочка, якщо кут розхилу світлового пучка, який дає ліхтарик (кут між оптичною віссю і крайнім променем),  $\alpha = 45^\circ$ ?

*Відповідь:* З рівнянь  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$  і  $b = \frac{D}{2 \operatorname{tg} \alpha}$ , де  $b$  – відстань між лінзою і зображенням лампочки, випливає:

$$a = \frac{DF}{2F \operatorname{tg} \alpha + D} = 2 \text{ см.}$$

**2.98.** Точкове джерело світла знаходиться у фокусі збиральної лінзи з фокусною відстанню  $F = 6$  см. За лінзою на відстані  $l = 12$  см від неї встановлено плоский екран, на якому видно круглу світлу пляму. У який бік і

на яку відстань  $x$  від фокуса лінзи треба пересунути (вздовж оптичної осі) джерело світла, щоб радіус  $r$  світлової плями на екрані збільшився в  $n = 2$  рази?

*Відповідь:* Коли джерело розміщене у фокусі лінзи, то на екран падають паралельні промені і пляма має радіус  $r$ , який дорівнює радіусу лінзи. Якщо джерело віддаляти від лінзи, то пляма спочатку зменшуватиметься, а потім збільшуватиметься до початкових розмірів. Отже, джерело треба наближати до лінзи. Нехай потрібні розміри пляма матиме, коли джерело  $S$  знаходиться на відстані  $d$  від лінзи. При цьому промені від зображення  $S_1$  джерела, які проходять через краї лінзи, ідуть до країв плями по прямих (рис. 2.35). Тоді будуть дійсними співвідношення

$$x = F - a; \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \quad \text{і} \quad \frac{b+l}{n \cdot 2r} = \frac{b}{2r}.$$

Звідси

$$x = \frac{F^2(n-1)}{l + F(n-1)} = 2 \text{ см.}$$

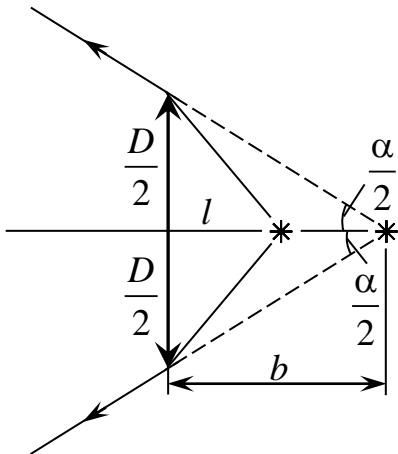


Рис. 2.34

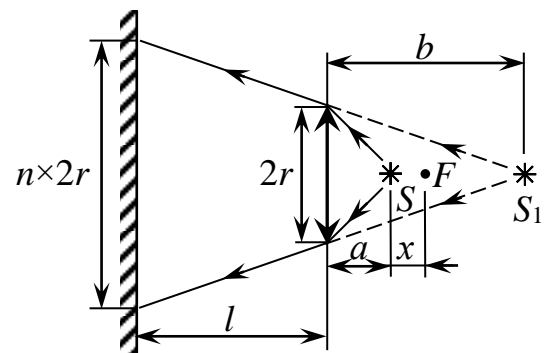


Рис. 2.35

**2.99.** Побудувати зображення точки, що лежить на головній оптичній осі збиральної лінзи на відстані, яка менша від фокусної. Положення фокусів лінзи задано.

*Відповідь:* Щоб знайти хід довільного променя  $SA$  після заломлення в лінзі, треба знайти точку  $B$  перетину побічної оптичної осі  $COB \parallel SA$  з фокальною площиною лінзи (рис. 2.37). Око, розміщене за лінзою, побачить уявне зображення  $S'$  в точці перетину продовжень променів  $OF$  і  $OB$ .

**2.100.** Знайти побудовою положення світної точки, якщо відомий хід двох променів після заломлення в лінзі (рис. 2.36). Один із цих променів перетинається з головною оптичною віссю лінзи в її фокусі.

*Відповідь:* Продовживши дані промені до їх перетину, дістанемо зображення  $S'$  світної точки (рис. 2.38). Сполучимо знайдену точку  $S'$  з

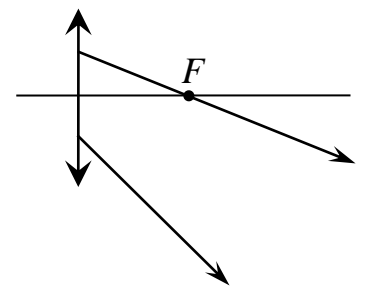


Рис. 2.36

оптичним центром лінзи  $O$ . Промінь  $BF$  після заломлення йде через фокус, отже, до заломлення він ішов паралельно головній оптичній осі. Проведемо  $SB \parallel OF$ . Шукана точка  $S$  лежить на перетині  $OS'$  і  $SB$ .

**2.101.** На якій відстані  $d$  від збиральної лінзи з фокусною відстанню  $F = 0,25$  м повинен бути розміщений предмет, щоб його уявне зображення збіглося з площиною, яка лежить на відстані  $b = 1$  м за лінзою?

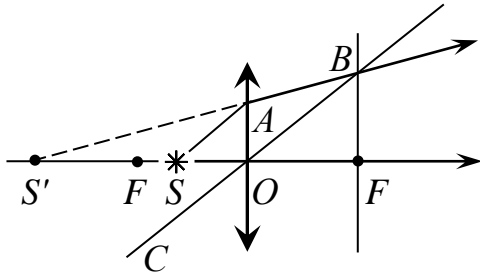


Рис. 2.37

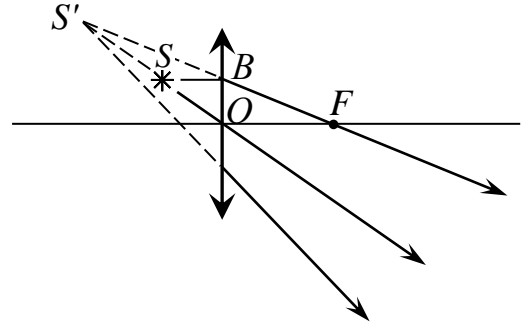


Рис. 2.38

*Відповідь:* Оскільки зображення уявне,  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ . Звідси

$$a = \frac{bF}{b + F} = 0,2 \text{ м.}$$

**2.102.** Визначити фокусну відстань  $F$  лінзи, яка на відстані  $a = 0,4$  м від неї дає уявне зображення предмета, розміщеного перед лінзою на відстані  $b = 1,2$  м.

*Відповідь:*  $F = \frac{ba}{b - a} = 0,6$  м.

**2.103.** Уявне зображення предмета лежить у фокальній площині збиральної лінзи. На якій відстані від лінзи розміщений предмет?

*Відповідь:* За формулою лінзи  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ , де  $b = F$ , знаходимо  $a = \frac{F}{2}$ .

**2.104.** Величина прямого зображення предмета, утворена за допомогою двоопуклої лінзи, вдвоє ( $\Gamma = 2$ ) більша від величини предмета. Відстань між зображенням і предметом  $l = 20$  см. Визначити фокусну відстань  $F$  лінзи.

*Відповідь:*  $F = \frac{\Gamma l}{(\Gamma - 1)^2} = 40$  см.

**2.105.** Збиральну лінзу з оптичною силою  $D = 0,5$  дптр вміщено між двома точковими джерелами так, що відношення відстаней  $a_1$  і  $a_2$  від джерел до лінзи має вигляд  $\frac{a_1}{a_2} = n = 4$ . Відстань між зображеннями  $l = 2$  м, причому зображення знаходяться по один бік лінзи. Знайти відстань  $x$  між джерелами.

*Відповідь:* За умовою  $x = a_1 + a_2$  і  $a_1 = na_2$ . Зображення першого джерела – дійсне, зображення другого – уявне. Тому

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F} = D \quad \text{і} \quad \frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F} = D,$$

де  $b_1$  і  $b_2$  – відстані зображень від лінзи. За умовою  $|b_1 - b_2| = l$ .

Розглянемо спочатку випадок, коли зображення першого джерела даліше від лінзи, ніж зображення другого, тобто  $b_1 - b_2 = l$ . Розв'язуючи систему, дістаємо для  $a_2$  квадратне рівняння:

$$nD(2 - Dl)a_2^2 + (Dl - 1)(n + 1)a_2 - l = 0.$$

Розв'язавши його, маємо

$$x = (n + 1)a_2 = (n + 1) \frac{(1 - Dl)(n + 1) + \sqrt{(1 - Dl)^2(n - 1)^2 + 4n}}{2nD(2 - Dl)} = 5 \text{ м}$$

(другий корінь – від'ємний – не має смислу).

У випадку  $b_2 - b_1 = l$  формулу для  $x$  можна записати, помінявши знак  $l$  на протилежний. У результаті маємо:  $x = 7,17$  м (друге значення  $x = 1,16$  м не задовольняє умову задачі, оскільки при цьому зображення джерел лежать по різні боки лінзи).

**2.106.** Два точкових джерела світла знаходяться на відстані  $l = 24$  см одне від одного. Між ними на відстані  $d = 6$  см від одного з них вміщено тонку збиральну лінзу. При цьому зображення обох джерел виявилось в одній і тій самій точці. Знайти фокусну відстань  $F$  лінзи.

*Відповідь:*  $F = 2d(l - d)/l = 9$  см.

**2.107.** Відстань від предмета до лінзи  $a = 10$  м, від лінзи до зображення  $b = 2,5$  м. Визначити оптичну силу  $D$  лінзи у випадках: а) зображення уявне, б) зображення дійсне.

*Відповідь:* для уявного зображення  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = D_1$ , звідки  $D_1 = \frac{b - a}{ab} = -0,3$

дптр. Лінза розсіювальна. Знак плюс перед  $D_1$  у формулі лінзи поставлено тому, що оптична сила лінзи – величина в цій задачі невідома, а тому, розв'язуючи задачу, не обов'язково заздалегідь знати характер використаної лінзи, і можна завжди її додатною.

Для дійсного зображення  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = D_2$ , отже,  $D_2 = \frac{a + b}{ab} = 0,5$  дптр. Лінза

збиральна.

**2.108.** Головна фокусна відстань збиральної лінзи  $F = 18$  см. Де розміщена світна точка, якщо її зображення утворюється на відстані  $b = 12$  см від лінзи і  $L = 5$  см від головної оптичної осі?

*Відповідь:* Відношення відстаней зображення точки і самої точки до оптичної осі  $\frac{L}{l} = \frac{b}{a}$ .

У випадку дійсного зображення  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ , а отже,  $a = \frac{bF}{b - F} = -36$  см,

$l = \frac{LF}{b-F} = -15$  см, тобто на лінзу падають промені, які, коли лінзи не було, збіглися б у точці, що віддалена від місця, де розміщена лінза, на 36 см і на 15 см від оптичної осі. Джерело буде уявним, що суперечить умовам задач.

У випадку уявного зображення  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ ; звідси  $a = \frac{bF}{b+F} = 7,2$  см,

$$l = \frac{LF}{b+R} = 3 \text{ см.}$$

**2.109.** Збільшення, яке дає лінза,  $\Gamma = 10$ . Знайти її фокусну відстань  $F$ , коли відстань від лінзи до предмета  $a = 9,9$  см. Розглянути два випадки.

*Відповідь:* Збільшення  $\Gamma = \frac{b}{a}$ , де  $b$  – відстань від лінзи до зображення.

Якщо зображення дійсне, то  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ . Звідси  $F = \frac{ka}{k+1} = 9$  см. У випадку

уявного зображення  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$  і  $F = \frac{ka}{k-1} = 11$  см.

**2.110.** Фокусна відстань збиральної лінзи  $F = 10$  см, відстань від предмета до фокуса  $l = 5$  см, лінійні розміри предмета  $h = 2$  см. Визначити величину  $H$  зображення. Розглянути два випадки.

*Відповідь:* Нехай відстань від лінзи до предмета  $a$  і від лінзи до зображення  $b$ . У випадку дійсного зображення

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}; \quad \frac{H}{h} = \frac{b}{a} \quad \text{і} \quad a = F + l.$$

Якщо зображення уявне, то

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}; \quad \frac{H}{h} = \frac{b}{a} \quad \text{і} \quad a = F - l.$$

Обидві системи рівнянь дають однакову відповідь:  $h = Fh / l = 4$  см.

**2.112.** Оптична вісь збиральної лінзи збігається з віссю світлового конуса, утвореного збіжним пучком променів, а фокус лінзи збігається з вершиною конуса. На якій відстані  $b$  від лінзи перетнуться промені після заломлення, якщо оптична сила лінзи  $D = 5$  дптр?

*Відповідь:* Вершина конуса буде уявним джерелом, що лежить на відстані  $a = F$  від лінзи

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} = D, \quad \text{то} \quad b = \frac{1}{2D} = 0,1 \text{ м.}$$

**2.113.** На шляху збіжного пучка променів поставили збиральну лінзу з фокусною відстанню  $F = 7$  см. Внаслідок цього промені зійшлися у точці  $A$  на відстані  $b = 5$  см від лінзи. На якій відстані  $l$  від точки  $A$  збіжаться промені, якщо лінзу прийняти?

*Відповідь:*  $l = \frac{b^2}{F-b} = 12,5$  см.

**2.114.** Циліндричний пучок променів, паралельних головній оптичній осі

розсіювальної лінзи, має діаметр  $s_1 = 5$  см. Пройшовши лінзу, пучок дає на екрані пляму діаметром  $s_2 = 7$  см. Який буде діаметр  $s_3$  плями, якщо розсіювальну лінзу замінити збиральною з тією самою фокусною відстанню?

*Відповідь:* Розглядаючи подібні трикутники (рис. 2.39) неважко впевнитись, що

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{a + F}{F} \quad \text{і} \quad \frac{s_3}{s_1} = \left| \frac{F - a}{F} \right|,$$

де  $a$  – відстань від лінзи до екрана. Знак *модуля* поставлено для того, щоб урахувати можливий випадок  $a > F$ .

Розв'язавши систему рівнянь, дістанемо:  $s_3 = |2s_1 - s_2| = 3$  см.

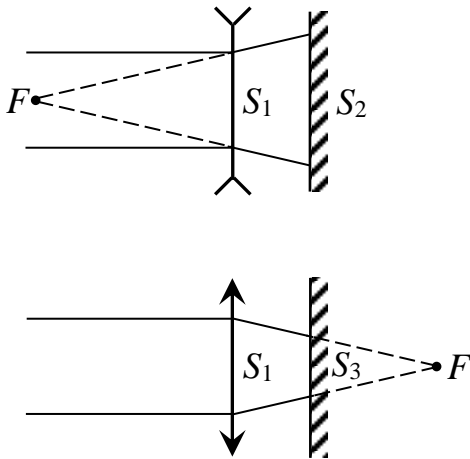


Рис. 2.39

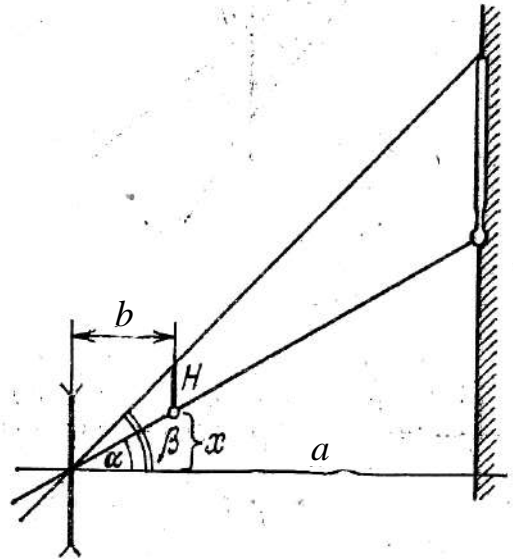


Рис. 2.40

**2.115.** Циліндричний пучок світла напрямлено на збиральну лінзу паралельно її оптичній осі. Діаметр пучка  $D_1 = 4$  см. За лінзою стоїть екран, на якому пучок дає пляму діаметром  $D_2 = 2$  см. На місце збиральної лінзи поставили розсіювальну з такою самою фокусною відстанню. Яким тепер буде діаметр  $D_3$  плями на екрані?

*Відповідь:*  $D_3 = 2D_1 - D_2 = 6$  см, якщо відстань від лінзи до екрана менша, ніж її фокусна відстань.  $D_3 = 2D_1 + D_2 = 10$  см, якщо ця відстань більша, ніж фокусна (рис. 2.40).

### 2.4.2. Розсіювальні лінзи

**2.116.** На якій відстані перед розсіювальною лінзою треба поставити предмет, щоб його уявне зображення було посередині між лінзою та її уявним фокусом?

*Відповідь:* У фокальній площині.

**2.117.** Знайти побудовою зображення предмета, розміщеного на фокусній відстані вгнутої лінзи. Наслідки перевірити розрахунком.

*Відповідь:* На відстані  $F/2$  (рис. 2.41).

**2.118.** Визначити оптичну силу розсіювальної лінзи, коли відомо, що предмет, розташований перед нею на відстані 40 см, дає уявне зображення, зменшене в 4 рази.

Відповідь:  $-7,8$  дптр.

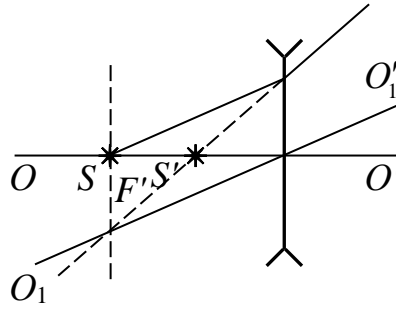


Рис. 2.41

**2.119.** Предмет розмістили перед розсіювальною лінзою на відстані  $mF$ . На якій відстані від лінзи вийде уявне зображення і в скільки разів воно буде менше від самого предмета?

Відповідь:  $\frac{mF}{m+1}$ ;  $(m+1)$  разів.

**2.120.** Радіус кривизни поверхонь сферичної розсіювальної лінзи  $R_1 = R_2 = 50$  см. Показник заломлення матеріалу лінзи  $1,50$ . Знайти оптичну силу лінзи. Зробити аналогічний розрахунок для збиральної лінзи при тих самих даних задачі.

Відповідь:  $D_1 = -2$  дптр;  $D_2 = 2$  дптр.

**2.121.** У фокусі розсіювальної лінзи знаходиться предмет. Визначити відстань від зображення до лінзи і зменшення предмета, якщо фокусна відстань лінзи  $F = 20$  см.

Відповідь:  $b = 10$  см;  $\Gamma = 0,5$ .

**2.122.** Фокусна відстань лінзи  $F = 20$  см. На якій відстані лінзи треба розмістити предмет, щоб його уявне зображення було на відстані  $b = 40$  см від лінзи?

Відповідь:  $a = \frac{bF}{b+F} = 13,3$  см.

**2.123.** Знайти оптичну силу двоопуклої лінзи з радіусами кривизни  $R_1 = 30$  см,  $R_2 = 40$  см, виготовленої із скла ( $n = 1,50$ ).

Відповідь:  $D_1 = 2,9$  дптр.

**2.124.** Знайти головну фокусну відстань кварцової лінзи для ультрафіолетової лінії спектра ртуті ( $\lambda = 259,0$  нм), якщо головна фокусна відстань для жовтої лінії натрію ( $\lambda = 589,0$  нм) дорівнює  $16$  см і показники заломлення кварцу для цих довжин хвиль відповідно  $1,504$  і  $1,458$ .

Відповідь:  $F = 0,146$  м.

**2.125.** Із двох стекол з показниками заломлення  $1,5$  і  $1,7$  зроблені дві однакові двоопуклі лінзи. а) Знайти відношення їх фокусних відстаней; б) яку дію кожна з цих двох лінз здійснить на промінь, паралельний оптичній осі, якщо занурити лінзи в прозору рідину з показником заломлення  $1,6$ ?

Відповідь: а)  $\frac{F_1}{F_2} = 1,4$ ; б) у даній рідині перша лінза буде діяти як

розсіювальна лінза, а друга – як збиральна.

**2.126.** Знайти фокусну відстань наступних лінз: а) лінза двоопукла  $R_1 = 15$  см і  $R_2 = -25$  см; б) лінза плоско-опукла  $R_1 = 15$  см і  $R_2 = \infty$ ; в) лінза вгнуто-опукла (додатній меніск)  $R_1 = 15$  см і  $R_2 = 25$  см; г) двоопукла  $R_1 = -15$  см і  $R_2 = 25$  см; д) лінза плоско-вгнута  $R_1 = \infty$ ,  $R_2 = -15$  см; ж) лінза опукло-вгнута (від'ємний меніск)  $R_1 = 25$ ,  $R_2 = 15$  см. Показник заломлення матеріалу лінзи  $n = 1,5$ .

*Відповідь:* а) 0,188 м; б) 0,30 м; в) 0,75 м; г) – 0,188 м; д) – 0,30 м; ж) – 0,75 м.

**2.127.** Радіуси кривизни поверхонь двоопуклої лінзи рівні  $R_1 = R_2 = 50$  см. Показник заломлення матеріалу лінзи дорівнює  $n = 1,5$ . Знайти оптичну силу лінзи.

*Відповідь:*  $D = 2$  дптр.

**2.128.** Зі скла, що має показник заломлення  $n = 1,50$ , потрібно виготовити лінзу, оптична сила якої  $D = 5$  дптр. Якими повинні бути радіуси кривизни лінзи, якщо вони однакові?

*Відповідь:*  $R = \frac{2(n-1)}{D} = 0,2$  м.

**2.129.** Фокусна відстань двоопуклої скляної лінзи ( $n = 1,5$ ), у якої радіуси кривизни поверхні однакові, рівна 25 см. Де зберуться падаючі на лінзу паралельні оптичній осі промені, якщо за лінзою знаходиться вода?

*Відповідь:*  $F_1 = \frac{2(n_1-1)n_2}{2n_1-n_2-1} F = 50$  см, де  $F_1$  – фокусна відстань лінзи у

воді;  $n_1$  – показник заломлення скла;  $n_2$  – показник заломлення води;  $F$  – фокусна відстань лінзи у повітрі;  $F_1 = 0,5$  м.

**2.130.** Збиральна лінза з показником заломлення 1,5 дає дійсне зображення на відстані 0,1 м від неї. Якщо предмет і лінзу опускають у воду, не змінюючи відстані між ними, то зображення отримується на відстані 0,6 м від лінзи. Знайти фокусну відстань лінзи. Показник заломлення води 1,33.

*Відповідь:*  $F = 12$  см.

**2.131.** Збиральна лінза дає на екрані зображення предмета. Між лінзою і екраном розмістили плоскопаралельну пластинку товщиною 3 см і показником заломлення 1,5. В якому напрямку і на скільки потрібно перемістити екран, щоб знову отримати чітке зображення предмета?

*Відповідь:* Екран потрібно перемістити від лінзи на відстань 1 см.

**2.132.** Довести, що у двоопуклій лінзі з однаковими радіусами кривизни поверхонь і показником заломлення  $n = 1,50$  фокуси збігаються з центрами кривизни. У скільки разів зміниться фокусна відстань, якщо лінзу занурити у воду ( $n = 1,33$ )?

*Відповідь:*  $\frac{F_2}{F_1} = \frac{(n_1-1)n_2}{n_1-n_2} = 3,9$ .

**2.133.** Знайти фокусну відстань для лінз, зроблених з матеріалу, показник заломлення якого  $n = 1,50$ :

а) двоопукла лінза з радіусами кривизни поверхонь  $R_1 = 15$  см;  $R_2 = 20$  см;

б) плоско-опукла лінза з  $R_1 = \infty$ ;  $R_2 = 20$  см;

в) вгнуто-опукла (додатний меніск) з  $R_1 = 25$  см;  $R_2 = 15$  см;

г) двовгнута лінза з  $R_1 = 15$  см;  $R_2 = 20$  см;

д) плоско-вгнута лінза з  $R_1 \rightarrow \infty$ ;  $R_2 = 20$  см;

е) опукло-вгнута (від'ємний меніск) з  $R_1 = 20$  см;  $R_2 = 15$  см.

Зобразити ці лінзи.

*Відповідь:* а)  $F = 17,1$  см; б)  $F = 40$  см; в)  $F = 75$  см; г)  $F = -21,4$  см; д)  $F = -40$  см; е)  $F = -120$  см.

**2.134.** Поздовжня хроматична аберация симетричної збиральної лінзи  $0,022$  м. Визначити радіус кривизни лінзи, якщо показник заломлення цього сорту скла для червоних променів  $1,57$ , а для фіолетових  $1,60$ .

*Відповідь:*  $R = \frac{2(F_{\text{ч}} - F_{\text{ф}})}{\frac{1}{n_{\text{ч}} - 1} - \frac{1}{n_{\text{ф}} - 1}} = 0,5$  м, де  $F_{\text{ч}}$  – фокусна відстань лінзи для

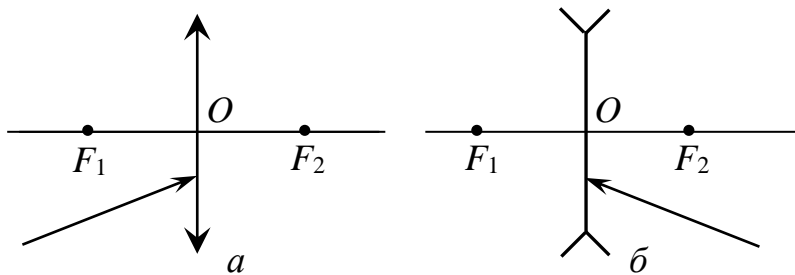
червоних променів;  $F_{\text{ф}}$  – для фіолетових променів;  $n_{\text{ч}}$ ,  $n_{\text{ф}}$  – показники заломлення лінзи відповідно для червоних і фіолетових променів.

**2.135.** Як зміниться фокусна відстань лінзи, якщо її рівномірно нагріти?

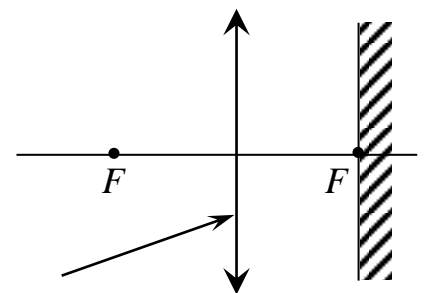
*Відповідь:* Збільшиться, оскільки збільшиться радіус кривизни і зменшиться показник заломлення.

**2.136.** Побудувати хід променя за лінзою (рис. 2.42). Показник заломлення середовища з обох боків лінзи однаковий.

**2.137.** У фокальній площині збиральної лінзи розміщено плоске дзеркало (рис. 2.43). Побудувати хід променя у просторі між лінзою і дзеркалом, а потім по виході із лінзи вліво.



*Рис. 2.42*



*Рис. 2.43*

**2.138.** Визначити показник заломлення матеріалу лінзи, якщо радіуси кривизни її поверхні  $R_1 = 40$  см і  $R_2 = 50$  см, а оптична сила  $D = 3$  дптр.

*Відповідь:*  $n = 1 + \frac{DR_1R_2}{R_1 + R_2} \approx 1,67$ .

**2.139.** Визначити фокусну відстань плоскоопуклої лінзи, виготовленої із скла з показником заломлення  $n=1,6$ , якщо радіус кривизни її поверхні  $R=20$  см.

*Відповідь:*  $F = \frac{R}{n-1} \approx 33,3$ .

**2.140.** Двоопукла лінза із скла ( $n_1=1,57$ ) має в повітрі оптичну силу  $D_1=5$  дптр. Визначити оптичну силу і фокусну відстань лінзи після занурення у рідину з показником заломлення  $n_2=1,67$ .

*Відповідь:*  $D_2 = \frac{D_1 \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right)}{n_1 - 1} = -0,525$  дптр. Фокусна відстань

$F_2 = \frac{1}{D_2} = -1,9$  м. Знак *мінус* показує, що лінза у даній речовині є розсіювальною.

**2.141.** Фокусна відстань збиральної лінзи у повітрі  $F_1=0,1$  м. Чому вона дорівнює у воді?

*Відповідь:*  $F_2 \approx 39$  см.

**2.142.** Фокусна відстань лінзи, яка знаходиться у повітрі,  $F_1=5$  см. Фокусна відстань цієї ж лінзи, занурену у деяку рідину,  $F_2=35$  см. Визначити показник заломлення рідини, якщо показник заломлення скла  $n_c=1,8$ .

*Відповідь:*  $n_p \approx 1,62$ .

**2.143.** Предмет і його зображення знаходяться від збиральної лінзи відповідно на відстані  $a=0,4$  м і  $b=1,2$  м. Визначити оптичну силу лінзи.

*Відповідь:*  $D \approx 3,33$  дптр.

**2.144.** Між предметом і екраном встановлена двоопукла лінза з радіусами кривизни сферичних поверхонь  $R_1=30$  см і  $R_2=20$  см. За допомогою даної лінзи отримано зображення з лінійним збільшенням  $\Gamma=2$ . Визначити відстань від предмета до екрана. Показник заломлення матеріалу лінзи  $n=1,6$ .

*Відповідь:*  $a+b = \frac{R_1 R_2 (k+1)^2}{k(R_1+R_2)(n-1)} \approx 0,9$  м.

**2.145.** Відстань від лампочки до екрана  $L=1$  м. Лінза, розміщена між ними, утворює різке зображення лампочки при двох положеннях, відстань між якими  $l=0,6$  м. Визначити фокусну відстань лінзи.

*Відповідь:*  $F \approx 16$  см.

**2.146.** Відстань від предмета до екрана  $L=1$  м. На якій відстані від предмета потрібно розмістити збиральну лінзу з фокусною відстанню  $F=12,5$  см, щоб отримати на екрані різке зображення предмета?

*Відповідь:*  $l_1 \approx 14,7$  см;  $l_2 \approx 85,4$  см.

**2.147.** Предмет знаходиться на відстані  $a = 0,1$  м від двоопуклої лінзи, оптична сила якої  $D = 20$  дптр. Визначити, на якій відстані від лінзи буде зображення предмета і чому дорівнює лінійне збільшення зображення.

*Відповідь:*  $b = 0,1$  м;  $\Gamma = 1$ .

**2.148.** Лінза, розміщена між лампочкою і екраном, дає на екрані різке збільшене зображення лампочки. Коли лінзу присунули до екрана на  $\Delta a = 30$  см, утворилось різке зменшене зображення. Відстань від лампочки до екрана  $d = 60$  см. Визначити фокусну відстань лінзи.

*Відповідь:* Оскільки лінза утворює збільшене зображення лампочки, то лампочка знаходиться від лінзи на відстані  $a$ , що знаходиться в інтервалі

$$F < a < 2F. \text{ Фокусна відстань лінзи: } F = \frac{ab}{a+b} = 11,25 \text{ см.}$$

**2.149.** Предмет знаходиться на відстані  $L = 1$  м від екрана. Збиральна лінза, розміщена між предметом і екраном, дає чітке зображення. Не змінюючи відстані між предметом і екраном, переміщують лінзу і знову знаходять чітке зображення предмета. Яка оптична сила лінзи, якщо відстань між обома положеннями лінзи  $l = 20$  см?

*Відповідь:*  $D \approx 4,2$  дптр.

**2.150.** В екрані зроблено круговий отвір, через який проходить збіжний пучок. Вершина пучка  $S$  лежить на відстані  $l = 15$  см від екрана. Як зміниться відстань точки зустрічі променів до екрана, якщо в отворі установити збиральну лінзу з фокусною відстанню  $F = 30$  см? Побудувати хід променів після установки лінзи.

*Відповідь:* Зміститься на 5 см ближче до екрана.

**2.160.** Двоопукла лінза із скла ( $n_1 = 1,57$ ) має у повітрі фокусну відстань  $F = 30$  см. Визначити відстань від лінзи до зображення, якщо відстань від лінзи до предмета  $a = 15$  см. Де буде знаходитись зображення, якщо лінзу і предмет занурити у воду ( $n_2 = 1,33$ )?

*Відповідь:*  $b_1 = -30$  см;  $b_2 = -18$  см.

**2.161.** Фокусна відстань розсіювальної лінзи  $F = 0,15$  м. Відстань між предметом і лінзою  $a = 0,10$  м. Визначити відстань між предметом і зображенням.

*Відповідь:*  $b = 4$  см.

**2.162.** Відстань від предмета до лінзи  $a = 0,1$  м. Знайти відстань від зображення предмета до лінзи, якщо лінза: а) збиральна; б) розсіювальна. Фокусна відстань лінзи  $F = 0,2$  м.

*Відповідь:* а)  $b_1 = -20$  см; б)  $b_2 = -6,7$  см.

**2.163.** Плоскоопукла лінза з фокусною відстанню  $F_1 = 30$  см і плоско-вгнута з фокусною відстанню  $F_2 = 10$  см складені щільно. На відстані  $a = 15$  см від цієї системи лінз розмістили предмет. На якій відстані від системи лінз утвориться зображення предмета?

*Відповідь:*  $b = -7,5$  см.

**2.164.** Плоскоопукла скляна ( $n = 1,56$ ) лінза, посріблена з опуклого боку,

утворює разом із угнутим дзеркалом і плоскоопуклою лінзою оптичну систему. Визначити фокусну відстань такої оптичної системи, якщо радіус кривизни  $R = 50$  см.

*Відповідь:*  $F = R / 2n \approx 16$  см.

**2.165.** Визначити положення зображення, утвореного оптичною системою, яка складається з угнутого дзеркала з фокусною відстанню  $F_1 = 10$  см і збиральної лінзи з фокусною відстанню  $F_2 = 20$  см. Відстань від дзеркала до лінзи  $d = 30$  см, а від лінзи до предмета  $a_1 = 40$  см.

*Відповідь:*  $l = 100$  см.

**2.166.** Уявне зображення світної точки в розсіювальній лінзі лежить у два рази ближче до лінзи, ніж сама точка. Знайти положення світної точки, коли відомо, що вона лежить на оптичній осі лінзи. Оптична сила лінзи  $D = -5$  дптр.

*Відповідь:* Для розсіювальної лінзи  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{F} = D$ . За умовою задачі

$b = \frac{a}{2}$ . Отже, світна точка лежить від лінзи на відстані  $a = F = -\frac{1}{D} = 0,2$  м.

**2.167.** Термометр, який висить на стіні будинку, розглядають через розсіювальну лінзу. Лінзу встановлено паралельно стіні нижче термометра так, що кульку термометра видно у напрямі побічної осі лінзи, яка відхиляється від головної осі вгору на кут  $\alpha = 30^\circ$ . Під яким кутом  $\beta$  до головної осі знаходиться побічна вісь, на якій лежить зображення верхньої точки термометра, якщо довжина зображення термометра  $H = 6,4$  см, відстань між лінзою і стіною  $a = 60$  см, оптична сила лінзи  $D = -5$  дптр?

*Відповідь:* За формулою лінзи  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{F} = D$ . Де  $x = b \operatorname{tg} \alpha$  і  $H + x = b \operatorname{tg} \beta$ .

Звідси  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \frac{H}{a} - HD \approx 1$ . Отже,  $\beta \approx 45^\circ$ .

**2.168.** Світна точка  $A$  розміщена перед розсіювальною лінзою, положення оптичного центра  $O$  якої відоме (рис. 2.44). Відомий також хід одного з променів  $ABC$ . Побудувати хід другого променя  $AK$ .

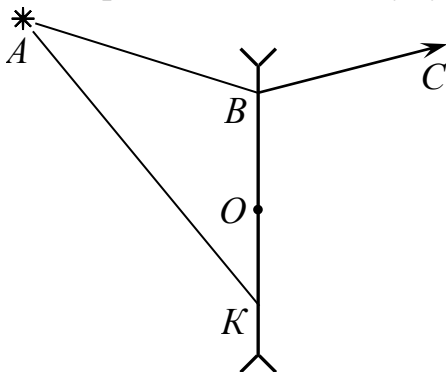


Рис. 2.44

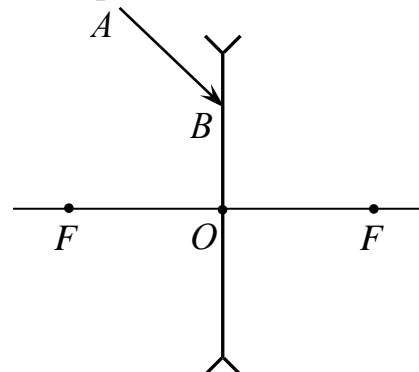


Рис. 2.45

*Відповідь:* Промінь  $AO$  проходить через лінзу, не змінюючи напрямку (рис. 2.46). Знаючи два промені, що виходять з точки  $A$ , можна знайти її

зображення  $A'$ . Промінь  $AK$  після заломлення йтиме в напрямі  $KP$  так, що продовження цього променя пройде через точку  $A'$ .

**2.169.** Побудувати хід довільного променя  $AB$ , що падає на розсіювальну лінзу після заломлення в ній (рис. 2.45). Положення оптичної осі лінзи і її фокусів задано.

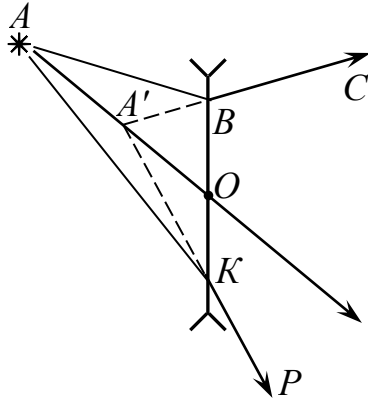


Рис. 2.46

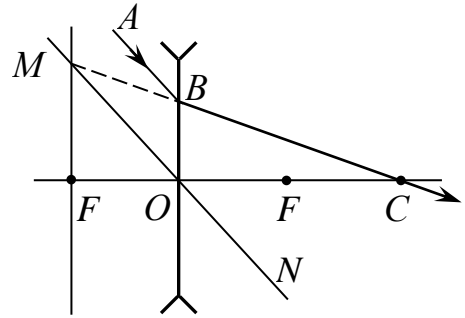


Рис. 2.47

*Відповідь:* Спосіб побудови зрозумілий з рис. 2.47.  $MON \parallel AB$  – побічна оптична вісь лінзи.  $MF$  – фокальна площина лінзи. Продовження  $BM$  заломленого променя  $BC$  проходить через точку  $M$  перетину фокальної площини з побічною оптичною віссю. Спосіб ґрунтується на тому, що паралельний пучок променів, один з яких можна вважати таким, що збігається з побічною оптичною віссю, після заломлення іде так, що продовження променів збігаються в точці, яка лежить на фокальній площині лінзи.

**2.170.** Предмет розміром  $h = 0,03$  м розміщений на відстані  $a = 0,15$  м від розсіювальної лінзи з фокусною відстанню  $F = 0,3$  м. На якій відстані  $b$  від лінзи буде зображення? Яка буде величина зображення предмета  $H$ ?

*Відповідь:*  $b = \frac{Fa}{F+a} = 0,1$  м;  $H = \frac{hF}{F+a} = 0,02$  м.

**2.171.** Точкове джерело світла, яке спочатку було на відстані  $d_1 = 1,2$  м від розсіювальної лінзи, наближують до неї вздовж оптичної осі до відстані  $d_2 = 0,6$  м. При цьому уявне зображення джерела проходить вздовж оптичної осі відстань  $l = 10$  см. Знайти фокусну відстань  $F$  лінзи.

*Відповідь:* Для першого положення джерела  $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} = -\frac{1}{F}$ , для другого

$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2} = -\frac{1}{F}$ , де  $b_1$  і  $b_2$  – відстані від лінзи до зображень у першому і другому випадках. За умовою  $b_1 - b_2 = l$ . Система приводить до квадратного рівняння

$$(a_1 - a_2 - l)F^2 - l(a_1 + a_2)F - la_1a_2 = 0.$$

Розв'язавши його, знайдемо:

$$F = \frac{l(a_1 + a_2) + \sqrt{l(a_1 - a_2)[l(a_1 - a_2) + 4a_1a_2]}}{2(a_1 - a_2 - l)} = 0,6 \text{ м.}$$

Другий корінь відповідає збиральній лінзі.

**2.172.** Світловий промінь, що падає на розсіювальну лінзу, після заломлення в ній перетинає головну оптичну вісь лінзи в точці, що лежить від лінзи на відстані  $b = 9$  см. У якій точці перетне промінь ту саму вісь, якщо прийняти лінзу? Фокусна відстань  $F = 13,5$  см.

*Відповідь:* Промінь перетне оптичну вісь у точці, що лежить на відстані  $d$  від площини, в якій була лінза. За формулою лінзи

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{F}, \text{ тобто } a = \frac{bF}{b+F} = 5,4 \text{ см.}$$

**2.173.** Збіжний пучок променів, що проходить через отвір діаметром  $D = 5$  см у непрозорій ширмі, дає на екрані, розміщеному за ширмою на відстані  $l = 20$  см, світлу пляму діаметром  $d = 4$  см. Після того як в отвір вставили лінзу, пляма перетворилась у точку. Визначити фокусну відстань  $F$  лінзи.

*Відповідь:* Точка сходження променів при відсутності лінзи (уявне джерело) лежить на відстані  $d$  від ширми, причому

$$\frac{d}{a-l} = \frac{D}{a} \text{ (при } l < a), \text{ або } \frac{a}{l-a} = \frac{D}{a} \text{ (при } a < l).$$

За формулою лінзи  $-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ . Перед членом  $\frac{1}{F}$  беремо додатний знак, бо  $F$  невідоме. Розв'язуючи знайдену систему, дістаємо:

$$F = \pm \frac{Dl}{d} = \pm 25 \text{ см.}$$

Знак *плюс* відповідає випадку  $l < a$  і свідчить про те, що отвір треба вставити додатну лінзу, знак *мінус* – від'ємну (розсіювальну).

**2.174.** Збіжний пучок променів має вигляд конуса з вершиною в точці  $A$ . Коли на шляху променів поставили розсіювальну лінзу, збіжний пучок перетворився в розбіжний з вершиною в точці  $B$ . Знаючи, що точки  $A$  і  $B$  лежать на головній оптичній осі. лінзи на відстані  $l = 0,45$  м одна від одної і оптичний центр лінзи ділить відрізок  $AB$  у відношенні  $n : m = 1 : 2$ , визначити фокусну відстань  $F$  лінзи.

*Відповідь:* Точка  $A$  відіграє роль уявного джерела,  $B$  – уявного зображення (рис. 2.48), тому за

формулою лінзи  $-\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{F}$ . За умовою задачі  $b +$

$a = l$  і  $\frac{b}{a} = \frac{m}{n}$ . Звідси

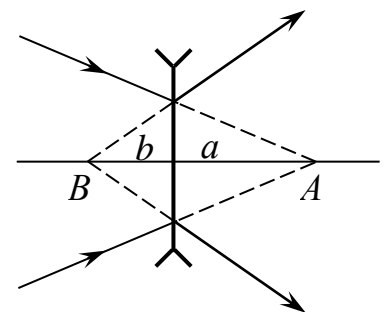


Рис. 2.48

$$F = \frac{l}{\frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2} = 0,1 \text{ м.}$$

**2.175.** Розсіювальну лінзу з фокусною відстанню  $F = 12$  см встановлено між двома точковими джерелами в два рази ближче до одного з них, ніж до другого. Відстань між зображеннями джерел дорівнює  $l = 7,8$  см. Знайти відстань  $L$  між самими джерелами.

*Відповідь:*  $L = \frac{-9F(F-l) \pm 3F\sqrt{8F^2 + (F-l)^2}}{4(2F-l)}$ . Від'ємний корінь не має

змісту, тому  $L = 12$  см.

**2.176.** Екран розміщено на відстані  $L = 21$  см від отвору, в який вставлено лінзу діаметром  $D = 5$  см. На лінзу падає збіжний пучок променів, внаслідок чого на екрані утворюється світла пляма діаметром  $d = 3$  см. Виявилось, що коли лінзу прийняти, то діаметр плями не змінюється. Визначити фокусну відстань  $F$  лінзи.

*Відповідь:* Лінза може біти збиральною або розсіювальною.

У випадку збиральної лінзи вершина  $S$  світлого конуса при відсутності лінзи (уявне джерело) лежить за екраном на відстані  $a_1 = \frac{Dl}{D-d}$  від отвору (рис. 2.49), а коли лінзу вставити, то точка збігу  $S'$  променів (зображення)

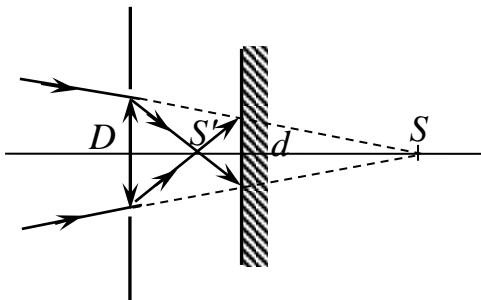


Рис. 2.49

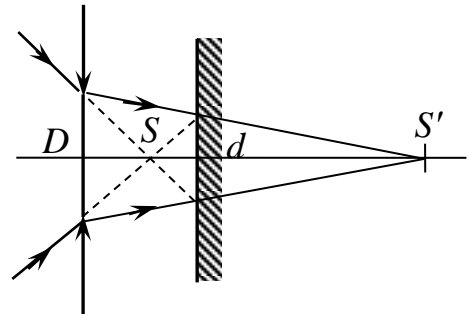


Рис. 2.50

буде на відстані  $b_1 = \frac{Dl}{D+d}$ . За формулою лінзи  $-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F_1}$ . Звідси

$F_1 = \frac{Dl}{2d} = 17,5$  см. Для розсіювальної лінзи (рис. 2.50) відповідно  $a_2 = \frac{Dl}{D+d}$ ,

$b_2 = \frac{Dl}{D-d}$ ,  $-\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = -\frac{1}{F_2}$ . Отже,  $F_2 = \frac{Dl}{2d} = 17,5$  см.

**2.177.** Оптична сила тонкої скляної лінзи в повітрі  $D = 5$  дптр. Визначити фокусну відстань  $F$  тієї самої лінзи, зануреної у воду. Показник заломлення

скла  $n_{\text{ск}} = \frac{2}{3}$ , води  $n_{\text{в}} = \frac{4}{3}$ .

*Відповідь:* У повітрі ( $n = 1$ ) оптична сила лінзи  $D = \left(\frac{n_{\text{ск}}}{n} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ .

У воді  $\frac{1}{F} = \left(\frac{n_{\text{ск}}}{n_{\text{в}}} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ . Звідси  $F = \frac{n_{\text{в}}(n_{\text{ск}} - n)}{n(n_{\text{ск}} - n_{\text{в}})} \cdot \frac{1}{D} = 0,8$  м.

**2.178.** У скляному стержні (показник заломлення скла  $n_{\text{ск}} = 1,5$ ) є повітряна порожнина у вигляді тонкої раковини, одна сторона якої плоска і перпендикулярна до осі стержня, а друга – опукла з радіусом кривизни  $R = 10$  см. Вздовж стержня поширюється пучок паралельних променів. На якій відстані  $F$  від повітряної порожнини буде вершина конуса світлових променів (їх фокус) після проходження світла через повітряну порожнину?

*Відповідь:* Фокусна відстань  $R$  повітряної лінзи у склі визначається за формулою

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_{\text{пов}}}{n_{\text{ск}}} - 1\right) \frac{1}{R} = \frac{1 - n_{\text{ск}}}{n_{\text{ск}} R}; \text{ звідси } F = \frac{n_{\text{ск}} R}{1 - n_{\text{ск}}} = -30 \text{ см.}$$

Лінза розсіювальна.

**2.179.** У склі з показником заломлення  $n_{\text{ск}} = 1,5$  є повітряна порожнина у вигляді двоопуклої тонкої лінзи з радіусом кривизни поверхонь  $R = 10$  см. На оптичній осі цієї лінзи всередині скла на відстані  $a = 20$  см від лінзи знаходиться піщина. Визначити відстань  $b$  між зображенням піщини і лінзою.

*Відповідь:* Фокусна відстань  $F$  лінзи визначається разом  $\frac{1}{F} = \left(\frac{n_{\text{пов}}}{n_{\text{ск}}} - 1\right) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)$ . За формулою лінзи  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ . Звідси

$$b = \frac{Ran_{\text{ск}}}{2a(1 - n_{\text{ск}}) - Rn_{\text{ск}}} = -8,57 \text{ см (зображення уявне).}$$

**2.180.** Для оптичного скла «флінт» показники заломлення для крайніх променів видимого спектра дорівнюють  $n_1 = 1,745$  і  $n_2 = 1,809$ . З цього скла зроблено двоопуклу лінзу, радіуси кривизни якої  $R_1 = R_2 = 0,2$  м. Визначити відстань  $x$  між головними фокусами лінзи для крайніх променів спектра.

*Відповідь:*  $x = F_1 - F_2 = \frac{R_1 R_2 (n_2 - n_1)}{(R_1 + R_2)(n_1 - 1)(n_2 - 1)} = 1,062$  см.

**2.181.** Збиральна лінза, радіуси кривизни поверхонь якої  $R_1 = 12,5$  см і  $R_2 = 26$  см, дає дійсне зображення предмета на відстані  $b = 24$  см від лінзи, коли предмет лежить на відстані  $a = 50$  см від лінзи. Та сама лінза, занурена в рідину, діє як розсіювальна з фокусною відстанню  $F = 1$  м. Визначити показник заломлення  $n$  рідини.

*Відповідь:* Використовуючи формулу лінзи, запишемо:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n_{\text{ск}} - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ , де  $n_{\text{ск}}$  – показник заломлення скла лінзи. У рідині

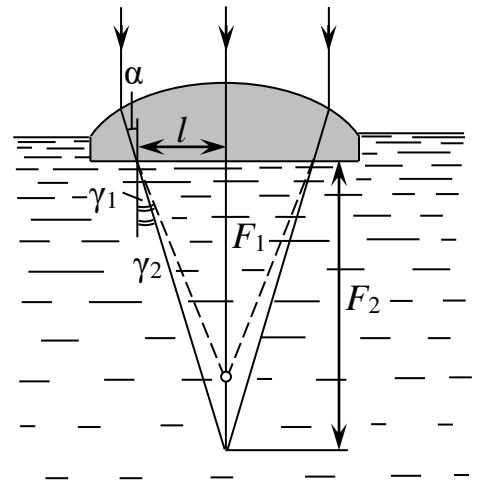
$-\frac{1}{F} = \left( \frac{n_{\text{ск}}}{n} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ . Отже,

$$n = \frac{(1/R_1) + (1/R_2) + (1/a) + (1/b)}{(1/R_1) + (1/R_2) - (1/F)} \approx 1,66.$$

**2.182.** Дві збиральні лінзи однакової форми виготовлені з різних сортів скла. Показник заломлення скла першої лінзи  $n_1 = 1,5$ , а другої  $n_2 = 1,7$ . Визначити відношення фокусних відстаней лінз у повітрі ( $n \approx 1$ ) і у воді ( $n_{\text{в}} = \frac{4}{3}$ ).

*Відповідь:* У повітрі  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} = 1,4$ . У воді  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{n_2 - n_{\text{в}}}{n_1 - n_{\text{в}}} = 2,2$ .

**2.183.** Тонку плоско-опуклу лінзу з фокусною відстанню  $F_1 = 10$  см трохи занурено плоскою стороною у воду, так що сферична поверхня лінзи знаходиться у повітрі. Зверху на лінзу прямовисно падають паралельні промені світла. На якій відстані від нижньої поверхні лінзи сфокусовуються світлові промені? Показник заломлення води  $n = 1,33$ . Діаметр лінзи набагато менший від її фокусної відстані.



*Рис. 2.51*

*Відповідь:* Якби промінь виходив з лінзи у повітря, то він заломився б під кутом  $\gamma_1$  і вийшов з лінзи на відстані  $l$  від її оптичної осі (рис. 2.51). Для такого променя

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_1} = \frac{1}{n_{\text{ск}}}, \quad (1)$$

$$\text{tg } \gamma_1 = \frac{l}{F_1}. \quad (2)$$

Якщо промінь входить у воду, то

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_2} = \frac{n}{n_{\text{ск}}}, \quad (3)$$

$$\text{tg } \gamma_2 = \frac{l}{F_2}. \quad (4)$$

Розділивши (3) на (1) знайдемо:  $\sin \gamma_1 / \sin \gamma_2 = \gamma_2 = n$ . Враховуючи далі (2) і (4), маємо:  $F_2 = nF_1 = 13,3$  см.

## 2.5. Контрольні запитання і завдання до теми «Лінзи»

1. Яка лінза називається збиральною, а яка – розсіювальною? Навести приклади.
2. Що таке головна оптична вісь, побічна оптична вісь, головний фокус, побічний фокус, фокальна площина лінзи?
3. Чи всі лінзи обмежені сферичними поверхнями?
4. За якої умови фокусні відстані справа і зліва від лінзи однакові?
5. Що таке оптична сила лінзи? В чому вона вимірюється і від чого залежить?
6. Які промені використовують для графічної побудови зображення предмета за допомогою лінзи?
7. Чим відрізняється дійсне зображення предмета від уявного?
8. Ввести і пояснити правила знаків.
9. Побудувати зображення, коли предмет перебуває між фокусом і подвійним фокусом лінзи; за подвійним фокусом; між лінзою та фокусом: *a)* для збиральної лінзи; *б)* для розсіювальної лінзи. Зробити висновки про відповідні положення зображення, їхній характер і величину.
10. Яке збільшення лінзи, якщо предмет знаходиться на подвійній фокусній відстані?
11. Що таке лінійне, позадвожне і кутове збільшення лінзи? Встановити взаємозв'язок між ними.
12. Чому рослини влітку краще обливати водою тільки вранці або ввечері?
13. Яка лінза називається тонкою? Записати і пояснити формулу тонкої лінзи.
14. Що таке лупа? Яке її практичне призначення?
15. Чи правдоподібна легенда про те, що Архімед спалив римський флот, сфокусувавши сонячні промені сферичним дзеркалом?
16. Чи залежить фокусна відстань лінзи від навколишнього середовища?
17. При яких умовах одну й ту саму лінзу можна використовувати в одному середовищі як збиральну, а в другому – як розсіювальну?
18. Як, не вимірюючи фокусних відстаней збиральної і розсіювальної лінз, порівняти їх оптичні сили?

### 3. ДЗЕРКАЛА

#### 3.1. Основні теоретичні відомості

1. Формула сферичного дзеркала:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} = \frac{2}{R}, \quad (1)$$

де  $a$  і  $b$  – відповідно відстані предмета і зображення від полюса дзеркала;  $F$  – фокусна відстань дзеркала;  $R$  – радіус кривизни дзеркала.

2. Фокусна відстань сферичного дзеркала

$$F = \frac{R}{2}, \quad (2)$$

де  $R$  – радіус кривизни дзеркала.

3. Оптична сила сферичного дзеркала

$$D = \frac{1}{F}. \quad (3)$$

4. Поперечне збільшення в дзеркалах:

$$\Gamma = \frac{H}{h}, \quad (4)$$

де  $H$  і  $h$  – відповідно висота зображення і висота предмета.

### 3.2. Методичні рекомендації

*Сферичне дзеркало* є відполірованою поверхнею сферичного сегмента. Сферичні дзеркала поділяють на вгнуті та опуклі. Центр сферичної поверхні називають *оптичним центром дзеркала*, а вершину сегмента – *полюсом дзеркала*. Пряму, проведену через центр сферичної поверхні і полюс дзеркала, називають *головною оптичною віссю дзеркала*. Будь-яку іншу пряму, що проходить через оптичний центр дзеркала, називають *побічною оптичною віссю*.

Промінь, що йде паралельно головній оптичній осі дзеркала, після відбивання перетинає її у фокусі  $F$  дзеркала, що лежить на відстані (фокусній відстані)  $F = \frac{R}{2}$ , де  $R$  – радіус сферичної поверхні. Фокус опуклого дзеркала (головну оптичну вісь перетинає не сам промінь, а його продовження) називають *уявним*. Площина, яка перпендикулярна до головної оптичної осі і проходить через фокус, називається *фокальною площиною*. Між відстанню від дзеркала до предмета  $a$ , відстанню від дзеркала до зображення  $b$  і фокусною відстанню існує співвідношення, яке називають *формулою дзеркала*:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

*Правило знаків*: якщо фокус дзеркала і зображення предмета уявні, то у формулі дзеркала перед  $F$  і  $b$  ставлять знак « $\leftarrow$ ».

Зображення в опуклому дзеркалі завжди уявні.

Відношення розмірів зображення  $H$  до розмірів предмета  $h$  називають *лінійним збільшенням дзеркала*:

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{b}{a}.$$

### 3.3. Приклади розв'язування задач

**Приклад 3.1.** Два плоских дзеркала утворюють двогранний кут  $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ ,

де  $n$  – ціле число (рис. 3.1). Точкове джерело світла  $S$  знаходиться між дзеркалами на однакових відстанях від них. Скільки зображень джерела одержується в дзеркалах?

*Розв'язання.* Врахуємо, що уявне зображення джерела світла, яке дає одне із дзеркал, можна вважати предметом для другого дзеркала і т.д. Оскільки трикутники  $SOA$ ,  $SOB$ ,  $BOS_1$ ,  $AOS_2$  рівні, рівними будуть і трикутники  $SOS_1$ ,  $SOS_2$ ,  $S_1OS_3$ ,  $S_2OS_4$  і т. д. Отже, джерело світла і всі його зображення будуть лежати на колі з центром у точці  $O$ . Точка  $S$  і всі її зображення  $S_1, S_2, S_3, \dots$  розіб'ють все коло на  $n$  однакових частин, тобто кожному центральному куту  $\varphi$  буде відповідати зображення джерела світла, крім одного з них, у якому знаходиться джерело. Тому кількість ображень буде

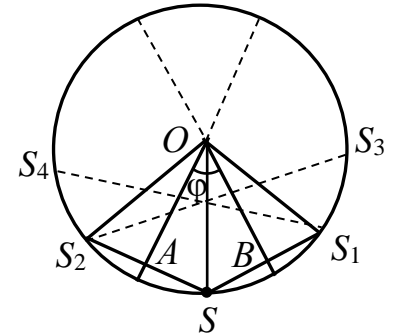


Рис. 3.1

$$k = \frac{360^\circ}{\varphi} - 1. \quad (1)$$

Відповідь:  $k = \frac{360^\circ}{\varphi} - 1.$

**Приклад 3.2.** Сонячний промінь, який проходить через отвір у віконниці вікна, утворює з поверхнею стола кут  $\delta = 48^\circ$ . Як потрібно поставити плоске дзеркало, щоб змінити напрямок променя на горизонтальний?

*Розв'язання.* Якщо плоске дзеркало лежить на горизонтальній площині стола (рис. 3.2), то кут падіння променя  $\alpha = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$ . Кут відбивання  $\beta$

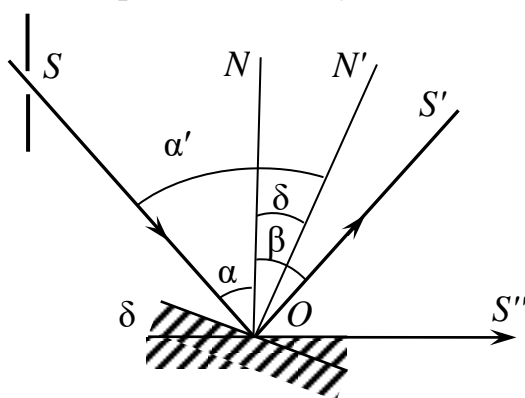


Рис. 3.2

для цього випадку також дорівнює  $42^\circ$ . Кут між падаючим і відбитим променями  $\alpha + \beta = 2\alpha$ . Якщо плоске дзеркало повернути на такий кут  $\delta$ , щоб відбитий промінь  $S''$  мав горизонтальний напрямок, то

$$\angle SOS'' = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ. \quad (1)$$

Але  $\angle SOS'' = 2\alpha'$ . Звідси випливає, що

$$\alpha' = \frac{\angle SOS''}{2} = 66^\circ.$$

Кут повороту  $NON'$  перпендикуляра до дзеркала, а отже, і кут повороту дзеркала  $\delta$  складає

$$\angle NON' = \delta = \alpha' - \alpha = 24^\circ. \quad (2)$$

Відповідь:  $\delta = 24^\circ$ .

**Приклад 3.3.** На плоске дзеркало падає промінь світла. Дзеркало повертають на  $5^\circ$  навколо осі, яка знаходиться у площині дзеркала,

перпендикулярно до променя. На який кут  $\delta$  при цьому повернеться відбитий промінь? На яку відстань  $x$  переміститься світловий зайчик на екрані, який розміщено перпендикулярно до відбитого променя на відстані  $l = 10$  м від точки падіння променя на дзеркало?

*Розв'язання.* Нехай  $\alpha$  – кут падіння променя на дзеркало до повороту останнього (рис. 3.3). Промінь світла відіб'ється від дзеркала під кутом  $\beta = \alpha$  і на екрані буде видно сонячного зайчика. Кут між падаючим і відбитим променями  $\theta = \alpha + \beta = 2\alpha$ .

Повернемо дзеркало  $Z$  навколо осі, яка лежить у площині дзеркала і яка проходить через точку  $O$ , на кут  $\delta$  (положення  $Z_1$ ). При цьому перпендикуляр  $\vec{n}$  до дзеркала  $Z$  повернеться на кут  $\delta$  і займе положення  $\vec{n}_1$ . Внаслідок цього кут падіння променя на дзеркало зменшиться на  $\delta$ , тобто  $\alpha' = \alpha - \delta$ . Згідно закону відбивання світла, кут між відбитим променем 3 і перпендикуляром  $\vec{n}_1$  (кут відбивання)  $\beta' = \alpha' = \alpha - \delta$ . Кут між променями 1 і 3 буде

$$\gamma = \alpha' + \beta' = 2\alpha' = 2(\alpha - \delta). \quad (1)$$

Відбитий промінь при переході з положення 2 в положення 3 повернеться на кут

$$\Delta = \theta - \gamma = 2\alpha - 2(\alpha - \delta) = 2\delta. \quad (2)$$

Отже, при повороті плоского дзеркала на кут  $\delta$  відбитий промінь повертається на кут  $\Delta = 2\delta$ . За умовою задачі,  $\delta = 5^\circ$ , тому  $\Delta = 10^\circ$ .

Зміщення  $x$  світлового зайчика при повороті дзеркала на кут  $\delta$  дорівнює  $MN$ . Із прямокутного трикутника  $OMN$  випливає, що  $MN = OM \cdot \operatorname{tg} \Delta = 1,8$  м.

*Відповідь:*  $MN = 1,8$  м.

**Приклад 3.4.** Довести, що джерело  $S$  і два його зображення, які отримані за допомогою дзеркал, розміщених під кутом  $\alpha$  одне до одного, лежать на колі. Вказати положення центра цього кола.

*Розв'язання.* Побудуємо уявне зображення джерела  $S$ , яке можна отримати за допомогою плоского дзеркала  $Z_1$ . Для цього з  $S$  опустимо перпендикуляр на площину, в якій лежить дзеркало  $Z_1$  (рис. 3.4). Він перетинає площину в точці  $O'$ .

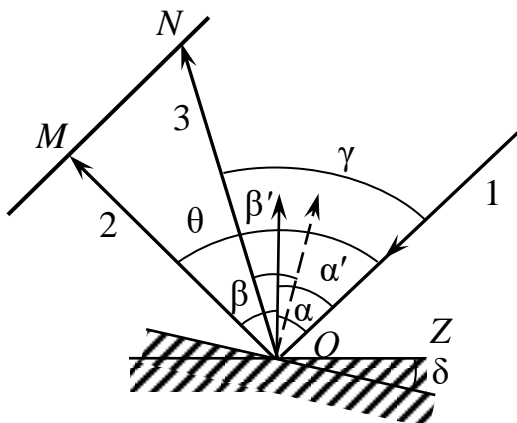


Рис. 3.3

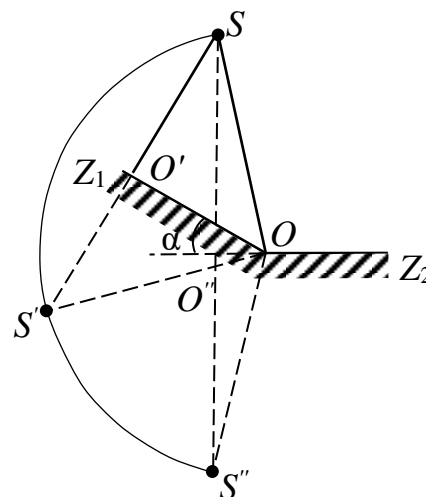


Рис. 3.4

На продовженні перпендикуляра  $SO'$  відкладемо відрізок  $O'S' = SO'$ . Точка  $S'$  є шуканим уявним зображенням джерела  $S$ .

Аналогічно знайдемо уявне зображення  $S''$ , отримане за допомогою дзеркала  $Z_2$ .

Розглянемо трикутники  $SO'O$  і  $S'O'O$ . Оскільки в них по два рівних катети ( $SO' = S'O'$  за побудовою, а катет  $OO'$  – загальний), то вони рівні. Отже,  $OS = OS'$ . Аналогічно доводиться рівність трикутників  $SO''O$  і  $S''O''O$ , звідки  $SO = S''O$ . Таким чином, якщо радіусом  $OS$  провести коло, то джерело  $S$  і його уявні зображення  $S'$  і  $S''$ , отримані за допомогою дзеркал  $Z_1$  і  $Z_2$  відповідно, будуть міститись на колі, центр якого  $O$  лежить на прямій перетину площин, в яких знаходяться дзеркала  $Z_1$  і  $Z_2$ .

**Приклад 3.5.** Перед плоским дзеркалом поставлена лампа. На скільки зміниться відстань між лампою і її уявним зображенням, якщо дзеркало відсунути від лампи на  $\Delta l = 0,2$  м?

*Розв'язання.* Відстань від лампи до її уявного зображення, отриманого за допомогою плоского дзеркала, дорівнює  $2l$  (рис. 3.5, а). Якщо дзеркало  $Z$  відсунути від лампи на  $\Delta l = 0,2$  м, то відстань між дзеркалом  $Z$  і лампою  $S$  буде  $l + \Delta l$ , а між  $S$  і  $S'$  –  $2(l + \Delta l)$  (рис. 3.5, б). Отже, якщо дзеркало відсунути від лампи на  $\Delta l$ , то відстань між лампою і її уявним зображенням збільшиться на

$$2(l + \Delta l) - 2l = 2\Delta l = 0,4 \text{ м.} \quad (1)$$

*Відповідь:* 0,4 м.

**Приклад 3.6.** Перед дзеркалом встромлені шпильки  $A$  і  $B$  (рис. 3.6). Як повинен розмістити око спостерігач, щоб уявні зображення шпильок накладалися одне на одне?

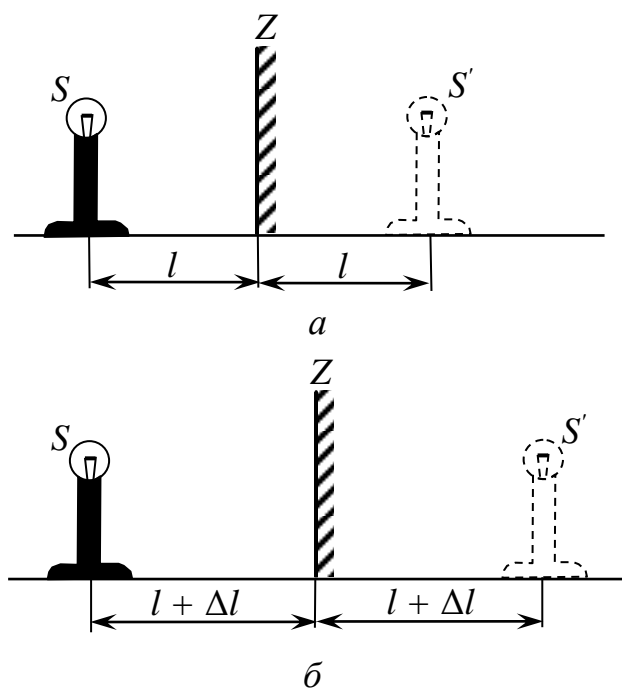


Рис. 3.5

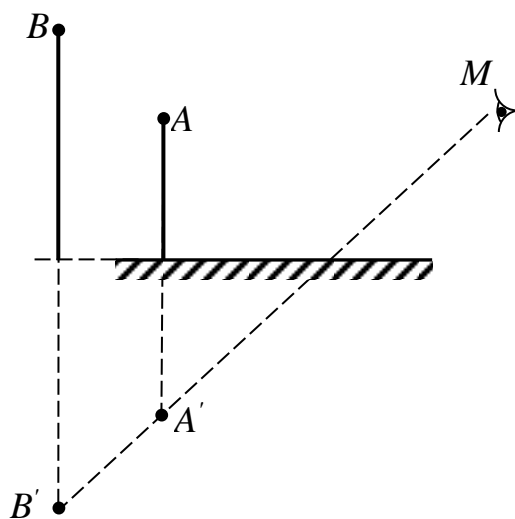


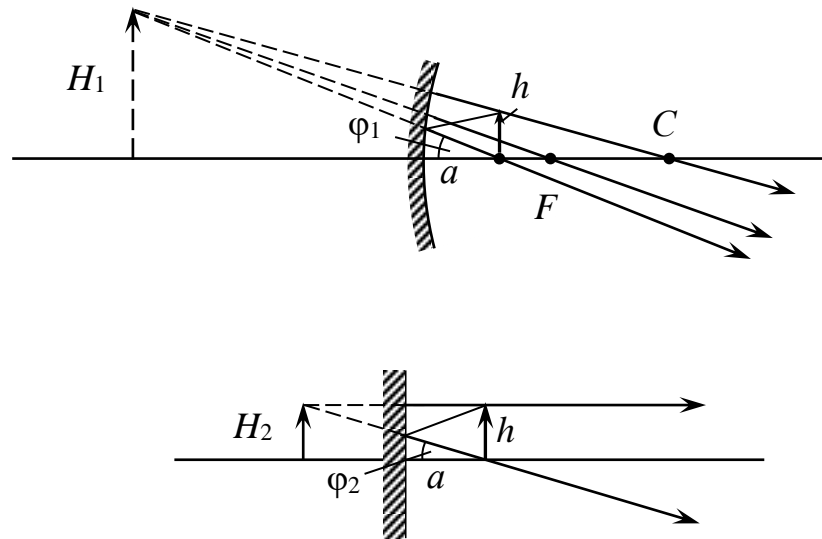
Рис. 3.6

*Розв'язання.* Уявні зображення  $A'$  і  $B'$  (див. рис. 3.6) для спостерігача

накладаються тоді, коли його око розташоване на прямій, яка проходить через точки  $A'$  і  $B'$  цих зображень, тобто, наприклад, у положенні  $M$ .

**Приклад 3.7.** Спостерігач бачить своє зображення у сферичному дзеркалі, що знаходиться від нього на відстані  $a = 0,2$  м. Це зображення у  $k = 1,5$  рази більше від зображення, яке утворюється в плоскому дзеркалі, розміщеному на такій самій відстані. Визначити радіус кривизни  $R$  сферичного дзеркала.

*Розв'язання.* Уявне зображення в сферичному дзеркалі лежить на відстані  $r_1 = \frac{R-a}{R-2a} 2a$  від людини і має величину  $H_1 = \frac{R}{R-2a} h$ , де  $h$  – величина розглядуваної деталі (рис. 3.7).



**Рис. 3.7**

У плоскому дзеркалі ( $R \rightarrow \infty$ )  $r_2 = 2a$  і  $H_2 = h$ . Зображення в сферичному дзеркалі людина спостерігає під кутом  $\varphi_1$  (причому  $\text{tg } \varphi_1 = \frac{H_1}{r_1}$ ), у плоскому –

під кутом  $\varphi_2$  (причому  $\text{tg } \varphi_2 = \frac{H_2}{r_2}$ ). Кутове збільшення першого зображення

порівняно з другим  $\Gamma = \frac{\text{tg } \varphi_1}{\text{tg } \varphi_2}$ . Звідси

$$R = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} a = 0,6 \text{ м.}$$

*Відповідь:*  $R = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} a = 0,6 \text{ м}$

**Приклад 3.8.** Відстань світної точки від сферичного дзеркала  $a = 4,8$  см, відстань зображення цієї точки від фокуса дзеркала  $l = 20$  см. Точка лежить на головній оптичній осі дзеркала. Знайти фокусну відстань дзеркала.

*Розв'язання.* Визначення фокусної відстані зводиться до розв'язання систем рівнянь  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ ,  $|b - F| = l$ . У випадку, коли зображення точки

лежить ближче, ніж головний фокус дзеркала, потрібно брати  $b - F = -l$ , а коли зображення лежить далше, ніж фокус, то  $b - F = +l$ .

Перша система рівнянь дає:  $F_{1,2} = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - al}$ , звідки  $F_1 = 12$  см або

$F_2 = 8$  см. З другої системи рівнянь дістанемо:  $F_{3,4} = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + al}$ , тобто  $F_3 = 4$  см або  $F_4 = -24$  см. В останньому випадку дзеркало буде опуклим.

*Відповідь:*  $F_1 = 12$  см або  $F_2 = 8$  см;  $F_3 = 4$  см або  $F_4 = -24$  см.

**Приклад 3.9.** Оптична система представляє собою тонку плоскоопуклу скляну лінзу, опукла поверхня якої посріблена. Визначити головну фокусну відстань  $F$  такої системи, якщо радіус кривизни  $R = 60$  см сферичної поверхні лінзи.

*Розв'язання.* Нехай на лінзу падає параксіальний промінь  $KL$ , паралельний головній оптичній осі  $MN$  лінзи (рис. 3.8). Оскільки промінь  $KL$  перпендикулярний плоскій поверхні лінзи, то він проходить її без заломлення. На сферичну посріблену поверхню промінь падає в точці  $L$  під кутом  $\alpha_1$  і відбивається від неї під кутом  $\beta = \alpha_1$ . Відбитий промінь падає на границю плоскої поверхні лінзи під кутом  $2\alpha_1$  і за виходом із лінзи перетинає головну оптичну вісь в точці  $F$ , утворює з віссю кут  $\alpha_2$ . Довжина отриманого при цьому відрізка  $FP$  і дорівнює шуканій фокусній відстані розглядуваної оптичної системи.

Якщо врахувати, що в силу параксіальності променя  $KL$  кути  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  малі, а їх синуси і тангенси практично рівні самим кутам, вираженим в радіанах, то з рис. 3.8 випливає

$$F = \frac{h}{\alpha_2} = \frac{R\alpha_1}{\alpha_2} = R \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \quad (1)$$

Відношення кутів  $\alpha_1 / \alpha_2$ , що входить до формули (1) знайдемо, користуючись законом заломлення світла, який в нашому випадку

записується у вигляді  $\frac{2\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{n}$ , звідки

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{2n}. \quad (2)$$

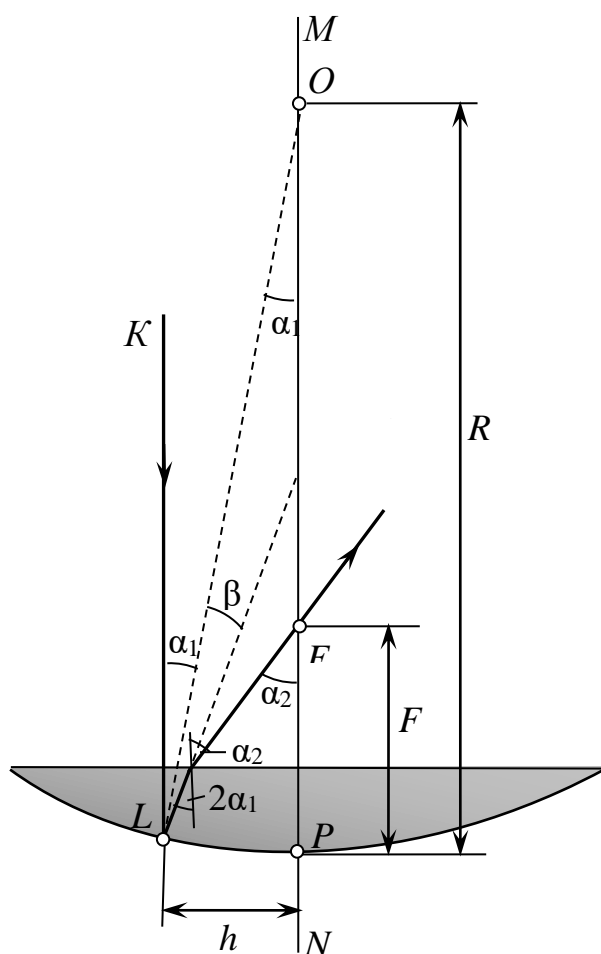


Рис. 3.8

Підставивши це співвідношення кутів у формулу (1), знайдемо

$$F = \frac{R}{2n}. \quad (3)$$

Такий самий результат можна отримати і з формальних міркувань. Оскільки промінь  $KL$  послідовно проходить лінзу, відбивається від вгнутого дзеркала і ще раз проходить лінзу, то дану оптичну систему можна розглядати як відцентровану систему, яка складається із складених впритул двох плоско випуклих лінз і сферичного дзеркала. Фокусна відстань оптичної системи може бути знайдено за формулою

$$F = \frac{1}{D},$$

де  $D$  – оптична сила системи.

Як відомо, оптична сила системі дорівнює алгебраїчній сумі оптичних сил окремих компонентів системи. В нашому випадку

$$D = (n-1)\frac{1}{R} + \frac{2}{R} + (n-1)\frac{1}{R} = \frac{2n}{R}, \text{ тобто}$$

$$F = \frac{1}{D} = \frac{R}{2n},$$

що співпадає з результатом, вираженим формулою (3).

Провівши обрахунки за формулою (3), отримаємо

$$F = 20 \text{ см.}$$

*Відповідь:*  $F = \frac{R}{2n} = 20 \text{ см.}$

**Приклад 3.10.** Світна точка розміщена на відстані  $L = 0,75$  м від угнутого дзеркала і на відстані  $l = 0,05$  м від головної оптичної осі дзеркала. Зображення світної точки лежить на відстані  $d = 0,2$  м від осі. Визначити радіус кривизни  $R$  дзеркала для випадків, коли зображення дійсне і коли воно уявне.

*Розв'язання.* Якби світна точка належала деякому предмету, він зображувався б із збільшенням  $\Gamma = \frac{F}{l} = \frac{b}{a}$ . У випадку дійсного зображення

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} = \frac{2}{R}. \text{ Отже,}$$

$$R = \frac{2dL}{d+l}. \quad (1)$$

Для уявного зображення  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F} = \frac{2}{R}$ . Тому

$$R = \frac{2dL}{d-l}. \quad (2)$$

Відповідь:  $R = \frac{2dL}{d+l} = 1,2 \text{ м}; R = \frac{2dL}{d-l} = 2 \text{ м}.$

**Приклад 3.11.** Два однакові вгнуті сферичні дзеркала розташовані так, що їх головні оптичні осі і головні фокуси співпадають (рис. 3.9). Світна точка знаходиться між дзеркалами на їх спільній геометричній осі. Визначити положення зображення точки, яке утворилось після відбивання світла спочатку від одного дзеркала, а потім – від другого. Побудувати хід променів.

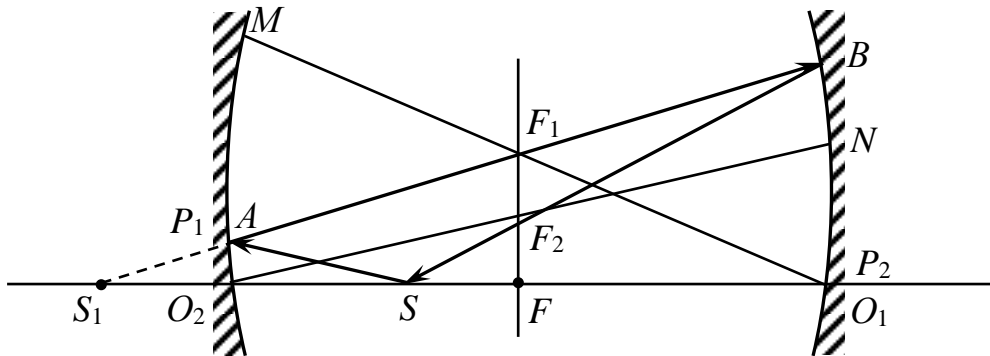


Рис. 3.9

*Розв'язання.* Зображення точки в першому дзеркалі буде джерелом для другого дзеркала. З умови випливає, що полюс першого дзеркала співпадає з оптичним центром другого дзеркала, і навпаки. Відстань між дзеркалами дорівнює  $2F$ . Нехай світна точка  $S$  знаходиться на відстані  $a_1$  від першого дзеркала між дзеркалом і фокусом. У цьому випадку зображення точки  $S_1$  буде уявним. За формулою сферичного дзеркала знайдемо відстань  $b_2$  цього зображення від дзеркала:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

Відстань цього зображення від другого дзеркала буде

$$a_2 = 2F + b_1. \quad (2)$$

За формулою дзеркала знайдемо зображення точки  $S_1$  у другому дзеркалі:

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F}. \quad (3)$$

З системи трьох рівнянь визначимо  $b_2$ :

$$b_2 = 2F - a_1, \quad (4)$$

тобто шукане зображення співпадає з положенням світної точки  $S$ .

Хід променів показано на рис. 3.9, де  $O_1M$  і  $O_2N$  – побічні осі;  $F_1$  і  $F_2$  – побічні фокуси.

Відповідь:  $b_2 = 2F - a_1$ ; хід променів див. рис. 3.9.

**Приклад 3.12.** Через круглий отвір в екрані, діаметр якого  $d = 4$  см, на опукле сферичне дзеркало, що знаходиться на відстані  $a = 16$  см від екрана, падає паралельний пучок світла (вздовж оптичної осі дзеркала перпендикулярно до екрана). Відбившись від дзеркала, пучок світла йде назад і, потрапляючи на той самий екран, утворює навколо отвору пляму діаметром  $D = 6$  см. Який радіус  $R$  кривизни дзеркала?

*Розв'язання.* Відбиті промені йдуть пучком, який ніби розходить з фокуса дзеркала, що знаходиться на відстані  $F = R/2$  від дзеркала. З подібності трикутників (рис. 3.10) випливає:

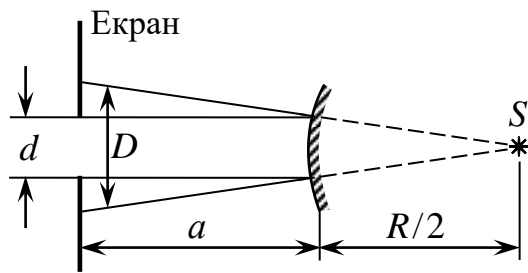


Рис. 3.10

$$\frac{D}{d} = \frac{a + (R/2)}{R/2} = \frac{2a + R}{R}, \quad (1)$$

звідси

$$R = \frac{2ad}{D - d}. \quad (2)$$

$$\text{Відповідь: } R = \frac{2ad}{D - d} = 64 \text{ см.}$$

**Приклад 3.13.** За певного розміщення зображення предмета у вгнутому дзеркалі в три рази менше від самого предмета. Якщо ж предмет пересунути на відстань  $l = 15$  см ближче до дзеркала, то зображення стане в 1,5 рази менше, ніж предмет. Знайти фокусну відстань  $F$  дзеркала.

*Розв'язання.* З подібних трикутників  $AOB$  і  $A'O'B'$  (рис. 3.11) маємо:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{a}{b_1} = 3, \quad a = 3b_1,$$

де  $a = AO$  – відстань від дзеркала до предмета;  $b_1 = AO'$  – відстань від дзеркала до зображення;  $F = OF$  – фокусна відстань дзеркала.

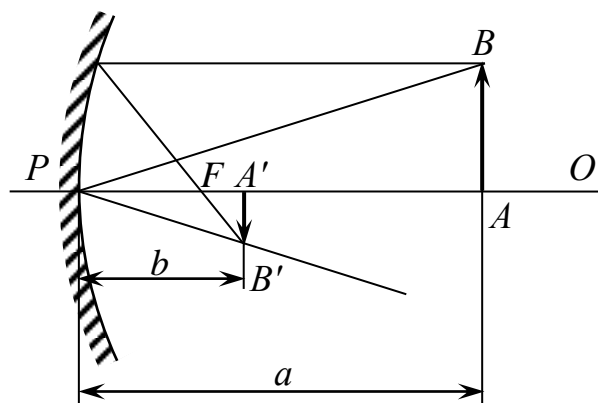


Рис. 3.11

Користуючись формулою для вгнутого дзеркала  $\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ , знаходимо

$$F = \frac{ab}{a + b}. \quad \text{Але } a = 3b_1, \text{ тому}$$

$$F = \frac{a}{4}; \quad a = 4F. \quad (1)$$

Пересунувши предмет на відстань  $l = 15$  см, як це сказано в умові задачі, дістанемо (як і в попередніх міркуваннях):

$$\frac{a-l}{b_2} = 1,5; \quad F = \frac{a-l}{2,5}. \quad (2)$$

Щоб знайти фокусну відстань, розв'язуємо рівняння (1) і (2).

*Відповідь:*  $F = 10$  см.

### 3.4. Задачі для самостійного розв'язування

#### 3.4.1. Плоскі дзеркала

**3.1.** Під яким кутом має падати промінь на плоске дзеркало, щоб кут між відбитим і падаючим променями становив  $70^\circ$ ?

*Відповідь:*  $35^\circ$ .

**3.2.** Горизонтальний промінь світла падає на вертикально розміщене дзеркало. Дзеркало повертається на кут  $\alpha$  біля вертикальної осі. На який кут повернеться відбитий промінь?

*Відповідь:* На  $2\alpha$ .

**3.3.** На скільки збільшується кут між відбитим і падаючим променями, якщо плоске дзеркало повернути на кут  $\varphi$  навколо осі, яка проходить через точку, де промінь відбивається, і перпендикулярна до площини, в якій розташовані промені?

*Відповідь:* На  $2\varphi$ .

**3.4.** Довести, що для отримання зображення людини у весь зріст в плоскому дзеркалі висота дзеркала повинна бути не менше половини зросту людини.

**3.5.** Якого найменшого розміру дзеркало потрібно взяти і як його поставити, що людина бачила себе в повний зріст?

*Відповідь:* Розміри дзеркала мають бути вдвоє меншими від зросту людини.

**3.6.** Якої найменшої висоти повинно бути плоске дзеркало, закріплено вертикально на стіні, щоб людина могла бачити своє відображення в ньому в повний зріст, не змінюючи положення голови? На якій відстані від підлоги повинен бути нижній край дзеркала?

*Відповідь:* Дорівнює половині зросту людини. Відстань нижнього краю дзеркала від полу повинно дорівнювати половині відстані від ока людини до підлоги.

**3.7.** В плоскому дзеркалі видно зображення свічки. Що відбудеться з ним, якщо між дзеркалом і свічкою поставити плоскопаралельну скляну пластинку?

*Відповідь:* Зображення свічки наблизиться до дзеркала.

**3.8.** Людина наближається до дзеркала з швидкістю  $1$  м/с. З якою швидкістю вона наближається до свого зображення?

*Відповідь:*  $2$  м/с.

**3.9.** На шляху променя, який падав перпендикулярно на екран, поставили невелике плоске дзеркало таким чином, щоб кут падіння променя на нього становить  $88^\circ$ . Як змінилось положення світлої плями на екрані, якщо відстань від дзеркала до екрана  $0,5$  м?

*Відповідь:* Зміститься на  $3,5$  см.

**3.10.** Тонку двоопуклу лінзу покладали на плоске дзеркало. Де потрібно розмістити точкове джерело світла, щоб його зображення, яке дає ця система, було дійсним і співпадало з самим джерелом?

*Відповідь:* У фокусі лінзи.

**3.11.** Як треба поставити плоске дзеркало, щоб показати учням у вертикальній площині картину магнітного поля, утворену на горизонтально

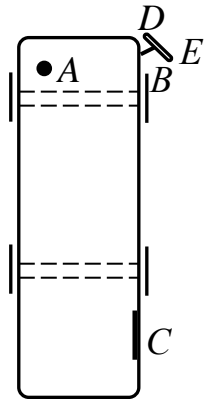
розташованому аркуші паперу?

*Відповідь:* Під кутом  $45^\circ$  до горизонту.

**3.12.** Накреслити два взаємно перпендикулярних дзеркала  $AO$  та  $OB$ , промінь  $CD$ , який падає на дзеркало  $OB$ , і напрями  $DE$  та  $EF$  дальшого ходу цього променя. Довести, що промінь  $EF$  паралельний променю  $CD$  при будь-якому куті падіння променя  $CD$ .

**3.13.** Як за допомогою двох плоских дзеркал можна вести спостереження з-за укриття? Якщо є можливість, виготовити такий прилад (дзеркальний перископ).

**3.14.** На рис. 3.12 зображено автобус у плані. У точці  $A$  перебуває шофер, а в точці  $C$  містяться двері для пасажирів. Через точку  $B$  проходить вертикальна вісь, навколо якої може обертатися плоске дзеркало  $DE$ . Визначити за допомогою побудови, як треба розташувати дзеркало  $DE$ , щоб шофер міг бачити пасажирів, які входять в автобус.



*Рис. 3.12*

**3.15.** Людина, яка стоїть на березі озера, бачить у дзеркальній поверхні води зображення Сонця. Як переміщатиметься це зображення, якщо людина відходитиме від озера? Вважати, що сонячні промені паралельні.

*Відповідь:* Наближається до берега.

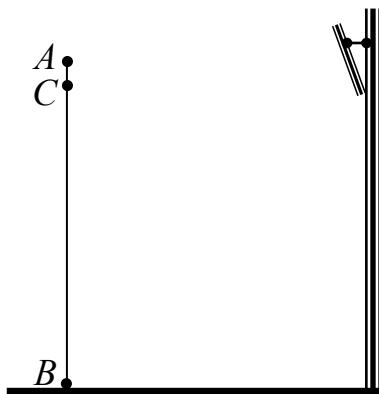
**3.16.** Використовуючи умову попередньої задачі, визначити, на скільки людина має нахилитися (знизити рівень очей), щоб зображення Сонця у воді наблизилося до берега на 80 см, якщо висота Сонця над горизонтом становить  $25^\circ$ .

*Відповідь:* На 37 см.

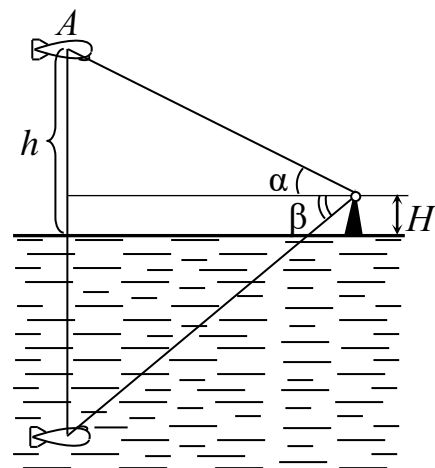
**3.17.** Людина дивиться в дзеркало, що висить вертикально. Чи змінюватимуться розміри частини тіла людини, яку видно в дзеркалі, в міру віддалення людини від дзеркала? Відповідь пояснити за допомогою побудови і перевірити на досліді.

*Відповідь:* Не буде.

**3.18.** Людина дивиться в дзеркало, що висить на стіні з невеликим нахилом (рис. 3.13). Побудувати зображення людини в дзеркалі. Яку частину



*Рис. 3.13*



*Рис. 3.14*

свого тіла бачитиме людина? Під час побудови можна зобразити людину у вигляді відрізка  $AB$ , розташувавши око в точці  $C$ .

**3.19.** На якій висоті  $h$  перебуває аеростат  $A$ , якщо з башти заввишки  $H$  його видно під кутом  $\alpha$  над горизонтом, а зображення аеростата в озері видно під кутом  $\beta$  під горизонтом (рис. 3.14).

$$\text{Відповідь: } h = H \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

**3.20.** Плоске дзеркало може обертатися навколо горизонтальної осі  $O$ . Промінь світла падає на дзеркало під деяким кутом (рис. 3.15). На який кут повернеться відбитий промінь, якщо дзеркало повернути на кут  $\beta$ ?

*Відповідь:*  $2\beta$ .

**3.21.** Висота Сонця над горизонтом  $40^\circ$ . Під яким кутом до горизонту потрібно поставити плоске дзеркало, щоб освітити сонячними променями дно вертикального колодязя?

*Відповідь:*  $65^\circ$ .

**3.22.** Два дзеркала утворюють двогранний кут  $\alpha$ . На одне із дзеркал падає промінь світла в площині, яка перпендикулярна до ребра кута. На який кут повернеться промінь після відбивання від двох дзеркал?

*Відповідь:*  $2\alpha$ , не залежить від кута падіння першого променя.

**3.23.** На якій висоті  $h$  перебуває аеростат, якщо з вежі заввишки  $H$  його видно під кутом  $\alpha$  над горизонтом, а зображення аеростата в озері видно під кутом  $\beta$  до горизонту?

$$\text{Відповідь: } h = H \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

**3.24.** Плоске дзеркало  $MN$  і деякий предмет  $AB$  розміщено так, як показано на рис. 3.16. Визначити побудовою область простору, з якої спостерігач буде бачити зображення предмета повністю.

**3.25.** Круглий басейн радіуса 5 м заповнений водою. Над центром басейну на висоті 3 м від поверхні води висить лампа. На яку відстань від басейну може відійти людина зростом 1,8 м, щоб вона могла ще бачити зображення лампи у воді?

*Відповідь:* 3 м.

**3.26.** Паралельний пучок променів падає під деяким кутом на горизонтально розташоване плоске дзеркало й відбивається на вертикальний екран. На дзеркалі лежить непрозора куля. Знайти побудовою розміри тіні на екрані.

**3.27.** Людина йде у напрямі, перпендикулярному до площини дзеркала з швидкістю 1 м/с. З якою швидкістю вона наближається до свого зображення?

*Відповідь:* 2 м/с.

**3.28.** Точкове джерело світла і два його зображення, що даються двома плоскими дзеркалами, лежать у вершинах рівностороннього трикутника. Як

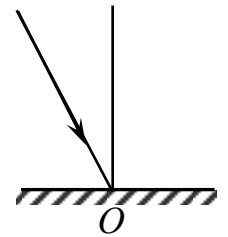


Рис. 3.15

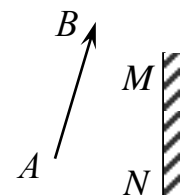


Рис. 3.16

розташовані дзеркала?

*Відповідь:* Кут між дзеркалами дорівнює  $120^\circ$ . Джерело світла лежить на бісектрисі двогранного кута, що утворюють дзеркала.

**3.29.** При виконанні маркувальних робіт і для контролю правильності установки конструктивних елементів каркаса в проективне положення використовують лазер (рис. 3.17). На яких законах оптики оснований цей метод? Який повинен бути кут падіння променів на плоскі дзеркала?

*Відповідь:* На: а) прямолінійному розповсюдженні світла в однорідному середовищі; б) незалежності дії світлових пучків; в) відбивання світла. Кут падіння променів на плоске дзеркало  $\alpha = 90^\circ / 2 = 45^\circ$ .

**3.30.** Плоске дзеркало обертається з постійною частотою  $\nu = 2,5 \text{ с}^{-1}$ . З якою швидкістю буде переміщуватися «зайчик» по сферичному екрану радіусом  $R = 5 \text{ м}$ , якщо дзеркало знаходиться в центрі кривизни екрана?

*Відповідь:*  $v = 4\pi R\nu = 157 \text{ м/с}$ .

**3.31.** Побудувати зображення трикутника  $ABC$  в плоскому дзеркалі  $MN$ .

**3.32.** Вузький пучок світла  $S$  падає на двогранний кут  $i = 60^\circ$ , утворений однаковими плоскими дзеркалами  $OM$  і  $ON$ , закріпленими на осі  $O$  (рис. 3.18).

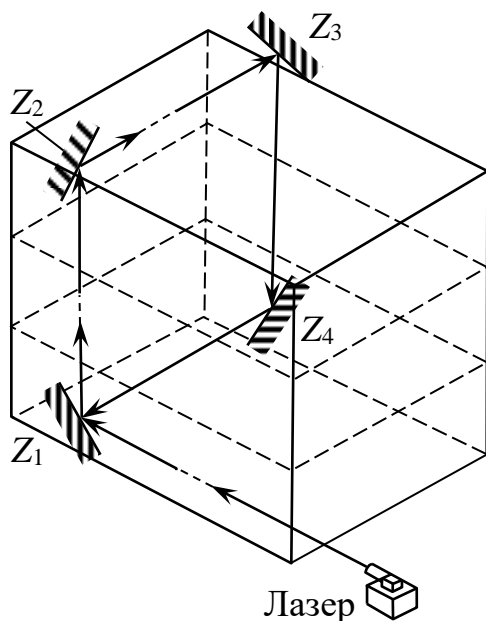


Рис. 3.17

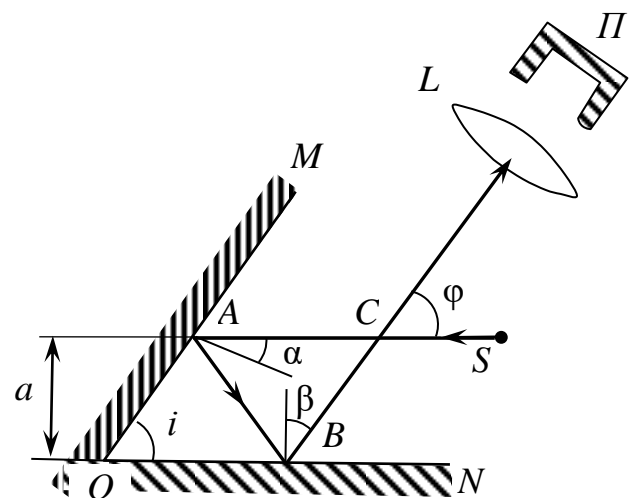


Рис. 3.18

Після відбивання від дзеркал світло фокусується лінзою і потрапляє в нерухомий приймач  $\Pi$ . Дзеркала обертають з постійною кутовою швидкістю. Яка частина світлової енергії пучка за час, який набагато більший періоду обертання, досягає приймача, якщо пучок проходить на відстані від осі, рівній половині довжини відрізка  $OM$ .

*Відповідь:*  $1/6$ .

**3.33.** Побудувати зображення світної точки в системі двох взаємно перпендикулярних дзеркал.

*Відповідь:* Можна побудувати три зображення.

**3.34.** В якому напрямку потрібно пустити промінь світла з точки  $M$  (рис.

3.19), яка знаходиться всередині дзеркального ящика, щоб він потрапив в точку  $N$ , відбившись по одному разу від усіх чотирьох стінок? Точки  $M$  і  $N$  лежать в одній площині, перпендикулярній до стінок ящика (в площині рисунка).

*Відповідь:* Розпочати з побудови зображення точки  $N$  за допомогою однієї із вертикальних стінок.

**3.35.** Визначити графічно, при яких положеннях ока спостерігач може бачити в дзеркалі кінцевих розмірів зображення відрізка прямої (рис. 3.20).

**3.36.** Людина і плоске дзеркало розміщені так, як зображено на рис. 3.21. Чи зможе вона побачити своє відображення в дзеркалі? Де потрібно розмістити око спостерігача, щоб побачити зображення цієї людини?

*Відповідь:* Людина не побачить свого зображення.

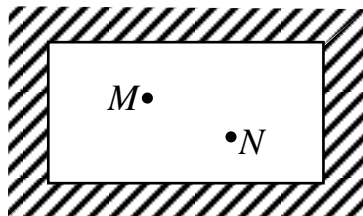


Рис. 3.19

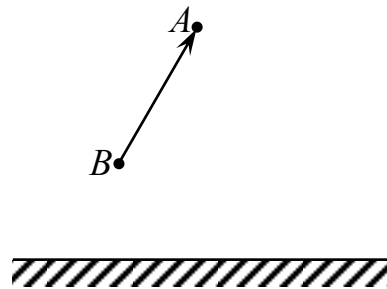


Рис. 3.20

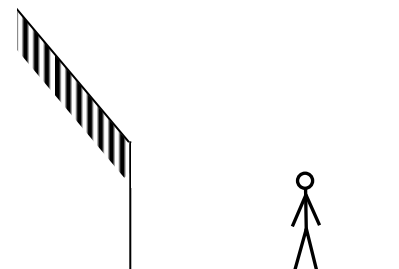


Рис. 3.21

**3.37.** На горизонтальному столі лежить куля. Під яким кутом до площини стола потрібно встановити плоске дзеркало, щоб при русі кулі до дзеркала спостережуване зображення кулі рухалось по вертикалі?

*Відповідь:*  $\alpha = 45^\circ$ .

**3.38.** Визначити кут між двома плоскими дзеркалами, якщо точкове джерело світла і два його зображення в цих дзеркалах лежать у вершинах рівностороннього трикутника. Побудувати креслення.

*Відповідь:*  $\alpha = 120^\circ$ .

**3.39.** Як розмістити два плоских дзеркала, щоб при будь-якому куті падіння падаючий промінь і променя, відбитий від обох дзеркал, були паралельні один одному?

*Відповідь:* Кут між дзеркалами повинен бути  $90^\circ$ .

**3.40.** Два плоских дзеркала розміщені під кутом один до одного і перед ними розміщене джерело світла. Де потрібно розмістити око спостерігача, щоб одночасно бачити обидва зображення джерела в плоских дзеркалах?

*Відповідь:* Зображення джерела світла спостерігач може побачити (рис. 3.22), якщо його око розміщене всередині смуги, обмеженої променями  $OA$  і  $OC$ .

**3.41.** Два плоских прямокутних дзеркала утворюють двогранний кут  $\varphi = 179^\circ$ . На відстані  $l = 10$  см від лінії дотику дзеркал і на однаковій відстані від кожного дзеркала знаходиться точкове джерело світла. Визначити відстань  $d$  між уявними зображеннями джерела в дзеркалах.

*Відповідь:* 3,5 мм.

**3.42.** У центрі плоского дзеркала, що стоїть під кутом  $45^\circ$  до горизонту, знаходиться верхній головний фокус горизонтально розміщеної лінзи

об'єктива епідіаскопа з оптичною силою  $D = 10$  дптр. На відстані  $l = 22$  мм нижче нижнього головного фокуса кладуть яскраво освітлену фотографію розміром  $a \times b = 4 \text{ см} \times 6 \text{ см}$  (рис. 3.23). Визначити розміри  $A \times B$  екрана з чітким зображенням фотографії і його відстань  $x$  від головної осі лінзи.

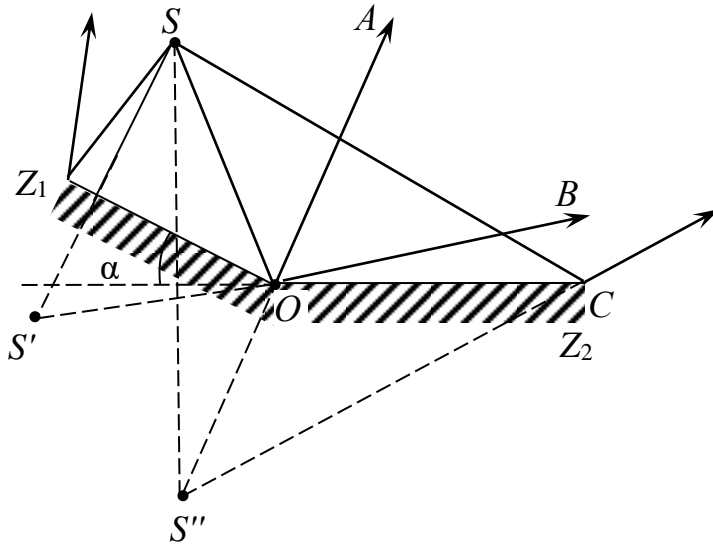


Рис. 3.22

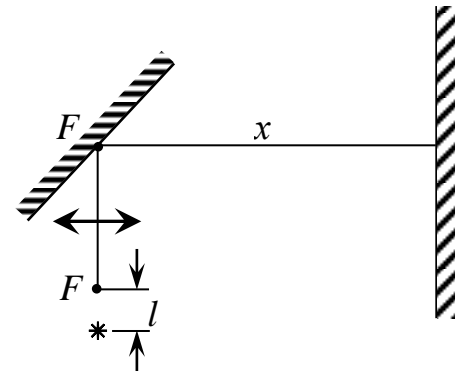


Рис. 3.23

Відповідь:  $x = \frac{1-\Gamma}{\Gamma D} = 0,25$  м; збільшення  $\Gamma = \frac{1}{lD} = 50$ ;  $A = \Gamma a = 2$  м;

$B = \Gamma b = 3$  м.

**3.43.** Яскрава лампа висить над центром кімнати на висоті  $h = 2,5$  м від підлоги. Висота кімнати  $H = 4$  м. На підлозі лежить кругле дзеркальце діаметром  $d = 5$  см. Якого розміру «зайчик» буде від нього на стелі, коли дзеркальце лежить на відстані від центра кімнати: а)  $x_1 = 0,5$  м; б)  $x_2 = 1,5$  м?

Відповідь: Діаметр «зайчика»  $D = \left(\frac{H}{h} + 1\right)d = 13$  см в обох випадках.

**3.44.** Двогранний кут між двома плоскими дзеркалами дорівнював  $180^\circ$ . Його можна змінювати, обертаючи одне із дзеркал навколо осі  $OO'$  (рис. 3.24) із сталою кутовою швидкістю  $\omega = 1,5$  градуса за секунду. Світна точка  $S$  знаходиться на перпендикулярі до нерухомого дзеркала, опущеному з точки  $A$  осі на відстані  $h = 10$  см від неї. Через який час  $t$  відстань між

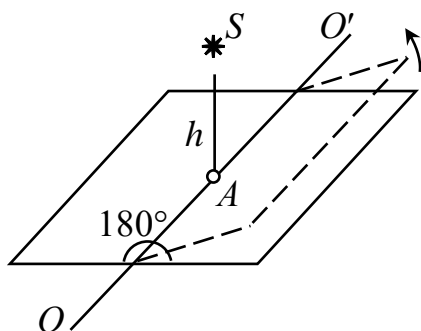


Рис. 3.24

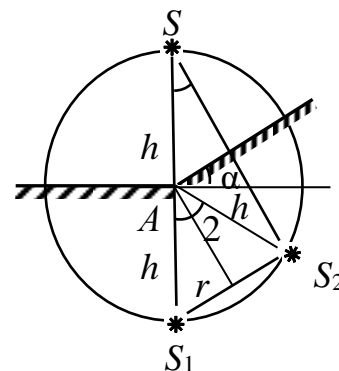


Рис. 3.25

зображеннями точки в дзеркалах дорівнюватиме  $r = 10$  см?

*Відповідь:* Точка  $S$  і її зображення  $S_1$  і  $S_2$  у дзеркалах лежить на колі радіуса  $h$  з центром у точці  $A$  (рис. 3.25). Очевидно, кут  $S_1AS_2$  у два рази більший, ніж кут  $\alpha = \omega t$ , на який повернулось дзеркало. Тому  $r = 2h \sin \alpha$  і

$$t = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{r}{2h} = 20 \text{ с.}$$

**3.45.** Два плоских дзеркала поставлено під кутом одне до одного і між ними вміщено точкове джерело світла. Зображення джерела в першому дзеркалі знаходиться на відстані  $a_1 = 6$  см, а в другому – на відстані  $a_2 = 8$  см від джерела. Відстань від одного зображення до другого  $b = 10$  см. Визначити кут  $\alpha$  між дзеркалами.

*Відповідь:*  $\cos \alpha = \frac{b^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} = 0$ ;  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

**3.46.** Два малі дзеркала розміщені на однаковій відстані одне від одного і від джерела світла. Який повинен бути кут  $\varphi$  між дзеркалами, якщо промінь після двох відбивань: а) напрямлений прямо до джерела; б) повертається назад до джерела по пройденому шляху (тобто зазнає ще одного відбивання)?

*Відповідь:* а) Промінь повертається до джерела, описавши паралельний трикутник (рис. 3.26), тому кути падіння променя на дзеркала  $\alpha = 30^\circ$ , кути ковзання  $\beta = 60^\circ$  і трикутник  $ABC$  правильний. Кут між дзеркалами  $\varphi = \beta = 60^\circ$ .

б) Щоб повернутись до джерела пройденим шляхом, промінь повинен упасти на друге дзеркало перпендикулярно до його поверхні (рис. 3.27). Тому трикутник  $ABC$  прямокутний, шуканий кут  $\varphi = 30^\circ$ .

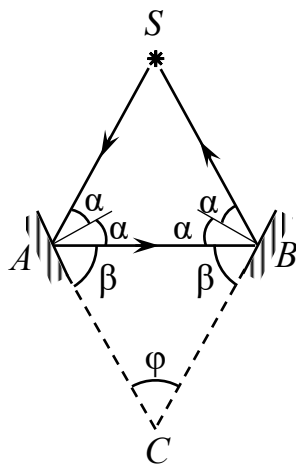


Рис. 3.26

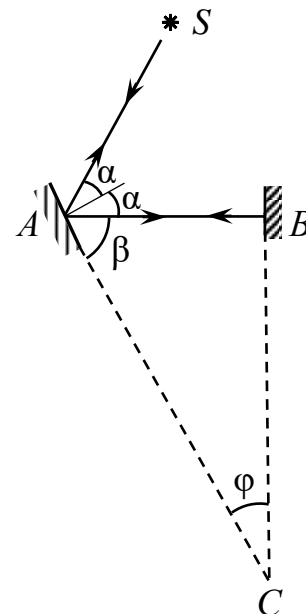


Рис. 3.27

**3.47.** Вузький промінь світла, проходячи крізь маленький отвір в екрані (перпендикулярно до нього), потрапляє на шестигранне дзеркало, яке обертається, вісь обертання якого паралельна екрану і проходить проти

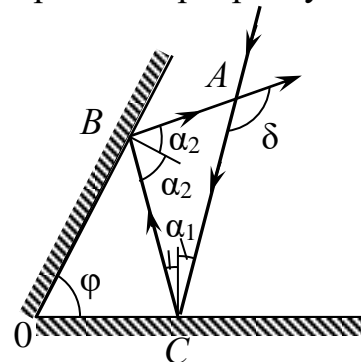
отвору. Якої довжини  $L$  буде смуга, накреслена на екрані відбитим від дзеркала променем, якщо відстань між дзеркалом і екраном  $l = 1$  м? Розмірами граней дзеркала порівняно з відстанню  $l$  можна знехтувати.

*Відповідь:*  $L = 2l \operatorname{tg} 60^\circ \approx 3,46$  м.

**3.48.** Два дзеркала утворюють двогранний кут  $\varphi < \pi$ . На одне з дзеркал падає промінь, який лежить у площині, перпендикулярній до ребра кута. Довести, що кут відхилення  $\delta$  цього променя від початкового напрямку після відбивання від обох дзеркал не залежить від кута падіння.

*Відповідь:* Нехай  $\alpha_1$  – кут падіння променя на перше дзеркало;  $\alpha_2$  – на друге (рис. 3.28). Очевидно, що  $\delta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$  (як зовнішній кут трикутника  $ABC$ ). Крім того, з трикутника  $OBC$  дістаємо:

$$\varphi + \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) + \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) = \pi.$$



*Рис. 3.28*

Звідси  $\delta = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\varphi$  і не залежить від кута падіння променя.

**3.49.** Світловий промінь відбивається послідовно від двох плоских дзеркал по одному разу від кожного. Дзеркала скріплені одне з одним і утворюють двогранний кут  $\varphi < \pi$ . На який кут  $\gamma$  від свого початкового напрямку відхилиться відбитий промінь, якщо система дзеркал повертається на кут  $\beta$  навколо осі, що лежить в площині обох дзеркал? Падаючий і відбитий промені лежать в площині, перпендикулярній до цієї осі.

*Відповідь:* Після двох відбивань від дзеркал промінь іде в напрямі, який утворює кут  $2\varphi$  з напрямом променя падаючого (див. задачу 980). Цей кут не залежить від положення дзеркал і тому не змінюється при їх обертанні. Відбитий промінь, не повертаючись, переміщується паралельно самому собі. Шуканий кут  $\gamma = 0$ .

**3.50.** Визначити показник заломлення  $n$  скипидару і швидкість поширення світла  $v$  у скипидарі, коли відомо, що куту падіння  $\alpha = 45^\circ$  відповідає кут заломлення  $\gamma = 45^\circ$ .

*Відповідь:*  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{c}{v}$ , тобто  $n \approx 1,4$ ;  $v = \frac{c}{n} \approx 2,14 \cdot 10^8$  м/с.

**3.51.** Висота Сонця над горизонтом  $\varphi = 20^\circ$ . За допомогою дзеркала на воду озера пущено «зайчика». Під яким кутом  $\vartheta$  до горизонту треба нахилити дзеркало, щоб промінь у воді йшов під кутом  $\alpha = 41^\circ$  до вертикалі? ( $\sin \alpha = 0,655$ ). Показник заломлення води  $n = 1,32$ .

*Відповідь:*  $\vartheta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} + \varphi + \arcsin(n \sin \alpha) \right] = \frac{1}{2} (90^\circ + 20^\circ + 60^\circ) = 85^\circ$ .

### 3.4.2. Сферичні дзеркала

**3.52.** За відомим положенням предмета  $S$ , його зображення  $S'$  і головної оптичної осі сферичного дзеркала визначити тип дзеркала, його положення,

положення оптичного центра і фокуса (рис. 3.29). Яким буде зображення: дійсним чи уявним?

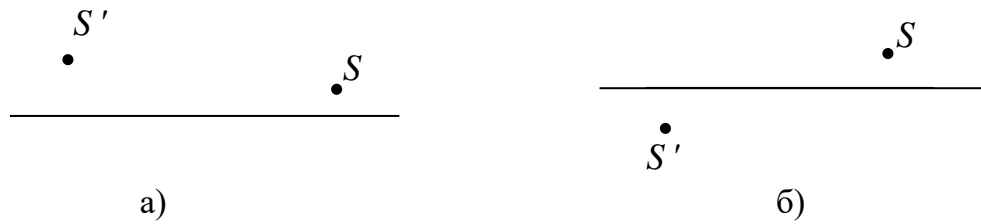


Рис. 3.29

**3.53.** На сферичне дзеркало падає промінь світла. Знайти побудовою хід променя після відбивання в двох випадках: а) від вгнутого дзеркала (рис. 3.30, а); б) від опуклого дзеркала (рис. 3.30, б). На рисунку:  $P$  – полюс

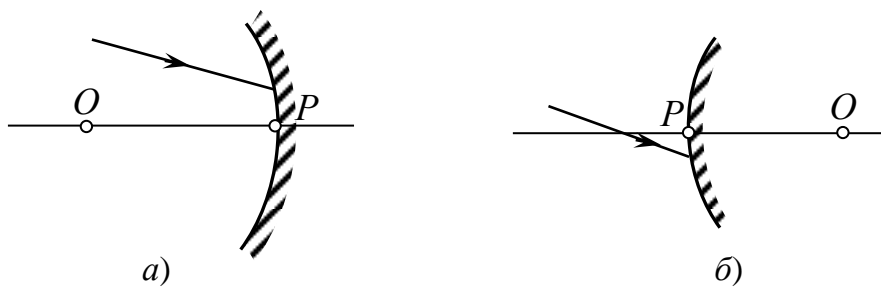


Рис. 3.30

дзеркала,  $O$  – оптичний центр.

**3.54.** На рис. 3.31, а, б вказано положення головної оптичної осі  $MN$  сферичного дзеркала і хід променя 1. Побудувати хід променя 2 після відбивання його від дзеркала.

**3.55.** Довести, що для сферичного дзеркала виконується співвідношення  $l_1 l_2 = F^2$ , де  $l_1$  – відстань точки від фокуса дзеркала;  $l_2$  – відстань зображення від цього ж фокуса;  $F$  – головна фокусна відстань дзеркала.

**3.56.** На рис. 3.32 показано положення предмета  $AB$  та його зображення  $A_1B_1$  у сферичному дзеркалі. Визначити графічно положення дзеркала і його фокуса.

**3.57.** Де буде знаходитися і якої величини буде зображення Сонця, отримане в сферичному рефлекторі, радіус кривизни якого дорівнює 16 м?

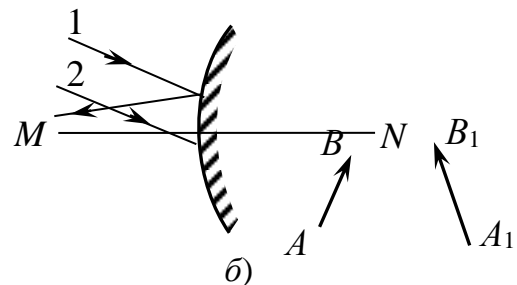
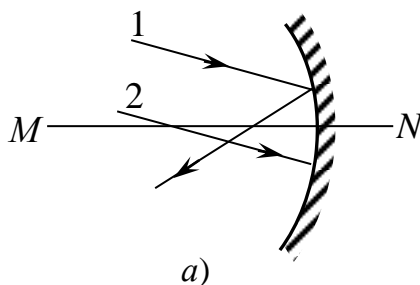


Рис. 3.31

Рис. 3.32

Відповідь:  $b = \frac{R}{2}$  – зображення буде знаходитися в фокусі дзеркала;

$H = 7,5$  см.

**3.58.** Якщо на сферичне дзеркало падає широкий пучок світла (ширина пучка визначається кутом  $\alpha$ , рис. 3.33), то промінь, який іде паралельно оптичній осі і падає на край дзеркала, після відбивання від нього перетне оптичну вісь вже не у фокусі, а на деякій відстані  $AF$  від фокуса. Відстань  $AF$  називається поздовжною сферичною аберрацією, відстань  $FH$  – поперечною сферичною аберрацією. Вивести формулу, яка пов’язує величини цих аберрацій з величиною  $\alpha$  і радіусом сферичного дзеркала.

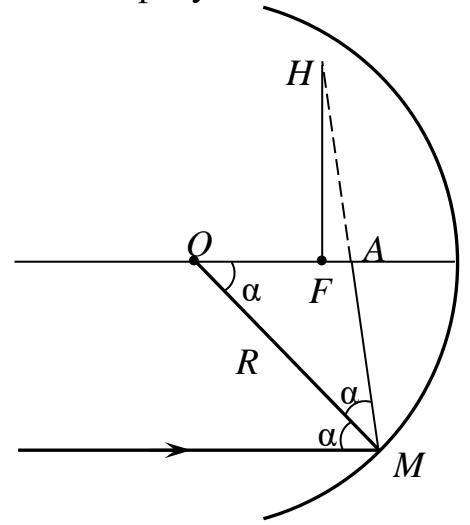


Рис. 3.33

*Відповідь:* Позначимо відповідно поздовжню аберрацію  $AF = x$  і поперечну аберрацію  $FH = y$ . Із рівнобедреного  $\triangle OAM$  (див. рис. 3.33) маємо  $OA = \frac{R}{2\cos\alpha}$ . Але  $x = AF = OA - OF = OA - \frac{R}{2}$ , тобто

$$x = \frac{R}{2} \left( \frac{1}{\cos\alpha} - 1 \right).$$

Якщо  $\alpha = 0$ , то  $\cos\alpha = 1$  і  $x = 0$ .

Оскільки,  $y = FH = x \operatorname{tg} \angle HAF$ , де  $\angle HAF = 2\alpha$  (як зовнішній кут  $\triangle AOM$ ), то  $y = \frac{R}{2} \left( \frac{1}{\cos\alpha} - 1 \right) \operatorname{tg} 2\alpha$ . Якщо  $\alpha = 0$ , то  $\cos\alpha = 1$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha = 0$  і  $y = 0$ .

**3.59.** За допомогою сферичного дзеркала отримано зображення предмета  $A$  (рис. 3.34). Побудовою визначити положення і фокус дзеркала; вгнуте воно чи опукле?

*Відповідь:* Дзеркало вгнуте.

**3.60.** Відомо розміщення предмета  $A$  і зображення  $A'$  відносно полюса  $P$  сферичного дзеркала (рис. 3.35). Знайти положення дзеркала і його фокус.



Рис. 3.34

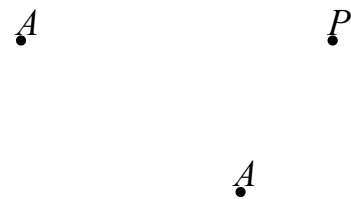


Рис. 3.35

**3.61.** Точкове джерело світла рівномірно рухається по колу радіусом 0,5 м. Лінійна швидкість його обертання 3 м/с. На відстані в 5 м від центра кола перпендикулярно осі обертання розміщено сферичне дзеркало радіусом кривизни 2 м. Знайти прискорення, з яким рухається зображення джерела в дзеркалі.

*Відповідь:* За формулою сферичного дзеркала  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}$  радіус  $r$  кола, по якому рухається джерело, і радіус  $r'$  кола, по якому рухається зображення,

пов'язані співвідношенням  $\frac{r}{r'} = \frac{a}{b}$ . Відповідно,  $r' = r \frac{b}{a} = \frac{rR}{2a - R}$ . Доцентрове прискорення  $a_n$ , з яким рухається зображення:

$$a_n = \omega^2 r' = \left(\frac{v}{r}\right)^2 \frac{rR}{2a - R} = \frac{v^2 R}{r(2a - R)} = 4,5 \text{ м/с}^2.$$

**3.62.** Посріблену сферу розрізано на дві частини площиною. На якій відстані  $x$  від центра сфери проходить ця площина, коли відомо, що менша частина являє собою сферичне дзеркало діаметром  $D = 0,64$  м з фокусною відстанню  $F = 0,65$  м?

*Відповідь:* Радіус кривизни сферичного дзеркала (радіус сфери)  $R = 2F$ . За теоремою Піфагора  $\left(\frac{D}{2}\right)^2 + x^2 = R^2$  (рис. 3.36). Звідси

$$x = \sqrt{4F^2 - \frac{D^2}{4}} = 1,26 \text{ м.}$$

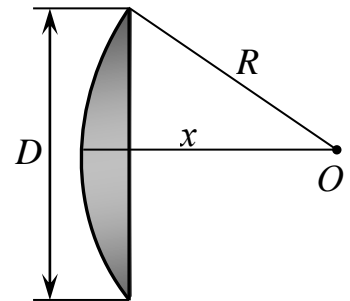


Рис. 3.36

**3.63.**  $SO$  – предмет;  $S'O'$  – його уявне зображення у сферичному дзеркалі;  $OO'$  – оптична вісь дзеркала (рис. 3.37). Знайти побудовою положення полюса дзеркала, його центра і фокуса.

*Відповідь:* Промінь, що йде по радіусу сферичного дзеркала, відбивається назад у тому самому напрямі. Тому положення оптичного центра дзеркала  $C$  знайдемо, сполучивши точки  $S$  і  $S'$  і продовживши лінії до перетину з оптичною віссю (рис. 3.38). Промінь, відбитий від дзеркала в його полюсі  $P$ , утворює з оптичною віссю  $OO'$  такий самий кут, як і промінь падаючий. Відклавши відрізок  $OQ$ , що дорівнює величині предмета, з другого боку оптичної осі і сполучивши точки  $Q$  і  $S'$ , знайдемо полюс  $P$  дзеркала.

Положення фокуса  $F$  визначимо, провівши  $SM \parallel OO'$  і сполучивши  $S'$  і  $M$ .



Рис. 3.37

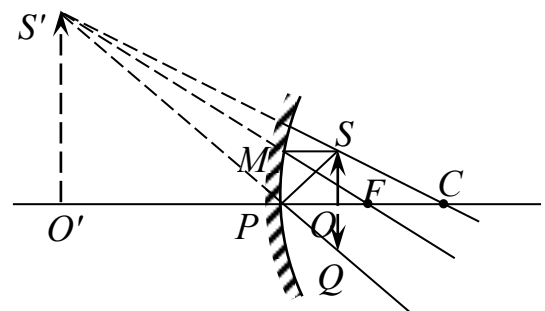


Рис. 3.38

**3.64.** Дано головну оптичну вісь  $OO_1$  сферичного дзеркала, світну точку  $S$  та її зображення  $S'$ . Знайти графічною побудовою центр кривизни і вершину дзеркала. Яке було дзеркало вгнуте чи опукле? Яке зображення вийшло при цьому: дійсне чи уявне? Розв'язати задачу для випадків, показаних на рис. 3.39.

а) Точки  $S$  і  $S'$  лежать по обидва боки осі  $OO_1$  на різних відстанях від осі і на деякій відстані одна від одної.

б) Точки  $S$  і  $S'$  лежать по один бік осі  $OO_1$  на різних відстанях від неї і на деякій відстані одна від одної (розглянути можливі варіанти).

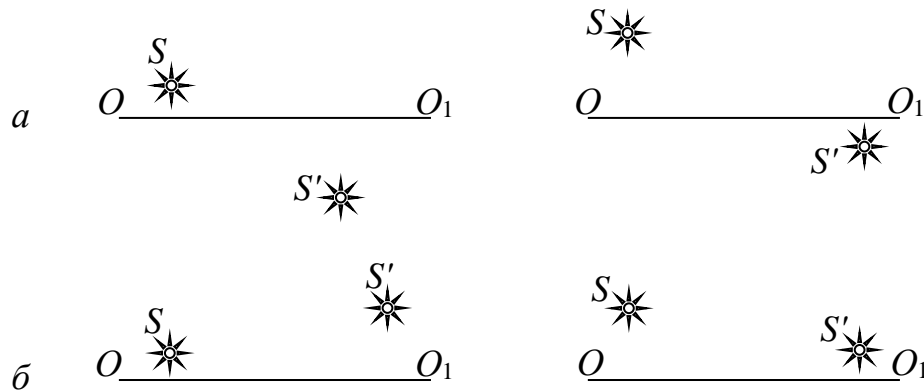


Рис. 3.39

*Відповідь:* Положення центра кривизни дзеркала знайдемо (рис. 3.40), скориставшись тим, що промінь, який йде по радіусу кривизни дзеркала, відбивається також по радіусу. Тому проведемо через точки  $S$  і  $S'$  пряму до перетину з головною оптичною віссю  $AB$ ;  $C$  – центр кривизни.

Промінь, відбившись від дзеркала, в його вершині утворює з головною оптичною віссю такий самий кут, як і падаючий промінь. Сполучимо точку  $D$ , симетричну точці  $S'$  відносно осі  $AB$ , з точкою  $S$ . Точка  $O$  перетину цієї лінії або її продовження з оптичною віссю, очевидно, і є вершиною дзеркала. Вид дзеркала можна визначити за розміщенням точок  $C$ ,  $O$  і  $S$ .

У першому випадку дзеркало може бути лише вгнутим, бо опукле дає завжди пряме зображення предмета. Зображення дійсне.

У другому випадку дзеркало може бути опуклим (якщо точка знаходиться далі від осі, ніж точка  $S'$ ) і вгнутим (точка  $S$  ближче до оптичної осі, ніж точка  $S'$ ). Зображення в обох випадках уявне. Розміщення точок  $C$ ,  $O$  і  $S$  визначає вид дзеркала.

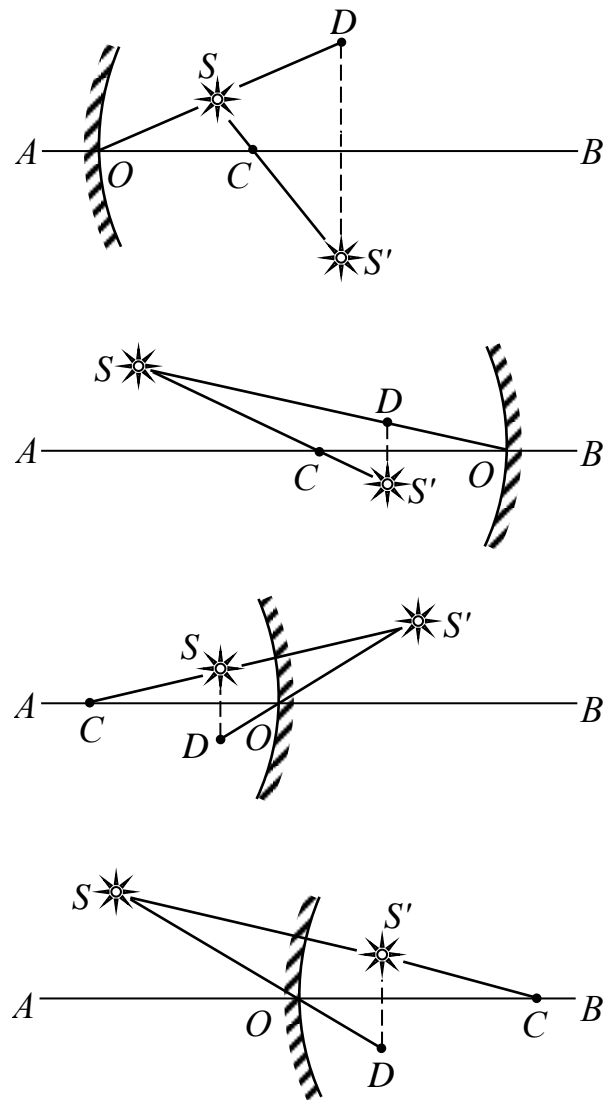


Рис. 3.40

**3.65.** Точкове джерело світла переміщується рівномірно від центра дзеркала до його вершини.

а) Як переміщується при цьому зображення джерела і як змінюється його швидкість?

б) У скільки разів середня швидкість переміщення зображення більша від швидкості переміщення предмета на ділянці від  $d_1 = 1,5F$  до  $d_2 = 1,1F$ ?

в) Біля якої точки при переміщенні джерела швидкість переміщення зображення найбільша?

*Відповідь:* а) З наближенням джерела від центра до фокуса дзеркала дійсне зображення з наростаючою швидкістю віддалятиметься від дзеркала. З наближенням джерела від фокуса до дзеркала уявне зображення із спадаючою швидкістю наближається до нього. Точка  $a = F$  – особлива точка. Для неї  $b = \pm \infty$ , тобто функція зазнає розриву.

$$\text{б) } \frac{v'}{v} = \frac{F^2}{(a_2 - F)(a_1 - F)} = 20.$$

в) Поблизу фокуса.

### 3.4.3. Угнуті дзеркала

**3.66.** Радіус кривизни вгнутого дзеркала  $R = 40$  см. Знайти місце об'єкта, при якому його зображення буде дійсним і збільшеним у два рази. Знайти, де має бути об'єкт, щоб його зображення було уявним і збільшеним у два рази. Побудувати зображення об'єкта в обох випадках.

*Відповідь:*  $d_1 = 30$  см;  $d_2 = 10$  см.

*Вказівка.* Для побудови використайте те, що відношення відстаней від об'єкта до дзеркала і від зображення до дзеркала дорівнює відношенню висоти об'єкта до висоти зображення.

**3.67.** Радіус кривизни вгнутого сферичного дзеркала 20 см. На відстані 30 см від дзеркала стоїть предмет висотою 1 см. Знайти положення і висоту зображення. Зробити креслення.

*Відповідь:*  $b = -15$  см,  $H = 5$  мм. Зображення дійсне, обернене і зменшене.

**3.68.** У вгнутому сферичному дзеркалі, радіус кривизни якого 40 см, хочуть отримати дійсне зображення в 0,5 натуральної величини. Де потрібно розмістити предмет і де опиниться зображення?

*Відповідь:*  $a = -0,6$  м;  $b = -0,3$  м.

**3.69.** Величина зображення предмета у вгнутому сферичному дзеркалі вдвоє більша, ніж величина самого предмета. Відстань між предметом і зображенням 15 см. Визначити: а) фокусну відстань; б) оптичну силу дзеркала.

*Відповідь:* а)  $F = -10$  см; б)  $D = -10$  дптр.

**3.70.** Перед угнутим сферичним дзеркалом на головній оптичній осі перпендикулярно до неї на відстані  $\frac{4}{3}F$  від вершини дзеркала розміщена запалена свічка. Зображення свічки у вгнутому дзеркалі потрапляє на

випукле дзеркало з фокусною відстанню  $F_1 = 2F$ . Відстань між дзеркалами дорівнює  $3F$  і їх осі співпадають. Зображення свічки в першому дзеркалі грає роль уявного предмета по відношенню до другого дзеркала і дає дійсне зображення, розміщене між обома дзеркалами. Побудувати це зображення і обчислити загальне лінійне збільшення системи.

*Відповідь:* Загальне лінійне збільшення системи дорівнює 6.

**3.71.** Угнуте сферичне дзеркало з діаметром отвору в 40 см має радіус кривизни 60 см. Знайти поздовжню і поперечну сферичну аберацію крайових променів, паралельних головній осі.

*Відповідь:*  $x = 1,8$  см;  $y = 1,5$  см.

**3.72.** Визначити фокусну відстань угнутого сферичного дзеркала, якщо воно дає дійсне зображення предмета, збільшене в 4 рази. Відстань між предметом і його зображенням 15 см.

*Відповідь:*  $F = 4$  см.

**3.73.** Радіус кривизни вгнутого дзеркала 40 см. Знайти положення предмета, при якому його зображення буде дійсним і збільшеним у 2 рази; уявним і збільшеним у 2 рази.

*Відповідь:*  $a = 30$  см;  $a' = 10$  см.

**3.74.** Предмет розміщений на відстані 15 см від вершини вгнутого дзеркала на його оптичній осі. Зображення отримали на відстані 30 см від дзеркала. Знайти, куди і на скільки зміститься зображення, якщо предмет приблизити до дзеркала на 1 см.

*Відповідь:* віддалиться від дзеркала на 5 см.

**3.75.** Угнуте сферичне дзеркало має фокусну відстань 20 см. На якій найбільшій відстані  $h$  від оптичної осі повинен знаходитися предмет, щоб поздовжня сферична аберація була не більшою 2 % фокусної відстані.

*Відповідь:*  $h = 8$  см.

**3.76.** На головній оптичній осі сферичного дзеркала радіусом 40 см знаходиться точкове джерело світла  $S$  на відстані 30 см від дзеркала. На якій відстані від угнутого дзеркала потрібно поставити плоске дзеркало, щоб промені, відбиті від вгнутого дзеркала, а потім і плоского дзеркала, пройшли через точку  $S$ .

*Відповідь:* 45 см.

**3.77.** Два однакових угнутих сферичних дзеркала поставлені один проти одного так, що їх головні фокуси співпадають. Точкове джерело світла знаходиться на загальній оптичній осі на відстані  $a$  від першого дзеркала. Де отримується зображення після відбивання променів від обох дзеркал?

*Відповідь:* Зображення, отримане після відбивання променів від обох дзеркал, співпадає з самим джерелом.

**3.78.** Людина дивиться у вгнуте сферичне дзеркало і бачить пряме зображення свого ока. Кутовий розмір цього зображення в 1,5 раза більший кутового розміру зображення, яке отрималося б у плоскому дзеркалі, розміщеному на такій же відстані рівній 20 см. Знайти радіус кривизни дзеркала.

*Відповідь:*  $R = \Gamma a(k - 1) = 15$  см, де  $\Gamma$  – кутове збільшення. Якщо  $\frac{R}{2} > a$ , то

зображення уявне.

**3.79.** Вгнуте сферичне дзеркало дає на екрані зображення предмета, збільшене у три рази. Відстань від предмета до дзеркала  $a = 20$  см. Визначити радіус кривизни дзеркала.

*Відповідь:*  $R = \frac{2\Gamma a}{1 + \Gamma} = 30$  см, де  $\Gamma$  – лінійне збільшення дзеркала.

**3.80.** Світна точка розташована на відстані 0,2 м від головної оптичної вісі вгнутого дзеркала. Її зображення знаходиться на відстані 0,4 м від тієї ж осі і на відстані 0,5 м від головного фокуса. Знайти фокусну відстань дзеркала.

*Відповідь:*  $F = 0,25$  м. Зображення може бути дійсним і уявним.

**3.81.** Коли предмет знаходиться на відстані 2 м від угнутого сферичного дзеркала, його дійсне зображення отримується на відстані 50 см від дзеркала. Предмет наблизили до дзеркала на 1,9 м. Де і яке отримаємо зображення предмета?

*Відповідь:* – 0,13 м; уявне.

**3.82.** Відомо хід променя 1 після відбивання від угнутого сферичного дзеркала (рис. 3.41). Визначити хід променя 2 після відбивання.

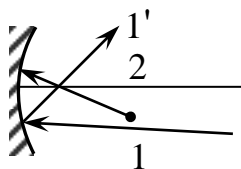
**3.83.** На відстані 30 см від угнутого сферичного дзеркала радіусом 50 см на його головній оптичній осі знаходиться світна точка. На якій відстані від сферичного дзеркала потрібно розташувати перпендикулярно до його головної оптичної осі плоске дзеркало, щоб промені, відбившись спочатку від сферичного дзеркала, а потім від плоского, повернулися в світну точку? Зробити малюнок.

*Відповідь:* 0,9 м.

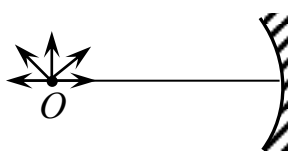
**3.84.** Побудувати зображення пучка стрілок, що виходять із центра кривизни сферичного дзеркала (рис. 3.42). Кінці стрілок лежать на півколі.

**3.85.** Напівциліндричне дзеркало розмістили в широкому пучку світла, що йде паралельно площині симетрії дзеркала (рис. 3.43). Знайти максимальний кут між променями пучка після відбивання від дзеркала.

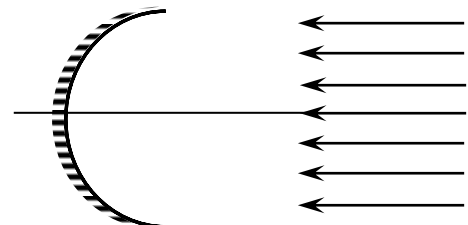
*Відповідь:*  $120^\circ$ .



*Рис. 3.41*



*Рис. 3.42*



*Рис. 3.43*

**3.86.** Угнуте сферичне дзеркало має фокусну відстань  $F = 1$  м. На якій відстані  $a$  від дзеркала треба розмістити джерело світла, щоб його зображення збіглося з самим джерелом?

*Відповідь:*  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ . За умовою  $b = a$ , отже,  $a = 2$  м.

**3.87.** Відстань предмета від угнутого сферичного дзеркала  $a = 0,5$  м, відстань зображення  $b = 2$  м. Знайти радіус  $R$  кривизни дзеркала.

*Відповідь:*  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} = \frac{2}{R}$ . Отже,  $R = \frac{2ab}{a+b} = 0,8$  м.

**3.88.** На відстані  $a = 0,14$  м від вершини угнутого дзеркала лежить предмет, висота якого  $h = 0,06$  м. Фокусна відстань дзеркала  $F = 0,11$  м. Знайти висоту  $H$  зображення предмета.

*Відповідь:*  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ ;  $\frac{H}{h} = \frac{b}{a}$ . Звідси  $H = \frac{F}{a-F} h = 0,22$  м.

**3.89.** Предмет знаходиться на відстані  $a = 48$  см від вершини вгнутого дзеркала. Дзеркало дає зменшене у  $n = 4$  рази обернене (перевернуте) зображення предмета. Знайти радіус кривизни дзеркала.

*Відповідь:*  $R = 2a / (n+1) = 19,2$  см.

**3.90.** Угнуте сферичне дзеркало дає дійсне зображення, яке в  $\Gamma = 4$  рази більше за предмет. Визначити фокусну відстань  $F$  дзеркала, якщо відстань між предметом і його зображенням  $L = 1,5$  м.

*Відповідь:* Збільшення  $\Gamma = \frac{b}{a}$ ;  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ ;  $b - a = L$ .

Звідси

$$F = \frac{\Gamma}{\Gamma^2 - 1} a = 0,4 \text{ м.}$$

**3.91.** Вгнуте сферичне дзеркало дає на екрані зображення предмета, збільшене в  $\Gamma = 4$  рази. Відстань  $a$  від предмета до дзеркала дорівнює 25 см. Визначити радіус  $R$  кривизни дзеркала.

*Відповідь:* 40 см.

**3.92.** Фокусна відстань вгнутого дзеркала  $F = 15$  см. Дзеркало дає дійсне зображення предмета, зменшене в три рази. Визначити відстань  $a$  від предмета до дзеркала.

*Відповідь:* 60 см.

**3.93.** Малу ділянку внутрішньої поверхні сфери посріблено. На діаметрально протилежному боці сфери утворилось зображення деякого предмета, розміщеного всередині неї. З яким збільшенням  $\Gamma$  зображено предмет?

*Відповідь:*  $\Gamma = 3$ .

**3.94.** Відстань світної точки від угнутого дзеркала дорівнює двом радіусам кривизни. Світна точка лежить на головній оптичній осі дзеркала. Де розміщено зображення точки? Побудувати це зображення.

*Відповідь:*  $b = \frac{aF}{a-F} = \frac{2}{3} R$ . Зображення дійсне.

Для побудови зображення можна використати два промені, що виходять із світної точки  $S$  (рис. 3.44). Один з променів  $SP$  йде вздовж головної оптичної осі дзеркала і після відбивання йде в зворотному напрямі. Щоб побудувати хід довільного променя  $SA$  після відбивання, проведемо побічну оптичну вісь  $BC \parallel SA$ . Знайдемо точку  $D$  перетину побічної оптичної осі  $BC$  з фокальною площиною  $FD$ . Через цю точку пройде відбитий промінь  $ADS'$ . У точці  $S'$  на перетині відбитих променів  $PS'$  і  $AS'$  утвориться дійсне зображення точки  $S$ .

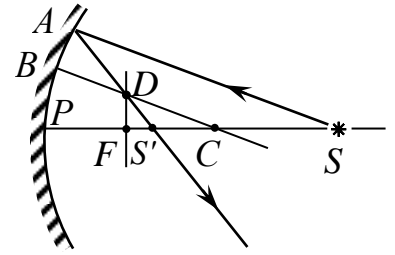


Рис. 3.44

**3.95.** На угнуте дзеркало падає промінь  $AOB$ , що перетинає головну оптичну вісь дзеркала в точці  $O$ . Відбитий від дзеркала промінь  $BO'D$  перетинає ту саму вісь у точці  $O'$  (рис. 3.45). Знайти побудовою положення фокуса дзеркала.

*Відповідь:* Очевидно, що коли б точка  $O$  була джерелом, то точка  $O'$  була б зображенням цього джерела. Отже, будь-який промінь, що впав на дзеркало з точки  $O$ , після відбивання пройде через точку  $O'$ . Проведемо  $OE \parallel BO'$  і сполучимо точки  $E$  і  $O'$  (рис. 3.46). Використовуючи властивість оборотності променів, вважатимемо, що на дзеркало падає паралельний пучок променів  $OE$  і  $DB$ . Паралельні промені після відбивання від дзеркала збігаються в точці  $M$ , що лежить на фокальній площині дзеркала. Опустивши з точки  $M$  перпендикуляр на головну оптичну вісь дзеркала, визначимо положення фокуса  $F$ .

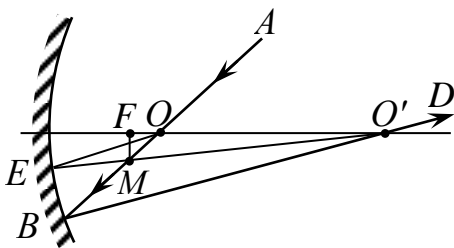


Рис. 3.45

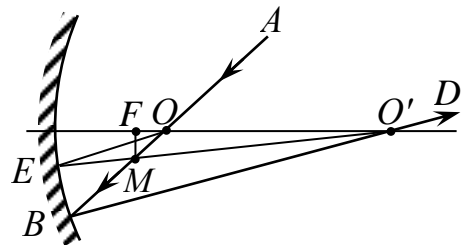


Рис. 3.46

**3.96.** За допомогою угнутого дзеркала утворено дійсне зображення предмета із збільшенням  $\Gamma_1 = 5$ . Виявилось, що коли перемістити предмет на деяку відстань уздовж оптичної осі, то зображення переміститься вздовж оптичної осі на таку саму відстань. Знайти збільшення  $\Gamma_2$  при новому розміщенні.

*Відповідь:* Початкове збільшення  $\Gamma_1 = \frac{b}{a}$ , причому  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ . Нехай предмет і його зображення перемістились на відстань  $x$ . Тоді  $\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b-x} = \frac{1}{F}$ . Нове збільшення  $\Gamma_2 = \frac{b-x}{a+x}$ . Звідси знаходимо:  $\Gamma_2 = \frac{1}{\Gamma_1} = 0,2$ ;  $x = b - a$ , тобто предмет і зображення помінялись місцями.

**3.97.** Зображення, яке дає угнуте дзеркало, у 5 разів більше від предмета. Якщо пересунути дзеркало на  $x = 2$  см ближче до предмета, то зображення, залишаючись дійсним, буде більшим від предмета в  $\Gamma_2 = 7$  разів. Знайти величину  $F$  фокусної відстані дзеркала.

$$\text{Відповідь: } F = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_2 - \Gamma_1} x = 35 \text{ см.}$$

**3.98.** Зображення, яке дає угнуте дзеркало, у  $n_1 = 4$  рази менше, ніж предмет. Якщо предмет пересунути на відстань  $l = 5$  см ближче до дзеркала, то зображення буде менше, ніж предмет, тільки в  $n_2 = 2$  рази. Визначити фокусну відстань  $F$  дзеркала.

$$\text{Відповідь: } F = \frac{l}{n_1 - n_2} = 2,5 \text{ см.}$$

**3.99.** Фокус угнутого дзеркала розміщений на відстані  $l = 0,24$  м від світного предмета і на відстані  $L = 0,54$  м від його зображення. Знайти збільшення  $\Gamma$  предмета, яке дає дзеркало.

*Відповідь:* Якщо предмет розміщений далі від фокуса дзеркала, то  $l = a - F$ ,  $L = b - F$ . Згідно з формулою сферичного дзеркала  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ . Якщо ж предмет лежить між дзеркалом і його фокусом, то  $l = F - a$ ,  $L = b + F$ ; у цьому випадку формулу сферичного дзеркала можна записати у вигляді  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ .

Розв'язавши окремо ці системи рівнянь, знайдемо збільшення:

$$\Gamma = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{a}{l}} = 1,5 \text{ у кожному з випадків.}$$

**3.100.** Пучок світлових променів від нескінченно віддаленого джерела падає на екран, в якому зроблено отвір діаметром  $d = 7$  см. Площина екрана перпендикулярна до променів. На відстані  $l = 68$  см за екраном розміщено угнуте дзеркало, оптична вісь якого збігається з віссю пучка. Фокусна відстань дзеркала  $F = 28$  см. Визначити діаметр  $D$  світлого круга на екрані.

*Відповідь:* Крайній промінь  $AB$  пучка, відбившись від дзеркала і пройшовши через фокус, потрапляє на екран у точці  $E$ , що лежить на межі світлого круга (рис. 3.47). З подібності трикутників  $BFP$  і  $EFM$

випливає, що  $\frac{d}{2} : F = \frac{D}{2} : (l - F)$ . Звідси

$$D = \frac{d(l - F)}{F} = 10 \text{ см.}$$

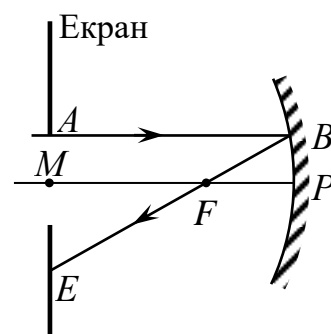


Рис. 3.47

**3.101.** Угнуте дзеркало з радіусом кривизни  $R = 1$  м дає уявне зображення предмета, розміщене на відстані  $b = 3$  м від дзеркала. На якій відстані  $a$  від дзеркала розміщений сам предмет?

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{R}. \text{ Звідси } a = \frac{bR}{2b + R} \approx 0,43 \text{ м.}$$

**3.102.** На якій відстані  $a$  від угнутого дзеркала з радіусом кривизни  $R = 120$  см треба розмістити предмет, щоб дістати пряме, збільшене у  $n = 4$  рази зображення предмета?

*Відповідь:* Пряме зображення у вгнутому дзеркалі – уявне. Шукана відстань визначається системою рівнянь:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{R} \text{ і } \frac{b}{a} = n; \text{ звідси } a = \frac{R(n-1)}{2n} = 45 \text{ см.}$$

**3.103.** Який радіус кривизни  $R$  угнутого сферичного дзеркала, якщо зображення предмета, розміщеного перед ним на відстані  $a = 21$  см, в  $\Gamma = 6$  разів більше від самого предмета?

*Відповідь:*  $\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{2}{R}$ ,  $\Gamma = \frac{b}{a}$ . Знак *плюс* відповідає дійсному

зображенню, а *мінус* – уявному. Звідси  $R = \frac{2\Gamma a}{k \pm 1}$ , тобто  $R = 36$  см для дійсного зображення і  $R = 50,4$  см для уявного.

**3.104.** Величина зображення, добутого за допомогою вгнутого дзеркала, вдвоє ( $\Gamma = 2$ ) більша від величини предмета. Відстань між зображенням і предметом  $L = 18$  см. Знайти радіус  $R$  кривизни дзеркала.

*Відповідь:* Збільшене зображення може бути дійсним або уявним. У першому випадку мають місце співвідношення

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}; \frac{b}{a} = \Gamma \text{ і } b - a = L, \quad (1)$$

а в другому випадку – співвідношення

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{R}; \frac{b}{a} = \Gamma \text{ і } b + a = L. \quad (2)$$

Обидві системи рівнянь дають однакову відповідь:

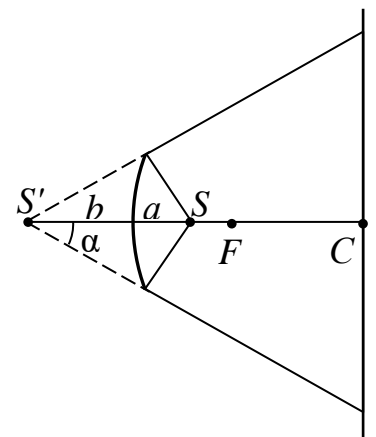
$$R = \frac{2\Gamma L}{\Gamma^2 - 1} = 24 \text{ см.} \quad (3)$$

**3.105.** Світна точка лежить на головній оптичній осі круглого вгнутого дзеркала на однаковій відстані від дзеркала і його головного фокуса. Перпендикулярно до головної оптичної осі дзеркала розміщено екран, центр якого збігається з центром дзеркала. У скільки разів діаметр світлого круга на екрані перевищує діаметр дзеркала?

*Відповідь:* Світлий круг на екрані утворюється внаслідок відбивання променів дзеркалом (рис. 3.48). Оскільки світна точка  $S$  розміщена ближче від фокуса, промені можна вважати такими, що виходять з уявного джерела – зображення  $S'$  точки  $S$ . За

формулою сферичного дзеркала  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ , де  $a = \frac{F}{2}$ .

Діаметр дзеркала  $d = 2b \operatorname{tg} \alpha$ . Діаметр світлого круга



*Рис. 3.48*

$$D = 2(b + 2F) \operatorname{tg} \alpha. \text{ Звідси}$$

$$\frac{D}{d} = 3.$$

**3.106.** Вгнуте дзеркало дає на екрані зображення Сонця у вигляді кружка діаметром  $d = 28$  мм. Діаметр Сонця на небі в кутовій мірі  $\beta = 32'$ . Визначити радіус  $R$  кривизни дзеркала.

*Відповідь:* 6 м.

**3.107.** Відстань між предметом і його уявним, збільшеним у  $n = 2$  рази зображенням у сферичному дзеркалі дорівнює  $l = 1,5$  см. Знайти радіус  $R$  кривизни дзеркала.

*Відповідь:* Уявне збільшене зображення виникає у вгнутому сферичному дзеркалі. При цьому дійсні співвідношення

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{R}; \quad \frac{b}{a} = n \text{ і } b + a = l.$$

Звідси  $R = \frac{2nl}{n^2 - 1} = 2$  м.

**3.108.** Світна точка розміщена на відстані  $l = 0,2$  м від головної оптичної осі вгнутого дзеркала, її уявне зображення – на відстані  $L = 0,5$  м від тієї самої осі. У скільки разів фокусна відстань дзеркала більша, ніж відстань від світної точки до фокальної площини?

*Відповідь:* Світну точку можна вважати такою, що належить деякому предмету, розміщеному перпендикулярно до головної оптичної осі дзеркала.

Предмет зображується із збільшенням  $\Gamma = \frac{L}{l} = \frac{b}{a}$ . Оскільки  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ , то

$$n = \frac{F}{F - a} = \Gamma = \frac{L}{l} = 2,5.$$

**3.109.** Відрізок, який сполучає фокус вгнутого сферичного дзеркала з його полюсом, поділено на три однакові частини, і в точках поділу встановлено точкові джерела світла. Яка відстань  $l$  між зображеннями цих джерел, якщо радіус кривизни дзеркала дорівнює  $R$ ?

*Відповідь:* Відстань між зображеннями (уявними) джерел  $l = 0,75R$ .

**3.110.** Куля, що впала на м'яку глину, залишила на ній заглибину, діаметр якої становить  $0,8$  діаметра кулі. Після затверднення глини виїмку посріблили і утворене сферичне дзеркало накрили плоским склом. З яким лінійним збільшенням дає це дзеркало зображення рисунка, нанесеного в центрі скла?

*Відповідь:* Нехай  $CA = R$  – радіус кривизни сферичного дзеркала (радіус кулі), а  $AB = r$  – радіус виїмки (рис. 3.49). Тоді  $BP = a$  – відстань від предмета (рисунка) до дзеркала визначиться з теореми

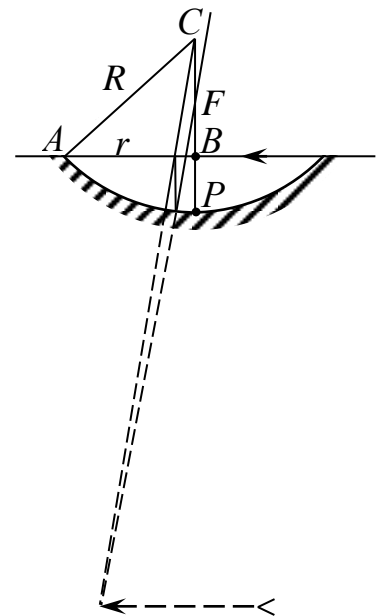


Рис. 3.49

Піфагора:  $(R - a)^2 + r^2 = R^2$ . Лінійне збільшення  $\Gamma = \frac{b}{a}$ , причому  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{R}$ .

Враховуючи, що  $\frac{r}{R} = 0,8$  за умовою, то

$$\Gamma = \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} - 1} = 5.$$

**3.111.** Збіжні пучки падають на вгнуте дзеркало, головна фокусна відстань якого  $F = 0,5$  м, і після відбивання збираються в точці, що лежить на  $b = 0,2$  м від дзеркала і на  $L = 0,15$  м від його головної оптичної осі. На якій відстані  $l$  від цієї самої осі збігатимуться промені, якщо дане дзеркало забрати? Побудувати хід променів.

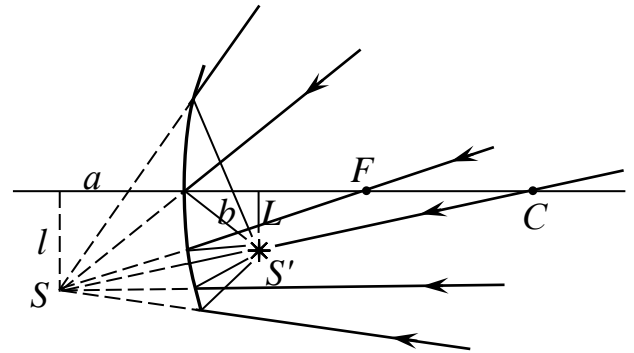


Рис. 3.50

*Відповідь:* Хід променів у системі показано на рис. 3.50. Для побудови зручно використати промені, що проходять через фокус і через центр дзеркала, а також промінь, паралельний оптичній осі. Точку  $S$ , в якій збігаються промені, коли немає дзеркала, можна розглядати як уявне джерело, а відстань  $l$  цієї точки від осі – як розміри уявного предмета, що містить точку  $S$ . Тоді  $L$  – розміри (дійсного) зображення цього предмета, а  $S'$  – зображення точки  $S$ . За формулою сферичного дзеркала  $-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ .

Збільшення  $\frac{b}{a} = \frac{L}{l}$ . Звідси  $l = \frac{FL}{F - b} = 0,25$  м.

**3.112.** На вгнуте дзеркало, головна фокусна відстань якого  $F = 0,1$  м, падають збіжні промені. Якщо промені продовжити за дзеркало до їх перетину, точка перетину лежатиме на відстані  $a = 0,3$  м від дзеркала. На якій відстані від дзеркала збіжаться промені після відбивання?

*Відповідь:* Точку перетину променів, продовжених за дзеркало, можна розглядати як уявне джерело. Оскільки  $-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ , то  $b = \frac{Fa}{a + F} = 0,075$  м.

**3.113.** В угнуте дзеркало радіусом  $R = 16$  см налили тонкий шар води (показник заломлення води  $n = 4/3$ ). Визначити фокусну відстань  $F$  цієї системи.

*Відповідь:* Позначимо через  $F$  фокусну відстань угнутого дзеркала (рис. 3.51). На рисунку  $F = R/2$ ,  $F_1 = PF_1$  – фокусна відстань угнутого дзеркала з водою;  $\alpha$  – кут падіння променя з води у повітря;  $\beta$  – кут заломлення променя в повітрі.

Нехтуючи розміром  $PE$  порівняно з  $F$  і  $F_1$  (шар налітої води, за умовою задачі, тонкий), можемо записати

$$F \operatorname{tg} \alpha = F_1 \operatorname{tg} \beta = DE. \quad (1)$$

Звідси

$$\frac{F}{F_1} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n. \quad (2)$$

За малих кутів  $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$  і  $\operatorname{tg} \beta \approx \sin \beta$ , тому фокусна відстань

$$F_1 = \frac{F}{n} = \frac{R}{2n}. \quad (3)$$

*Відповідь:* 6 см (див. рис. 3.51).

**3.114.** У вгнуте сферичне дзеркало радіусом  $R = 20$  см наліто тонким шаром гліцерин. Визначити головну фокусну відстань  $F$  такої системи.

*Відповідь:* 8,1 см.

**3.115.** Два однакові сферичні вгнуті дзеркала поставили одне проти одного так, щоб головні фокуси їх збігалися. Світна точка  $S$  міститься на спільній осі дзеркал на відстані  $a$  від першого дзеркала. Де буде зображення  $S'$  після відбивання від обох дзеркал?

*Відповідь:* У тій самій точці.

**3.116.** Два однакові сферичні вгнуті дзеркала поставили одне проти одного на відстані, у чотири рази більшій від фокусної відстані. У фокусі одного дзеркала вміщено джерело світла. Знайти чотири перших зображення джерела.

*Відповідь:* Два зображення у фокусах дзеркал і два на відстанях  $\frac{3}{2}F$  від кожного дзеркала.

#### 3.4.4. Опуклі дзеркала

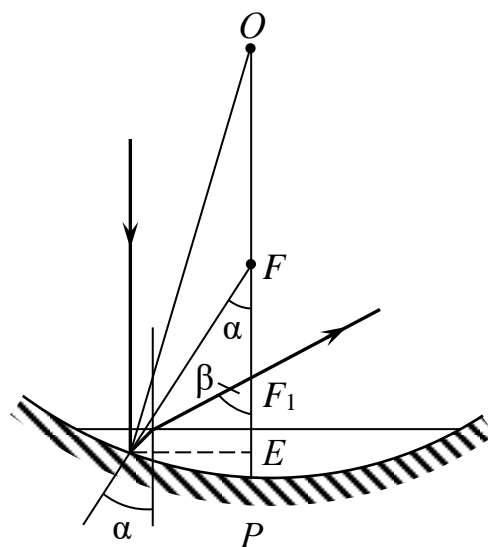
**3.117.** На якій відстані отримається зображення предмета в опуклому сферичному дзеркалі радіусом кривизни 40 см, якщо предмет розміщений на відстані 30 см від дзеркала? Якого розміру буде зображення, якщо предмет має величину 2 см? Перевірити обчислення, зробивши креслення на міліметровому папері.

*Відповідь:*  $b = 0,12$  м;  $H = -8$  мм. Зображення уявне, пряме і зменшене.

**3.118.** Опукле сферичне дзеркало має радіус кривизни 60 см. На відстані 10 см від дзеркала розташований предмет висотою в 2 см. Знайти положення і висоту зображення. Зробити креслення.

*Відповідь:*  $b = 7,5$  см,  $H = -1,5$  см. Зображення уявне, пряме і зменшене.

**3.119.** Збіжний пучок променів падає на опукле дзеркало так, що точка перетину продовжень цих променів знаходиться на осі дзеркала на відстані



*Рис. 3.51*

20 см від нього. Після відбивання ці промені перетинають оптичну вісь на відстані 0,6 м від дзеркала. Знайти фокусну відстань дзеркала.

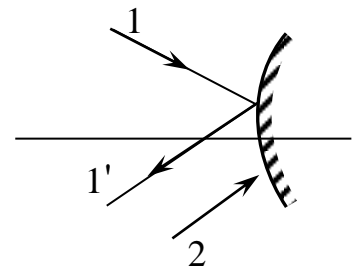
*Відповідь:*  $F = -30$  см.

**3.120.** Опукле дзеркало має радіус кривизни  $R = 40$  см. На відстані  $a = 10$  см від дзеркала знаходиться предмет висотою  $h = 5$  см. Знайти положення і висоту зображення. Побудувати зображення.

*Відповідь:*  $b = \frac{ar}{2a+r} = 6,7$  см;  $H = \frac{y(r-b)}{r+a} = 3,3$  см.

**3.121.** Побудувати зображення світної точки, що знаходиться на головній оптичній осі опуклого дзеркала. Положення оптичного центра, фокуса і полюса дзеркала вважати відомими.

**3.122.** Відомо хід променя 1 після відбивання від опуклого сферичного дзеркала (рис. 3.52). Визначити хід променя 2 після відбивання.



*Рис. 3.52*

**3.123.** За допомогою вгнутого сферичного дзеркала потрібно одержати дійсне у два рази збільшене зображення предмета. На якій відстані від дзеркала потрібно поставити предмет і на якій відстані буде його зображення? Радіус кривизни дзеркала 60 см.

*Відповідь:*  $a = 45$  см;  $b = 90$  см.

**3.124.** Опукле сферичне дзеркало має радіус кривизни 1 м. На відстані 0,2 м від дзеркала розташовано предмет висотою 10 см. Знайти положення і висоту зображення предмета. Зробити креслення.

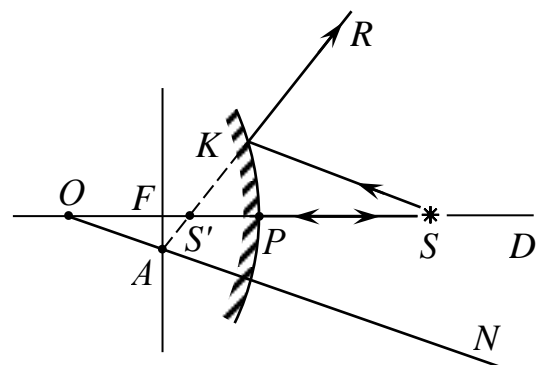
*Відповідь:*  $b = -\frac{1}{7}$  м;  $H = 0,07$  м.

**3.125.** На опукле дзеркало падає збіжний пучок променів так, що точка перетину продовжень цих променів перетинає головну оптичну вісь дзеркала на відстані 20 см від його полюса. Після відбивання промені перетинають головну оптичну вісь на відстані 30 см від нього. Визначити радіус кривизни дзеркала.

*Відповідь:* 1,2 м.

**3.126.** Побудувати зображення  $S'$  світної точки  $S$ , що лежить на головній оптичній осі опуклого дзеркала. Положення центра дзеркала  $O$ , його полюса  $P$  і фокуса  $F$  відоме.

*Відповідь:* Щоб побудувати зображення, треба знайти хід будь-яких двох променів, що виходять з точки  $S$ . Промінь  $SP$  (рис. 3.53), відбившись, іде назад уздовж головної оптичної осі. Щоб визначити напрям довільного променя  $SK$  після відбивання від дзеркала, проведемо оптичну вісь  $ON \parallel SK$ .



*Рис. 3.53*

Через точку  $A$  перетину побічної осі з фокальною площиною повинно пройти

продовження  $AK$  відбитого променя  $KR$ . Зображення точки  $S$  око бачитиме в точці  $S'$  перетину продовжень двох відбитих променів  $PD$  і  $KR$ . Зображення буде уявним, бо промені розходяться.

**3.127.** Радіус кривизни опуклого дзеркала  $R = 1,5$  м. Предмет лежить на відстані  $a = 5$  м від дзеркала. На якій відстані від дзеркала буде зображення предмета?

*Відповідь:* Для опуклого сферичного дзеркала  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{F}$ , де  $F = \frac{R}{2}$ .

Знаходимо шукану відстань

$$b = -\frac{aR}{R + 2a} \approx -0,65 \text{ м.}$$

Знак *мінус* означає, що зображення предмета буде уявним.

**3.128.** На якій відстані  $a$  від опуклого дзеркала треба помістити джерело світла, щоб його зображення утворилось на відстані  $b = 60$  см від дзеркала? Головна фокусна відстань дзеркала  $F = 90$  см.

*Відповідь:* Для опуклого дзеркала, враховуючи, що зображення дійсного джерела в такому дзеркалі буде уявним,  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{F}$ . Звідси

$$a = \frac{bF}{F - b} = 1,8 \text{ м.}$$

**3.129.** Уявне пряме зображення предмета дістали за допомогою опуклого сферичного дзеркала на відстані  $b = 12$  см від вершини дзеркала. На якій відстані  $a$  знаходиться предмет, якщо радіус кривизни дзеркала  $R = 40$  см?

*Відповідь:*  $a = \frac{bR}{R - 2b} = 30$  см.

**3.130.** У скільки разів висота зображення полум'я свічки, віддаленої на  $a = 1,5$  м від опуклого дзеркала ( $F = 0,5$  м), менша від висоти самого полум'я?

*Відповідь:* Відношення висот зображення і предмета  $\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{F}{a + F} = \frac{1}{4}$ .

**3.131.** Предмет висотою  $h = 4$  мм знаходиться на відстані  $a = 10$  см від опуклого дзеркала з радіусом кривизни  $R = 60$  см. Знайти величину  $H$  зображення, що дає дзеркало.

*Відповідь:*  $H = \frac{Rh}{R + 2a} = 3$  мм.

**3.132.** На якій відстані  $a$  від опуклого дзеркала, фокусна відстань якого  $F = 0,2$  м, лежить предмет, коли його зображення уявне і зменшене в два рази? Побудувати це зображення.

*Відповідь:* Хід променів зображено на рис. 3.54. Щоб побудувати зображення, як правило, скористаємось променями, паралельними оптичній осі, а також променями, продовження яких проходять через фокус дзеркала

або через його центр. Оскільки  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{F}$  і  $\Gamma = \frac{L}{l} = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ , то

$$a = \left( \frac{1}{\Gamma} - 1 \right) F = 0,2 \text{ м.}$$

**3.133.** Радіус кривизни опуклого сферичного дзеркала  $R = 1,6$  м. На якій відстані перед дзеркалом повинен лежати предмет, щоб його зображення утворилось у  $n = 1,5$  раза ближче до дзеркала, ніж сам предмет?

*Відповідь:*  $a = (n - 1)F = \frac{n - 1}{2}R = 0,4 \text{ м.}$

**3.134.** Світна точка лежить на відстані  $a = 1$  м від опуклого дзеркала, а її зображення поділяє точно пополам відрізок оптичної осі між полюсом дзеркала і його фокусом. Знайти радіус  $R$  кривизни дзеркала.

*Відповідь:*  $R = 2a = 2 \text{ м.}$

**3.135.** Людина дивиться в посріблену скляну кулю діаметром  $R = 0,6$  м, перебуваючи від неї на відстані  $a = 0,25$  м. На якій відстані  $x$  від людини розміщене її уявне пряме зменшене зображення?

*Відповідь:*  $x = a + b = 2a \frac{2a + R}{4a + R} \approx 0,34 \text{ м.}$

**3.136.** Тонкий олівець завдовжки  $l = 6$  см розміщений уздовж головної оптичної осі опуклого сферичного дзеркала. Зображення його найближчого до дзеркала кінця лежить на відстані 20 см від дзеркала, найдальшого – на відстані  $b_2 = 24$  см від дзеркала. Визначити головну фокусну відстань  $F$  дзеркала.

*Відповідь:* Нехай ближчий до дзеркала кінець олівця лежить від нього на відстані  $a_1$ , другий – на відстані  $a_2$ . Тоді

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} = -\frac{1}{F}; \quad \frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2} = -\frac{1}{F} \quad \text{і} \quad a_2 - a_1 = l.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, дістанемо:

$$F = \frac{l(b_1 + b_2) \pm \sqrt{l(b_2 - b_1)(4b_1b_2 + l(b_2 - b_1))}}{2(l + b_1 - b_2)}.$$

Від'ємному знаку відповідає значення  $F = 12$  см, за якого предмет не може бути дійсним, бо виходить, що  $a < 0$ . При додатному знаку перед коренем  $F = 120$  см.

**3.137.** Тонкий промінь перетинає головну оптичну вісь опуклого дзеркала в деякій точці  $A$ . На якій відстані від точки  $A$  треба розмістити це дзеркало, щоб промінь, відбившись від нього, перетнув головну оптичну вісь в іншій точці  $B$ , що лежить від точки  $A$  на відстані  $l = 1,5F$ ?

*Відповідь:* Вважаючи, що промінь  $NA$  належить великому пучку променів, які збігаються в точці  $A$ , можна взяти цю точку за уявне джерело (рис. 3.55). Точка  $B$  буде тоді зображенням (дійсним) цього джерела. Відстань  $AP = a$ , відстань  $BP = b$ .

За формулою сферичного дзеркала  $-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{F}$ . Крім того, за умовою  $a + b = l$ . Звідси

$$a = F + \frac{l}{2} \pm \sqrt{F^2 + \frac{l^2}{4}} = 0,25F \cdot (7 \pm 5).$$

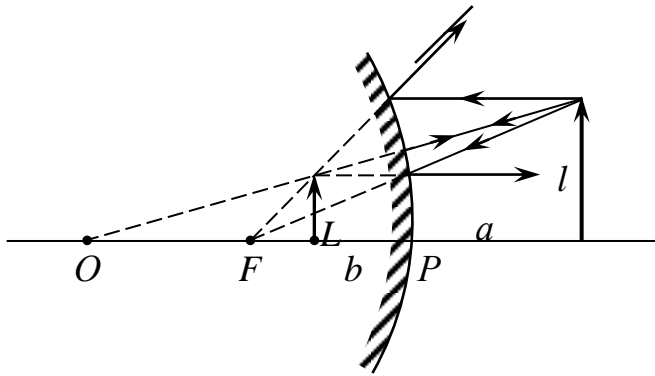


Рис. 3.54

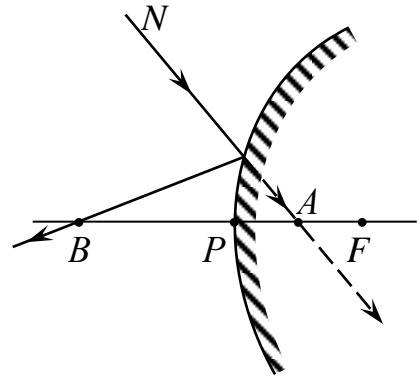


Рис. 3.55

Придатне лише значення  $a = 0,5F$ , бо, коли  $a = 3F$ , то промінь після відбивання не перетинає головної оптичної осі.

**3.138.** Збіжні промені падають на опукле дзеркало так, що їх продовження перетинаються на осі дзеркала на відстані  $a = 24$  см за дзеркалом. Після відбивання від дзеркала ці промені збігаються на осі дзеркала у точці, що лежить перед ним на відстані  $b = 40$  см. Визначити радіус кривизни  $R$  дзеркала.

*Відповідь:* Джерело уявне, зображення дійсне (див. задачу 3.137),

$$R = 2F = \frac{2ba}{b-a} = 1,2 \text{ м.}$$

**3.139.** Опукле дзеркало, фокусна відстань якого  $F = 1,45$  м, закриває собою отвір у непрозорому екрані. На дзеркало падають збіжні промені і після відбивання збігаються у точці, що лежить на оптичній осі дзеркала на відстані  $b = 55$  см перед екраном. На якій відстані  $a$  за екраном збігаються промені, якщо дзеркало вийняти з отвору?

*Відповідь:* За формулою сферичного дзеркала  $-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{F}$ . Звідси

$$a = \frac{bF}{b+F} = 0,4 \text{ м.}$$

**3.140.** Збіжні промені падають на опукле дзеркало з радіусом кривизни  $R = 0,4$  м так, що їх продовження перетинаються на осі дзеркала на відстані  $a = 0,7$  м за дзеркалом. На якій відстані  $b$  від дзеркала збігаються ці промені після відбивання?

*Відповідь:* Оскільки  $a$  – відстань до уявного джерела, то формулу опуклого дзеркала можна записати так:  $-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{F} = -\frac{2}{R}$ .

Перед членом  $\frac{1}{b}$ , що містить невідому відстань від дзеркала до точки перетину променів, ставимо знак *плюс*. У випадку, коли після відбивання від дзеркала перетнуться не самі промені, а лише їх (уявні) продовження, значення величин  $b$  буде від'ємним. Якщо відбиті промені збігаються, то значення  $b$  буде додатним.

У нашому випадку  $b = \frac{aR}{R - 2a} = -0,28$  м, тобто відбиті промені розходяться так, що їх продовження перетинаються в точці, яка лежить на відстані 28 см за дзеркалом.

**3.141.** Збіжні промені падають на опукле дзеркало так, що їх продовження перетинаються у точці, яка лежить на відстані  $a = 0,4$  м за дзеркалом. Після відбивання від дзеркала промені розбігаються так, що їх продовження перетинаються в точці, яка лежить від дзеркала на відстані  $b = 1,6$  м. Обидві точки перетину лежать на головній оптичній осі дзеркала. Визначити фокусну відстань  $F$  дзеркала.

*Відповідь:* У цьому випадку як джерело, так і зображення уявні, тому формулу опуклого дзеркала треба записати у вигляді  $-\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{F}$ . Звідси

$$F = \frac{ab}{a + b} = 0,32 \text{ м.}$$

**3.142.** Пучок паралельних променів після проходження через круглий отвір в аркуші паперу утворює на екрані, який паралельний аркушу і розміщений від нього на відстані  $a = 45$  см, світлий круг діаметром  $d = 6$  см. Коли екран замінили опуклим дзеркалом, то на аркуші паперу з'явилась освітлена пляма діаметром  $D = 33$  см. Визначити радіус кривизни дзеркала  $R$ .

*Відповідь:*  $R = \frac{2ad}{D - d} = 20$  см.

**3.143.** Спостерігач дивиться крізь тонку скляну пластинку на своє зображення в опуклому дзеркалі і, переміщуючи пластинку, домагається, щоб зображення його ока, видиме у дзеркалі і в скляній пластинці, накладались одне на одне і не зміщувались від похитування головою (паралаксу немає). На якій відстані від ока спостерігача міститься пластинка, якщо фокусна відстань дзеркала  $F = 40$  см і око віддалене від його вершини на  $l = 40$  см?

*Відповідь:* 30 см.

*Вказівка.* Пластинка міститься на середині лінії, яка сполучає око і зображення в опуклому дзеркалі.

**3.144.** Збіжні промені падають на опукле дзеркало так, що продовження їх перетинаються в точці, яка лежить на відстані  $d = 0,4$  м за дзеркалом. Відбившись від дзеркала, промені розходяться так, що продовження їх перетинаються в точці, віддаленій від дзеркала на відстань  $f = 1,6$  м. Обидві точки перетину лежать на головній оптичній осі дзеркала. Визначити фокусну відстань дзеркала.

Відповідь:  $F = -0,32$  м.

**3.145.** Якою буде фокусна відстань  $F'$  дзеркала, коли посріблити не плоску, а опуклу поверхню лінзи? Радіус кривизни цієї поверхні  $R$ .

Відповідь:  $F' = \frac{FR}{2(F + R)}$ .

Вказівка. Див. задачу 26.16.

**3.146.** Плоскоопукла лінза має оптичну силу  $D_1 = 4$  дптр. Опуклу поверхню лінзи посріблили. Знайти оптичну силу  $D_2$  такого сферичного дзеркала.

Відповідь: 24 дптр.

**3.147.** Поверх опуклого сферичного дзеркала радіусом кривизни  $R = 20$  см налили тонкий шар води. Визначити голову фокусну відстань  $F$  такої системи.

Відповідь:  $-8$  см.

**3.148.** 1. Круглий осколок скляної посрібленої кулі використовують як опукле сферичне дзеркало. Який діаметр мала розбита куля, коли для того, щоб побачити повністю власне обличчя, потрібно тримати осколок на відстані, не меншій від  $a = 30$  см? Діаметр осколка  $D = 5$  см, довжина обличчя  $l = 20$  см.

2. Людина дивиться в угнуте сферичне дзеркало і бачить пряме зображення свого ока. Кутовий розмір цього зображення в  $\gamma = 1,8$  раза більше від кутового розміру зображення, яке було б у плоскому дзеркалі, розміщеному на такій самій відстані  $a = 24$  см. Визначити радіус кривизни угнутого дзеркала.

Відповідь: 1. 20 см (рис. 3.56). 2.  $F = \frac{9}{8}a = 27$  см.

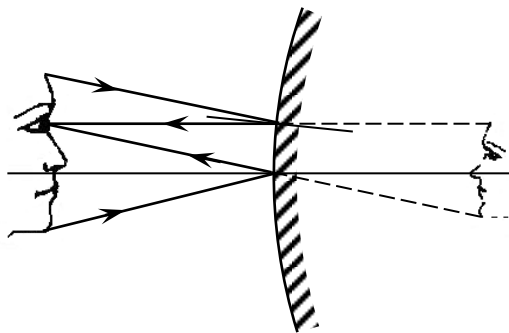


Рис. 3.56

Розв'язання. 2. Запишемо формулу дзеркала. Оскільки зображення ока пряме, то воно уявне. Тому

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Звідси знайдемо, що зображення ока на відстані  $b = \frac{aF}{F - a}$  від дзеркала.

Величина цього зображення  $x_1 = x \frac{b}{a}$  ( $x$  – розмір ока), а кутовий розмір  $\frac{x_1}{a+b}$ .

У плоскому дзеркалі розмір зображення дорівнює розміру ока, а кутовий розмір  $x_2 = \frac{x}{2a}$ . Тому  $1,8 \frac{x}{2a} = \frac{x_1}{a+b}$  або  $0,9 \frac{x}{a} = \frac{x \frac{b}{a}}{a+b}$ . Звідси  $\frac{b}{a+b} = 0,9$  або  $b = \frac{aF}{F-a} = 9F$ , а отже,  $F = \frac{9}{8}a$ .

### 3.5. Контрольні запитання і завдання до теми «Дзеркала»

1. Що таке плоске дзеркало? Де вони застосовуються і для чого?
2. Які дзеркала називаються вгнутими, а які – опуклими? Навести приклади.
3. Від чого залежить інтенсивність дзеркального відбивання?
4. Які основні характеристики сферичних дзеркал?
5. Записати і пояснити формулу сферичного дзеркала. Ввести правило знаків.
6. Проаналізувати відмінності між формулою сферичного дзеркала і формулою тонкої лінзи.
7. Яке збільшення сферичного дзеркала, якщо предмет знаходиться на подвійній фокусній відстані?
8. Назвати і представити на кресленні характерні промені для побудови зображень у сферичних дзеркалах.
9. Побудувати зображення в опуклому дзеркалі при різних віддаленнях предмета.
10. Чому при проведенні дослідів треба ставити предмет на відстані  $b > 2F$  від полюса дзеркала?
11. Яке зображення утворюється у вгнутому дзеркалі при  $F < b < 2F$  та при  $F > b$ ? Де воно знаходиться? Побудувати зображення для всіх випадків.
12. Які недоліки притаманні дзеркалам? Перерахувати і пояснити їх.
13. Навести приклади практичного застосування сферичних дзеркал.
14. Які промені називаються параксіальними? У чому полягає їх практична значимість?
15. Якою здається глибина озера з берега: більшою чи меншою від справжньої?
16. В ясні сонячні дні на замських асфальтованих шосе водії автомашин часто спостерігають таку картину: деякі ділянки асфальту, що знаходяться попереду автомашини на відстані біля 80 – 100 м, здаються покритими калюжами. Коли водій під'їжджає ближче до цього місця, калюжі зникають і знову з'являються попереду на інших місцях, приблизно на тій же відстані. Як пояснити це явище?  
Нагрітий шар повітря, безпосередньо прилеглий до асфальту, має показник заломлення менший, ніж у вище лежачих шарів. Внаслідок цього відбувається повне внутрішнє відбивання і асфальт здається на стільки ж добре відбиваючим світло, як поверхня води.
17. Чому, коли ми сидимо біля багаття, нам здається, що предмети, розташовані по той бік багаття, коливаються?  
*Відповідь:* Внаслідок зміни температури повітря змінюється його показник заломлення.

**ДОДАТОК**  
**ТАБЛИЦІ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН**

*Таблиця 1. Показник заломлення  $n$  води для різних довжин хвиль  $\lambda$   
(при  $t = 20$  °C)*

$\lambda$ , нм	$n$	$\lambda$ , нм	$n$
303,4	1,3581	546,1	1,3345
361,1	1,3474	589,3	1,3330
404,7	1,3428	643,8	1,3314
480,0	1,3374	656,3	1,3311
486,1	1,3371	768,2	1,3289
508,6	1,3360	1256,0	1,3210

*Таблиця 2. Показник заломлення газів і пар*

Газ, пара	$n$	Газ, пара	$n$
Азот	1,000297	Неон	1,000067
Аміак	1,000375	Оксид вуглецю (II)	1,000334
Аргон	1,000284	Оксид вуглецю (IV)	1,000450
Ацетилен	1,000606	Оксид сірки (IV)	1,000660
Водень	1,000138	Оксид сірки (VI)	1,000737
Водяна пара	1,000252	Пари ртуті	1,000933
Повітря	1,000292	Пари метилового спирту	1,000586
Гелій	1,000035	Пари хлороформу	1,001455
Кисень	1,000272	Сірководень	1,000619
Криптон	1,000427	Фтор	1,000195
Ксенон	1,000702	Хлор	1,000768
Метан	1,000441		

*Примітка.* Значення показників заломлення  $n$  вказані за нормальних умов для жовтої лінії натрію ( $\lambda = 589,3$  нм).

**Таблиця 3.** Показник заломлення  $n$  рідин

Рідина	$n$	Рідина	$n$
Анілін	1,586	Олія соняшникова	
Ацетон	1,359	рафінована	1,47
Бензин	1,38 – 1,41	Р-н цукру у воді	
Бензол	1,501	(20 %-ий)	1,364
Вода	1,333	Р-н цукру у воді	
Гліцерин	1,474	(80 %-ий)	1,490
Рідкий азот		Сірчана кислота	1,43
(при $t = -195$ °С)	1,205	Скипидар	1,460 – 1,478
Рідкий кисень		Соляна кислота	1,254
(при $t = -181$ °С)	1,221	Спирт метиловий	1,329
Масло касторове	1,48	Спирт етиловий	1,361
Масло лляне	1,47	Толуол	1,497
Масло трансформаторне	1,476 – 1,488	Хлороформ	1,446
Молоко цільне	1,35	Ефір етиловий	1,354
Нафталін рідкий			
(при $t = 100$ °С)	1,582		

**Примітка.** У таблиці приведені показники заломлення  $n$  рідин при температурі 20 °С для жовтої лінії ( $D$ ) натрію ( $\lambda = 589,3$  нм).

**Таблиця 4.** Граничний кут повного відбивання

Речовина	Граничний кут, °	Речовина	Граничний кут, °
Алмаз	25	Скло різних видів	30 – 42
Вода	49	Скло оптичне:	
Гліцерин	43	марки К80	41
Лід	50	марки ТК16	38
Органічне скло	42	марки ТФ5	35
Сірководень	38	марки БК10	40
Спирт	47	Ефір етиловий	47

Таблиця 5. Показник заломлення  $n$  води за різної температури  $t$

$t, ^\circ\text{C}$	$n$	$t, ^\circ\text{C}$	$n$	$t, ^\circ\text{C}$	$n$
0	1,33395	10	1,33369	20	1,33299
1	1,33395	11	1,33364	21	1,33290
2	1,33394	12	1,33358	22	1,33280
3	1,33393	13	1,33352	23	1,33271
4	1,33391	14	1,33346	24	1,33261
5	1,33388	15	1,33339	25	1,33250
6	1,33385	16	1,33331	30	1,33194
7	1,33382	17	1,33324	40	1,33061
8	1,33378	18	1,33316	50	1,32904
9	1,33374	19	1,33307	60	1,32725

**Примітка.** Значення показника заломлення води приведені для жовтої лінії ( $D$ ) натрію ( $\lambda = 589,3$  нм).

Таблиця 6. Показник заломлення  $n$  твердих речовин (при  $t = 20 ^\circ\text{C}$ )

Речовина	$n$	Речовина	$n$
Алмаз	2,417	Слюда	1,56 – 1,60
Гранат	1,74 – 1,89	Скло:	
Желатин	1,525	кварцове	1,458
Кам'яна сіль	1,544	звичайне	1,48 – 1,53
Камфора	1,546	оптичне	1,47 – 2,04
Кварц	1,544	оптичне К80	1,516
Корунд	1,769	» » ТФ5	1,755
Лід (в інтервалі температур від 0 до 4 $^\circ\text{C}$ )	1,310	» » ТК2	1,572
Органічне скло	1,485 – 1,500	» » БК10	1,569
Полістирол (при $t = 15 ^\circ\text{C}$ )	1,592	» » ТК16	1,613
Рубін	1,76	» » ТФ1	1,648
Цукор	1,56	» » СТФ	2,036
		Топаз	1,63
		Янтар	1,532

**Примітка.** В таблиці приведені показники заломлення твердих речовин відносно повітря для жовтої лінії ( $D$ ) натрію ( $\lambda = 589,3$  нм).

Таблиця 7. Залежність показник заломлення  $n$  від довжини хвилі  $\lambda$

$\lambda$ , нм	Колір	Середовище			
		скло (важкий флінт)	скло (легкий крон)	вода (при $t = 20$ °С)	кам'яна сіть
656,3	Червоний	1,6444	1,5145	1,3311	1,5407
589,3	Жовтий	1,6499	1,5170	1,3330	1,5443
546,1	Зелений	1,6546	1,5191	1,3345	1,5475
480,0	Синій	1,6648	1,5235	1,3374	1,5541
404,7	Фіолетовий	1,6852	1,5318	1,3428	1,5665

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гаркуша І. П., Горбачук І., Курінний В. П., Кучерук І., Певзнер М. Ш. Загальний курс фізики. Збірник задач. – Київ: Техніка, 2003. – 560 с.
2. Барановський В. М., Бережний П. В., Возний П. О. та ін. Загальна фізика: Збірник задач: навч. посібник / за заг. ред. І. Т. Горбачука. – Київ: Вища школа, 1993. – 359 с.
3. Дідович М. М., Савченко В. Ф., Мельничук О. В. Методика навчання розв'язувати задачі з фізики: навч. посібник. – Ніжин: Видавництво НДУ ім. М. Гоголя, 2012. – 472 с.
4. Венгер Є. Ф., Венгер І. В., Мельничук Л. Ю., Мельничук О. В. Оптика: лабораторний практикум. – Київ: Академперіодика, 2018. – 418 с.
5. Венгер Є. Ф., Венгер І. В., Мельничук Л. Ю., Мельничук О. В. Оптичні методи дослідження та їх практичне застосування: лабораторний практикум. – Київ: Наукова думка, 2019. – 454 с.
6. Венгер І. В., Венгер Є. Ф., Мельничук Л. Ю., Мельничук О. В. Задачі з загальної фізики. Механіка: навч. посібник. – Київ: Академперіодика, 2018. – 748 с.
7. Бендриков Г. О., Буховцев Б. Б., Керженцев В. В., Мякишев Г. Я. Задачі з фізики для вступників до вузів: навч. посібник. – 2-е вид. – Київ: Вища школа, 1981. – 368 с.
8. Фізика: задачник-практикум / за ред. С. У. Гончаренка. – Київ: Вища школа, 1988. – 360 с.
9. Розв'язування задач з фізики: практикум / за заг. ред. Є. В. Коршака. – Київ: Вища школа, 1986. – 312 с.
10. Остроухов А. А., Стрижевський В. Л., Цвелих М. Г., Цященко Ю. П. Розв'язування задач з курсу загальної фізики: практикум. – Київ: Радянська школа, 1966. – 503 с.
11. Ігнатенко В. М., Нефедченко В. Ф. Збірник задач з оптики: навч. посібник. – Суми: Сумський державний університет, 2018. – 234 с.
12. Остафійчук Б. К., Гамарник А. М. Оптика: запитання і відповіді. – Івано-Франківськ: ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», 2017. – 571 с.
13. Гаркуша І. П., Курінний В. П., Певзнер М. Ш. Збірник задач з фізики. – Київ: Вища школа, 1995. – 334 с.
14. Булавін Л. А., Федорченко О. М. Оптика. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. – 287 с.
15. Макар В. А., Оглобля В. В., Плющай В. А., Цареградська Т. Л. Збірник задач з електрики, оптики та квантової фізики. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2006. – 160 с.
16. Романюк М. О., Крочук А. С., Пашук І. П. Оптика. - Л. : ЛНУ ім. Івана Франка, 2012. — 564 с.

Навчальне видання

**Мельничук Людмила Юріївна**

**Мельничук Олександр Володимирович**

## **ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ОПТИКИ**

*Навчальний посібник*

Комп'ютерний набір: Загородня Т.П.

Комп'ютерна верстка та макетування: Загородня Т.П.

Хроколова Ю.І.

---

Підписано до друку 28.05.2026 р.  
Гарнітура Times  
Замовлення №

Формат 60x84/16  
Обл.-вид. арк. 7,98  
Ум.-друк. арк. 8,13

Папір офсетний  
Тираж 100 прим.

---



Ніжинський державний університет  
імені Миколи Гоголя.

м. Ніжин, вул. Воздвиженська, 3А  
(04631)7-19-72

E-mail: [vidavn\\_ndu@ukr.net](mailto:vidavn_ndu@ukr.net)  
[www.ndu.edu.ua](http://www.ndu.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 2137 від 29.03.05 р.